Основы кэлеровой геометрии,

лекция 1

Миша Вербицкий

НМУ/НОЦ, Москва

13 сентября 2010

Комплексные структуры

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Комплексной структурой** на вещественном векторном пространстве V называется эндоморфизм $I \in \mathrm{End}(V)$, удовлетворяющий $I^2 = -\mathrm{Id}_V$.

ЗАМЕЧАНИЕ: Продолжим I на тензоры формулой $I(\alpha\otimes\beta\otimes\gamma...) = I(\alpha)\otimes I(\beta)\otimes I(\gamma)...$ **Группа, порожденная I, изоморфна $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$.** Поэтому, для любого тензора t, сумма $t+I(t)+I^2(t)+I^3(t)$ инвариантна относительно I.

СЛЕДСТВИЕ: Если g – положительно определенное скалярное произведение на V, то $g_I := g+I(g)+I^2(G)+I^3(g)$ тоже положительно определено и I-инвариантно: $I(g_I) = I$. Другими словами, **I – ортогональный оператор относительно g_I.**

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Положительно определенное скалярное произведение, в котором I ортогонально, называется **эрмитовой метрикой** на (V, I). Мы только что доказали, что она всегда существует.

Комплексные структуры (продолжение)

СЛЕДСТВИЕ: Все собственные значения I простые (то есть I **полупрост**, другими словами, диагонализуется). В самом деле, **любой ортогональный оператор полупрост.**

ЗАМЕЧАНИЕ: Пусть α – собственное значение I. Поскольку $\alpha^2 = -1$, имеем $\alpha = \pm\sqrt{-1}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Собственное пространство I, соответствующее $\sqrt{-1}$, обозначается $V^{1,0} \subset V \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$, а соответствующее $-\sqrt{-1}$ обозначается $V^{0,1}$. Очевидно, $V \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = V^{1,0} \oplus V^{0,1}$.

ЗАМЕЧАНИЕ: Поскольку, к тому же, I вещественный, получаем, что $\overline{V^{1,0}} = V^{0,1}$. В частности, это пространства одинаковой размерности.

УПРАЖНЕНИЕ: Докажите, что естественная проекция $V^{1,0}$ на V вдоль $V^{0,1}$ задает изоморфизм вещественных пространств $V^{0,1} \longrightarrow V$.

УПРАЖНЕНИЕ: Докажите, что оператор комплексной структуры **однозначно задается подпространством $V^{1,0} \subset V \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ половинной размерности,** которое не пересекается с $V \subset V \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$.

Эрмитовы формы

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Эрмитово пространство** (V, I, g) есть пространство, снабженное комплексной структурой I и эрмитовой метрикой g.

ЗАМЕЧАНИЕ: Пусть I – оператор комплексной структуры на вещественном пространстве V, а g – эрмитова метрика. Рассмотрим билинейную форму $\omega(x, y) = g(x, Iy)$. Тогда $\omega(x, y) = g(x, Iy) = g(Ix, I^2 y) = -g(Ix, y) = -\omega(y, x)$. Поэтому ω **кососимметрична**.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Форма ω называется **эрмитовой формой** на эрмитовом пространстве (V, I, g)

УПРАЖНЕНИЕ: Докажите, что в тройке I, g, ω, **каждый тензор выражается через остальные два.**

Разложение Ходжа

Обозначим за $\Lambda^* V$ грассманову алгебру, порожденную V.

УПРАЖНЕНИЕ: Проверьте, что $\Lambda^*(V \oplus W)$ изоморфно как векторное пространство $\Lambda^* V \otimes \Lambda^* W$. Изоморфизм $\Lambda^* V \otimes \Lambda^* W \longrightarrow \Lambda^*(V \oplus W)$ задается отображением $x \otimes y \longrightarrow x \wedge y$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть (V, I) – пространство, снабженное комплексной структурой, а $V_{\mathbb{C}} := V \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ его комплексификация. Тогда $\Lambda^* V_{\mathbb{C}} \cong (\Lambda^* V^{1,0}) \otimes (\Lambda^* V^{0,1})$. Рассмотрим разложение $\Lambda^* V_{\mathbb{C}} \cong \bigoplus_{p,q} \Lambda^{p,q} V_{\mathbb{C}}$, где $\Lambda^{p,q} V_{\mathbb{C}} = \Lambda^p V^{1,0} \bigwedge \Lambda^q V^{0,1}$ Оно называется **разложением Ходжа**.

ЗАМЕЧАНИЕ: Комплексная структура на V **однозначно задает комплексную структуру на V^* (и наоборот).**

ЗАМЕЧАНИЕ: Пусть $\omega \in \Lambda^2 V^*$ – эрмитова форма на пространстве (V, I, g). **Тогда $\omega \in \Lambda^{1,1} V^*_{\mathbb{C}}$.** В самом деле, для $x, y \in V^{1,0}$, имеем

$$\omega(x,y) = \omega(Ix, Iy) = \sqrt{-1}^{\,2}\omega(x,y) = -\omega(x,y),$$

значит, $\omega(x,y) = 0$, и по той же причине $\omega(x,y) = 0$ для $x, y \in V^{0,1}$. Поэтому ω **спаривает $(0,1)$-вектора с $(1,0)$-векторами**, а значит, лежит в $\Lambda^1 V^{*1,0} \bigwedge \Lambda^1 V^{*0,1} = \Lambda^{1,1} V^*_{\mathbb{C}}$.

Почти комплексные многообразия

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Почти комплексная структура** на многообразии есть оператор $I \in \operatorname{End} TM$ в эндоморфизмах касательного расслоения, удовлетворяющий $I^2 = -\operatorname{Id}_{TM}$.

ПРИМЕР: Возьмем $\mathbb{C}^n$, с комплексными координатами $z_i = x_i + \sqrt{-1}\, y_i$. Тогда $I(x_i) = y_i$, $I(y_i) = -x_i$ – почти комплексная структура.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Эрмитова метрика** на почти комплексном многообразии M есть риманова структура $g \in \operatorname{Sym}^2 T^*M$, такая, что I ортогонален относительно g в каждой точке M.

ЗАМЕЧАНИЕ: Эрмитова метрика на почти комлексном многообразии всегда существует. Надо взять любую риманову метрику g и усреднить по I, $g_I := g + I(g) + I^2(G) + I^3(g)$.

ЗАМЕЧАНИЕ: Для каждого I, **пространство эрмитовых метрик выпукло** в $\Gamma(Sym^2 T^*M)$.

СЛЕДСТВИЕ: Пространство почти комплексных структур на M **гомотопически эквивалентно пространству почти комплексных эрмитовых структур.**

Невырожденные 2-формы и почти комплексные структуры

УПРАЖНЕНИЕ: Пусть ω – невырожденная 2-форма на M. Докажите, что существует почти комплексная эрмитова структура, такая, что ω – ее эрмитова форма.

ФАКТ: Пространство невырожденных 2-форм на M гомотопически эквивалентно пространству почти комплексных структур.

ЗАМЕЧАНИЕ: Есть многообразия, **не допускающие ни одной невырожденной 2-формы,** например, S^{2n}, $n \neq 1, 3$, и, соответственно, ни одной почти комплексной структуры.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Невырожденная, замкнутая 2-форма называется **симплектической**.

ЗАМЕЧАНИЕ: Громов доказал, что любая невырожденная 2-форма на некомпактном многообразии **может быть приближена (в C^0-топологии) симплектическими формами.**

Разложение Ходжа

Пусть (M, I) – почти комплексное многообразие. Обозначим за

$$\Lambda^{*,0}(M) := \bigoplus_p \Lambda^{p,0}(M), \quad \Lambda^{0,*}(M) := \bigoplus_q \Lambda^{0,q}(M)$$

подалгебры в алгебре де Рама, порожденные $\Lambda^{1,0}(M) = (T^*M)^{1,0}$ и $\Lambda^{0,1}(M) = (T^*M)^{0,1}$ соответственно.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Разложение Ходжа** на дифференциальных формах записывается $\Lambda^*(M) = \bigoplus_{p,q} \Lambda^{p,q}(M)$, причем $\Lambda^{p,q}(M) = \Lambda^{p,0}(M) \bigwedge \Lambda^{0,q}(M)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Функция $f: M \longrightarrow \mathbb{C}$ на почти комплексном многообразии называется **голоморфной**, если $df \in \Lambda^{1,0}(M)$.

ЗАМЕЧАНИЕ: Легко привести **пример почти комплексного многообразия, на котором вовсе нет голоморфных функций.** Например, S^6 со стандартной G_2-инвариантной почти комплексной структурой.

Голоморфные функции на $\mathbb{C}^n$

ТЕОРЕМА: Пусть $f : M \longrightarrow \mathbb{C}$ – дифференцируемая функция на открытом подмножестве $M \subset \mathbb{C}^n$, с естественной комплексной структурой. **Тогда следующие свойства f равносильны.**
(1) f **голоморфна** (в смысле вышеприведенного определения)
(2) Дифференциал $Df \in TM^* \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ рассматриваемый как $\mathbb{C}$-значная функция на $T_xM = T_x\mathbb{C}^n$, **является $\mathbb{C}$-линейным.**
(3) Для каждой комплексной аффинной прямой $L \subset \mathbb{C}^n$, ограничение $f|_L$ **голоморфно как функция одного переменного**
(4) f **разлагается в ряд Тэйлора** по комплексным координатам в окрестности каждой точки $x \in M$.

Доказательство: (1) и (2) равносильны (тавтологически).

Равносильность (1) и (3) тоже очевидна, потому что для каждой форма $\theta \in \Lambda^{1,0}(M)$, ограничение на 1-мерные подпространства имеет тип (1,0), и наоборот - если оно имеет тип (1,0) на таких подпространствах, это (1,0)-форма.

Наконец, разложение в ряд Тэйлора следует из формулы Коши для голоморфной функции одного переменного с остаточным членом.

Голоморфные отображения

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть (M, I_M) и (N, I_N) – почти комплексные многообразия, а $f: M \longrightarrow N$ – гладкое отображение. Оно называется **голоморфным**, если $f^*(\Lambda^{1,0}(N)) \subset \Lambda^{0,1}(M)$.

ЗАМЕЧАНИЕ: **Это эквивалентно тому, что $df : T_xM \longrightarrow T_{f(x)}N$ комплексно-линейно**.

ЗАМЕЧАНИЕ: **Композиция голоморфных отображений голоморфна.**

ЗАМЕЧАНИЕ: Для открытых подмножеств $\subset \mathbb{C}^n$, **расслоение $\Lambda^{1,0}(M)$ порождено (над $\mathbb{C}^\infty M$) дифференциалами голоморфных функций.**

СЛЕДСТВИЕ: (*) Пусть заданы открытые подмножества $M \subset \mathbb{C}^m, N \subset \mathbb{C}^n$, а $f: M \longrightarrow N$ – гладкое отображение. Предположим, что для любой голоморфной функции на N, соответствующая функция $f^*\varphi$ голоморфна на M. **Тогда f – голоморфное отображение**.

Доказательство: Если функция $f^*\varphi$ всегда голоморфна, то $f^*(d\varphi) = d(f^*\varphi) \subset \Lambda^{1,0}(M)$. **Поскольку $d\varphi$ порождают $\Lambda^{1,0}(N)$, это значит, что $f^*\Lambda^{1,0}(N)$ лежит в $\Lambda^{1,0}(M)$.**

Пучки

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Пучок** $\mathcal{F}$ на топологическом пространстве M – это набор векторных пространств $\mathcal{F}(U)$, заданных для каждого открытого подмножества $U \subset M$, с **отображениями ограничения** $\mathcal{F}(U) \xrightarrow{\varphi_{U,U'}} \mathcal{F}(U')$ для каждого $U' \subset U$, и следующими свойствами

(1) **Композиция ограничений – снова ограничение:** если $U_1 \subset U_2 \subset U_3$ вложенные открытые множества, а φ_{U_1,U_2}, φ_{U_2,U_3} соответствующие отображения ограничений, то $\varphi_{U_1,U_2} \circ \varphi_{U_2,U_3} = \varphi_{U_1,U_3}$.

(2) Если $U = \bigcup U_i$, а ограничение $f \in \mathcal{F}(U)$ на все U_i равно нулю, то $f = 0$.

(3) Пусть $\{U_i\}$ – покрытие множества $U \subset M$, а $f_i \in \mathcal{F}(U_i)$ набор сечений, заданных для каждого элемента покрытия, и удовлетворяющих условию

$$f_i\Big|_{U_i \cap U_j} = f_j\Big|_{U_i \cap U_j},$$

для любой пары элементов покрытия. **Тогда существует $f \in \mathcal{F}(U)$ такой, что ограничения f на U_i дает f_i.**

Пространство $\mathcal{F}(U)$ называется **пространство сечений пучка $\mathcal{F}$ над U**.

Комплексные многобразия

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пучок колец есть пучок $U \longrightarrow \mathcal{F}(U)$ такой, что на каждом $\mathcal{F}(U)$ задана структура кольца, а отображения ограничения являются гомоморфизмами.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Окольцованное пространство есть топологическое пространство с заданным на нем пучком колец.

ПРИМЕР: Открытый шар $B \subset \mathbb{C}^n$ с пучком $\mathcal{O}_B$ голоморфных функций является окольцованным пространством.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Комплексное многообразие $(M, \mathcal{O}_M)$ есть окольцованное пространство, которое локально изоморфно (как окольцованное пространство) открытому шару $(B, \mathcal{O}_B)$

Другие определения комплексных многообразий

ЗАМЕЧАНИЕ: Пусть U_1, U_2 – два открытых подмножества в комплексном многообразии, а f_1, f_2 – изоморфизмы U_1, U_2 с открытым шаром. Композиция $f_1 f_2^{-1}$ задает изоморфизм окольцованных пространств $f_1(U_1 \cap U_2) \longrightarrow f_2(U_1 \cap U_2)$. **В силу Следствия (*), этот изоморфизм голоморфен.**

СЛЕДСТВИЕ: Мы получаем, что комплексное многообразие имеет атлас из открытых подмножеств, которые гомеоморфны открытым шарам в $\mathbb{C}^n$, а функции перехода голоморфны. **Это еще одно определение комплексного многообразия.**

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть (M, I) – почти комплексное многообразие, а $\mathcal{O}_M$ пучок голоморфных функций на нем. Оно называется **интегрируемым**, если $(M, \mathcal{O}_M)$ – комплексное многообразие.

УПРАЖНЕНИЕ: Получите из этого еще одно определение комплексного многообразия.

Интегрируемость почти комплексных многообразий

ЗАМЕЧАНИЕ: Почти комплексная структура восстанавливается из комплексной структуры на M следующим образом.

(1) Рассмотрим **расслоение $\Lambda^{1,0}(M) \subset \Lambda^1(M, \mathbb{C})$, порожденное дифференциалами голоморфных функций,** и пусть $\Lambda^{0,1}(M) := \overline{\Lambda^{1,0}(M)}$.

(2) Определим $I \in \operatorname{End}(\Lambda^1 M \otimes \mathbb{C})$ таким образом, что $I\big|_{\Lambda^{1,0}(M)} = \sqrt{-1}$ и $I\big|_{\Lambda^{0,1}(M)} = -\sqrt{-1}$. **Очевидно, $I^2 = -\operatorname{Id}$.**

(3) Этот эндоморфизм вещественный, поскольку $\bar{I} = I$ в силу его определения. Поэтому **он переводит $\Lambda^1(M, \mathbb{R})$ в себя.**

Мы получили функтор (строгий, полный) из категории комплексных многообразий в категорию почти комплексных.

Важная задача комплексной геометрии – описать его образ.

Формальная интегрируемость

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Векторное поле** на многообразии это дифференцирование кольца функций.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Голоморфным векторным полем** на комплексном многообразии называется векторное поле, которое переводит голоморфные функции в голоморфные.

УПРАЖНЕНИЕ: Докажите, это это пучок.

УПРАЖНЕНИЕ: Докажите, что в комплексных координатах $z_1, ..., z_n$ на $\mathbb{C}^n$, **голоморфные векторные поля записываются в виде** $X = \sum \varphi_i \frac{d}{dz_i}$**,** где $\varphi_1, ..., \varphi_n$ – голоморфные функции.

СЛЕДСТВИЕ: Голоморфные векторные поля на комплексном многообразии порождают $T^{1,0}M$ над $C^\infty M$

СЛЕДСТВИЕ: На комплексном многообразии, **коммутатор векторных полей типа** $(1,0)$ **имеет тип** $(1,0)$**:** $[T^{1,0}M, T^{1,0}M] \subset T^{1,0}M$**.**

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Почти комплексное многообразие называется **формально интегрируемым**, если $[T^{1,0}M, T^{1,0}M] \subset T^{1,0}M$

Теорема Ньюлендера-Ниренберга

ТЕОРЕМА: (Newlander-Nirenberg) **Формально интегрируемое почти комплексное многообразие гладкости C^2 интегрируемо.**

ЗАМЕЧАНИЕ: На следующей лекции я докажу теорему Ньюлендера-Ниренберга **для вещественно-аналитических многообразий.**

Основы кэлеровой геометрии,

лекция 2

Миша Вербицкий

НМУ/НОЦ, Москва

20 сентября 2010

Группы Ли

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть G – гладкое многообразие с заданной на нем групповой структурой. Оно называется **группой Ли**, если групповые операции (умножение $G \times G \longrightarrow G$ и взятие обратного $G \longrightarrow G$) – гладкие.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Левоинвариантное векторное поле** на G есть такое векторное поле $x \in TG$, что для каждого $g \in G$, операция умножения на g слева удовлетворяет $D_g(x) = x$.

УПРАЖНЕНИЕ: Докажите, что **естественное отображение из пространства левоинвариантных векторных полей в T_gG – изоморфизм, для каждого $g \in G$.**

Алгебры Ли

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Алгебра Ли** есть пространство с заданной на нем билинейной, кососимметричной операцией $A \otimes A \longrightarrow A$, удовлетворяющей **тождеству Якоби** $[x,[y,z]] = [[x,y],z] + [y,[x,z]]$.

ЗАМЕЧАНИЕ: **Коммутатор левоинвариантных векторных полей левоинвариантен.**

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Алгебра Ли** группы Ли G есть алгебра Ли ее левоинвариантных векторных полей.

ЗАМЕЧАНИЕ: Основная теорема теории групп и алгебр Ли утверждает, что **односвязная группа Ли однозначно с точностью до изоморфизма задается своей алгеброй Ли.**

УПРАЖНЕНИЕ: Пусть G – связная группа Ли с коммутативной алгеброй Ли. Докажите, что G коммутативна.

Локальное действие группы

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть M – гладкое многообразие, а G – группа Ли. **Локальное действие G на M** есть отображение $W \xrightarrow{\mu} M$, определенное для какого-то открытого подмножества $W \subset G \times M$, и удовлетворяющее следующим аксиомам.

1. **Единица:** W содержит $e \times M$, где e – единица.

2. **Ассоциативность:** Если $(g, m) \in W$, и $(g', \varphi(g, m)) \in W$, то $(g'g, m) \in W$, и $\varphi((g', \varphi(g, m)) = \varphi(g'g, m)$.

ТЕОРЕМА: Пусть M – гладкое многообразие, $A \subset TM$ – конечномерная алгебра Ли векторных полей, а G – ее группа Ли. **Тогда существует локальное действие группы G на M,** такое, что левоинвариантные векторные поля переходят в A.

УПРАЖНЕНИЕ: Пусть M – гладкое многообразие, а $x_1, ..., x_r$ – коммутирующие векторные поля. **Тогда x_i можно локально проинтегрировать до действия потока из r коммутирующих диффеоморфизмов $\mathbb{R}^r \times M \xrightarrow{\varphi} M$.**

ЗАМЕЧАНИЕ: В этой лекции, из всей теории групп Ли нам понадобится только это утверждение.

Распределения

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Распределение** на гладком многообразии есть гладкое подрасслоение $B \subset TM$.

ЗАМЕЧАНИЕ: Пусть $\Pi: TM \longrightarrow TM/B$ – проекция, а $x, y \in B$ – векторные поля. Тогда $[fx, y] = f[x, y] - D_y(f)x$. Следовательно,. **$\Pi([x, y])$ зависит от x, y $C^\infty(M)$-линейно.**

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Построенное отображение $[B, B] \longrightarrow TM/B$ называется **форма Фробениуса** ("Frobenius bracket"); это косо-симметричная $C^\infty(M)$-линейная 2-форма на B.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Распределение называется **интегрируемым**, или же **инволютивным**, если форма Фробениуса равна нулю.

Гладкие субмерсии

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть $\pi : M \longrightarrow M'$ – гладкое отображение. Оно называется **субмерсией**, если в каждой точке M дифференциал $D\pi$ сюръективен.

УТВЕРЖДЕНИЕ: Пусть $\pi : M \longrightarrow M'$ – гладкая субмерсия. Тогда у каждой точки $m \in M$ есть окрестность $U \cong V \times W$, где U, W – гладкие многообразия, такая, что **$\pi|_U$ есть проекция на W.**

Доказательство: Теорема о неявной функции.

