Основы кэлеровой геометрии 1: почти комплексные многообразия

Задача 1.1. Докажите, что любая почти комплексная структура на многообразии вещественной размерности 2 интегрируема.

Задача 1.2. Приведите пример неинтегрируемой почти комплексной структуры на многообразии вещественной размерности 4.

Задача 1.3. Докажите, что существует четномерное ориентируемое многообразие, не допускающее почти комплексной структуры.

Задача 1.4. Пусть ω – невырожденная 2-форма на вещественном многообразии M. Докажите, что найдется почти комплексная эрмитова структура, такая, что ω – ее эрмитова форма.

Задача 1.5. Приведите пример ненулевой голоморфной функции на почти комплексном многообразии, которое не интегрируемо.

Задача 1.6. Пусть – компактное почти комплексное многообразие, а f – голоморфная функция на M. Докажите, что f постоянна.

Основы кэлеровой геометрии 2: почти комплексные многообразия

Задача 2.1. Пусть $(, I)$ – однородное почти комплексное многообразие, то есть снабженное транзитивным действием группы Ли G, сохраняющей почти комплексную структуру. Предположим, что у точки $x \in M$ задан стабилизатор $g \in G$.

а. Пусть $g\Big|_{T_xM} = -1$ (в таком случае M называется **симметрическое многообразие**). Всегда ли (M, I) интегрируемо?

б. Пусть $g\Big|_{T_xM} = 2$. Всегда ли (M, I) интегрируемо?

в. Пусть все собственные значения $g\Big|_{T_xM}$ не равны 1. Всегда ли (M, I) интегрируемо?

Задача 2.2. Пусть (M, I) – почти комплексное многообразие, снабженное связностью ∇ без кручения, причем $\nabla(I) = 0$. Докажите, что оно интегрируемо.

Задача 2.3. Приведите пример почти комплексного многообразия (M, I), $\dim_{\mathbb{R}} M = 6$, на котором росток любой голоморфной функции – нулевой.

Задача 2.4. Может ли такое быть, если $\dim_{\mathbb{R}} M = 4$?

Задача 2.5. Пусть (M, I, Ω) – почти комплексное многообразие вещественной размерности $2n$, снабженное невырожденной комплекснозначной формой $\Omega \in \Lambda^{n,0}(M)$. Предположим, что $d\Omega = 0$. Докажите, что (M, I) интегрируемо.

Задача 2.6. Многообразие, снабженное распределением $B \subset TM$ коразмерности 1, таким, что форма Фробениуса $[B, B] \longrightarrow TM/B$ невырождена, называется **контактным**.

а. Постройте контактную структуру на нечетномерной сфере.

б. Постройте однородное компактное контактное многообразие, не диффеоморфное сфере.

Задача 2.7. Пусть (M, B) – контактное многообразие. Докажите, что любые две точки можно соединить кусочно гладким путем, касательным к B в каждой точке.

Задача 2.8. Пусть M – многобразие, снабженное транзитивным действием группы G, а $B \subset TM$ – G-инвариантное распределение. Предположим, что у точки $x \in M$ задан стабилизатор $g \in G$, причем $g\Big|_{T_xM} = -1$. Всегда ли B интегрируемо?

Основы кэлеровой геометрии 3: почти комплексные многообразия

Задача 3.1. Пусть на многообразии задано расслоение B и тензор $R \in B^{\otimes n}$, причем стабилизатор $St(R)$ в $\operatorname{End}(B)$ – локально тривиальное расслоение. Докажите, что найдется связность ∇ на B такая, что $\nabla(R) = 0$.

Задача 3.2. Пусть (M, ω) – симплектическое многообразие. Найдите связность без кручения на M такую, что $\nabla(\omega) = 0$.

Задача 3.3. Для любого заданного $n > 0$, найдите комплексное многообразие размерности n, не допускающее симплектической структуры.

Задача 3.4. Найдите почти комплексное, односвязное многообразие вещественной размерности 6, не допускающее симплектической структуры.