УПРАЖНЕНИЕ: ("Ehresmann's fibration theorem")
Пусть $\pi : M \longrightarrow M'$ – гладкая субмерсия компактных многообразий. **Докажите, что это локально тривиальное расслоение.**

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Вертикальное касательное пространство** субмерсии есть ядро $D\pi$.

УТВЕРЖДЕНИЕ: **Это инволютивное подрасслоение.**

Доказательство: Коммутатор перестановочен с проекцией потому что.

ЗАМЕЧАНИЕ: Вертикальное подрасслоение обозначается $T_\pi M$.

Теорема Фробениуса

Теорема Фробениуса: Пусть $B \subset TM$ – подрасслоение. Оно **является инволютивным тогда и только тогда**, когда у каждой точки $x \in M$ **есть окрестность** U **и гладкая субмерсия** $U \xrightarrow{\pi} V$ **такая, что** B **есть вертикальное касательное подрасслоение:** $B = T_\pi M$.

ЗАМЕЧАНИЕ: Слои π называются **листами**, или **интегральными подмногообразиями** распределения B. Если B интегрируема, совокупность всех листов (а также само B) называют **слоением**.

ЗАМЕЧАНИЕ: Для доказательства теоремы Фробениуса **достаточно убедиться, что через каждую точку проходит интегральное подмногообразие.** В этом случае, гладкая субмерсия $U \xrightarrow{\pi} V$ – это проекция на пространство листов слоения.

ЗАМЕЧАНИЕ: **Пусть в B есть базис $b_1, ..., b_r$ линейно-независимых, коммутирующих векторных полей.** Обозначим за $\tau(t, b_i) : M \times \mathbb{R} \longrightarrow M$ соответствующие потоки диффеоморфизмов. **Поскольку b_i коммутируют, потоки $\tau(t, b_i)$ тоже коммутируют.** Это задает локальное действие группы $\tau(t_1, ..., t_r) : M \times \mathbb{R}^n \longrightarrow M$, причем для каждого $m \in M$, касательное пространство $\tau(\mathbb{R}^r, m)$ порождено $\langle b_1, ..., b_r \rangle$. **Значит, $\tau(\mathbb{R}^r, m)$ – интегральные подмногообразия.**

Теорема Фробениуса (доказательство)

СЛЕДСТВИЕ: Мы получили, что теорема Фробениуса следует из такой леммы.

ЛЕММА: Пусть $B \subset TM$ – инволютивное подрасслоение. Тогда **в окрестности каждой точки $x \in M$ есть базис из линейно-независимых, коммутирующих векторных полей.**

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Ведется по индукции. Предположим, что задано подрасслоение $B_0 \subset B$, порожденное коммутирующими векторными полями $b_1, ..., b_{k-1}$. Нужно найти векторное поле $b_k \in B$, линейно независимое и коммутирующее с $b_1, ..., b_{k-1}$. **Рассмотрим локальное действие группы $\beta: \mathbb{R}^{k-1} \times M \longrightarrow M$. и пусть $\pi: U \longrightarrow V$ – субмерсия на пространство листов.** Возьмем ее **сечение** $V \xrightarrow{\rho} U$, то есть такое отображение, что $\pi \circ \rho = \mathrm{Id}_V$ (**локально такое сечение всегда существует,** по теореме о неявной функции).

Шаг 0: Образ ρ – гладкое подмногообразие в U.

Теорема Фробениуса (продолжение)

Шаг 1: Отображение $\beta(\mathbb{R}^{k-1} \times \operatorname{im}\rho) \longrightarrow U$ – изоморфизм (локально), потому что

$$D\beta: \langle b_1, ..., b_{k-1}\rangle \oplus T \operatorname{im}\rho \longrightarrow TU$$

изоморфизм.

Шаг 2: Для каждого векторного поля v на $\operatorname{im}\rho$, действие β разносит v на U, **превращая его в β-инвариантное векторное поле.**

Шаг 3: Подрасслоение $B \subset TU$ является β-инвариантным, ибо $[b_i, B] \subset B$.

Шаг 4: Возьмем невырожденное векторное поле $v \in B \cap T \operatorname{im}\rho$ (локально, оно существует, потому что $\operatorname{codim}\operatorname{im}\rho = k-1 < \dim B = r$, значит, $\dim(T\operatorname{im}\rho \cap B) \geqslant \dim B - \operatorname{codim}\operatorname{im}\rho = r-k+1$). Продолжим его до β-инвариантного векторного поля b_k на U (шаг 3). **Будучи β-инвариантным, β_k коммутирует с $b_1, ..., b_{k-1}$, а в силу шага 4, оно лежит в B.** ■

Вещественно аналитические многообразия

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Антиголоморфная функция** есть функция f такая, что $\overline{f}$ голоморфна.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Антикомплексной инволюцией** на комплексном многообразии называется непрерывная инволюция ι, $\iota^2 = \mathrm{Id}$, переводящая голоморфные функции на $U \subset M$ в антиголоморфные на $\iota(U)$.

УПРАЖНЕНИЕ: Проверьте, что множество неподвижных точек X_ι антикомплексной инволюции – **гладкое многообразие, причем $\dim_{\mathbb{R}} X_\iota = \dim_{\mathbb{C}} X$.**

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть $Y \subset X$ – замкнутое множество в комплексном многообразии, и $X' \supset Y'$ многообразие, которое содержит замкнутое множество, гомеоморфное Y. Если гомеоморфизм $Y \longrightarrow Y'$ продолжается до голоморфного диффеоморфизма их окрестностей, мы пишем $X \sim_Y X'$.

УТВЕРЖДЕНИЕ: **Это отношение эквивалентности.**

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Ростком** X в Y называется класс эквивалентности X относительно $\sim_Y$.

Вещественно аналитические многообразия (2)

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Функция на открытом подмножестве $\mathbb{R}^n$ называется **вещественно-аналитической**, если она разлагается в ряд Тэйлора в окрестности каждой точки.

Определение 1: Пусть задано комплексное многообразие, снабженное антикомплексной инволюцией, и X_ι – ее неподвижное множество. Тогда росток X в X_ι называется **вещественно-аналитическое многообразие**.

Определение 2: Пусть M – окольцованное пространство, локально изоморфное $(B, \mathcal{O}_B)$, где $B \subset \mathbb{R}^n$ – открытый шар, а $\mathcal{O}_B$ – пучок вещественно-аналитических функций. Тогда M называется **вещественно-аналитическое многообразие**.

ЗАМЕЧАНИЕ: Вещественно-аналитические тензоры на X_ι продолжаются до голоморфных, ι-инвариантных тензоров в какой-то окрестности $X_\iota \subset X$.

Вещественно аналитические многообразия (3)

ТЕОРЕМА: **Эти определения эквивалентны.**

(1) $\Rightarrow$ (2): Пусть $U_\iota \subset X_\iota$ – открытое множество. Возьмем в качестве $\mathcal{O}_{X_\iota}$ пучок, порожденный f_i, где f_i – ι-инвариантные голоморфные функции в открытом множестве $U \supset U_\iota$. Каждая такая функция – вещественно-аналитична в U, значит, **ее ограничение на открытые вещественные шары, содержащиеся в U_ι, тоже вещественно-аналитично.**

(2) $\Rightarrow$ (1) (набросок): Возьмем покрытие M открытыми шарами $B_\mathbb{R} \subset \mathbb{R}^n$, такое, что все функции перехода φ_{ij} вещественно-аналитичны. Вещественно-аналитическая функция φ_{ij} на $B_\mathbb{R}$ продолжается до голоморфной $\varphi_{ij}^\mathbb{C}$ в некоторой окрестности $B_\mathbb{R}$ в $\mathbb{C}^n \supset \mathbb{R}^n$. Пусть и пусть X^i - такие окрестности этих шаров в $\mathbb{C}^n$. **Они задают атлас на многообразии, полученном из X^i склейкой по $\varphi_{ij}^\mathbb{C}$.**

ЗАМЕЧАНИЕ: Мы не используем этой эквивалентности (используем аналогичное локальное утверждение, которое очевидно).

УПРАЖНЕНИЕ: Докажите ее самостоятельно.

Тензор Ниенхойса

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть (M, I) – почти комплексное многообразие, $T^{1,0} \subset TM \otimes \mathbb{C}$ – подрасслоение векторов типа $(1,0)$, а $[T^{1,0}, T^{1,0}] \xrightarrow{N} TM \otimes \mathbb{C}/T^{1,0}$ – скобка Фробениуса. Отождествив $TM \otimes \mathbb{C}/T^{1,0}$ с $T^{0,1}$, мы представим N как оператор

$$N: \Lambda^2(T^{1,0}M) \longrightarrow T^{0,1}M.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Этот оператор называется **тензором Ниейхойса** (Nijenhuis tensor). Его можно преставить как сечение $N \in \Lambda^{2,0}M \otimes T^{0,1}M$.

ЗАМЕЧАНИЕ: Тензор Ниенхойса вещественно-аналитического многообразия тоже вещественно-аналитичен.

ЗАМЕЧАНИЕ: Теорема Ньюлендера-Ниренберга выводит интегрируемость из $N = 0$.

ЗАМЕЧАНИЕ: Рассмотрим вещественную часть $\operatorname{Re} N$ как оператор

$$\frac{1}{2}(N + \overline{N}) : \Lambda^2 TM \longrightarrow TM.$$

Из $\operatorname{Re} N = 0$ **следует** $N = 0$ (проверьте).

Теорема Ньюлендера-Ниренберга

ТЕОРЕМА: Пусть (M, I) – вещественно-аналитическое почти комплексное многообразие, причем $[T^{1,0}, T^{1,0}] \subset T^{1,0}$. **Тогда почти комплексная структура I интегрируема.**

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Поскольку утверждение локально по M, **можно считать, что для M верны оба определения вещественно-аналитических многообразий.** Пусть $M = B_{\mathbb{R}}$ – вещественный шар, а $X = B_{\mathbb{C}}$ – комплексный шар, снабженный антикомплексной инволюцией, причем $M = X_\iota$.

Шаг 1: Пусть

$$\Pi^{1,0} : |_M = TM \otimes \mathbb{C} \longrightarrow T^{1,0}M \subset TX|_M$$

– естественная проекция вдоль $T^{0,1}$. Продолжим $\Pi^{1,0}$ до голоморфного тензора на X (если не продолжается, заменим M и X на меньшую окрестность). Сделаем то же самое с $\Pi^{1,0}$. **Получим разложение $TX|_M = \operatorname{im}\Pi^{1,0} \oplus \operatorname{im}\Pi^{0,1}$.** Обозначим $T^{1,0}X := \operatorname{im}\Pi^{1,0}$, $T^{0,1}X := \operatorname{im}\Pi^{0,1}$.

Теорема Ньюлендера-Ниренберга (2)

Шаг 2: Перейдя к меньшей окрестности, если нужно, можно считать, что **разложение $TX = T^{1,0}X \oplus T^{0,1}X$ определено на всем X и голоморфно.**

Шаг 3: Пусть α – голоморфный, ι-инвариантный тензор на X, который зануляется в $M = X_\iota$. **Тогда $\alpha = 0$** (чтобы убедиться, разложим в ряд Тэйлора).

Шаг 4: Тензор Фробениуса для $T^{1,0}X$, ограниченный на $M = X_\iota$, дает тензор Ниенхойса. Его вещественная часть есть сумма тензоров Фробениуса для $T^{1,0}X$ и $T^{0,1}X$. **Поэтому $T^{1,0}X$ и $T^{0,1}X$ интегрируемы.**

Шаг 5: По теореме Фробениуса, локально по X **существует голоморфная субмерсия $\pi : X \longrightarrow X^{1,0}$, со слоями, касательными $T^{0,1}X$.**

Шаг 6: Пусть f – голоморфная функция на $X^{1,0}$. Тогда $D_x(\pi^* f) = 0$ для любого $x \in T^{0,1}X$. **Поэтому $d(\pi^* f)$ имеет тип $(1,0)$.**

Шаг 7: Мы получили, что **ограничение π на $M \subset X^{1,0}$ голоморфно (потому что $\pi^* f$ от голоморфной функции f голоморфен)**. Ядро дифференциала этого отображения лежит в $TM \cap T^{0,1}X = 0$. По теореме об обратной функции, $\pi|_M : M \longrightarrow X^{1,0}$ – **диффеоморфизм.** ■

Основы кэлеровой геометрии,

лекция 3

Миша Вербицкий

НМУ/НОЦ, Москва

27 сентября 2010

Лекции 4-го октября не будет!
11-го октября будет.

Связность на расслоении

ЗАМЕЧАНИЕ: Пространство сечений расслоения B на гладком многообразии обозначается B.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Связность на векторном расслоении B есть отображение $B \xrightarrow{\nabla} \Lambda^1 M \otimes B$ удовлетворяющее $\nabla(fb) = df \otimes b + f\nabla b$ для любых $b \in B$, $f \in C^\infty M$.

ЗАМЕЧАНИЕ: Если $X \in TM$ – векторное поле, $b \in B$, то **$\nabla_X b$ – сечение B, полученное как $\langle \nabla b, X\rangle$.**

ЗАМЕЧАНИЕ: Связность на B определяет связность на двойственном расслоении B^*, и наоборот, по формуле

$$\langle \nabla_X(b), \xi\rangle + \langle b, \nabla_X(\xi)\rangle = \mathrm{Lie}_X(\langle b, \xi\rangle).$$

ЗАМЕЧАНИЕ: Для любого тензорного расслоения $\mathcal{B}_1 := B^* \otimes B^* \otimes ... \otimes B^* \otimes B \otimes B \otimes ... \otimes B$ **связность на B определяет связность на $\mathcal{B}_1$** по **формуле Лейбница:**

$$\nabla(b_1 \otimes b_2) = \nabla(b_1) \otimes b_2 + b_1 \otimes \nabla(b_2).$$

Формула Картана

УТВЕРЖДЕНИЕ: Для любого $\eta \in \Lambda^1 M$, и $X, Y \in TM$ имеем

$$d\eta(X,Y) = \eta([X,Y]) - \mathrm{Lie}_X(\eta(Y)) + \mathrm{Lie}_Y(\eta(X)).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО:

1. **Обе стороны уравнения удовлетворяют правилу Лейбница.**

3. **Для $\eta = df$, обе стороны уравнения равны нулю.**

4. Дифференциал де Рама есть **единственное** отображение

$$d: \Lambda^*(M) \longrightarrow \Lambda^{*+1}(M),$$

удовлетворяющее правилу Лейбница и $d^2 = 0$.

Кручение

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть ∇ – связность на $\Lambda^1 M$,

$$\Lambda^1 \xrightarrow{\nabla} \Lambda^1 M \otimes \Lambda^1 M$$

Кручение ∇ задается формулой $\operatorname{Alt} \circ \nabla - d$, где $\operatorname{Alt}: \Lambda^1 M \otimes \Lambda^1 M \longrightarrow \Lambda^2 M$ - внешнее умножение. Кручение есть отображение $T_\nabla : \Lambda^1 M \longrightarrow \Lambda^2 M$.

ЗАМЕЧАНИЕ:

$$\begin{aligned} T_\nabla(f\eta) &= \operatorname{Alt}(f\nabla\eta + df \otimes \eta) - d(f\eta) \\ &= f\Big[\operatorname{Alt}(\nabla\eta) - d\eta\Big] + df \wedge \eta - df \wedge \eta = fT_\nabla(\eta). \end{aligned}$$

Значит, T_∇ линейно.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Связность на римановом многообразии (M, g) называется **ортогональной**, если $\nabla(g) = 0$, и **связностью Леви-Чивита**, если она ортогональна и без кручения.

ТЕОРЕМА: ("основная теорема дифференциальной геометрии") Каждое риманово многообразие **допускает связность Леви-Чивита, и она единственна.**

Кручение и коммутатор векторных полей

ЗАМЕЧАНИЕ: По формуле Картана,

$$\begin{aligned} T_\nabla(\eta)(X,Y) =& \nabla_X(\eta)(Y) - \nabla_Y(\eta)(X) - d\eta(X,Y) \\ =& \nabla_X(\eta)(Y) - \nabla_Y(\eta)(X) - \eta([X,Y]) - \mathsf{Lie}_X(\eta(Y)) + \mathsf{Lie}_Y(\eta(X)). \end{aligned}$$

С другой стороны, $\nabla_X(\eta)(Y) = \mathsf{Lie}_X(\eta(Y)) - \eta(\nabla_X(Y))$. Сравнивая и сокращая $\mathsf{Lie}_X(\eta(Y))$, $\mathsf{Lie}_Y(\eta(X))$, получаем

$$T_\nabla(\eta)(X,Y) = \eta\Big(\nabla_X(Y) - \nabla_Y(X) - [X,Y]\Big).$$

Кручение часто определяют как отображение $\Lambda^2 TM \longrightarrow TM$ формулой $\nabla_X(Y) - \nabla_Y(X) - [X,Y]$. Это оператор, двойственный определенному выше.

ЗАМЕЧАНИЕ: Пусть $B \subset TM$ – подрасслоение, ∇ – связность без кручения, а $\nabla B \subset B \otimes \Lambda^1 M$. Тогда для любых $b, b' \in B$, имеем $[b,b'] = \nabla_b b' - \nabla'_b b \subset B$, **значит,** $[B,B] \subset B$.

СЛЕДСТВИЕ: Если связность без кручения сохраняет оператор почти комплексной структуры, $\nabla(I) = 0$, то I **интегрируемый.**

Кэлеровы многообразия

ЗАМЕЧАНИЕ: Пусть ∇ – связность без кручения. Тогда **из $\nabla\omega = 0$ сразу следует $d\omega = 0$.**

ТЕОРЕМА: Пусть (M, I, g) – почти комплексное, эрмитово многообразие, а ∇ – связность Леви-Чивита. Тогда **равносильны:**

(i) $\nabla(I) = 0$

(ii) $d\omega = 0$, и почти комплексная структура I интегрируема.

ЗАМЕЧАНИЕ: (i) $\Rightarrow$ (ii) следует из выше доказанного, (ii) $\Rightarrow$ (i) – **нетривиальная теорема.**

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Почти комплексное, эрмитово многообразие многообразие (M, I, g) называется **кэлеровым**, если выполнено любое из условий (i), (ii). Класс когомологий $[\omega] \in H^2(M)$ называется **кэлеровым классом** M.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Симплектическая форма на многообразии есть невырожденная, замкнутая 2-форма.

ЗАМЕЧАНИЕ: Кэлерово многообразие всегда симплектично.

Метрика Фубини-Штуди

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть $M = \mathbb{C}P^n$ – комплексное проективное пространство, а g – $U(n+1)$-инвариантная метрика. Она называется **метрикой Фубини-Штуди**.

ЗАМЕЧАНИЕ: Метрику Фубини-Штуди можно получить, взяв произвольную эрмитову метрику на $\mathbb{C}P^n$ и **усреднив по компактной группе $U(n+1)$.**

ЗАМЕЧАНИЕ: Стабилизатор $x \in \mathbb{C}P^n$ в $U(n+1)$ изоморфен $U(n)$, а $T_x\mathbb{C}P^n$ изоморфно $\mathbb{C}^n$ со стандартным действием $U(n)$.

УПРАЖНЕНИЕ: Пусть g – $U(n)$-инвариантная положительная симметрическая форма на $\mathbb{C}^n$. Тогда g **пропорциональна обычной евклидовой метрике.**

СЛЕДСТВИЕ: Метрика Фубини-Штуди **единственна с точностью до скалярного множителя.**

УПРАЖНЕНИЕ: Пусть η – $U(n)$-инвариантная 3-форма на $\mathbb{C}^n$. Докажите, что $\eta = 0$.

СЛЕДСТВИЕ: Метрика Фубини-Штуди **кэлерова**.

Проективные многообразия

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Замкнутое комплексное подмногообразие $\mathbb{C}P^n$ называется **проективным**

ТЕОРЕМА: **Проективное многообразие всегда кэлерово.**

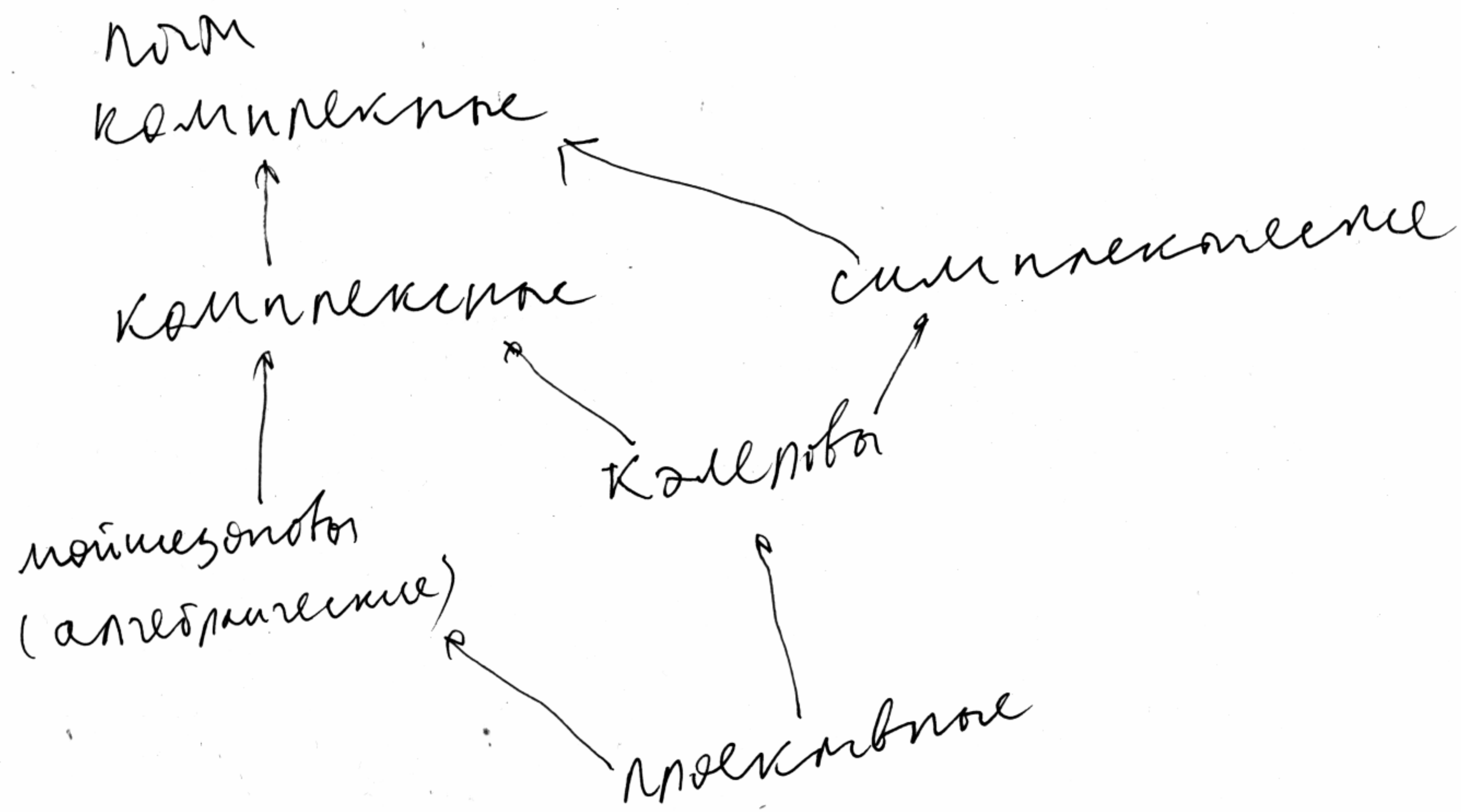
ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Оно комплексно, а эрмитова форма симплектична.

ЗАМЕЧАНИЕ: Поскольку $H^2(\mathbb{C}P^n)$ одномерно, **можно выбрать метрику Фубини-Штуди с целочисленным кэлеровым классом.**

СЛЕДСТВИЕ: Проективное многообразие **допускает кэлерову структуру с целочисленным кэлеровым классом.**

ТЕОРЕМА: (Кодаира) Пусть M – компактное, кэлерово многообразие с рациональным кэлеровым классом. **Тогда M проективно.**

Классы многообразий



Лекции 4-го октября не будет!
11-го октября будет.

Основы кэлеровой геометрии,

лекция 4

Миша Вербицкий

НМУ/НОЦ, Москва

11 октября 2010

Связности и кручение

ЗАМЕЧАНИЕ: Пространство сечений расслоения B на гладком многообразии обозначается B.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Связность на векторном расслоении B есть отображение $B \xrightarrow{\nabla} \Lambda^1 M \otimes B$ удовлетворяющее $\nabla(fb) = df \otimes b + f\nabla b$ для любых $b \in B$, $f \in C^\infty M$.

ЗАМЕЧАНИЕ: Если $X \in TM$ – векторное поле, $b \in B$, то **$\nabla_X b$ – сечение B, полученное как $\langle \nabla b, X \rangle$.**

ЗАМЕЧАНИЕ: Для любого тензорного расслоения $\mathcal{B}_1 := B^* \otimes B^* \otimes ... \otimes B^* \otimes B \otimes B \otimes ... \otimes B$ **связность на B определяет связность на $\mathcal{B}_1$** по **формуле Лейбница:**

$$\nabla(b_1 \otimes b_2) = \nabla(b_1) \otimes b_2 + b_1 \otimes \nabla(b_2).$$

ЗАМЕЧАНИЕ: Связности образуют **аффинное пространство** над пространством сечений расслоения $\operatorname{End}(B) \otimes \Lambda^1 M$.

Кручение

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть ∇ – связность на $\Lambda^1 M$,

$$\Lambda^1 \xrightarrow{\nabla} \Lambda^1 M \otimes \Lambda^1 M$$

Кручение ∇ задается формулой $T_\nabla := \mathrm{Alt} \circ \nabla - d$, где

$$\mathrm{Alt}: \ \Lambda^1 M \otimes \Lambda^1 M \longrightarrow \Lambda^2 M$$

- внешнее умножение. Кручение есть отображение $T_\nabla : \ \Lambda^1 M \longrightarrow \Lambda^2 M$.

ЗАМЕЧАНИЕ:

$$\begin{aligned} T_\nabla(f\eta) = & \mathrm{Alt}(f\nabla\eta + df \otimes \eta) - d(f\eta) \\ & = f\Big[\mathrm{Alt}(\nabla\eta) - d\eta\Big] + df \wedge \eta - df \wedge \eta = fT_\nabla(\eta). \end{aligned}$$

Значит, T_∇ линейно.

ЗАМЕЧАНИЕ:
Кручение часто определяют как отображение $\Lambda^2 TM \longrightarrow TM$ формулой $\nabla_X(Y) - \nabla_Y(X) - [X,Y]$. Это оператор, двойственный определенному выше.

Аффинные пространства

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Торсор** над группой G есть пространство X, снабженное свободным и транзитивным действием G, $g, x \longrightarrow \rho(g, x)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Морфизм** торсоров $(X, G, \rho) \xrightarrow{\Psi} (X', G', \rho')$ есть пара $\Psi_X : X \longrightarrow X', \Psi_G : G \longrightarrow G'$, где Ψ_G есть гомоморфизм групп, и согласованное с действием G, G' на X, X' так: $\Psi_X(\rho(g, x)) = \rho'(\Psi_G(g), \Psi_X(x))$

ЗАМЕЧАНИЕ: Торсоры образуют категорию.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Аффинное пространство** есть торсор над линейным пространством V, которое называется его **линеаризацией**.

ЗАМЕЧАНИЕ: Действие V на A обозначается $a, v \longrightarrow a + v$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Морфизм** аффинных пространств есть морфизм соответствующих торсоров.

ЗАМЕЧАНИЕ: Это то же самое, что отображение $A \xrightarrow{\Psi_A} A'$, плюс гомоморфизм линеаризаций $L \xrightarrow{\Psi_L} L'$ такой, что $\Psi_A(a+l) = \Psi_A(a) + \Psi_L(l)$.

Линеаризация кручения

ЗАМЕЧАНИЕ: Если ∇_1 и ∇_2 – связности на расслоении B, их разность есть сечение $\operatorname{End}(B)\otimes\Lambda^1 M$. **Пространство $\mathcal{A}(B)$ связностей на B есть аффинное пространство**, то есть торсор над пространством сечений $\operatorname{End}(B)\otimes\Lambda^1 M$.

ЗАМЕЧАНИЕ: Кручение есть аффинное отображение

$$\mathcal{A}(\Lambda^1 M) \longrightarrow \operatorname{Hom}(\Lambda^1 M, \Lambda^2 M) = TM \otimes \Lambda^2 M.$$

потому что $T(\nabla+\alpha) = T(\nabla)+\operatorname{Alt}_{12}(\alpha)$, где $\operatorname{Alt}_{12}:\ \Lambda^1 M\otimes\operatorname{End}(\Lambda^1 M) \longrightarrow \Lambda^2 M\otimes TM$ есть альтернирование по первым двум индексам.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Линеаризованное кручение есть отображение $T_{lin} = \operatorname{Alt}$,

$$T_{lin}:\ \Lambda^1(M)\otimes\Lambda^1(M)\otimes TM \longrightarrow \Lambda^2 M\otimes TM$$

полученное как линеаризация кручения.

Связность Леви-Чивита

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Связность на римановом многообразии (M,g) называется **ортогональной**, если $\nabla(g)=0$, и **связностью Леви-Чивита**, если она ортогональна и без кручения.

УТВЕРЖДЕНИЕ: Пусть B – расслоение с метрикой. **Тогда на B всегда существует ортогональная связность.**

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Выберем покрытие $\{U_i\}$, в котором B тривиально и допускает ортонормальный базис. На каждом U_i выберем связность ∇_i, которая сохраняет этот базис. Пусть ψ_i – разбиение единицы, подчиненное $\{U_i\}$. Тогда **формула $\nabla(b) := \sum \nabla_i(\psi_i b)$ определяет ортогональную связность.** ■

ТЕОРЕМА: ("основная теорема дифференциальной геометрии") Каждое риманово многообразие **допускает связность Леви-Чивита, и она единственна.**

Связность Леви-Чивита (существование и единственность)

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Выберем ортогональную связность ∇ на $\Lambda^1 M$. Пространство ортогональных связностей – аффинное, и **его линеаризация есть $\Lambda^1 M \otimes \mathfrak{so}(TM)$.**

Шаг 1: Отождествляя TM и $\Lambda^1 M$, получаем $\mathfrak{so}(TM) = \Lambda^2 M$.

Шаг 2: Линеаризованное кручение есть отображение

$$T_{lin}: \Lambda^1 M \otimes \mathfrak{so}(TM) = \Lambda^1(M) \otimes \Lambda^2 M \xrightarrow{\mathsf{Alt}} \Lambda^2 M \otimes \Lambda^1 M = \Lambda^2 M \otimes TM.$$

Это изоморфизм. Справа и слева расслоения одной размерности, так что **достаточно доказать, что T_{lin} нет ядра.** Но если $\eta \in \ker T_{lin}$, **η симметрична по первым двум аргументам и кососимметрична по последним,** что дает $\eta(x,y,z) = \eta(y,x,z) = -\eta(y,z,x)$. **То есть $\sigma(\eta) = -\eta$, где σ есть циклическая перестановка аргументов.** Поскольку $\sigma^3 = 1$, из этого следует, что $\eta = 0$.

Шаг 3: Мы получили, что **ортогональная связность однозначно задается своим кручением,** ибо кручение задает изоморфизм аффинных пространств.

Шаг 4: Возьмем $\nabla := \nabla_0 - T_{lin}^{-1}(T_{\nabla_0})$. Тогда $T_\nabla = T_{\nabla_0} - T_{lin}(T_{lin}^{-1}(T_{\nabla_0})) = 0$, значит **$\nabla$ – связность без кручения**. $\blacksquare$

Связность Леви-Чивита на кэлеровом многообразии

ТЕОРЕМА: Пусть (M, I, g) – почти комплексное эрмитово многообразие. **Тогда следующие условия эквивалентны:**

(i) **Комплексная структура I интегрируема, а эрмитова форма ω замкнута.**

(ii) $\nabla(I) = 0$**,** где ∇ есть связность Леви-Чивита.

ЗАМЕЧАНИЕ: **Импликация (ii) $\Rightarrow$ (i) довольно очевидна.** Действительно, $[X, Y] = \nabla_X Y - \nabla_Y X$, значит, коммутатор $(1,0)$-векторных полей – снова типа $(1,0)$, что влечет интегрируемость I. Также, ∇ **– связность без кручения, что влечет** $d\omega = \mathrm{Alt}(\nabla\omega)$**,** значит, $d\omega = 0$.

Связность Бисмута

ЗАМЕЧАНИЕ: На римановом многообразии, кручение $T_\nabla \in \Lambda^2 M \otimes TM$ удобно рассматривать как сечение $T'_\nabla \in \Lambda^2 M \otimes \Lambda^1 M$, отождествляя TM и $\Lambda^1 M$ с помощью g.

Доказательство импликации (i) $\Rightarrow$ (ii). немедленно вытекает из теоремы Бисмута.

ТЕОРЕМА: (Бисмут) Пусть (M, I, g) – комплексное эрмитово расслоение. **Тогда существует и единственна связность ∇_b, сохраняющая I и g, такая, что тензор кручения $T'_{\nabla_b} \in \Lambda^2 M \otimes \Lambda^1 M$ кососимметричен. В этой ситуации, $T'_{\nabla_b} = -I(d\omega)$.**

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Такая связность называется **связностью Бисмута**.

ЗАМЕЧАНИЕ: Единственность связности Бисмута следует из того, что **ортогональная связность однозначно задается своим кручением.**

Линеаризация кручения на эрмитовом многообразии

Доказательство теоремы Бисмута. Шаг 1: Выберем связность ∇, сохраняющую I и g. Разность α двух таких связностей есть 1-форма с коэффициентами в пространстве косоэрмитовых матриц, $\alpha \in \Lambda^1 \otimes \mathfrak{u}(TM)$. Значит, **пространство связностей, сохраняющих I и g, есть аффинное пространство над пространством сечений $\Lambda^1 \otimes \mathfrak{u}(TM)$.**

Шаг 2: **$\mathfrak{u}(TM)$ отождествляется с $\Lambda^{1,1}M$.** Тогда линеаризация кручения есть отображение

$$T_{lin}: \Lambda^1(M) \otimes \Lambda^{1,1}(M) \xrightarrow{\mathrm{Alt}} \Lambda^2 M \otimes \Lambda^1(M).$$

Шаг 3: **∇ сохраняет разложение Ходжа, а I интегрируема**, что дает $T_\nabla(X^{1,0}, Y^{1,0}) \subset T^{1,0}(M)$ для любых $X^{1,0}, Y^{1,0} \in T^{1,0}(M)$. Это следует из

$$T_\nabla(X,Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X$$

Шаг 4: Значит, T'_∇ принадлежит

$$\Lambda^{1,1}(M) \otimes \Lambda^1(M) \oplus \Lambda^{2,0} \otimes \Lambda^{0,1}(M) \oplus \Lambda^{0,2} \otimes \Lambda^{1,0}(M)$$

потому что **при подстановке туда двух $(1,0)$-векторов оно дает $(0,1)$-форму.**

Линеаризация кручения на эрмитовом многообразии (2)

Шаг 5: Для $\alpha\in\Lambda^1 M\otimes\mathfrak{so}(TM)$, продолжим α на $\Lambda^* M$ по формуле Лейбница $\alpha(\eta\wedge\eta')=\alpha(\eta)\wedge\eta'+(-1)^{\deg\eta}\alpha(\eta')$. Запишем связность Леви-Чивита формулой $\nabla_{LC}=\nabla+\alpha$. **Тогда $\alpha=T_{lin}^{-1}(T'_\nabla)$.** Это дает

$$d\omega=\operatorname{Alt}(\nabla_{LC}\omega)=\operatorname{Alt}(\nabla\omega+\alpha\omega)=\operatorname{Alt}(T_{lin}^{-1}(T'_\nabla)(\omega)).$$

Шаг 6: Обозначим за $A:\ \Lambda^2 M\otimes\Lambda^1 M$ операцию, переводящую τ в $\operatorname{Alt}(T_{lin}^{-1}(\tau)(\omega))$. Поскольку $A(T'_\nabla)=d\omega$, $A(T'_\nabla)$ не зависит выбора связности ∇, сохраняющей I,g. Значит, $T_{lin}\circ A=0$, и **линеаризация кручения задает комплекс расслоений**

$$\begin{aligned}&\Lambda^1(M)\otimes\Lambda^{1,1}(M)\\ &\quad\xrightarrow{T_{lin}}\Lambda^{1,1}M\otimes\Lambda^1(M)\oplus\Lambda^{2,0}\otimes\Lambda^{0,1}(M)\oplus\Lambda^{0,2}\otimes\Lambda^{1,0}(M)\qquad(*)\\ &\qquad\xrightarrow{A}\Lambda^{2,1}(M)\oplus\Lambda^{1,2}(M).\end{aligned}$$

Шаг 7: Пусть $\tau\in\Lambda^1 M\otimes\Lambda^2 M=\Lambda^1 M\otimes\mathfrak{so}(TM)$. Рассмотрим τ как отображение $V_\tau:\ \Lambda^1 M\longrightarrow\Lambda^1 M\otimes\Lambda^1 M$ и продолжим до отображения $\Lambda^i M\longrightarrow\Lambda^1 M\otimes\Lambda^i M$ по формуле Лейбница, $V_\tau(\eta\wedge\eta')=V_\tau(\eta)\wedge\eta'+(-1)^{\deg\eta}V_\tau(\eta')$. **Тогда** $V_\tau(\omega)(\cdot,\cdot,\cdot)=\tau(\cdot,\cdot,I\cdot)$ (проверьте это).

Линеаризация кручения на эрмитовом многообразии (3)

Шаг 8: Если τ – 3-форма, $\tau \in \Lambda^3 M \subset \Lambda^1 M \otimes \Lambda^2 M = \Lambda^1 M \otimes \mathfrak{so}(TM)$, то $T_{lin}(\tau) = \tau$, значит,

$$A(\tau) = \operatorname{Alt}(T_{lin}^{-1}(\tau)(\omega)) = \operatorname{Alt}(V_\tau(\omega)) = \operatorname{Alt}(\tau(\cdot,\cdot,I\cdot)).$$

Это дает $A(\tau) = \mathcal{I}(\tau)$, где $\mathcal{I}(\tau)(\cdot,\cdot,\cdot) = \tau(I\cdot,\cdot,\cdot) + \tau(\cdot,I\cdot,\cdot) + \tau(\cdot,\cdot,I\cdot)$. Поэтому **для кососимметричного тензора τ имеем $A(\tau) = \mathcal{I}(\tau)$.**

Шаг 9: Поскольку $A(T'_\nabla) = d(\omega)$ (шаг 6) для связности с кососимметричным кручением τ, имеем $d(\omega) = \mathcal{I}(\tau)$ (шаг 8). С другой стороны **$d\omega$ лежит в $\Lambda^{2,1}(M) \oplus \Lambda^{1,2}(M)$ в силу интегрируемости, значит, $\mathcal{I}(d\omega) = I(d\omega)$. Это влечет $\tau = \mathcal{I}^{-1}(d\omega) = -Id\omega$. Мы доказали формулу для кручения в утверждении теоремы Бисмута.**

Шаг 10: Поскольку $\mathcal{I}: \Lambda^3(M) \longrightarrow \Lambda^3(M)$ изоморфизм, из предыдущего шага вытекает, что $A\big|_{\Lambda^{2,1}(M)\oplus\Lambda^{1,2}(M)} \longrightarrow \Lambda^{2,1}(M)\oplus\Lambda^{1,2}(M)$ – изоморфизм. **Значит, правая стрелка комплекса (*) – наложение.**

Линеаризация кручения на эрмитовом многообразии (4)

Шаг 11: Из вычисления размерностей, инъективности левой стрелки и сюрьективности правой вытекает, что **(*) - точная последовательность.**

$$\begin{aligned}&\Lambda^1(M)\otimes\Lambda^{1,1}(M)\\ &\quad\xrightarrow{T_{lin}}\Lambda^{1,1}M\otimes\Lambda^1(M)\oplus\Lambda^{2,0}\otimes\Lambda^{0,1}(M)\oplus\Lambda^{0,2}\otimes\Lambda^{1,0}(M)\qquad (*)\\ &\qquad\xrightarrow{A}\Lambda^{2,1}(M)\oplus\Lambda^{1,2}(M).\end{aligned}$$

Шаг 12: Пусть $\mathcal{A}(I,g)$ есть пространство связностей на $\Lambda^1 M$, сохраняющих I и g. Поскольку $A(T'_\nabla)=d\omega$ (шаг 6), отображение $\nabla\longrightarrow T'_\nabla$ индуцирует морфизм аффинных пространств

$$\mathcal{A}(I,g)\xrightarrow{\mathcal{T}}A^{-1}(d\omega).$$

Поскольку (*) – точная последовательность, $\mathcal{T}$ является изоморфизмом.

Шаг 13: Как доказано на шаге 9, $A(-Id\omega)=d\omega$. Поскольку $\mathcal{T}$ есть изоморфизм, **существует и единственна связность $\mathcal{T}^{-1}(-Id\omega)$, кручение которой удовлетворяет $T'_\nabla=-Id\omega$.**

Основы кэлеровой геометрии,

лекция 5

Миша Вербицкий

НМУ/НОЦ, Москва

18 октября 2010

Лекции 25-го октября не будет!
1-го ноября будет.