Замечание. Нет ни одного примера почти комплексного многообразия вещественной размерности 6, не допускающего комплексной структуры. Яу предполгает, что таких нет ("гипотеза Яу").

Задача 3.5. Постройте комплексную структуру на $SU(3)$. Может ли оно быть кэлерово?

Задача 3.6. Постройте комплексную структуру на $S^3 \times S^3$. Может ли оно быть кэлерово?

Задача 3.7. Постройте почти комплексное, компактное многообразие с заданной наперед конечнопорожденной фундаментальной группой.

Задача 3.8. Алгебраическая размерность комплексного многообразия есть степень трансцендентности его поля мероморфных функций над $\mathbb{C}$. Найдите алгебраическую размерность **поверхности Хопфа** $\mathbb{C}^2 \backslash 0/(x \sim 2x)$.

Основы кэлеровой геометрии 4: почти комплексные структуры и кручение

Задача 4.1. Пусть $\Psi: \ A \longrightarrow A'$ – отображение аффинных пространств, причем $\dim A > 1$. Предположим, что Ψ переводит прямые в прямые. Следует ли из этого что Ψ аффинно?

Задача 4.2. Пусть – симплектическое многообразие. Постройте связность без кручения, сохраняющую симплектическую структуру (то есть удовлетворяющую $\nabla\omega = 0$).

Задача 4.3. Пусть – комплексное многообразие. Постройте связность без кручения, сохраняющую комплексную структуру (то есть $\nabla I = 0$).

Задача 4.4. Пусть (M, I, ω) – почти комплексное эрмитово многообразие, $\dim_{\mathbb{C}} M = 2$. Всегда ли найдется связность ∇ с тотально антисимметричным кручением, такая, что $\nabla(I) = \nabla(\omega) = 0$?

Задача 4.5. Пусть (M, x, Ω) – вещественное многообразие с заданной на нем формой объема Ω и нигде не зануляющимся векторным полем x, причем $\operatorname{Lie}_x \Omega = 0$. Всегда ли найдется связность ∇ без кручения, такая, что $\nabla(x) = \nabla(\Omega) = 0$?[1]

Задача 4.6. Пусть ω – невырожденная 2-форма на четномерном римановом многообразии , причем $\nabla(\omega) = 0$, где ∇ – связность Леви-Чивита. Докажите, что M допускает комплексную структуру I, такую, что $\nabla(I) = 0$.

Задача 4.7. Пусть I, g – левоинвариантная комплексная эрмитова структура на группе Ли, причем метрика g инвариантна как справа, так и слева. Обозначим за T кручение соответствующей связности Бисмута. Докажите, что $T(x, y) = [x, y]$ для любой пары левоинвариантных векторных полей x, y.

Задача 4.8. Пусть G – компактная группа Ли с левоинвариантной комплексной структурой и левоинвариантной кэлеровой метрикой. Докажите, что G коммутативна.

[1]Такая связность называется связностью Бисмута.

Основы кэлеровой геометрии 5: супералгебры Ли и комплекс де Рама

Задача 5.1. Пусть (M, I) – почти комплексное многообразие, d – дифференциал де Рама, а $d = \bigoplus_{p+q=1} d^{p,q}$ его разложение Ходжа. Докажите, что $d^{p,q} = 0$ для $p > 2$. Докажите, что оператор $d^{2,-1}$ – $C^\infty M$-линейный.

Задача 5.2. Пусть (M, I) – почти комплексное многообразие. Докажите, что $(d^{1,0})^2 = 0 \Leftrightarrow I$ интегрируемо.

Задача 5.3. Постройте бесконечномерное, неприводимое представление $\mathfrak{sl}(2)$.

Задача 5.4. Пусть V – конечномерное неприводимое вещественное представление $SU(2)$, снабженное $SU(2)$-инвариантным, невырожденным скалярным произведением g. Докажите, что g знакоопределено. Верно ли то же самое для группы $SL(2, \mathbb{R})$?

Задача 5.5 (*). Пусть η есть параллельная форма на римановом многообразии, а η' – гармоническая форма. Докажите, что $\eta \wedge \eta'$ гармонична.