Градуированные векторные пространства и алгебры

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Градуированное векторное пространство** есть пространство $V^* = \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} V^i$.

ЗАМЕЧАНИЕ: Еслу V^* градуировано, пространство эндоморфизмов $\operatorname{End}(V^*) = \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} \operatorname{End}^i(V^*)$ тоже градуировано,

$$\operatorname{End}^i(V^*) = \bigoplus_{j\in\mathbb{Z}} \operatorname{Hom}(V^j, V^{i+j}).$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Градуированная алгебра** (или "градуированная ассоциативная алгебра") есть алгебра $A^* = \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} A^i$ с умножением, которое совместимо с градуировкой: $A^i \cdot A^j \subset A^{i+j}$.

ЗАМЕЧАНИЕ: Билинейное отображение градуированных пространств, которое удовлетворяет $A^i \cdot B^j \subset C^{i+j}$, называется **градуированным**, или **совместимым с градуировкой**.

ЗАМЕЧАНИЕ: Категорию градуированных векторных пространств можно определить как **категорию векторных пространств с действием** $U(1)$; весовое разложение определяет градуировку по формуле $\rho(t)|_{A^n} = e^{2\pi\sqrt{-1}\,nt}$. Тогда **градуированная алгебра есть ассоциативная алгебра в категории пространств с $U(1)$-действием.**

Суперкоммутатор

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Оператор на градуированном пространстве называется **четным** (**нечетным**), если он сдвигает градуировку на четное (нечетное) число. **Четность** $\tilde{a}$ оператора a есть 0, если он четный, 1 если нечетный. Мы говорим, что оператор **чистый** если он четный или нечетный.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Суперкоммутатор** чистых элементов определяется формулой $\{a, b\} = ab - (-1)^{\tilde{a}\tilde{b}} ba$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Градуированная ассоциативная алгебра A^* называется **суперкоммутативной** если в A^* суперкоммутатор равен нулю.

ПРИМЕР: Алгебра Грассмана $\Lambda^* V$ суперкоммутативна.

Супералгебры Ли

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Супералгебра Ли** есть градуированное векторное пространство $\mathfrak{g}^*$ снабженное билинейным градуированным произведением $\{\cdot,\cdot\}: \mathfrak{g}^* \times \mathfrak{g}^* \longrightarrow \mathfrak{g}^*$, которое супер-антикоммутативно:

$$\{a,b\} = -(-1)^{\tilde{a}\tilde{b}}\{b,a\}$$

и удовлетворяет **супер-тождеству Якоби**

$$\{c,\{a,b\}\} = \{\{c,a\},b\} + (-1)^{\tilde{a}\tilde{c}}\{a,\{c,b\}\}$$

ПРИМЕР: Рассмотрим алгебру $\operatorname{End}^*(V^*)$ всех эндоморфизмов градуированного векторного пространства, с суперкоммутатором, определенным выше. Тогда $\operatorname{End}^*(V^*), \{\cdot,\cdot\}$ **есть супер-алгебра Ли**.

Лемма 1: Пусть d есть нечетный элемент супералгебры Ли над полем характеристики $\neq 2$, удовлетворяющий $\{d,d\} = 0$. **Тогда** $\{\{L,d\},d\} = 0$ для любого L.

Доказательство:

$$0 = \{L,\{d,d\}\} = \{\{L,d\},d\} + (-1)^{\tilde{L}}\{d,\{L,d\}\} = 2\{\{L,d\},d\}.$$

Дифференциал де Рама

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть M – гладкое многообразие, $\Lambda^* M$ - его алгебра де Рама. Оператор $d: \Lambda^i(M) \longrightarrow \Lambda^{i+1}(M)$ называется **дифференциалом де Рама**, если он удовлетворяет следующим условиям

1. **Градуированное соотношение Лейбница**

$$d(\alpha \wedge \beta) = d(\alpha) \wedge \beta + (-1)^{\tilde{\alpha}} \alpha \wedge d\beta$$

2. $d^2 = 0$

3. На функциях, $d: C^\infty M \longrightarrow \Lambda^1(M)$ – обычный дифференциал.

ЗАМЕЧАНИЕ: **Единственность дифференциала де Рама очевидна.** Действительно, d определяется своими значениями на образующих $\Lambda^*(M)$. Но эта алгебра порождена $C^\infty M$ и $dC^\infty M$.

Существование d: Достаточно доказать существование d локально, и воспользоваться единственностью для склейки. На $\mathbb{R}^n$, d определяется формулой $d(fP) = \sum_i \frac{df}{dx_i} dx_i \wedge P$ для любого координатного монома $P = dx_{i_1} \wedge ... \wedge dx_{i_k}$.

Теорема Стокса

Теорема Стокса: $\int_M d\eta = \int_{\partial M} \eta$, если M – гладкое многообразие с краем ∂M.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Форма η называется **точной**, если $\eta = d\alpha$, и **замкнутой**, если $d\eta = 0$.

ЗАМЕЧАНИЕ: Поскольку $d^2 = 0$, **любая точная форма замкнута**.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: $H^i(M) := \frac{\text{закнутые } i\text{-формы на } M}{\text{точные } i\text{-формы}}$ называется **группой i-х когомологий**.

ЗАМЕЧАНИЕ: Для замкнутой i-формы η и подмногообразия $X \subset M$, **интеграл $\int_X \eta$ зависит только от класса когомологий η и от класса гомотопии X.**

Оператор Ходжа $*$

Пусть V – вещественное векторное пространство. **Метрика на V индуцирует метрику на его тензорных пространствах**, $g(x_1 \otimes x_2 \otimes ... \otimes x_k, x'_1 \otimes x'_2 \otimes ... \otimes x'_k) = g(x_1, x'_1)g(x_2, x'_2)...g(x_k, x'_k)$

Это задает **невырожденное, положительно определенное скалярное произведение на дифференциальных формах** на римановом многообразии: $g(\alpha, \beta) := \int_M g(\alpha, \beta) \operatorname{Vol}_M$

Другая невырожденная форма задается формулой $\alpha, \beta \longrightarrow \int_M \alpha \wedge \beta$ **(спаривание Пуанкаре).**

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть M – риманово n-мерное многообразие. Определим **оператор Ходжа** $* : \Lambda^k M \longrightarrow \Lambda^{n-k} M$ формулой $g(\alpha, \beta) = \int_M \alpha \wedge *\beta$.

ЗАМЕЧАНИЕ: **Оператор Ходжа всегда существует**. В ортонормальном базисе $\xi_1, ..., \xi_n \in \Lambda^1 M$, его можно задать на мономах

$$*(\xi_{i_1} \wedge \xi_{i_2} \wedge ... \wedge \xi_{i_k}) = (-1)^s \xi_{j_1} \wedge \xi_{j_2} \wedge ... \wedge \xi_{j_{n-k}},$$

где $\xi_{j_1}, \xi_{j_2}, ..., \xi_{j_{n-k}}$ – дополнительный набор ковекторов, а s – сигнатура перестановки $(i_1, ..., i_k, j_1, ..., j_{n-k})$.

ЗАМЕЧАНИЕ: $*^2\Big|_{\Lambda^k(M)} = (-1)^{k(n-k)} \operatorname{Id}_{\Lambda^k(M)}$

Теория Ходжа

УТВЕРЖДЕНИЕ: На компактном римановом многообразии, имеем $d^*\big|_{\Lambda^k M} = (-1)^{nk} * d*$, где d^* – **сопряженный оператор** к d, $(d\alpha, \gamma) = (\alpha, d^*\gamma)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: По теореме Стокса,

$$0 = \int_M d(\alpha \wedge \beta) = \int_M d(\alpha) \wedge \beta + (-1)^{\tilde{\alpha}} \alpha \wedge d(\beta),$$

значит $(d\alpha, *\beta) = (-1)^{\tilde{\alpha}}(\alpha, *d\beta)$. Написав $\gamma := *\beta$, получаем

$$(d\alpha, \gamma) = (-1)^{\tilde{\alpha}}(\alpha, *d(*)^{-1}\gamma) = (-1)^{\tilde{\alpha}}(-1)^{\tilde{\alpha}(\tilde{n}-\tilde{\alpha})}(\alpha, *d*\gamma) = (-1)^{\tilde{\alpha}\tilde{n}}(\alpha, *d*\gamma).$$

■

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Антикоммутатор $\Delta := \{d, d^*\} = dd^* + d^*d$ называется **оператор Лапласа** на M. Это самосопряженный, положительно определенный оператор: $(\Delta x, x) = (dx, dx) + (d^*x, d^*x)$.

Основная теорема теории Ходжа: Существует **базис в гильбертовом пространстве** $L^2(\Lambda^*(M))$, состоящий из собственных векторов Δ, и каждое собственное пространство конечномерно.

ТЕОРЕМА: **(“Эллиптическая регулярность”)** Пусть $\alpha \in L^2(\Lambda^k(M))$ – собственный вектор Δ. **Тогда α – гладкая k-форма.**

Теория Ходжа и когомологии

Определение: Форма α называется **гармонической**, если $\Delta(\alpha)=0$.

ЗАМЕЧАНИЕ: Для любой гармонической формы α, $0=(\Delta\alpha,\alpha)=(d\alpha,d\alpha)+(d^*\alpha,d^*\alpha)$, значит, $\alpha\in\ker d\cap\ker d^*$. Получаем, что **любая гармоническая форма на компактном многообразии замкнута.**

ТЕОРЕМА: Пусть M – компактное, риманово. Тогда естественное отображение $\mathcal{H}^i(M)\longrightarrow H^i(M)$ из гармонических форм в когомологии – изоморфизм.

Доказательство. Шаг 1: Поскольку $\ker d^*=(\operatorname{im} d)^\perp$, **естественное отображение $\mathcal{H}^i(M)\longrightarrow H^i(M)$ инъективно.**

Шаг 2: $\{d,\{d,d^*\}\}=0$ по Лемме 1. Поэтому d **коммутирует с Δ.**

Шаг 3: Рассмотрим весовое разложение $\Lambda^*(M)\widehat{=}\bigoplus_\alpha\mathcal{H}^*_\alpha(M)$, где α пробегает через все собственные значения Δ. Для каждого α, **дифференциал де Рама сохраняет собственные пространства Δ,** что дает комплекс

$$\mathcal{H}^0_\alpha(M)\xrightarrow{d}\mathcal{H}^1_\alpha(M)\xrightarrow{d}\mathcal{H}^2_\alpha(M)\xrightarrow{d}\ldots$$

Теория Ходжа и когомологии (продолжение)

Шаг 4: На $\mathcal{H}^*_\alpha(M)$, имеем $dd^* + d^*d = \alpha$. Когда $\alpha \neq 0$, и η замкнута, это дает $dd^*(\eta) + d^*d(\eta) = dd^*\eta = \alpha\eta$, значит $\eta = d\xi$, где $\xi := \alpha^{-1}d^*\eta$. Значит, для ненулевых α, **комплексы $(\mathcal{H}^*_\alpha(M), d)$ не дают вклада в когомологии**

Шаг 5: Мы доказали, что

$$H^i(\Lambda^* M, d) = \bigoplus_\alpha H^i(\mathcal{H}^*_\alpha(M), d) = H^i(\mathcal{H}^*_0(M), d) = \mathcal{H}^i(M).$$

■

ЗАМЕЧАНИЕ: Из этой теоремы сразу следует **двойственность Пуанкаре между $H^i(M)$ и $H^{n-i}(M)$:** $\int_M \eta \wedge * \eta \neq 0$ для любого η, что дает **невырожденность спаривания $H^i(M) \otimes H^{n-i}(M) \longrightarrow H^n(M) = H^0(M) = \mathbb{R}$.** Здесь используется то, что для гармоничного η, форма $*\eta$ тоже гармонична, следовательно, замкнута.

Суперсимметрия в кэлеровой геометрии

Пусть (M, I, ω) – кэлерово многообразие. Рассмотрим операторы, действующие на $\Lambda^*(M)$:

1. d, d^*, Δ

2. **Оператор Ходжа** $L(\alpha) := \omega \wedge \alpha$ и его сопряженный $\Lambda(\alpha) := *L * \alpha$.

3. **Оператор Вейля:** $\mathcal{W}\Big|_{\Lambda^{p,q}(M)} = \sqrt{-1}\,(p-q)$

ЗАМЕЧАНИЕ: Это вещественный оператор.

ТЕОРЕМА: Эти операторы порождают 9-мерную супералгебру Ли $\mathfrak{a}$, действующую на $\Lambda^*(M)$. Лапласиан Δ лежит в центре $\mathfrak{a}$, значит, **$\mathfrak{a}$ действует на когомологиях M.**

ЗАМЕЧАНИЕ: Это удобный способ задавать **"соотношения Кэлера"** между всеми этими операторами.

Координатные операторы

Пусть V – евклидово пространство, v_i – его базис, $e_{v_i}: \Lambda^k V \longrightarrow \Lambda^{k+1} V$ оператор умножения на v_i, $e_{v_i}(\eta) = e_i \wedge \eta$. а $i_{v_i}: \Lambda^k V \longrightarrow \Lambda^{k-1} V$ сопряженный оператор, $i_{v_i} = *e_{v_i}*$.

УТВЕРЖДЕНИЕ: Операторы e_{v_i}, i_{v_i}, Id задают базис в **нечетной супералгебре Гейзенберга** $\mathfrak{H}$, где единственный нетривиальный суперкоммутатор задается $\{e_{v_i}, i_{v_j}\} = \delta_{i,j}\operatorname{Id}$.

Пусть теперь V, I, g – эрмитово n-мерное векторное пространство, а $\omega = \sum_{i=1}^n v_{2i-1} \wedge v_{2i}$ эрмитова форма. Определим **операторы Ходжа** $L(\alpha) = \omega \wedge \alpha$, и $\Lambda := L^*$.

ЗАМЕЧАНИЕ: Из соотношений в $\mathfrak{H}$, немедленно следует, что

$$H := [L, \Lambda] = \left[\sum e_{v_{2i-1}} e_{v_{2i}}, \sum i_{v_{2i-1}} i_{v_{2i}}\right] = \sum_{i=1}^{2n} e_{v_i} i_{v_i} - \sum_{i=1}^{2n} i_{v_i} e_{v_i},$$

скалярный оператор, действующий на k-формах умножением на $n-k$.

$\mathfrak{sl}(2)$-действие Лефшеца

СЛЕДСТВИЕ: Операторы L, Λ, H образуют алгебру Ли, изоморфную $\mathfrak{s}l(2)$, с соотношениями $[L,\Lambda] = H, \quad [H,L] = 2L, \quad [H,\Lambda] = -2\Lambda.$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: L, Λ, H называется **$\mathfrak{sl}(2)$-тройкой Лефшеца**.

ЗАМЕЧАНИЕ: Конечномерные представления $\mathfrak{sl}(2)$ **полупросты**..

ЗАМЕЧАНИЕ: Неприводимое представление V алгебры $\mathfrak{sl}(2)$ порождено **младшим вектором** $v \in V \ \ \Lambda(v) = 0$, $H(v) = -pv$, где $p \in \mathbb{Z}^{\geqslant 0}$, и вектора $v, L(v), L^2(v), ..., L^p(v)$ образуют его базис. **Такое представление однозначно задается числом p**, и обозначается V_p.

ЗАМЕЧАНИЕ: В таком базисе, H **действует диагонально:** $H(L^i(v)) = (2i-p)L^i(v)$.

ЗАМЕЧАНИЕ: Имеем $V_p = \operatorname{Sym}^p V_1$, где V_1 – стандартное (тавтологическое, фундаментальное) 2-мерное представление $\mathfrak{sl}(2)$.

СЛЕДСТВИЕ: Для конечномерного представления $\mathfrak{s}l(2)$, обозначим за $V^{(i)}$ собственное пространство H, $H\Big|_{V^{(i)}} = i$. Тогда L^i **определяет изоморфизм** $V^{(-i)} \xrightarrow{L^i} V^{(i)}$ **для любого** $i > 0$.

Теорема Лефшеца.

ЗАМЕЧАНИЕ: Следующая теорема сразу следует из теоремы о суперсимметрии (недоказанной).

ТЕОРЕМА: На компактном кэлеровом многообразии **$\mathfrak{sl}(2)$-операторы Лефшеца и оператор Вейля сохраняют дифференциальные формы.**

СЛЕДСТВИЕ: Любой класс когомологий представим как сумма замкнутых (p,q)-форм, что дает разложение $H^i(M) = \bigoplus_{p+q=i} H^{p,q}(M)$, причем $\overline{H^{p,q}(M)} = H^{q,p}(M)$.

СЛЕДСТВИЕ: Нечетные когомологии кэлерова многообразия четномерны.

СЛЕДСТВИЕ: Пусть M – компактное, кэлерово, комплексной размерности n, а $i + p + q = n$. Тогда L^i определяет **изоморфизм Лефшеца** $H^{p,q} \xrightarrow{L^i} H^{p+2i,q+2i}(M)$

Ромб Ходжа

$$
\begin{array}{ccccc}
 & & H^{n,n} & & \\
 & H^{n,n-1} & & H^{n-1,n} & \\
H^{n,n-2} & & H^{n-1,n-1} & & H^{n-2,n} \\
\vdots & & \vdots & & \vdots \\
H^{2,0} & & H^{1,1} & & H^{0,2} \\
 & H^{1,0} & & H^{0,1} & \\
 & & H^{0,0} & &
\end{array}
$$

Лекции 25-го октября не будет!
1-го ноября будет.

Основы кэлеровой геометрии,

лекция 6

Миша Вербицкий

НМУ/НОЦ, Москва

1 ноября 2010

Градуированные векторные пространства и алгебры

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Градуированное векторное пространство** есть пространство $V^* = \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} V^i$.

ЗАМЕЧАНИЕ: Еслу V^* градуировано, пространство эндоморфизмов $\operatorname{End}(V^*) = \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} \operatorname{End}^i(V^*)$ тоже градуировано,

$$\operatorname{End}^i(V^*) = \bigoplus_{j\in\mathbb{Z}} \operatorname{Hom}(V^j, V^{i+j}).$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Градуированная алгебра** (или "градуированная ассоциативная алгебра") есть алгебра $A^* = \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} A^i$ с умножением, которое совместимо с градуировкой: $A^i \cdot A^j \subset A^{i+j}$.

ЗАМЕЧАНИЕ: Билинейное отображение градуированных пространств, которое удовлетворяет $A^i \cdot B^j \subset C^{i+j}$, называется **градуированным**, или **совместимым с градуировкой**.

ЗАМЕЧАНИЕ: Категорию градуированных векторных пространств можно определить как **категорию векторных пространств с действием** $U(1)$; весовое разложение определяет градуировку по формуле $\rho(t)|_{A^n} = e^{2\pi\sqrt{-1}\,nt}$. Тогда **градуированная алгебра есть ассоциативная алгебра в категории пространств с $U(1)$-действием.**

Суперкоммутатор

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Оператор на градуированном пространстве называется **четным** (**нечетным**), если он сдвигает градуировку на четное (нечетное) число. **Четность** $\tilde{a}$ оператора a есть 0, если он четный, 1 если нечетный. Мы говорим, что оператор **чистый** если он четный или нечетный.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Суперкоммутатор** чистых элементов определяется формулой $\{a, b\} = ab - (-1)^{\tilde{a}\tilde{b}} ba$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Градуированная ассоциативная алгебра A^* называется **суперкоммутативной** если в A^* суперкоммутатор равен нулю.

ПРИМЕР: Алгебра Грассмана $\Lambda^* V$ суперкоммутативна.

Супералгебры Ли

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Супералгебра Ли** есть градуированное векторное пространство $\mathfrak{g}^*$ снабженное билинейным градуированным произведением $\{\cdot,\cdot\} : \mathfrak{g}^* \times \mathfrak{g}^* \longrightarrow \mathfrak{g}^*$, которое супер-антикоммутативно:

$$\{a,b\} = -(-1)^{\tilde{a}\tilde{b}}\{b,a\}$$

и удовлетворяет **супер-тождеству Якоби**

$$\{c,\{a,b\}\} = \{\{c,a\},b\} + (-1)^{\tilde{a}\tilde{c}}\{a,\{c,b\}\}$$

ПРИМЕР: Рассмотрим алгебру $\operatorname{End}^*(V^*)$ всех эндоморфизмов градуированного векторного пространства, с суперкоммутатором, определенным выше. Тогда $\operatorname{End}^*(V^*), \{\cdot,\cdot\}$ **есть супер-алгебра Ли**.

Лемма 1: Пусть d есть нечетный элемент супералгебры Ли над полем характеристики $\neq 2$, удовлетворяющий $\{d,d\} = 0$. **Тогда** $\{\{L,d\},d\} = 0$ для любого L.