Задача 5.6. Пусть η – гармоническая форма на компактной группе Ли G, снабженной би-инвариантной метрикой. Докажите, что η би-инвариантна.[2]

[2] Би-инвариантная форма есть форма, инвариантная справа и слева.

Основы кэлеровой геометрии 6: когомологии Дольбо

Задача 6.1. Пусть M – компактная кэлерова поверхность (многообразие комплексной размерности 2). **Сигнатура** четырехмерного многообразия $\sigma(M)$ есть сигнатура формы пересечения на $H^2(M)$. Докажите, что $\sigma(M) = 2h^{2,0}(M) - h^{1,1} + 2$, где $h^{p,q}(M) := \dim H^{p,q}(M)$.

Задача 6.2. Пусть F – точная, голоморфная p-форма на p-мерном компактном комплексном многообразии. Докажите, что $F = 0$.

Задача 6.3. Пусть M – компактная комплексная поверхность (не обязательно кэлерова). Докажите, что все голоморфные формы на M замкнуты.

Задача 6.4. Пусть (M, I, ω) – почти комплексное n-мерное эрмитово многообразие, а $D: C^\infty M \longrightarrow C^\infty M$ – дифференциальный оператор второго порядка на функциях, заданный формулой

$$D(f) = \frac{dd^c(f) \wedge \omega^{n-1}}{\omega^n}.$$

Докажите, что D пропорционален оператору Лапласа.

Задача 6.5. Пусть η – k-форма на вещественном многообразии, $L_\eta(t) := \eta \wedge t$, а $\Lambda_\eta := (-1)^{\deg \eta} * L_\eta *$ – сопряженный оператор. Докажите, что Λ_η имеет порядок k как дифференциальный оператор на алгебре де Рама.

Основы кэлеровой геометрии 7: когомологии Дольбо

Задача 7.1. Пусть η – замкнутый поток на шаре в $\mathbb{R}^n$. Докажите, что η точен.

Задача 7.2. Пусть есть $\mathbb{R}^n$, с плоской метрикой. Определим обобщенную функцию N на X формулой

$$N(x) := \begin{cases} \frac{1}{2\pi}\log|x|, & \text{если } n = 2 \\ -\frac{1}{(n-2)\sigma_{n-1}}|x|^{2-n}, & \text{если } n \neq 2 \end{cases}$$

где σ_{n-1} – объем n-мерной сферы. Докажите, что $\Delta(N) = \delta_0$, где Δ есть стандартный оператор Лапласа.

Задача 7.3. (локальная dd^c-лемма). Пусть η есть (p, q)-форма он $\mathbb{C}^n$, которая замкнута, причем $p, q \geqslant 1$. Докажите, что $\eta = dd^c\alpha$.

Задача 7.4. Пусть $dd^c f = 0$, где f – функция на комплексном многообразии. Докажите, что f есть сумма голоморфной и антиголоморфной функции.

Задача 7.5. Пусть η – замкнутая (1,1)-форма с компактным носителем на $\mathbb{C}^n$, $n > 1$. Докажите, что $\eta = dd^c f$, где f – функция с компактным носителем.

Задача 7.6. Пусть f – непрерывная функция на комплексном многообразии M, голоморфная в открытом, плотном подмножестве $U \subset M$. Докажите, что f голоморфна.

Задача 7.7. Постройте голоморфную функцию f на открытом шаре $B \subset \mathbb{C}^n$, такую, что f не продолжается голоморфно ни на какое открытое подмножество $B' \supset B$.

Задача 7.8. Определим **когомологии Ботта-Черна** $H^{1,1}_{BC}(M)$ как группу замкнутых $(1, 1)$-форм по модулю образа dd^c. На произвольном комплексном многообразии постройте точную последовательность

$$H^0(\Omega^1(M)) \oplus \overline{H^0(\Omega^1(M))} \longrightarrow H^1(\mathcal{O}_M) \oplus \overline{H^1(\mathcal{O}_M)} \longrightarrow H^{1,1}_{BC}(M) \longrightarrow H^2(M)$$

Здесь $H^0(\Omega^1(M))$ – глобальные 1-формы, $H^1(\mathcal{O}_M)$ – когомологии пучка голоморфных функций, а $\overline{\cdots}$ обозначает комплексно-сопряженное векторное пространство.

Основы кэлеровой геометрии 8: когомологии Дольбо

Задача 8.1. Докажите, что группа i-х когомологий, $i > 0$, пучка замкнутых $(1,1)$-форм изоморфна $H^{i-1}(\mathcal{O}_M) \oplus \overline{H^{i-1}(\mathcal{O}_M)}$, где $\overline{H^{i-1}(\mathcal{O}_M)}$ обозначает комплексное сопряжение.

Задача 8.2. Докажите, что на римановом многообразии лапласиан $C^\infty M \xrightarrow{\Delta} C^\infty M$ задает сюрьективное отображение пучков. Вычислите группу i-х когомологий, $i > 0$, пучка гармонических функций.

Задача 8.3. Пучок $\mathcal{F}$ на M называется **мягким**, если для каждого замкнутого подмножества $Z \subset M$, и каждого ростка $v \in \mathcal{F}\big|_Z$ над Z, v продолжается до глобального сечения. Докажите, что на компактном многообразии, любой мягкий пучок – тонкий, и наоборот.

Задача 8.4. Векторное поле v на симплектическом многообразии (M, ω) называется **гамильтоновым**, если $\operatorname{Lie}_v \omega = 0$. Докажите, что для $i \geqslant 1$, имеет место изоморфизм $H^i(\operatorname{Ham}) \cong H^{i+1}(M)$ где $\operatorname{Ham} M$ обозначает пучок гамильтоновых векторных полей.

Задача 8.5. Докажите, что на одномерном комплексном многообразии вторые когомологии пучка мероморфных функций (по сложению) равны нулю.

Задача 8.6. Пучок $\mathcal{F}$ на M называется **вялым**, если отображение ограничения

$$\Gamma_M(\mathcal{F}) \longrightarrow \Gamma_U(\mathcal{F})$$

сюрьективно для каждого открытого U. Докажите, что любой пучок вкладывается в вялый пучок.

Основы кэлеровой геометрии 9: голоморфные расслоения

Определение 9.1. Связность называется **совместимой с голоморфной структурой**, если $\nabla^{0,1} = \bar\partial$.

Задача 9.1. Пусть B – голоморфное расслоение, а ∇ – связность, совместимая с голоморфной структурой, причем $\nabla(b)$ голоморфно для любого голоморфного b. Докажите, что кривизна ∇ – (2,0)-форма.

Замечание. В терминологии Атьи, такая связность называется **голоморфной**.[3]

Задача 9.2. Пусть ∇ – связность на голоморфном расслоении, совместимая с голоморфной структурой, причем ее кривизна – (2,0)-форма. Докажите, что это голоморфная связность.

Задача 9.3. Пусть L - линейное расслоение на компактном кэлеровом многообразии, допускающее голоморфную связность с кривизной Θ. Докажите, что $\Theta = 0$.

Задача 9.4. Пусть L – линейное расслоение на компактном комплексном многообразии M, причем $c_1(L) = 0$. Всегда ли найдется плоская эрмитова связность на L? А плоская связность, согласованная с голоморфной структурой? А если M кэлерово?

Задача 9.5. Пусть (L, h) - голоморфное линейное эрмитово расслоение, причем соответствующая связность Черна плоская. Докажите, что h однозначно с точностью до константы задается голоморфной структурой на L.

Задача 9.6. Пусть L – нетривиальное голоморфное линейное эрмитово расслоение на компактном комплексном многообразии а $-\sqrt{-1}\Theta$ – кривизна связности Черна. Предположим, что $\Theta \leqslant 0$, то есть все собственные значения Θ неположительны. Докажите, что у L нет голоморфных сечений.