Доказательство:

$$0 = \{L,\{d,d\}\} = \{\{L,d\},d\} + (-1)^{\tilde{L}}\{d,\{L,d\}\} = 2\{\{L,d\},d\}.$$

Оператор Ходжа $*$

Пусть V – вещественное векторное пространство. **Метрика на V индуцирует метрику на его тензорных пространствах**, $g(x_1 \otimes x_2 \otimes ... \otimes x_k, x'_1 \otimes x'_2 \otimes ... \otimes x'_k) = g(x_1, x'_1)g(x_2, x'_2)...g(x_k, x'_k)$

Это задает **невырожденное, положительно определенное скалярное произведение на дифференциальных формах** на римановом многообразии: $g(\alpha, \beta) := \int_M g(\alpha, \beta)\,\mathrm{Vol}_M$

Другая невырожденная форма задается формулой $\alpha, \beta \longrightarrow \int_M \alpha \wedge \beta$ **(спаривание Пуанкаре).**

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть M – риманово n-мерное многообразие. Определим **оператор Ходжа** $* : \Lambda^k M \longrightarrow \Lambda^{n-k} M$ формулой $g(\alpha, \beta) = \int_M \alpha \wedge * \beta.$

ЗАМЕЧАНИЕ: **Оператор Ходжа всегда существует**. В ортонормальном базисе $\xi_1, ..., \xi_n \in \Lambda^1 M$, его можно задать на мономах

$$*(\xi_{i_1} \wedge \xi_{i_2} \wedge ... \wedge \xi_{i_k}) = (-1)^s \xi_{j_1} \wedge \xi_{j_2} \wedge ... \wedge \xi_{j_{n-k}},$$

где $\xi_{j_1}, \xi_{j_2}, ..., \xi_{j_{n-k}}$ – дополнительный набор ковекторов, а s – сигнатура перестановки $(i_1, ..., i_k, j_1, ..., j_{n-k})$.

ЗАМЕЧАНИЕ: $*^2\big|_{\Lambda^k(M)} = (-1)^{k(n-k)}\,\mathrm{Id}_{\Lambda^k(M)}$

Суперсимметрия в кэлеровой геометрии

Пусть (M, I, ω) – кэлерово многообразие. Рассмотрим операторы, действующие на $\Lambda^*(M)$:

1. d, $d^* := - * d *$, $\Delta := dd^* + d^*d$

2. **Оператор Ходжа** $L(\alpha) := \omega \wedge \alpha$ и его сопряженный $\Lambda(\alpha) := *L * \alpha$.

3. **Оператор Вейля:** $\mathcal{W}\Big|_{\Lambda^{p,q}(M)} = \sqrt{-1}\,(p-q)$

ЗАМЕЧАНИЕ: Это вещественный оператор.

ТЕОРЕМА: Эти операторы порождают 9-мерную супералгебру Ли $\mathfrak{a}$, действующую на $\Lambda^*(M)$. Лапласиан Δ лежит в центре $\mathfrak{a}$, значит, **$\mathfrak{a}$ действует на когомологиях M.**

ЗАМЕЧАНИЕ: Это удобный способ задавать **"соотношения Кэлера"** между всеми этими операторами.

ЗАМЕЧАНИЕ: L, H, Λ порождают алгебру Ли $\mathfrak{sl}(2)$.

Интегрируемость и разложение Ходжа

УТВЕРЖДЕНИЕ: Почти комплексное многообразие интегрируемо тогда и только тогда, когда $(d^{1,0})^2 = 0$

ЗАМЕЧАНИЕ: Из интегрируемости вместе с теоремой Ньюлендера-Ниренберга легко выводится $(d^{1,0})^2 = 0$, потому что это верно в координатах.

Доказательство. Шаг 1:

$$d\eta(x,y) = \mathrm{Lie}_x(\eta(y)) - \mathrm{Lie}_y(\eta(x)) - \eta([x,y])$$

(формула Картана). Для $\eta \in \Lambda^{1,0}(M)$ и $x, y \in T^{0,1}(M)$, имеем

$$d\eta(x,y) = 0 \Leftrightarrow \eta([x,y]) = 0$$

то есть $d\eta \in \Lambda^{2,0}(M) \oplus \Lambda^{1,1}(M)$ **равносильно интегрируемости.**

Шаг 2: Получаем, что $d^{-1,2}\big|_{\Lambda^1(M)} = 0$ **равносильно интегрируемости.** Поскольку $d^{-1,2}$ удовлетворяет правилу Лейбница, а Λ^1 все порождает, **это равносильно $d^{-1,2} = 0$.**

ЗАМЕЧАНИЕ: На самом деле, $d^{-1,2}: \Lambda^{0,1}(M) \longrightarrow \Lambda^{2,0}(M)$ есть тензор Ниенхойса.

Интегрируемость и разложение Ходжа (2)

Шаг 3: Функции и замкнутые 1-формы порождают $\Lambda^*(M)$.

Шаг 4: Поскольку d и $d^{-1,2} + d^{0,1} + d^{1,0} + d^{2,-1}$ удовлетворяют соотношению Лейбница, их равенство достаточно проверить на функциях и на 1-формах. **Это дает** $d = d^{-1,2} + d^{0,1} + d^{1,0} + d^{2,-1}$.

Шаг 5: $(2,0)$-компонента $d^2 = 0$ дает $\{d^{0,1}, d^{0,1}\} + \{d^{-1,2}, d^{1,0}\} = 0$. **Значит,** $(d^{1,0})^2 = 0$ **равносильно** $\{d^{-1,2}, d^{1,0}\} = 0$**.**

Шаг 6: Оператор $d^{-1,2}$ – $C^\infty(M)$-линейный:

$$d^{-1,2}(f\eta) = d^{-1,2}(f) \wedge \eta + f d^{-1,2}(\eta) = f d^{-1,2}(\eta).$$

Шаг 7: Поскольку $d^{1,0}(f)$ порождает $(1,0)$-формы, а $d^{-1,2}$ линейный, $\{d^{-1,2}, d^{1,0}\}\big|_{C^\infty(M)} = 0$ **равносильно** $d^{-1,2} = 0$**.**

Шаг 8: Мы получили, что $(d^{1,0})^2 = 0$ **равносильно** $\{d^{-1,2}, d^{1,0}\}$**, что равносильно** $d^{-1,2} = 0$**.** ■

Скрученный дифференциал d^c

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **скрученный дифференциал** d^c определяется формулой $d^c := I^{-1} dI$.

УТВЕРЖДЕНИЕ: На комплексном многообразии, имеем $d^c = [\mathcal{W}, d]$.

Доказательство. Шаг 1: $d = d^{0,1} + d^{1,0} \Rightarrow$

$$I^{-1} dI|_{\Lambda^{p,q}} = \sqrt{-1}^{\,p-q} I^{-1}(d^{0,1} + d^{1,0})|_{\Lambda^{p,q}} = \sqrt{-1}\, d^{1,0} - \sqrt{-1}\, d^{0,1}.$$

Шаг 2:

$$\begin{aligned}[\mathcal{W}, d]|_{\Lambda^{p,q}} &= \sqrt{-1}\,(p-q+1)d^{1,0} + \sqrt{-1}\,(p-q-1)d^{0,1} - \sqrt{-1}\,(p-q)d \\ &= \sqrt{-1}\, d^{1,0} - \sqrt{-1}\, d^{0,1}.\end{aligned}$$

■

СЛЕДСТВИЕ: $\{d, d^c\} = \{d, \{d, \mathcal{W}\}\} = 0$ (Лемма 1).

СЛЕДСТВИЕ: Пусть (M, I) - комплексное многообразие. Тогда $\partial := \frac{d+\sqrt{-1}\, d^c}{2}$, $\overline{\partial} := \frac{d-\sqrt{-1}\, d^c}{2}$ **– компоненты в разложении Ходжа** d: $\partial = d^{1,0}$, $\overline{\partial} = d^{0,1}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: $d = d^{0,1} + d^{1,0}$, а $d^c = \sqrt{-1}\, d^{1,0} - \sqrt{-1}\, d^{0,1}$. ■

Дифференциал де Рама на кэлеровом многообразии

ТЕОРЕМА: **Следующие утверждения равносильны.**

1. I интегрируемо. 2. $\partial^2 = 0$. 3. $\overline{\partial}^2 = 0$. 4. $dd^c = -d^c d$ 5. $dd^c = 2\sqrt{-1}\,\partial\overline{\partial}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Равносильность интегрируемости и $\overline{\partial}^2 = 0$ доказана выше. $\overline{\partial}^2 = \frac{\{d,d^c\}}{2}$, что дает равносильность 3 и 4, а 5 получается из формулы $4\sqrt{-1}\,\partial\overline{\partial} = dd^c - d^c d$. ■

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Оператор $dd^c : \ \Lambda^{p,q}(M) \longrightarrow \Lambda^{p+1,q+1}(M)$ называется **плюрилапласиан**.

ТЕОРЕМА: (Соотношения Кэлера, они же соотношения Кодаиры).
На кэлеровом многообразии, имеем

$$[\Lambda, \partial] = \sqrt{-1}\,\overline{\partial}^*, \quad [\Lambda, \overline{\partial}] = -\sqrt{-1}\,\partial^*, \quad [L, \overline{\partial}^*] = -\sqrt{-1}\,\partial, \quad [L, \partial^*] = \sqrt{-1}\,\overline{\partial}.$$

Или, что эквивалентно,

$$[\Lambda, d] = (d^c)^*, \qquad [\Lambda, d^*] = -d^c, \qquad [L, d^c] = -d^*, \qquad [L, (d^c)^*] = d.$$

Доказательство этих соотношений будет позже.

Алгебраические дифференциальные операторы

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть A^* – градуированная суперкоммутативная алгебра. Пространство $D^i(A^*) \subset \operatorname{End}(A^*)$ **алгебраических дифференциальных операторов** определяется индуктивно,

1. $D^0(A)$ – пространство A^*-линейных эндоморфизмов, то есть $D^0(A^*) \cong A^* \subset \operatorname{End}(A^*)$.

2. Пусть L_a есть **оператор умножения,** $L_a(\eta) := a \cdot \eta$, где $a \in A^*$ Тогда $D^{n+1}(A^*)$ **– градуированное подпространство в** $\operatorname{End}(A^*)$**, состоящее из всех эндоморфизмов** $\rho \in \operatorname{End}(A^*)$ **(четных или нечетных), которые удовлетворяют** $\{L_a, \rho\} \in D^n(A^*)$**, для любого** $a \in A^*$**.**

ЗАМЕЧАНИЕ: Произведение дифференциальных операторов – дифференциальный оператор: $D^i(A^*)D^j(A^*) \subset D^{i+j}(A^*)$. Это следует из $\{a, bc\} = \{a, b\}c + (-1)^{\tilde{a}\tilde{b}} b\{a, c\}$.

ЗАМЕЧАНИЕ: Коммутатор дифференциальных операторов – оператор низшего порядка: $[D^i(A^*), D^j(A^*)] \subset D^{i+j-1}(A^*)$. Это следует из $\{a, \{b, c\}\} = \{\{a, b\}, c\} + (-1)^{\tilde{a}\tilde{b}}\{b, \{a, c\}\}$.

Дифференциальные операторы первого порядка

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Дифференцирование** $\delta : A^* \longrightarrow A^*$ – эндоморфизм, который удовлетворяет **правилу Лейбница:** $\delta(ab) = \delta(a)b + (-1)^{\tilde{a}\tilde{\delta}} a\delta(b)$, для любых $a, b \in A^*$.

ЗАМЕЧАНИЕ: **Дифференцирование алгебры есть дифференциальный оператор первого порядка:**

$$\{L_a, \delta\}(b) = a\delta(b) - (-1)^{\tilde{a}\tilde{\delta}}\delta(ab) = -(-1)^{\tilde{a}\tilde{\delta}}\delta(a)b.$$

УТВЕРЖДЕНИЕ: Пусть $D \in D^1(A^*)$ – дифференциальный оператор первого порядка. Тогда $D - L_{D(1)}$ – дифференцирование.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Достаточно доказать это в предположении, что $D(1) = 0$. Поскольку $\{D, L_a\}$ линейный, имеем

$$\begin{aligned} D(ab) - (-1)^{\tilde{a}\tilde{D}} aD(b) =& \{D, L_a\}(b) = \{D, L_a\}(1)b \\ =& D(a)b + (-1)^{\tilde{a}\tilde{D}} aD(1) = D(a)b. \end{aligned}$$

СЛЕДСТВИЕ: Дифференциальный оператор первого порядка на A **однозначно определяется значениями, которые он принимает на любом наборе мультипликативных генераторов A.**

Свойства коммутатора $[L_a, d^*]$.

УТВЕРЖДЕНИЕ: d^* **есть оператор второго порядка.**

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: В ортонормальном базисе $\xi_i \in TM$, d^* записывается как сумма $d^* = \sum \mathrm{Lie}_{\xi_i} i(\xi_i)$, где Lie есть производная Ли, а $i(\xi_i)$ – подстановка. Легко видеть, что $i(\xi_i)$ дифференцирование, значит, $Lie_{\xi_i} i(\xi_i)$ **произведение дифференцирований, то есть оператор второго порядка.** ■

СЛЕДСТВИЕ: Коммутатор $[L_a, d^*]$ **– дифференциальный оператор первого порядка,** для любого $a \in \Lambda^*(M)$.

ЗАМЕЧАНИЕ: $[L, d^*](1) = d^*\omega = C * d\omega^{n-1} = 0$, значит, $[L, d^*]$ **– дифференцирование.**

Доказательство соотношений Кодаиры

ЗАМЕЧАНИЕ: Имеем $*(\omega) = \frac{1}{(n-1)!2^{n-1}}\omega^{n-1}$, и $*(\eta) = \frac{1}{(n-1)!2^{n-1}}\omega^{n-1} \wedge I(\eta)$ для любой 1-формы η. Также $*(\omega \wedge \eta) = \frac{1}{(n-2)!2^{n-2}}\omega^{n-2} \wedge I(\eta)$.

Доказательство соотношений Кодаиры. Шаг 1: На функциях $[L, d^*]$ действует как $[L, d^*](f) = -\frac{1}{(n-1)!2^{n-1}} * df \wedge \omega^{n-1} = -d^c f$.

Шаг 2: Значит, $d^* d^c f = d^*[L, d^*]f = -[L, d^*]d^* f = 0$ (Лемма 1).

Шаг 3: Следовательно, на d^c-замкнутых 1-формах η имеем

$$[L, d^*]\eta = -d^* L(\eta) = \pm\frac{1}{(n-2)!2^{n-2}} * d(\omega^{n-2} \wedge I(\eta)) = 0.$$

Шаг 4: Мы получили, что $[L, d^*] = -d^c$ на функциях и на d^c-замкнутых 1-формах. Поскольку они порождают $\Lambda^*(M)$, а $[L, d^*]$ и $-d^c$ – дифференцирования, **эти операторы равны.** ■

Операторы Лапласа и суперкоммутаторы

ТЕОРЕМА: Пусть

$$\Delta_d := \{d, d^*\}, \quad \Delta_{d^c} := \{d^c, d^{c*}\}, \quad \Delta_\partial := \{\partial, \partial^*\}, \Delta_{\overline{\partial}} := \{\overline{\partial}, \overline{\partial}^*\}.$$

Тогда $\Delta_d = \Delta_{d^c} = 2\Delta_\partial = 2\Delta_{\overline{\partial}}$. В частности, Δ_d **сохраняет разложение Ходжа.**

Доказательство. Шаг 1: Имеем $\{d, d^c\} = 0$ (интегрируемость).

Шаг 2: Соотношение Якоби: $\{d, d^*\} = -\{d, \{\Lambda, d^c\}\} = \{\{\Lambda, d\}, d^c\} = \{d^c, d^{c*}\}$. Аналогичное вычисление с $\partial, \overline{\partial}$ дает $\Delta_\partial = \Delta_{\overline{\partial}}$.

Шаг 3: $\{\partial, \overline{\partial}^*\} = \sqrt{-1}\{\partial, \{\Lambda, \partial\}\} = 0$ (Лемма 1). То же вычисление показывает, что **все антикоммутаторы вида $\{\partial, \overline{\partial}^*\}$ и так далее зануляются,** кроме $\{\partial, \partial^*\}$ и $\{\overline{\partial}, \overline{\partial}^*\}$. Это дает $\Delta_d = \Delta_\partial + \Delta_{\overline{\partial}}$. ■

СЛЕДСТВИЕ: Лапласиан коммутирует с d, d^c, d^*, d^{c*} (Lemma 1), и с L, Λ, H в силу $[L, \Delta] = [L, \{d, d^*\}] = \{d, [L, d^*]\} = \{d, d^c\}$. Значит, **это центральный элемент.**

ЗАМЕЧАНИЕ: Мы доказали, что $L, \Lambda, d, \mathcal{W}$ **порождают супералгебру размерности** $(5|4)$ **с одномерным центром** $\mathbb{R}\Delta$.

Основы кэлеровой геометрии,

лекция 7

Миша Вербицкий

НМУ/НОЦ, Москва

8 ноября 2010

dd^c-лемма

ТЕОРЕМА: Пусть η - форма на компактном кэлеровом многообразии, которая удовлетворяет какому-то из условий
1. η – точная (p,q)-форма. 2. η – d^c-точная, d-замкнутая.
3. η – ∂-точная, $\overline{\partial}$-замкнутая.
Тогда $\eta \in \operatorname{im} dd^c = \operatorname{im} \partial\overline{\partial}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Отметим сразу, что во всех трех случаях η **замкнута и ортогональна ядру Лапласа, значит, ее класс когомологий равен нулю.**

Поскольку η точна, она лежит в образе Δ. Оператор $G_\Delta := \Delta^{-1}$ определен на образе Δ (который замкнут) и коммутирует с d, d^c. Значит, $\eta' := G_\Delta(\eta)$ тоже точно. $\Delta = [\Lambda, dd^c]$ дает

$$\eta = \Delta(\eta') = [\Lambda, dd^c](\eta') = dd^c\Lambda\eta'.$$

■

ЗАМЕЧАНИЕ:

$$\Delta G_\Delta(\eta) = dd^* + d^*dG_\Delta(\eta) = d^*G_\Delta(d\eta) + dd^*G_\Delta(\eta) = \eta$$

для любой точной формы η. Значит, **d^*G_Δ обращает d на точных формах.**

Операции Масси

ЗАМЕЧАНИЕ: Пусть $a, b, c \in \Lambda^*(M)$ замкнутые формы, классы когомологий которых удовлетворяют $[a][b] = [b][c] = 0$, а $\alpha, \gamma \in \Lambda^*(M)$ такие формы, что $d(\alpha) = a \wedge b$, $d(\gamma) = b \wedge c$. **Тогда $\alpha \wedge c - a \wedge \gamma$ – замкнутая форма, и ее класс когомологий определен однозначно** по модулю $\operatorname{im} L_{[a]} + \operatorname{im} L_{[c]}$ (по модулю умножения на классы $[a]$, $[c]$).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Класс когомологий $\alpha \wedge c + a \wedge \gamma$ называется **произведением Масси** a, b, c.

УТВЕРЖДЕНИЕ: На кэлеровом многообразии, произведения Масси равны нулю.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Пусть a, b, c – гармонические p, q-формы, тогда ab и bc – dd^c-точные p, q-формы, значит, $\alpha := d^* G_\Delta(ab)$ и $\gamma := d^* G_\Delta(bc)$ d^c-точные. Поэтому $\mu := \alpha \wedge c - a \wedge \gamma$ – d^c-точная, d-замкнутая форма. В силу dd^c-леммы, $I(\mu)$ dd^c-точна, значит μ тоже dd^c-точна. ■

ЗАМЕЧАНИЕ: $I^{-1} dd^c I = dd^c$.

Теорема Хартогса

ТЕОРЕМА: Пусть f – голоморфная функция на $\mathbb{C}^n \backslash K$, где $K \subset \mathbb{C}^n$ – компакт, а $n > 1$. **Тогда f продолжается до голоморфной функции на $\mathbb{C}^n$.**

Доказательство. Шаг 1: Продолжим f до гладкой функции $\tilde{f}$, голоморфной вне компакта $K' \subset \mathbb{C}^n$. **Тогда $\alpha := \overline{\partial}\tilde{f}$ – (0,1)-форма с компактным носителем.**

Шаг 2: Вложив $\mathbb{C}^n$ в $\mathbb{C}P^n$, представим α как (0,1)-форму с компактным носителем на $\mathbb{C}P^n$. Поскольку $H^1(\mathbb{C}P^n) = 0$, получаем $\operatorname{im}\overline{\partial} = \ker\overline{\partial}$, это дает $\alpha = \overline{\partial}\varphi$, где φ – ограниченная функция на $\mathbb{C}^n$.