[3] Иногда люди называют "голоморфной" связность, совместимую с голоморфной структурой.

Основы кэлеровой геометрии: задачи для экзамена

Студентам выдается по 1-2 задачи из каждого раздела, из рассчета по 2 балла за раздел. Для получения оценки 3, нужно набрать 3 балла, для оценки 4 - 5 баллов, для оценки 5 – 6 баллов.

10.1. Почти комплексные многообразия

Задача 10.1. Пусть (M, I) – почти комплексное многообразие, причем I интегрируема в плотном, открытом подмножестве. Докажите, что I интегрируема.

Задача 10.2. Пусть f – голоморфная функция на почти комплексном эрмитовом многообразии (M, I, ω) размерности n. Докажите, что $\frac{-\sqrt{-1}\partial\bar\partial(|f|^2)\wedge\omega^{n-1}}{\omega^n} \geqslant 0$, причем равенство достигается тогда и только тогда, когда f – константа.

Задача 10.3. Пусть на почти комплексном многообразии (M, I) задана голоморфная функция f, такая, что $|f| = const$. Докажите, что f постоянна.

Задача 10.4 (2 балла). Пусть I – би-инвариантная комплексная структура на группе Ли. Докажите, что она интегрируема.

Задача 10.5. Пусть f – непрерывная функция на комплексном многообразии, голоморфная в открытом, плотном подмножестве. Докажите, что f голоморфна.

Задача 10.6. Пусть $G(p, n)$ есть многообразие Грассманна p-мерных комплексных подпространств в $\mathbb{C}^n$, снабженное естественным действием группы $U(n)$, а I – $U(n)$-инвариантная почти комплексная структура. Докажите, что она интегрируема.

Задача 10.7 (2 балла). Решите предыдущую задачу. Докажите, что комплексная структура I единственна.

Задача 10.8. Пусть Q есть факторпространство $O(2n)/U(n)$, снабженное естественным действием $O(2n)$ слева, а I – $O(2n)$-инвариантная почти комплексная структура. Докажите, что она интегрируема.

Задача 10.9. Пусть X – комплексное многообразие. Докажите, что множество неподвижных точек X_ι антикомплексной инволюции – гладкое многообразие, причем $\dim_{\mathbb{R}} X_\iota = \dim_{\mathbb{C}} X$.

Задача 10.10 (2 балла). Пусть (M, I) – комплексное многообразие, $\dim_{\mathbb{C}} M = n$, $U \subset M$ – плотное, открытое подмножество, а $\Omega \in \Lambda^{n,0}(U)$ – невырожденная $(n, 0)$-форма. Предположим, что Ω замкнута. Докажите, что почти комплексная структура I интегрируема.

10.2. Кэлеровы многообразия, связности и кручение

Задача 10.11 (2 балла). Пусть Ξ – тензор на многообразии M, причем у каждой точки найдется окрестность и на ней связность без кручения, такая, что $\nabla(\Xi) = 0$. Докажите, что на M найдется связность без кручения, такая, что $\nabla(\Xi) = 0$.

Задача 10.12 (2 балла). Пусть – многообразие, а $X \subset TM$ – нигде не зануляющееся векторное поле. Найдите связность без кручения такую, что $\nabla(X) = 0$.

Задача 10.13 (2 балла). Пусть – комплексное многообразие. Постройте связность без кручения, сохраняющую комплексную структуру (то есть $\nabla I = 0$). Докажите, что для любого почти комплексного многообразия существование такой связности влечет интегрируемость I.

Задача 10.14 (2 балла). Пусть $B \subset TM$ – интегрируемое подрасслоение в TM. Постройте связность без кручения, такую, что $\nabla(B) \subset \Lambda^1 M \otimes B$. Докажите, что для любого расслоения $B \subset TM$, существование такой связности влечет интегрируемость B.

Задача 10.15. Пусть V есть $n+1$-мерное комплексное пространство с невырожденной эрмитовой метрикой с сигнатурой $(n, 1)$, а $B \subset \mathbb{P}V$ проективизация множества всех векторов с отрицательным квадратом. Докажите, что B гомеоморфно шару, и снабжено транзитивным, голоморфным действием группы $G = U(n, 1)$ унитарных эндоморфизмов пространства V. Постройте на (B, I) $U(n, 1)$-инвариантную кэлерову метрику.

Задача 10.16 (2 балла). Решите предыдущую задачу. Докажите, что такая метрика единственна с точностью до константы.

Задача 10.17. Постройте $U(n)$-инвариантную кэлерову метрику на многообразии Грассмана p-мерных комплексных подпространств в $\mathbb{C}^n$.

Задача 10.18 (2 балла). Решите предыдущую задачу. Докажите, что такая метрика единственна с точностью до константы.

Задача 10.19. Пусть M – комплексное многообразие, ∇ – связность без кручения, сохраняющая I, а ϕ – вещественная функция, такая, что симметрическая 2-форма $\operatorname{Hess}(\phi)$, полученная симметризацией $\nabla^2(\phi)$, положительно определена.[4] Докажите, что $dd^c\phi$ – кэлерова форма.

Определение 10.1. Вещественное векторное поле на многообразии называется **голоморфным**, если соответствующая однопараметрическая группа диффеоморфизмов состоит из голоморфных преобразований

Задача 10.20. Пусть (M, I) комплексное многообразие, снабженное связностью без кручения ∇, причем $\nabla I = 0$, а $X \in TM$ – векторное поле. Докажите, что X голоморфно тогда и только тогда, когда $\nabla X \in \Lambda^1(M) \otimes TM$, рассмотренное как эндоморфизм TM, комплексно линейно.

10.3. Теория Ходжа

Задача 10.21 (2 балла). Пусть θ – замкнутая, не точная 1-форма на компактном, n-мерном вещественном многообразии. Докажите, что $d_\theta(\eta) := d\eta + \theta \wedge \eta$ удовлетворяет $d_\theta^2 = 0$. Докажите, что $d_\theta : \Lambda^{n-1}(M) \longrightarrow \Lambda^n(M)$ сюрьективно.

Задача 10.22. Пусть H – точная 3-форма на многообразии M, а $d_H(\eta) := d\eta + H \wedge \eta$. Докажите, что $d_H^2 = 0$. Докажите, что $\frac{\ker d_H}{\operatorname{im} d_H} \cong H^*(M)$

[4]Такая функция называется **выпуклой**.

Задача 10.23. Пусть η – (1,1)-форма с компактным носителем на $M \cong \mathbb{C}$. Всегда ли найдется $f \in C^\infty M$ с компактным носителем, такая, что $\eta = dd^c f$?

В следующих задачах, M есть почти комплексное многообразие, а $d = \oplus_p d^{p,1-p}$ есть разложение дифференциала де Рама по типам Ходжа.

Задача 10.24. Докажите, что $(d^{0,1})^3 = 0$.

Задача 10.25. Докажите, что $[d^{2,-1}, \{d^{1,0}, d^{1,0}\}] = 0$.

Задача 10.26. Докажите, что $[d^{2,-1}, \{d^{1,0}, d^{0,1}\}] = 0$.

Задача 10.27. Пусть W – оператор Вейля, действующий на (p,q)-формах как $W(\eta) = \sqrt{-1}(p-q)\eta$. Докажите, что $I^{-1}dI - [W, d] = 0$ тогда и только тогда, когда I интегрируема.

Задача 10.28. Пусть η – замкнутая $(1,1)$-форма на шаре в $\mathbb{C}^n$, гладко продолжающаяся на границу. Докажите, что $\eta = dd^c f$, для какой-то функции f.

Задача 10.29. Пусть (M, I, ω) – почти комплексное эрмитово многообразие, причем $d\omega = 0$. Найдите размерность супералгебры Ли, порожденной L, Λ, d, где $L(\eta) = \omega \wedge \eta$, а $\Lambda = *L*$.