Шаг 3: φ голоморфна и ограниченна на любой прямой, не пересекающей K', значит, **φ постоянна на каждой комплексной прямой, не пересекающей K'.**

Шаг 4: Поэтому $\varphi = const$ вне выпуклой оболочки $U(1) \cdot K'$. Вычтем константу, получим, что **φ – функция с компактным носителем.**

Шаг 5: $\overline{\partial}(\tilde{f} - \varphi) = \alpha - \alpha = 0$, **значит, $\tilde{f} - \varphi$ – голоморфная функция.** ■

Обобщенные функции

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Рассмотрим векторное пространство, снабженное набором норм $|\cdot|_i$, $i = 0, 1, 2, ...$ и топологией, которая задана метрикой вида

$$d(x, y) = \sum_{i=0}^{\infty} 2^{-i} \min(|x - y|_i, 1).$$

Такое пространство называется **пространством Фреше**, если эта метрика полна.

ЗАМЕЧАНИЕ: Базой топологии Фреше будут бесконечные пересечения ε-шаров вида $\bigcup_{i=0}^{\infty} B_x(\varepsilon, |\cdot|_i)$, во всех метриках $|\cdot|_i$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть M — риманово многообразие, а

$$\nabla^i : C^\infty(M) \longrightarrow \Lambda^1(M)^{\otimes i}$$

– i-я степень связности. Топология C^k на пространстве $C^\infty(M)_c$ функций с компактным носителем задается нормой

$$|\varphi|_{C^k} := \sup_M \sum_{i=0}^{k} |\nabla^i \varphi|.$$

Обобщенные функции (2)

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Пространство тест-функций** – пространство функций с компактным носителем, с метрикой вида

$$d(x, y) = \sum_{i=0}^{\infty} 2^{-i} \min(|x - y|_{C^i}, 1).$$

УПРАЖНЕНИЕ: Докажите, что это пространство Фреше.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Обобщенная функция** (распределение) это функционал на пространстве тест-функций, непрерывный в одной из топологий C^i.

ЗАМЕЧАНИЕ: **Это то же самое, что непрерывность функционала в топологии Фреше.**

ПРИМЕР: **Дельта-функция** δ_t – функционал, ставящий φ в соответствие $\varphi(t)$, где $t \in M$ – точка. **Дельта-функция непрерывна в топологии C^0, ее производная непрерывна в C^1, и так далее.**

Потоки на многообразиях

ЗАМЕЧАНИЕ: **C^i-топологии** определяются на пространстве сечений любого расслоения, той же формулой.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Пространство тест-форм типа (p,q)** на комплексном многообразии – это пространство (p,q)-форм с компактным носителем, снабженное структурой пространства Фреше, где нормы $|\cdot|_i$ равны C^i.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **(p,q)-поток** на комплексном n-мерном многообразии есть функционал на пространстве $\Lambda_c^{n-p,n-q}(M)$ $(n-p,n-q)$-форм с компактным носителем, непрерывный в одной из C^i-топологий.

ЗАМЕЧАНИЕ: Потоки это (p,q)-формы с коэффициентами в обобщенных функциях.

ЗАМЕЧАНИЕ: **Гладкая (p,q)-форму ψ определяет (p,q)-поток:** для любой тест-формы $\alpha \in \Lambda_c^{n-p,n-q}(M)$, рассмотрим функционал $\alpha \longrightarrow \int_M \psi \wedge \alpha$. Это задает вложение $\Lambda^{p,q}(M) \hookrightarrow \mathcal{D}^{p,q}(M)$ из форм в потоки.

ЗАМЕЧАНИЕ: **Потоки это пополнение $\Lambda^{p,q}(M)$ в топологии, двойственной топологии на тест-формах.**

Когомологии потоков

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Дифференцирование вдоль векторного поля непрерывно в топологии потоков, значит, **на пространстве потоков определен дифференциал де Рама,** продолженный по непрерывности из пространства форм, а также дифференциалы Дольбо ∂ и $\overline{\partial}$

ЗАМЕЧАНИЕ: Дифференциал де Рама на потоках можно определить формулой $\langle d\alpha, \tau\rangle := -(-1)^{\tilde{\alpha}}\langle \alpha, d\tau\rangle$, где α – поток, а τ – тест-форма.

УПРАЖНЕНИЕ: Докажите лемму Пуанкаре для потоков.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть $f: X \longrightarrow Y$ – собственный морфизм комплексных многообразий, $\dim_{\mathbb{C}} X = \dim_{\mathbb{C}} Y + k$ а α – поток на X. Определим **прямой образ** $f_*\alpha$ формулой $\langle f_*\alpha, \tau\rangle := \langle \alpha, f^*\tau\rangle$ Легко видеть, что **$f_*\alpha$ имеет размерность $(p-k, q-k)$.**

ЗАМЕЧАНИЕ: $df_*\alpha = f_*d\alpha$, $\partial f_*\alpha = f_*\partial\alpha$, и так далее.

ЗАМЕЧАНИЕ: У потоков **не определен** обратный образ, зато определен прямой. У форм нет прямого образа, зато есть обратный.

Формула Пуанкаре-Лелонга

УТВЕРЖДЕНИЕ: (Формула Пуанкаре-Лелонга) Рассмотрим поток на $\mathbb{C}$, заданный формулой $\frac{1}{\pi z}dz$. **Тогда $d\left(\frac{1}{\pi z}dz\right) = \delta_0 \operatorname{Vol}$,** где δ_0 есть δ-функция в 0.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Формула Коши: для любой функции f на диске D, і $w \in D$, имеем

$$f(w) = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_{\partial D} \frac{f(z)}{z-w} dz - \frac{1}{\pi} \int_D \frac{\overline{\partial} f}{z-w} \wedge dz$$

применив это к тест-функции f с компактным носителем внутри D, получим $f(w) = -\langle \frac{1}{\pi z} dz, \overline{\partial} f \rangle = \langle \overline{\partial}(\frac{1}{\pi z}) dz, f \rangle$.

СЛЕДСТВИЕ: Пусть $\pi_1, \pi_2 : \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C}$ – проекции, а ξ – (2,1)-поток на $\mathbb{C}^2$, заданный формулой $\frac{1}{\pi(z-w)} dz \wedge dw \wedge d\overline{w}$. Рассмотрим **свертку с потоком ξ**, заданную формулой $P_\xi(\tau) := \pi_{2*}(\pi_1^* \tau \wedge \xi)$. Тогда $\overline{\partial} P_\xi(\alpha) = \alpha$, для любой $(0,1)$-формы α с компактным носителем.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО:

$$\overline{\partial} P_\xi(\alpha) = \pi_{2*}(\pi_1^* \tau \wedge \overline{\partial} \xi) = \pi_{2*}(\pi_1^* \tau \wedge \delta_\triangle) = \tau,$$

где $\delta_\triangle$ есть дельта-функция диагонали $\triangle$, определенная формулой $\langle \kappa, \delta_\triangle \rangle := \int_\triangle \kappa$. ■

Основы кэлеровой геометрии,

лекция 8

Миша Вербицкий

НМУ/НОЦ, Москва

15 ноября 2010

Лемма Пуанкаре-Дольбо-Гротендика

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Полидиск** D^n есть произведение дисков $D \subset \mathbb{C}$.

ТЕОРЕМА: **(Лемма Пуанкаре-Дольбо-Гротендика)**
Пусть $\eta \in \Lambda^{0,p}(D^n)$ – $\overline{\partial}$-замкнутая форма на полидиске, гладко продолжающаяся в окрестность $D^n \subset \mathbb{C}^n$, и $p > 0$. Тогда η $\overline{\partial}$-точна.

ЗАМЕЧАНИЕ: В прошлой лекции, мы доказали, что для любой $(0,1)$-формы η с компактным носителем на $\mathbb{C}$, $\eta = \overline{\partial}\alpha$**, где** $\alpha \in C^\infty\mathbb{C}$ **гладкая функция** (не обязательно с компактным носителем, но убывающая как $1/|z|$).

ЗАМЕЧАНИЕ: Из этого следует **лемма Пуанкаре-Дольбо-Гротендика для** $n = 1$**.** Действительно, любая форма η на диске, продолжающаяся в окрестность $D \subset \mathbb{C}$, продолжается до формы на $\mathbb{C}$ с компактным носителем, значит, **лежит в образе** $\overline{\partial}$**.**

ЗАМЕЧАНИЕ: Воспользовавшись разложением $\Lambda^{p,q}(D^n) \cong \Lambda^{p,0}(D^n) \otimes \Lambda^{0,q}(D^n)$, каждую форму можно предствить в виде суммы вида $\sum \alpha_i^{0,q} \wedge P_i^{p,0}$, где P_i – полиномы от координатных ковекторов dz_i с постоянными коэффициентами. Поскольку $\overline{\partial}(\alpha_i^{0,q} \wedge P_i^{p,0}) = \overline{\partial}(\alpha_i^{0,q}) \wedge P_i^{p,0}$, **лемму Пуанкаре-Дольбо-Гротендика достаточно доказывать для** $(0,q)$**-форм.**

Доказательство леммы Пуанкаре-Дольбо-Гротендика

Шаг 1: Пусть $\overline{\partial}_i : \Lambda^{0,q}(D^n) \longrightarrow \Lambda^{0,q+1}(D^n)$ есть оператор $\alpha \longrightarrow d\overline{z}_i \wedge \frac{d}{d\overline{z}_i}\alpha$, где z_i есть i-я координата на D^n. **Тогда $\overline{\partial} = \sum_i \overline{\partial}_i$.**

Шаг 2: В силу леммы Пуанкаре-Дольбо-Гротендика для $n = 1$, когомологии $\overline{\partial}_i$ равны нулю. Обозначим за γ_i соответствующий оператор P_ξ, построенный в прошлой лекции. Если $\alpha = d\overline{z}_i \wedge \beta$, то $\{\overline{\partial}_i, \gamma_i\}(\alpha) = \alpha$, если в разложении α нет членов с $d\overline{z}_i$, то $\overline{\partial}_i\{\overline{\partial}_i, \gamma_i\}(\alpha) = 0$. Из этого следует, что $\operatorname{im}\Big[\{\overline{\partial}_i, \gamma_i\} - \operatorname{Id}\Big]$ **лежит в пространстве R_i форм, в разложении которых нет $d\overline{z}_i$, а все коэффициенты голоморфны по z_i.**

Шаг 3: Свойства γ_i:
1. $\operatorname{im}\Big[\{\overline{\partial}_i, \gamma_i\} - \operatorname{Id}\Big] \subset R_i$. **2.** $\{\overline{\partial}_i, \gamma_j\} = 0$, **если** $i \neq j$. **3.** $\Big[\{\overline{\partial}_i, \gamma_i\}\Big]\Big|_{R_i} = 0$. **4.** $\gamma_i(R_j) \subset R_j$, $\overline{\partial}_i(R_j) \subset R_j$ **для** $i \neq j$.
Свойство 1 доказано в шаге 2, 3 следует из того, что на формах α без $d\overline{z}_i$ в разложении имеем $\{\gamma_i, \overline{\partial}\}(\alpha) = \gamma_i(\overline{\partial}_i(\alpha))$. Свойства 2 и 4 следуют из явной формулы для γ_i.

Шаг 4: В силу свойств 1, 3 и 4,

$$\Big[\{\overline{\partial}_i, \gamma_i\} - \operatorname{Id}\Big]\,(R_{i_1} \cap R_{i_2} \cap ... \cap R_{i_k}) \subset R_i \cap R_{i_1} \cap R_{i_2} \cap ... \cap R_{i_k}$$

для $i \neq i_1, i_2, ..., i_k$, и $\{\overline{\partial}_i, \gamma_i\}\Big|_{R_{i_1} \cap R_{i_2} \cap ... \cap R_{i_k}} = 0$ в противном случае.

Доказательство леммы Пуанкаре-Дольбо-Гротендика (2)

Шаг 4: $\left[\{\bar\partial_i, \gamma_i\} - \operatorname{Id}\right](R_{i_1}\cap R_{i_2}\cap ... \cap R_{i_k}) \subset R_i \cap R_{i_1}\cap R_{i_2}\cap ... \cap R_{i_k}$ **для** $i \neq i_1, i_2, ..., i_k$**, и** $\{\bar\partial_i, \gamma_i\}\Big|_{R_{i_1}\cap R_{i_2}\cap ... \cap R_{i_k}} = 0$ **в противном случае.**

Шаг 5: Пусть $\gamma := \sum_i \gamma_i$. Поскольку $\{\bar\partial_i, \gamma_j\} = 0$ при $i \neq j$, шаг 4 дает

$$\left[\{\bar\partial, \gamma\} - (n-k)\operatorname{Id}\right](R_{i_1}\cap R_{i_2}\cap ... \cap R_{i_k}) \subset \sum_{i\neq i_1, i_2, ..., i_k} R_i \cap R_{i_1}\cap R_{i_2}\cap ... \cap R_{i_k}$$

Шаг 6: Пусть W_0 есть пространство $(0,q)$-форм на D^n, допускающих продолжение в некоторую окрестность D^n, а $W_k \subset W_{k-1} \subset ...$ – подпространство, порожденное всеми $R_{i_1}\cap R_{i_2}\cap ... \cap R_{i_k}$ для $i_1 < i_2 < ... < i_k$. В силу предыдущего шага, $\left[\{\bar\partial, \gamma\} - (n-k)\operatorname{Id}\right]\Big|_{W_k} \subset W_{k+1}$.

Шаг 7: Легко видеть, что W_0 состоит из голоморфных функций, которые являются $(0,p)$-формами, то есть пусто в силу $p > 0$. **Воспользовавшись индукцией, можно считать, что каждая $\bar\partial$-замкнутая форма в W_{k+1} $\bar\partial$-точна.** Пусть $\alpha \in W_k$ $\bar\partial$-замкнута. Тогда $(n-k)\alpha - \{\bar\partial, \gamma\}(\alpha) = (n-k)\alpha - \bar\partial\gamma(\alpha)$ лежит в W_{k+1}, то есть точна. **Получаем** $(n-k)\alpha - \bar\partial\gamma(\alpha) = \bar\partial\eta$.

■

Пучки

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Пучок** $\mathcal{F}$ на топологическом пространстве M – это набор векторных пространств $\mathcal{F}(U)$, заданных для каждого открытого подмножества $U \subset M$, с **отображениями ограничения** $\mathcal{F}(U) \xrightarrow{\varphi_{U,U'}} \mathcal{F}(U')$ для каждого $U' \subset U$, и следующими свойствами

(1) **Композиция ограничений – снова ограничение:** если $U_1 \subset U_2 \subset U_3$ вложенные открытые множества, а φ_{U_1,U_2}, φ_{U_2,U_3} соответствующие отображения ограничений, то $\varphi_{U_1,U_2} \circ \varphi_{U_2,U_3} = \varphi_{U_1,U_3}$.

(2) Если $U = \bigcup U_i$, а ограничение $f \in \mathcal{F}(U)$ на все U_i равно нулю, то $f = 0$.

(3) ("склейка сечений") Пусть $\{U_i\}$ – покрытие множества $U \subset M$, а $f_i \in \mathcal{F}(U_i)$ набор сечений, заданных для каждого элемента покрытия, и удовлетворяющих условию $f_i\big|_{U_i \cap U_j} = f_j\big|_{U_i \cap U_j}$, для любой пары элементов покрытия. **Тогда существует $f \in \mathcal{F}(U)$ такой, что ограничения f на U_i дает f_i.**

Пространство $\mathcal{F}(U)$ называется **пространство сечений пучка $\mathcal{F}$ над U**, оно также обозначается $\mathcal{F}|_U$.

Паракомпактные многообразия

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Покрытие** топологического пространства M есть набор открытых множеств $\{U_i\}$ такой, что $\bigcup U_i = M$. **Измельчение** покрытия $\{U_i\}$ есть покрытие $\{V_i\}$, такое, что каждый V_i содержится в каком-то из U_i.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Топологическое пространство M называется **паракомпактным**, если любое покрытие M допускает локально конечное измельчение.

ЗАМЕЧАНИЕ: Любое паракомпактное многообразие M обладает следующим свойством. Каждое покрытие M допускает пару конечных измельчений $\{U_i\}$, и $\{V_i\}$ пронумерованных тем же набором индексов, причем все замыкания $\overline{U}_i$ компактны и содержатся в V_i.

ЗАМЕЧАНИЕ: **В дальнейшем все многообразия предполагаются паракомпактными.**

Носитель сечения пучка

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Носитель** сечения f пучка есть дополнение к объединению всех открытых множеств $U \subset M$ таких, что $f|_U = 0$.

УТВЕРЖДЕНИЕ: Пусть $f \in \mathcal{F}|_U$ – сечение пучка на многообразии $M \ni U$, причем носитель сечения f замкнут в M. **Тогда f принадлежит образу отображения ограничения $\Gamma_M(\mathcal{F}) \longrightarrow \Gamma_U(\mathcal{F})$.**

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Рассмотрим покрытие $\{U_1 := U, U_2 := M\backslash K\}$, и пусть $f_1 \in \Gamma_{U_1}(\mathcal{F}) = f$, а $f_2 \in \Gamma_{U_2}(\mathcal{F}) = 0$. Тогда $f_i\Big|_{U_1\cap U_2} = 0$, склеив их, обретем искомое. ∎

Разбиение единицы на пучке

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть $\{U_i\}$, $\{V_i\}$ – пара локально конечных покрытий M, пронумерованных тем же набором индексов, причем для любого i замыкание V_i компактно, а замыкание U_i компактно и содержится в V_i. Обозначим за $F^c|_U$ группу сечений с компактным носителем над U. **Разбиение единицы** для пучка F есть такой набор гомоморфизмов $\psi_i: F|_{V\,i} \longrightarrow F^c|_{V\,i}$, и $\varphi_i: F|_{V\,i} \longrightarrow F^c|_{V\,i}$, что

(i) $\sum_i \psi_i(f) = f$ **для любого сечения** f

(ii) ψ_i **обратимо на** U_i**:** $\varphi_i(\psi_i(f))\Big|_{U_i} = f\Big|_{U_i}$

Пучок называется **тонким**, если он допускает разбиение единицы для любой пары таких покрытий.

ЗАМЕЧАНИЕ: Все пучки модулей над $C^\infty(M)$ и $C^i(M)$ – тонкие.

Ростки пучка

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Росток** пучка $\mathcal{F}$ в замкнутом множестве $Z \subset M$ есть класс эквивалентности сечений $\mathcal{F}$ в окрестностях Z, по следующему отношению эквивалентности. Сечения $f \in \mathcal{F}|_U$ и $f' \in \mathcal{F}|_U{}'$ эквивалентны, если $f|_U = f'|_U$ для окрестности Z, $U \subset U_1 \cap U_2$.

УТВЕРЖДЕНИЕ: Если $\mathcal{F}$ – тонкий пучок, а $x \subset M$ – точка то **естественное отображение $\Gamma_M(\mathcal{F}) \longrightarrow \Gamma(\mathcal{F})$ в соответствующее пространство ростков сюрьективно.**

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: : Возьмем росток f, определенный в $U \ni x$, ограничим его на $V_i \supset U_i \ni x$ в покрытии, связанном с разбиением единицы, тогда $\varphi_i(\psi_i(f))|_{U\,i} = f|_{U\,i}$. Значит, $f' := \varphi_i(\psi_i(f))$ **имеет тот же росток.** Это сечение продолжается до сечения $\Gamma_M(\mathcal{F})$, потому что у него компактный носитель.■

Ацикличные пучки

ЗАМЕЧАНИЕ: $0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0$ **является точной последовательностью пучков $\Leftrightarrow$ соответствующие последовательности ростков точные для каждого $x \in M$.**

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Функтор Φ из категории пучков в векторные пространства называется **точным слева** если любая точная последовательность пучков $0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0$ переводится в точную слева последовательность $0 \longrightarrow \Phi(A) \longrightarrow \Phi(B) \longrightarrow \Phi(C)$.

ПРИМЕР: Функтор глобальных сечений $\mathcal{F} \longrightarrow \Gamma_M(\mathcal{F})$ точен слева.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пучок A называется **ацикличным** , если для любого $U \subset M$ и точной последовательности пучков $0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0$, последовательность $0 \longrightarrow \Gamma_U(A) \longrightarrow \Gamma_U(B) \longrightarrow \Gamma_U(C) \longrightarrow 0$ точна.

УТВЕРЖДЕНИЕ: Любой тонкий пучок ацикличен.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть $0 \longrightarrow F \longrightarrow F_1 \longrightarrow F_2 \longrightarrow ...$ – точная последовательность пучков, которые ацикличны, начиная с F_1. Такая последовательность называется **ацикличной резольвентой** F.

Когомологии пучков

ЗАМЕЧАНИЕ: В силу леммы Пуанкаре-Дольбо-Гротендика, $\Omega^p(M) \hookrightarrow \Lambda^{p,0}(M) \xrightarrow{\overline{\partial}} \Lambda^{p,1}(M) \xrightarrow{\overline{\partial}} \Lambda^{p,2}(M) \xrightarrow{\overline{\partial}} ...$ **– ацикличная резольвента пучка голоморфных дифференциальных форм.**

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть $F \longrightarrow F_1 \longrightarrow F_2 \longrightarrow ...$ – ацикличная резольвента. **Группа когомологий $H^i(F)$** определяется как i-я группа когомологий соответствующего комплекса глобальных сечений,

$$\Gamma_M(F) \longrightarrow \Gamma_M(F_1) \longrightarrow \Gamma_M(F_2) \longrightarrow ...$$

УТВЕРЖДЕНИЕ: (Свойства когомологий):

1. Группы $H^i(F)$ **не зависят от выбора ацикличной резольвенты.**

2. $H^i(F) = 0$ **для всех $i > 0$ тогда и только тогда, когда F ацикличен.**

3. Для любой точной последовательности пучков $0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0$ имеет место **длинная точная последовательность**

$$0 \longrightarrow H^0(A) \longrightarrow H^0(B) \longrightarrow H^0(C) \longrightarrow H^1(A) \longrightarrow H^1(B) \longrightarrow H^1(C) \longrightarrow ...$$

Основы кэлеровой геометрии,

лекция 9

Миша Вербицкий

НМУ/НОЦ, Москва

22 ноября 2010

Векторные расслоения

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Векторное расслоение на гладком многообразии есть локально тривиальный пучок $C^\infty M$-модулей.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Тотальное пространство $\operatorname{Tot} B$векторного расслоения есть пространство всех пар $x \in M, b \in B_x/\mathfrak{m}_x B$, где B_x означает пространство ростков B в x, а $\mathfrak{m}_x$ – максимальный идеал, снабженное естественной топологией и гладкой структурой. **Тотальное пространство расслоения гладко расслоено над M** со слоем $B_x/\mathfrak{m}_x B = \mathbb{R}^n$, где n есть ранк B. **Слой** векторного расслоения в точке x есть $B_x/\mathfrak{m}_x B$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Сечением гладкого расслоения называется гладкое отображение $M \longrightarrow \operatorname{Tot} B$, переводящее $x \in M$ в точку $(x \in M, b \in B_x/\mathfrak{m}_x B)$.

УТВЕРЖДЕНИЕ: Множество сечений гладкого расслоения **естественно отождествено с множеством сечений соответствующего пучка.**

Голоморфные расслоения

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Голоморфное векторное расслоение** на гладком многообразии есть локально тривиальный пучок $\mathcal{O}_M$-модулей.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Тотальное пространство** голоморфного расслоения есть пространство всех пар $x \in M, b \in B_x/\mathfrak{m}_x B$, где B_x означает пространство ростков B в x, а $\mathfrak{m}_x$ – максимальный идеал, снабженное естественной топологией и голоморфной структурой.

УТВЕРЖДЕНИЕ: Множество голоморфных сечений голоморфного расслоения **естественно отождествено с множеством сечений соответствующего пучка.**

УТВЕРЖДЕНИЕ: Пусть B – голоморфное расслоение. Рассмотрим пучок $B_{C^\infty} := B \otimes_{\mathcal{O}_M} C^\infty M$. **Тогда B_{C^∞} - локально тривиальный пучок $C^\infty M$-модулей.**

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: B_{C^∞} называется **гладкое векторное расслоение, ассоциированное с голоморфным расслоением B.**

ЗАМЕЧАНИЕ: Естественное отображение $\operatorname{Tot}(B) \longrightarrow \operatorname{Tot}(B_{C^\infty})$ задает изоморфизм гладких многообразий

$\overline{\partial}$-оператор на расслоении

ЗАМЕЧАНИЕ: Пусть M – комплексное многообразие. Тогда **оператор $\overline{\partial}: C^\infty M \longrightarrow \Lambda^{0,1}(M)$ $\mathcal{O}_M$-линейный**.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть B – голоморфное расслоение. Рассмотрим оператор $\overline{\partial}: B_{C^\infty} \longrightarrow B_{C^\infty} \otimes \Lambda^{0,1}(M)$, переводящий $b \otimes f$ в $b \otimes \overline{\partial} f$, где $b \in B$ голоморфное сечение, а f гладкая функция. Этот оператор зовется **оператор голоморфной структуры** на голоморфном расслоении. **Он определен корректно в силу $\mathcal{O}_M$-линейности $\overline{\partial}$.**

ЗАМЕЧАНИЕ: Ядро $\overline{\partial}: B_{C^\infty} \longrightarrow B_{C^\infty} \otimes \Lambda^{0,1}(M)$ **совпадает с образом B** при естественном вложении $B \hookrightarrow B_{C^\infty}$, $b \longrightarrow b \otimes 1$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **$\overline{\partial}$-оператор** на гладком комплексном векторном расслоении V над есть оператор $V \xrightarrow{\overline{\partial}} \Lambda^{0,1}(M) \otimes V$, удовлетворяющий $\overline{\partial}(fb) = \overline{\partial}(f) \otimes b + f\overline{\partial}(b)$ для любых $f \in C^\infty M, b \in V$.

ЗАМЕЧАНИЕ: $\overline{\partial}$-оператор **можно продолжить до**

$$\overline{\partial}: \Lambda^{0,i}(M) \otimes V \longrightarrow \Lambda^{0,i+1}(M) \otimes V,$$

по формуле $\overline{\partial}(\eta \otimes b) = \overline{\partial}(\eta) \otimes b + (-1)^{\tilde{\eta}} \eta \wedge \overline{\partial}(b)$, где $b \in V$ и $\eta \in \Lambda^{0,i}(M)$.

Оператор голоморфной структуры

$$V \xrightarrow{\overline{\partial}} \Lambda^{0,1}(M) \otimes V \xrightarrow{\overline{\partial}} \Lambda^{0,2}(M) \otimes V \xrightarrow{\overline{\partial}} \Lambda^{0,3}(M) \otimes V \xrightarrow{\overline{\partial}} ...$$

ЗАМЕЧАНИЕ: **Легко видеть, что $\overline{\partial}^2 = 0$,** если $\overline{\partial}$ – оператор голоморфной структуры на голоморфном расслоении B.

ТЕОРЕМА: (Атья-Ботт) Пусть $\overline{\partial}: \ V \longrightarrow \Lambda^{0,1}(M) \otimes V$ – $\overline{\partial}$-оператор на комплексном векторном расслоении, причем $\overline{\partial}^2 = 0$. **Тогда $B := \ker \overline{\partial} \subset V$ есть голоморфное расслоение того же ранга, и $V = B_{\mathbb{C}^\infty}$.**

ЗАМЕЧАНИЕ: Это нетривиальное утверждение выводится из теоремы Ньюлендера-Ниренберга.

ЗАМЕЧАНИЕ: Мы получили **эквивалентность категории голоморфных расслоений, и категории гладких комплексных расслоений, снабженных $\overline{\partial}$-оператором $\overline{\partial}: \ V \longrightarrow \Lambda^{0,1}(M) \otimes V$ таким, что $\overline{\partial}^2 = 0$.**

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: $\overline{\partial}$-оператор $\overline{\partial}: \ V \longrightarrow \Lambda^{0,1}(M) \otimes V$ на гладком расслоении называется **оператором голоморфной структуры**, если $\overline{\partial}^2 = 0$

Связность и голоморфная структура

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть B – гладкое комплексное расслоение со связностью $\nabla : V \longrightarrow \Lambda^1(M) \otimes V$ и голоморфной структурой $\bar\partial : V \longrightarrow \Lambda^{0,1}(M) \otimes V$. Рассмотрим разложение ∇ по типам, $\nabla = \nabla^{0,1} + \nabla^{1,0}$, где

$$\nabla^{0,1} : V \longrightarrow \Lambda^{0,1}(M) \otimes V, \quad \nabla^{1,0} : V \longrightarrow \Lambda^{1,0}(M) \otimes V.$$

Говорится, что ∇ **совместима с голоморфной структурой**, если $\nabla^{0,1} = \bar\partial$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Эрмитово голоморфное расслоение** есть гладкое комплексное расслоение, снабженное эрмитовой метрикой и голоморфной структурой.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Связность Черна** на эрмитовом голоморфном расслоении есть связность, совместимая с голоморфной структурой и сохраняющая метрику.

Связность Черна

ТЕОРЕМА: На каждом голоморфном эрмитовом расслоении **связность Черна существует и единственна.**

Доказательство. Шаг 1: Для данного комплексного векторного расслоения V, определим **комплексно сопряженное расслоение** как то же самое $\mathbb{R}$-расслоение с комплексно сопряженным действием $\mathbb{C}$. Легко видеть, что **связность ∇ на V задает связность $\overline{\nabla}$ на $\overline{V}$,** причем $\overline{\nabla}^{1,0} = \overline{\nabla^{0,1}}$ и $\overline{\nabla}^{0,1} = \overline{\nabla^{1,0}}$.

Шаг 2: Определим **$\nabla^{1,0}$-оператор** на расслоении B как отображение $B \xrightarrow{\nabla^{1,0}} \Lambda^{1,0}(M) \otimes B$, удовлетворяющий $\Lambda^{1,0}(fb) = \partial(f) \otimes b + f\nabla^{1,0}(b)$ для любых $f \in C^\infty M, b \in B$. **Тогда $\overline{\partial}$-оператор на B задает $\nabla^{1,0}$-оператор на $\overline{B}$, и наоборот.**

Шаг 3: Эрмитова форма задает изоморфизм комплексных векторных расслоений $B \xrightarrow{g} \overline{B}^*$. Голоморфная структура $\overline{\partial}$ на B определяет $\overline{\partial}$-оператор $\overline{\partial}_{\overline{B}^*} := g\overline{\partial}g^{-1}$ на $\overline{B}^*$. Из него по формуле $\langle\overline{\partial}_{\overline{B}}x, y\rangle + \langle x, \overline{\partial}_{\overline{B}^*}y\rangle = \overline{\partial}\langle x, y\rangle$ **получается $\overline{\partial}$-оператор $\overline{\partial}_{\overline{B}}$ на $\overline{B}$, то есть $\nabla^{1,0}$-оператор $\nabla_g^{1,0}$ на B.**

Связность Черна (2)

Шаг 4: **Мы получили оператор связности $\nabla := \overline{\partial} + \nabla_g^{1,0}$ на B.** Осталось доказать, что она эрмитова.

Шаг 5: Пусть b, b' – сечения, $g^{\mathbb{C}}$ – комплексно-линейное спаривание B и $\overline{B}$, полученное из g, а $\overline{b}'$ – соответствующее сечение $\overline{B}$. По построению, ∇ удовлетворяет $dg(b,b') = dg^{\mathbb{C}}(b, \overline{b}') = g(\nabla b, \overline{b}') + g(b, \overline{\nabla b}')$, что дает (для голоморфного b)

$$dg(b,b) = g^{\mathbb{C}}(\nabla^{1,0} b, \overline{b}) + g^{\mathbb{C}}(b, \overline{\partial}_{\overline{B}} \overline{b}) = 2 \operatorname{Re} g(\nabla b, b).$$

Шаг 6: Поскольку эрмитовость достаточно проверять на голоморфных сечениях, $dg(b,b) = 2 \operatorname{Re} g(\nabla b, b)$ **гарантирует эрмитовость ∇.** ■

ПРИМЕР: Пусть L – линейное расслоение, $b \in L$ – нигде не зануляющееся голоморфное сечение. **Тогда существует $(1,0)$-форма η такая, что $\nabla^{1,0} b = \eta \otimes b$.** Это дает $d|b|^2 = \operatorname{Re} g(\nabla^{1,0} b, b) = \operatorname{Re} \eta |b|^2$. **Мы получили**

$$\nabla^{1,0} b = \frac{\partial |b|^2}{|b|^2} b = 2 \partial \log |b| b.$$

Кривизна связности

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть $\nabla: B \longrightarrow B \otimes \Lambda^1 M$ связность на гладком расслоении. Продолжим ∇ до оператора на формах

$$V \xrightarrow{\nabla} \Lambda^1(M) \otimes V \xrightarrow{\nabla} \Lambda^2(M) \otimes V \xrightarrow{\nabla} \Lambda^3(M) \otimes V \xrightarrow{\nabla} ...$$

по формуле $\nabla(\eta \otimes b) = d\eta + (-1)^{\tilde\eta}\eta \wedge \nabla b$. Тогда оператор $\nabla^2: B \longrightarrow B \otimes \Lambda^2(M)$ называется **кривизной** ∇.

ЗАМЕЧАНИЕ: Алгебра форм с коэффициентами в $\operatorname{End} B$ **действует на** $\Lambda^* M \otimes B$ по формуле $\eta \otimes a(\eta' \otimes b) = \eta \wedge \eta' \otimes a(b)$, где $a \in \operatorname{End}(B)$ эндоморфизм, а $b \in B$ сечение. Обозначим такое действие формулой $\eta \otimes a(\eta' \otimes b) = \eta \otimes a \wedge \eta' \otimes b$.

ЗАМЕЧАНИЕ: $\nabla^2(fb) = d^2 fb + df \wedge \nabla b - df \wedge \nabla b + f\nabla^2 b$, то есть **кривизна линейна над** $C^\infty M$. **Мы будем рассматривать кривизну** B **как 2-форму со значениями в** $\operatorname{End} B$**.** Тогда $\nabla^2 := \Theta_B \in \Lambda^2 M \otimes \operatorname{End} B$, где $\nabla^2(\eta \otimes b) = \Theta_B \wedge \eta \otimes b$, причем $\operatorname{End} B$-компонента Θ_B действует на b как указано выше.

Тождество Бьянки

ЗАМЕЧАНИЕ: $[\nabla, \{\nabla, \nabla\}] = [\{\nabla, \nabla\}, \nabla] + [\nabla, \{\nabla, \nabla\}] = 0$ по супер-тождеству Якоби. Это дает **тождество Бианки**: $\nabla(\Theta_B \wedge \eta) = \Theta_B \wedge \nabla(\eta)$.

Если B – линейное расслоение, то $\operatorname{End} B$ тривиально, и Θ_B есть 2-форма.

УТВЕРЖДЕНИЕ: Кривизна линейного расслоения – замкнутая 2-форма.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Для любой $2i$-формы θ имеем $\nabla(\theta \wedge \eta) = d\theta \wedge \eta + \theta \wedge \nabla(\eta)$ (правило Лейбница). Тождество Бьянки дает $\nabla(\Theta_B \wedge \eta) = \Theta_B \wedge \nabla(\eta)$. Следовательно, $d\Theta_B = 0$. ■

ЗАМЕЧАНИЕ: Аналогично доказывается, что $\operatorname{Tr}_B \Theta_B^i$ **есть замкнутая форма,** где Tr_B обозначает след в $\operatorname{End}(B)$, а Θ_B^i – i-я степень $\operatorname{End}(B)$-значной формы.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Классы когомологий $\operatorname{Tr}_B \Theta_B^i$ называются **характеристическими классами** расслоения ("формула Гаусса-Бонне"). Если B – линейное расслоение, то класс $-\sqrt{-1}\,\Theta_B$ называется **первым классом Черна** B, и обозначается $c_1(B)$.

Кривизна связности Черна

УТВЕРЖДЕНИЕ: Кривизна Θ_B связности Черна есть (1,1)-форма.

Доказательство. Шаг 1: Пусть B – эрмитово расслоение. Рассмотрим оператор $\varphi \xrightarrow{\iota} -\varphi^\perp$, действующий на $\operatorname{End} B$, где $\varphi \longrightarrow \varphi^\perp$ - сопряжение. Поскольку $\iota^2 = \operatorname{Id}$ и этот оператор антикомплексный, ι **задает вещественную структуру на** $\operatorname{End} B$.

Шаг 2: Неподвижные точки ι суть антиэрмитовы матрицы. Обозначим расслоение антиэрмитовых матриц за $\mathfrak{u}_B$. Поскольку связность Черна сохраняет g, для ее кривизны имеем $\Theta_B(g) = 0$. Значит, $\Theta_B \in \Lambda^2 M \otimes \mathfrak{u}_B$, и **эта форма вещественна относительно вещественной структуры, заданной** ι.

Шаг 3: $(0,2)$-часть кривизны равна нулю, поскольку $\bar\partial^2 = 0$, а $(2,0)$-**часть кривизны равна нулю, потому что** $\iota(\Theta_B) = \Theta_B$, а **любая вещественная структура на расслоении переставляет** $(2,0)$ **и** $(0,2)$-**формы.** ■

СЛЕДСТВИЕ: Для связности Черна ∇, имеем $\Theta_B = \{\nabla^{1,0}, \bar\partial\}$.

СЛЕДСТВИЕ: Кривизна линейного голоморфного расслоения - замкнутая (1,1)-форма.

Кривизна линейного расслоения

ЗАМЕЧАНИЕ: Пусть B – линейное эрмитово расслоение, а b - незануляющееся голоморфное сечение. Тогда $\nabla^{1,0}b = \frac{\partial|b|^2}{|b|^2}b = 2\partial\log|b|b$, что дает $\Theta_B(b) = 2\bar\partial\partial\log|b|b$, то есть $\Theta_B = -2\partial\bar\partial\log|b|$

СЛЕДСТВИЕ: Если $g' = e^{2f}g$ – две метрики на голоморфном линейном расслоении, а Θ, Θ' – соответствующая кривизна, то $\Theta' - \Theta = -2\partial\bar\partial f$.

УТВЕРЖДЕНИЕ: Пусть ω – (1,1)-форма с целочисленным классом когомологий на компактном кэлеровом многообразии. **Тогда ω есть кривизна голоморфного линейного расслоения.**

Доказательство. Шаг 1: Экспоненциальная точная последовательность $0 \longrightarrow \mathbb{Z}_M \longrightarrow \mathcal{O}_M \longrightarrow \mathcal{O}_M^* \longrightarrow 0$ дает

$$H^1(\mathcal{O}_M^*) \xrightarrow{c} H^2(M,\mathbb{Z}) \xrightarrow{p} H^2(M,\mathcal{O}_M),$$

причем $H^1(\mathcal{O}_M^*) = \mathrm{Pic}(M)$ есть группа линейных расслоений, c – отображение, переводящее расслоение в его первый класс Черна, а p – проекция $H^2(M)$ на компоненту Ходжа $H^2(M,\mathcal{O}_M) = H^{0,2}(M)$. Значит, **для любого целочисленного класса $[\omega] \in H^{1,1}(M)$, $[\omega]$ является первым классом Черна линейного расслоения L.**

Кривизна линейного расслоения (2)

Шаг 2: Возьмем любую метрику h на L. Ее кривизна ω_h есть замкнутая $(1,1)$-форма, когомологичная ω. В силу dd^c-леммы, $\omega_h - \omega = -2\partial\bar{\partial} f$ **для какой-то функции f.**

Шаг 3: В силу доказанного выше, если $g' = e^{2f} g$ – две метрики на голоморфном линейном расслоении, а Θ, Θ' – соответствующая кривизна, то $\Theta' - \Theta = -2\partial\bar{\partial} f$.

Шаг 4: Рассмотрим метрику $h' := e^{2f} h$ на L. **Соответствующая ей кривизна удовлетворяет $\omega_h - \omega_{h'} = -2\partial\bar{\partial} f$, значит, $\omega = \omega_{h'}$.** ■

Основы кэлеровой геометрии,

лекция 10

Миша Вербицкий

НМУ/НОЦ, Москва

29 ноября 2010

Векторные расслоения

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Векторное расслоение** на гладком многообразии есть локально тривиальный пучок $C^\infty M$-модулей.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Голоморфное векторное расслоение** на гладком многообразии есть локально тривиальный пучок $\mathcal{O}_M$-модулей.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: $B_{C^\infty} := B \otimes_{\mathcal{O}_M} C^\infty M$ называется **гладкое векторное расслоение, ассоциированное с голоморфным расслоением B.**

ЗАМЕЧАНИЕ: Пусть M – комплексное многообразие. Тогда **оператор $\overline{\partial}: C^\infty M \longrightarrow \Lambda^{0,1}(M)$ $\mathcal{O}_M$-линейный**.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть B – голоморфное расслоение. Рассмотрим оператор $\overline{\partial}: B_{C^\infty} \longrightarrow B_{C^\infty} \otimes \Lambda^{0,1}(M)$, переводящий $b \otimes f$ в $b \otimes \overline{\partial} f$, где $b \in B$ голоморфное сечение, а f гладкая функция. Этот оператор зовется **оператор голоморфной структуры** на голоморфном расслоении. **Он определен корректно в силу $\mathcal{O}_M$-линейности $\overline{\partial}$.**

ЗАМЕЧАНИЕ: Ядро $\overline{\partial}: B_{C^\infty} \longrightarrow B_{C^\infty} \otimes \Lambda^{0,1}(M)$ **совпадает с образом B** при естественном вложении $B \hookrightarrow B_{C^\infty}$, $b \longrightarrow b \otimes 1$.

Оператор голоморфной структуры

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **$\overline{\partial}$-оператор** на гладком комплексном векторном расслоении V над есть оператор $V \xrightarrow{\overline{\partial}} \Lambda^{0,1}(M) \otimes V$, удовлетворяющий $\overline{\partial}(fb) = \overline{\partial}(f) \otimes b + f\overline{\partial}(b)$ для любых $f \in C^\infty M, b \in V$.