Задача 10.30. Пусть (M, I, ω) – n-мерное почти комплексное эрмитово многообразие. **Формой Ли** M называется 1-форма $\theta := \Lambda(d\omega)$. Докажите, что

$$[L, d^*](f) = Idf + (n-1)I(\theta)$$

для любой функции f на M.

10.4. Векторные расслоения и пучки

Задача 10.31. Докажите, что любое гладкое комплексное расслоение ранга 1 на сфере S^n, $n \geqslant 3$, тривиально.

Определение 10.2. Пусть F – пучок на топологическом пространстве. а f – сечение F. **Носитель** f есть множество всех точек, у которых нет окрестности U такой, что $f\big|_U = 0$. Обозначим за $F_c(U)$ группу сечений F с компактным носителем.

Задача 10.32. Пусть F – тонкий пучок на многообразии. Докажите, что соответствие $U \longrightarrow F_c(U)^*$, ставящее открытому множеству U в соответствие двойственное пространство к $F_c(U)$, задает пучок F_c^*.

Задача 10.33 (2 балла). Решите предыдущую задачу. Предположим, что $0 \to A \to B \to C \to 0$ точная последовательность пучков $C^\infty(M)$-модулей. Докажите, что $0 \to C_c^* \to B_c^* \to A_c^* \to 0$ – точная последовательность пучков.

Задача 10.34 (2 балла). Пусть M – компактное риманово многообразие, а $\mathcal{H}^i$ – пучок гармонических i-форм. Докажите, что есть точная последовательность пучков

$$0 \longrightarrow \mathcal{H}^i \longrightarrow \Lambda^i(M) \xrightarrow{\Delta} \Lambda^i(M) \longrightarrow 0$$

Задача 10.35. Докажите, что на комплексной кривой M следующая последовательность пучков точна.

$$\mathcal{O}_M \oplus \bar{\mathcal{O}}_M \longrightarrow C^\infty_{\mathbb{C}}(M) \xrightarrow{dd^c} \Lambda^2(M, \mathbb{C}) \longrightarrow 0.$$

Задача 10.36. Предположим, что на компактном комплексном многообразии M сечения голоморфного расслоения B ранга k разделяют точки. Предположим к тому же, что естественное отображение $\Gamma_M(B) \longrightarrow \Gamma_M(B/\mathfrak{m}_x B)$ сюрьективно для каждого $x \in M$, где $B/\mathfrak{m}_x B$ есть пучок-небоскреб ранга k, полученный из B домножением на $\mathcal{O}/\mathfrak{m}_x = \mathbb{C}_x$. Постройте голоморфное вложение из M в многообразие Грассманна $G(k, N)$ k-мерных плоскостей в $\mathbb{C}^N$, для какого-то N.

Задача 10.37 (2 балла). Пусть M – односвязное комплексное многообразие, которое удовлетворяет $H^2(M, \mathbb{Z}) = 0$. Докажите, что любое линейное расслоение над M допускает плоскую связность, совместимую с голоморфной структурой.

Определение 10.3. Плюрисубгармоническая функция это вещественнозначная функция на комплексном многообразии, такая, что $dd^c f$ есть кэлерова форма.

Задача 10.38. Пусть L – положительное линейное расслоение на компактном кэлеровом многообразии M, а f – голоморфное сечение L, зануляющееся в Z. Докажите, что $|f|^{-1}$ плюрисубгармонична на $M \backslash Z$.

Задача 10.39. Пусть f – плюрисубгармоническая функция на комплексном многообразии. Докажите, что у f нет локальных максимумов.

Задача 10.40. Пусть L – голоморфное линейное расслоение на компактном кэлеровом многообразии M, снабженное эрмитовой метрикой, X – подмножество в тотальном пространстве $\operatorname{Tot} L$, состоящее из ненулевых векторов, а $\phi: X \longrightarrow \mathbb{R}$ – функция, переводящая вектор $l \in \operatorname{Tot} L$ в $|l|^2$. Докажите, что $dd^c \log \phi = -\pi^* \Theta_L$, где $\pi: X \longrightarrow M$ есть проекция, а Θ_L – кривизна L.