ЗАМЕЧАНИЕ: $\overline{\partial}$-оператор **можно продолжить до**

$$\overline{\partial}: \Lambda^{0,i}(M) \otimes V \longrightarrow \Lambda^{0,i+1}(M) \otimes V,$$

по формуле $\overline{\partial}(\eta \otimes b) = \overline{\partial}(\eta) \otimes b + (-1)^{\tilde{\eta}}\eta \wedge \overline{\partial}(b)$, где $b \in V$ и $\eta \in \Lambda^{0,i}(M)$.

ЗАМЕЧАНИЕ: **Легко видеть, что $\overline{\partial}^2 = 0$,** если $\overline{\partial}$ – оператор голоморфной структуры на голоморфном расслоении B.

ТЕОРЕМА: (Атья-Ботт) Пусть $\overline{\partial}: V \longrightarrow \Lambda^{0,1}(M) \otimes V$ – $\overline{\partial}$-оператор на комплексном векторном расслоении, причем $\overline{\partial}^2 = 0$. **Тогда $B := \ker \overline{\partial} \subset V$ есть голоморфное расслоение того же ранга, и $V = B_{\mathbb{C}^\infty}$.**

ЗАМЕЧАНИЕ: Это нетривиальное утверждение выводится из теоремы Ньюлендера-Ниренберга.

ЗАМЕЧАНИЕ: Мы получили **эквивалентность категории голоморфных расслоений, и категории гладких комплексных расслоений, снабженных $\overline{\partial}$-оператором $\overline{\partial}: V \longrightarrow \Lambda^{0,1}(M) \otimes V$ таким, что $\overline{\partial}^2 = 0$.**

Связность и голоморфная структура

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть B – гладкое комплексное расслоение со связностью $\nabla: V \longrightarrow \Lambda^1(M) \otimes V$ и голоморфной структурой $\overline{\partial}: V \longrightarrow \Lambda^{0,1}(M) \otimes V$. Рассмотрим разложение ∇ по типам, $\nabla = \nabla^{0,1} + \nabla^{1,0}$, где

$$\nabla^{0,1}: V \longrightarrow \Lambda^{0,1}(M) \otimes V, \quad \nabla^{1,0}: V \longrightarrow \Lambda^{1,0}(M) \otimes V.$$

Говорят что ∇ **совместима с голоморфной структурой**, если $\nabla^{0,1} = \overline{\partial}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Эрмитово голоморфное расслоение** есть гладкое комплексное расслоение, снабженное эрмитовой метрикой и голоморфной структурой.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Связность Черна** на эрмитовом голоморфном расслоении есть связность, совместимая с голоморфной структурой и сохраняющая метрику.

ТЕОРЕМА: На каждом голоморфном эрмитовом расслоении **связность Черна существует и единственна.**

Кривизна связности

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть $\nabla: \ B \longrightarrow B \otimes \Lambda^1 M$ связность на гладком расслоении. Продолжим ∇ до оператора на формах

$$V \xrightarrow{\nabla} \Lambda^1(M) \otimes V \xrightarrow{\nabla} \Lambda^2(M) \otimes V \xrightarrow{\nabla} \Lambda^3(M) \otimes V \xrightarrow{\nabla} ...$$

по формуле $\nabla(\eta \otimes b) = d\eta \otimes b + (-1)^{\tilde\eta}\eta \wedge \nabla b$. Тогда оператор $\nabla^2: \ B \longrightarrow B \otimes \Lambda^2(M)$ называется **кривизной** ∇.

ЗАМЕЧАНИЕ: $[\nabla, \{\nabla, \nabla\}] = [\{\nabla, \nabla\}, \nabla] + [\nabla, \{\nabla, \nabla\}] = 0$ по супер-тождеству Якоби. Мы получили **тождество Бианки**: $\nabla(\Theta_B \wedge \eta) = \Theta_B \wedge \nabla(\eta)$.

Если B – линейное расслоение, то $\operatorname{End} B$ тривиально, и Θ_B есть 2-форма.

УТВЕРЖДЕНИЕ: **Кривизна линейного расслоения – замкнутая 2-форма.**

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Для любой $2i$-формы θ имеем $\nabla(\theta \wedge \eta) = d\theta \wedge \eta + \theta \wedge \nabla(\eta)$ (правило Лейбница). Тождество Бьянки дает $\nabla(\Theta_B \wedge \eta) = \Theta_B \wedge \nabla(\eta)$. Следовательно, $d\Theta_B = 0$. ■

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Класс когомологий $\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}[\Theta_B]$ называется **первым классом Черна** линейного расслоения.

Кривизна связности Черна

УТВЕРЖДЕНИЕ: **Кривизна Θ_B связности Черна есть (1,1)-форма.**

СЛЕДСТВИЕ: Для связности Черна ∇, имеем $\Theta_B = \{\nabla^{1,0}, \overline{\partial}\}$.

СЛЕДСТВИЕ: **Кривизна линейного голоморфного расслоения - замкнутая (1,1)-форма.**

ЗАМЕЧАНИЕ: Пусть L – линейное расслоение, $b \in L$ – нигде не зануляющееся голоморфное сечение. **Тогда существует $(1,0)$-форма η такая, что $\nabla^{1,0}b = \eta \otimes b$.** Это дает $d|b|^2 = \operatorname{Re} g(\nabla^{1,0}b, b) = \operatorname{Re} \eta|b|^2$. **Мы получили $\nabla^{1,0}b = \frac{\partial|b|^2}{|b|^2}b = 2\partial \log |b|b$.**

ЗАМЕЧАНИЕ: Пусть B – линейное эрмитово расслоение, а b - незануляющееся голоморфное сечение. Тогда $\nabla^{1,0}b = \frac{\partial|b|^2}{|b|^2}b = 2\partial \log |b|b$, что дает $\Theta_B(b) = 2\overline{\partial}\partial \log |b|b$, **то есть $\Theta_B = -2\partial\overline{\partial} \log |b|$.**

СЛЕДСТВИЕ: Если $g' = e^{2f}g$ – две метрики на голоморфном линейном расслоении, а Θ, Θ' – соответствующая кривизна, то **$\Theta' - \Theta = -2\partial\overline{\partial} f$.**

Когомологии векторных расслоений и двойственность Серра

ЗАМЕЧАНИЕ: Пусть B – голоморфное векторное расслоение на M, а $\Omega^p M$ – расслоение голоморфных $(p,0)$-форм. Тогда

$$0 \longrightarrow B \otimes_{\mathcal{O}_M} \Omega^p M \xrightarrow{\overline{\partial}} \Lambda^{p,1}(M) \otimes_{\mathcal{O}_M} B \xrightarrow{\overline{\partial}} \Lambda^{p,2}(M) \otimes_{\mathcal{O}_M} B \xrightarrow{\overline{\partial}} ...$$

есть тонкая резольвента $B \otimes_{\mathcal{O}_M} \Omega^p M$

СЛЕДСТВИЕ: $H^i(\Omega^p M \otimes B)$ отождествляется с ядром $\Delta_{\overline{\partial}} := \overline{\partial}^* \overline{\partial} + \overline{\partial}\overline{\partial}^*$ в $\Lambda^{p,i}(M) \otimes B$

ЗАМЕЧАНИЕ: Оператор $* : \Lambda^{p,i}(M) \otimes_{\mathcal{O}_M} B \longrightarrow \Lambda^{n-p,n-i}(M) \otimes_{\mathcal{O}_M} B^*$ переставляет $\overline{\partial}$ и $\overline{\partial}^*$, **следовательно, сохраняет** $\ker \Delta_{\overline{\partial}}$**.**

СЛЕДСТВИЕ: (двойственность Серра) Пусть M – n-мерное, компактное, кэлерово, а B – эрмитово расслоение. Тогда **умножение**

$$H^i(\Omega^p M \otimes B) \times H^{n-i}(\Omega^{n-p} M \otimes B^*) \longrightarrow H^n(\Omega^n M) = \mathbb{C}$$

задает невырожденное спаривание.

СЛЕДСТВИЕ: (двойственность Серра для $p = n$)

$$H^i(B) \cong H^{n-i}(B^* \otimes K)^*,$$

где $K = \Omega^n M$ – каноническое расслоение.

Когерентные пучки

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пучок F $\mathcal{O}_M$-модулей называется **конечно-порожденным**, если у каждой точки есть окрестность U такая, что $F|_U$ изоморфен фактору $\mathcal{O}_U^n$ по подпучку F_1, и **конечно-представимым**, если F_1 тоже конечно-порожден. **Когерентный пучок** на комплексном многообразии M есть конечно-порожденный и конечно-представимый пучок $\mathcal{O}_M$-модулей.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Пучок-небоскреб** есть когерентный пучок с носителем в точке.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Пучок идеалов** есть когерентный подпучок в $\mathcal{O}_M$. Обозначим за $\mathfrak{m}_x^n$ **пучок идеалов вида $(\mathfrak{m}_x)^n$,** где $\mathfrak{m} \subset \mathcal{O}_M$ есть идеал функций, зануляющихся в x.

ЗАМЕЧАНИЕ: На n-мерном проективном многообразии, любой когерентный пучок F **допускает локально свободную резольвенту длины $n+1$**, то есть точную последовательность вида

$$0 \longrightarrow B_n \longrightarrow B_{n-1} \longrightarrow ... \longrightarrow B_0 \longrightarrow F \longrightarrow 0$$

Обильные расслоения

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Голоморфное линейное расслоение L на проективном многообразии называется **обильным**, если для любого голоморфного расслоения B найдется N такое, что $H^i(B \otimes L^N) = 0$ для любого $i > 0$.

УТВЕРЖДЕНИЕ: Пусть L – обильное расслоение на проективном многообразии, а F – когерентный пучок. Тогда **найдется N такое, что $H^i(F \otimes L^N) = 0$ для любого $i > 0$.**

Доказательство. Шаг 1: Обозначим за $\operatorname{fd}(F)$ минимальную длину локально свободной резольвенты пучка F. **Локально свободная резольвента дает точную последовательность**

$$0 \longrightarrow F_1 \longrightarrow B \longrightarrow F \longrightarrow 0,$$

где $\operatorname{fd}(F_1) = \operatorname{fd}(F) - 1$. Индукцией по $\operatorname{fd}(F)$, можно считать, что $H^i(F_1 \otimes L^N) = H^i(B \otimes L^N) = 0$ для любого $i > 0$.

Шаг 2: Из длинной точной последовательности

$$... \longrightarrow H^i(B \otimes L^N) \longrightarrow H^i(F \otimes L^N) \longrightarrow H^{i+1}(F_1 \otimes L^N) \longrightarrow ...$$

получаем, что $H^i(F \otimes L^N) = 0$. ■

Проективные вложения

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Сечение f расслоения B **равно нулю в** x если $f \in \mathfrak{m}_x B$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Линейное расслоение **очень обильно**, если $H^1(L \otimes I) = 0$ для пучков идеалов I вида $\mathfrak{m}_x \cap \mathfrak{m}_y$ и $\mathfrak{m}_x^2$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Линейное расслоение L на M называется **разделяет точки** если для любых точек $x \neq y$ найдется сечение $f \in \Gamma_M(L)$, которое не равно нулю в x и не равно в y.

ЗАМЕЧАНИЕ: **Очень обильное расслоение на проективном многообразии разделяет точки**. Это ясно из длинной точной последовательности

$$0 \longrightarrow H^0(L \otimes I) \longrightarrow H^0(L) \longrightarrow H^0(L \otimes (\mathcal{O}_M/I)) \longrightarrow H^1(L \otimes I) \longrightarrow ...$$

где I есть $\mathfrak{m}_x \cap \mathfrak{m}_y$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть L – линейное расслоение на M, разделяющее точки, а V – пространство его сечений. Для $x \in M$, рассмотрим спаривание $\langle (L/\mathfrak{m}_x L)^*, V\rangle$, которое берет $f \in V$ и вычисляет $\lambda \in (L/\mathfrak{m}_x L)^*$ на его представителе в $L/\mathfrak{m}_x L$. Мы получили функционал на V. Соответствующее отображение $x \xrightarrow{\varphi_L} \mathbb{P}V^*$, называется **проективным вложением, связанным с** L.

Очень обильные расслоения

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Линейное расслоение **очень обильно**, если $H^1(L \otimes I) = 0$ для пучков идеалов I вида $\mathfrak{m}_x \cap \mathfrak{m}_y$ и $\mathfrak{m}_x^2$.

ЗАМЕЧАНИЕ: Для каждого обильного расслоения L на проективном многообразии M, **найдется N такое, что L^N очень обильно.** Доказательство этого факта см. Хартсхорн.

УТВЕРЖДЕНИЕ: Пусть L разделяет точки. Тогда $\varphi_L : M \longrightarrow \mathbb{P}V^*$ инъективно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Пусть $f \in V$ – сечение, разделяющее x и y. Тогда f задает плоскость $H_f \subset V^*$, причем $\varphi_L(x)$ не лежит в этой плоскости, а $\varphi_L(y)$ лежит в ней. ■

Очень обильные расслоения (2)

УТВЕРЖДЕНИЕ: Пусть L очень обильно. Тогда $\varphi_L: M \longrightarrow \mathbb{P}V^*$ – замкнутое вложение.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: По теореме об обратной функции, **достаточно доказать, что дифференциал φ_L инъективен**. По определению, $d\varphi_L$ переводит $\lambda \in TxM = (\mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2)^*$ в точку $T_{\varphi_L(x)}\mathbb{P}V^* = \operatorname{Hom}(W^*, V^*/W^*)$, где $W^* := (L/\mathfrak{m}_x L)^*$ есть прямая в V^*, соответствующая $\varphi_L(x)$:

$$(\mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2)^* \xrightarrow{d\varphi_L} \operatorname{Hom}(W^*, V^*/W^*).$$

Дуализируя обе части, получаем $V_x \xrightarrow{d\varphi_L^*} \mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2 \otimes_{\mathbb{C}} (L/\mathfrak{m}_x L)$, где $V_x = \ker W^*$ есть пространство всех сечений L, зануляющихся в x.

Рассмотрим естественное отображение $V = H^0(L) \longrightarrow H^0(L \otimes (\mathcal{O}_M/I))$, где $I = \mathfrak{m}_x^2$. Оно дает

$$V_x = H^0(\mathfrak{m}_x L) \longrightarrow H^0(\mathfrak{m}_x L \otimes (\mathcal{O}_M/I)) = \mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2 \otimes_{\mathbb{C}} (L/\mathfrak{m}_x L).$$

Это и есть $d\varphi_L^*$.

Мы получили, что **инъективность $d\varphi_L$ следует из сюрьективности $H^0(L) \longrightarrow H^0(L \otimes (\mathcal{O}_M/I))$.** ■

Суперсимметрия в кэлеровой геометрии

Пусть (M, I, ω) – кэлерово многообразие. Рассмотрим операторы, действующие на $\Lambda^*(M)$:

1. d, d^*, Δ

2. **Оператор Ходжа** $L(\alpha) := \omega \wedge \alpha$ и его сопряженный $\Lambda(\alpha) := *L * \alpha$.

3. **Оператор Вейля:** $\mathcal{W}\Big|_{\Lambda^{p,q}(M)} = \sqrt{-1}\,(p-q)$

ТЕОРЕМА: Эти операторы порождают 9-мерную супералгебру Ли $\mathfrak{a}$, действующую на $\Lambda^*(M)$. Лапласиан Δ лежит в центре $\mathfrak{a}$, значит, **$\mathfrak{a}$ действует на когомологиях M.**

УТВЕРЖДЕНИЕ: **$H := [L, \Lambda]$ есть скалярный оператор, действующий на k-формах умножением на $n-k$.**

УТВЕРЖДЕНИЕ: Операторы L, Λ, H образуют алгебру Ли, изоморфную $\mathfrak{sl}(2)$, с соотношениями $[L, \Lambda] = H, \quad [H, L] = 2L, \quad [H, \Lambda] = -2\Lambda$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: L, Λ, H называется **$\mathfrak{sl}(2)$-тройкой Лефшеца**.

Положительные линейные расслоения

УТВЕРЖДЕНИЕ: Пусть ω – (1,1)-форма с целочисленным классом когомологий на компактном кэлеровом многообразии. **Тогда ω есть кривизна голоморфного линейного расслоения.**

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Голоморфное линейное расслоение называется **положительным**, если его первый класс Черна когомологичен кэлеровой форме.

Теорема 1: (теорема Кодаиры-Накано) **Положительное линейное расслоение на компактном кэлеровом многообразии обильно.**

Теорема 2: (теорема Кодаиры-Накано) Пусть B – голоморфное эрмитово расслоение на n-мерном кэлеровом многообразии, Θ_B – кривизна связности Черна, L_{Θ_B} – оператор умножения на Θ_B. Предположим, что самосопряженный оператор $H_B := -\sqrt{-1}[L_{\Theta_B}, \Lambda]$ удовлетворяет $(H_B(x), x) < 0$ для любой ненулевой k-формы x, $k < n$. **Тогда $H^p(B \otimes \Omega^q M) = 0$ для любых $p + q < n$.**

Отрицательные расслоения и когомологии

ЗАМЕЧАНИЕ: Если E, F векторные расслоения, то $\Theta_{E\otimes F} = \Theta_E + \Theta_F$. Если L линейное расслоение, то $\Theta_{L^*} = -\Theta_L$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Если L^* положительно, то расслоение L называется **отрицательным.**

ЗАМЕЧАНИЕ: Если L есть отрицательное расслоение на (M,ω), причем $-\sqrt{-1}\,\omega$ есть кривизна L^*, то $H_L := -\sqrt{-1}\,[L_{\Theta_L}, \Lambda] = -H$. **На p-формах это умножение на $p-n$. Поэтому L удовлетворяет условиям теоремы 2. Значит, $H^p(L\otimes\Omega^q M) = 0$ для любых $p+q<n$.**

Теорема Кодаиры-Накано: доказательство

ЗАМЕЧАНИЕ: Оператор $H_{E\otimes F}$ выражается как $H_{E\otimes F} = H_E + H_F$. Поэтому $H_{B\otimes L^N} = H_B - NH$. Для $N > \alpha$, где α есть самое большое собственное значение H_B, имеем

$$(H_{B\otimes L^N} x, x) = (H_B x, x) - N(n-k)|x|^2 < 0.$$

Теорема 2 дает $H^p(L^N \otimes B \otimes \Omega^q M) = 0$ для любых $p + q < n$.

СЛЕДСТВИЕ: Пусть L – отрицательное расслоение. Тогда **для каждого B надется N такой, что $H^i(L^{-N} \otimes B) = 0$ для $i > 0$.**

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Применяем предыдущее замечание к $B^* \otimes K$ и пользуемся двойственностью Серра

$$0 = H^{n-i}(L^N \otimes B^* \otimes K) = H^i(B \otimes L^{-N})^*.$$

■

ЗАМЕЧАНИЕ: Мы доказали, что теорема 1 следует из теоремы 2.

Соотношения Кодаиры

УТВЕРЖДЕНИЕ: Пусть B – голоморфное эрмитово расслоение, снабженное связностью Черна $\nabla = \overline{\partial} + \partial$, где $\partial = \nabla^{1,0}$. Тогда на B-значных формах имеем

$$[\Lambda, \partial] = \sqrt{-1}\,\overline{\partial}^*, \quad [\Lambda, \overline{\partial}] = -\sqrt{-1}\,\partial^*, \quad [L, \overline{\partial}^*] = -\sqrt{-1}\,\partial, \quad [L, \partial^*] = \sqrt{-1}\,\overline{\partial}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Тот же самый аргумент, что и для форм.

ЗАМЕЧАНИЕ: Кривизна связности Черна: $\Theta_B = \{\partial, \overline{\partial}\}$

СЛЕДСТВИЕ: Из супер-тождества Якоби следует

$$\begin{aligned}[\Lambda, \Theta_B] = [\Lambda, \{\partial, \overline{\partial}\}] = \{[\Lambda, \partial], \overline{\partial}\} + \{\partial, [\Lambda, \overline{\partial}]\}\\ = \sqrt{-1}\,\{\overline{\partial}^*, \overline{\partial}\} - \sqrt{-1}\,\{\partial^*, \partial\} = \sqrt{-1}\,\Delta_{\overline{\partial}} - \sqrt{-1}\,\Delta_{\partial}.\end{aligned}$$

Это дает $\Delta_{\overline{\partial}} = \Delta_{\partial} - H_B$.

ЗАМЕЧАНИЕ: Операторы $\Delta_{\overline{\partial}}$ и Δ_{∂} **положительные**, то есть удовлетворяют $(\Delta_{\overline{\partial}}x, x) \geqslant 0$ и $(\Delta_{\partial}x, x) \geqslant 0$.

Если $(H_B x, x) < 0$, то $(\Delta_{\overline{\partial}}x, x) > 0$, значит, $\Delta_{\overline{\partial}}$ не может иметь ядра.

Это доказывает Теорему 2.