федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего профессионального образования «Национальный
исследовательский университет «Высшая школа экономики» (НИУ ВШЭ)

УДК: 511.2, 512.7, 514.7

Согласовано
Проректор НИУ ВШЭ
________________ М.М.Юдкевич
30 декабря 2011г.

ОТЧЕТ
О НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОЙ РАБОТЕ

в рамках Постановления Правительства РФ от 09 апреля 2010г. № 220 «О мерах по привлечению ведущих ученых в российское образовательное учреждение высшего профессионального образования» (Договор № 11.G34.31.0023)

по проекту: Алгебраическая геометрия и ее приложения (годовой, этап № 2)

Руководитель НИР, ведущий ученый	
Доктор физико-математических наук	_________________________Ф.А. Богомолов
	дата, подпись

Москва 2011

СПИСОК ИСПОЛНИТЕЛЕЙ

д.ф.-м.н.	подпись, дата	Ф.А. Богомолов
д.ф.-м.н.	подпись, дата	И.В. Артамкин (2.2)
к.ф.-м.н.	подпись, дата	Е.А. Америк (2.6)
д.ф.-м.н.	подпись, дата	А.И. Бондал (2.5)
PhD	подпись, дата	М.С. Вербицкий (2.1, 2.17)
к.ф.-м.н.	подпись, дата	А.Л. Городенцев (2.15, 2.16)
к.ф.-м.н.	подпись, дата	С.О. Горчинский (2.12, 2.14)
	подпись, дата	О.В. Гришина (2.17)
к.ф.-м.н.	подпись, дата	А.Д. Елагин (2.5)
к.ф.-м.н.	подпись, дата	А.И. Ефимов (2.5)
к.ф.-м.н.	подпись, дата	В.С. Жгун (2.11)
к.ф.-м.н.	подпись, дата	А.И. Зыкин (2.18)
д.ф.-м.н.	подпись, дата	Д.Б. Каледин (2.9)
к.ф.-м.н.	подпись, дата	В.А. Кириченко (2.8)
д.ф.-м.н.	подпись, дата	А.Г. Кузнецов (2.5)
д.ф.-м.н.	подпись, дата	В.С. Куликов (2.10)
PhD	подпись, дата	К.Г. Куюмжиян (2.6)
к.ф.-м.н.	подпись, дата	А.М. Левин (2.3)
к.ф.-м.н.	подпись, дата	С.М. Львовский (2.15)
	подпись, дата	Н.А. Мамардашвили (2.1)
к.ф.-м.н.	подпись, дата	Н.С.Маркарян (2.5)
	подпись, дата	Д.В. Миронов (2.1)
д.ф.-м.н.	подпись, дата	Д.О.Орлов (2.5)
к.ф.-м.н.	подпись, дата	Л.Е. Посицельский (2.3, 2.5)
д.ф.-м.н.	подпись, дата	Ю.Г. Прохоров (2.6)
к.ф.-м.н.	подпись, дата	В.В. Пржиялковский (2.5)
д.ф.-м.н.	подпись, дата	М.З. Ровинский (2.4)

к.ф.-м.н.	подпись, дата	**А.А. Рослый (2.5)**
д.ф.-м.н.	подпись, дата	**А.Н. Рудаков (2.15)**
к.ф.-м.н.	подпись, дата	**С.Ю. Рыбаков (2.5)**
к.ф.-м.н.	подпись, дата	**Е.Ю. Смирнов (2.8)**
	подпись, дата	**А. Л. Тертель (2.17)**
к.ф.-м.н.	подпись, дата	**В.А. Тиморин (2.8)**
д.ф.-м.н.	подпись, дата	**Н.А. Тюрин (2.11)**
к.ф.-м.н.	подпись, дата	**М.В. Финкельберг (2.7)**
д.ф.-м.н.	подпись, дата	**И.А. Чельцов (2.13)**
PhD	подпись, дата	**В.В. Шевчишин (2.1)**
к.ф.-м.н.	подпись, дата	**К.А. Шрамов (2.13, 2.14)**
	подпись, дата	**Я.В. Абрамов (2.15)**
	подпись, дата	**Р.Я. Будылин (2.12)**
	подпись, дата	**Г.С. Мутафян (2.7)**
	подпись, дата	**И.В. Нетай (2.15)**
	подпись, дата	**А.О. Солдатенков (2.1)**
	подпись, дата	**А.С. Трепалин (2.6)**
	подпись, дата	**А.В. Фонарёв (2.5)**
	подпись, дата	**Е.А. Абрикосов (2.2)**
	подпись, дата	**Д.В. Кубрак (2.18)**
	подпись, дата	**А.А. Мингазов (2.5)**
	подпись, дата	**Н.Е. Сахарова (2.3)**
	подпись, дата	**Л.А. Суханов (2.16)**
Нормоконтролёр	подпись, дата	**В.В. Кузнецова**

РЕФЕРАТ

Ключевые слова: группа Галуа, функциональное поле, рациональная точка многообразия, K3 поверхность, рациональные кривые, конечное поле, кэлерово многообразие, гиперкэлерово многообразие, теорема Торелли, отображение периодов, специальное лагранжево подмногообразие, лагранжево слоение, калибрация, локально конформно кэлерово многообразие, вайсманово многообразие, кэлеров потенциал, плюрисубгармоническая функция, комплексное многообразие, некэлерово многообразие, накрытие, монодромия, биголоморфизм, теорема Торелли, пространство Тэйхмюллера, группа Тэйхмюллера, некоммутативная геометрия, вектора Витта, аддитивные категории, заставы Дринфельда, когомологии Горески-Макферсона, алгебра Вирасоро, модули Верма, алгебра Гельфанда-Цетлина, стабильные расслоения, компактификация Уленбек, компактификация Гизекера, дифференциальная теория Галуа, теория Пикара–Вессио, A_∞-алгебры, сизигии, комплекс Кошуля, квадратичные алгебры, алгебры Кошуля, резольвента Кошуля, таблицы Юнга, пространство Гурвица, теорема Люрота-Клебша-Гурвица, исчисление Шуберта, многогранники Ньютона, многогранники Ньютона-Окунькова, операторы Демазюра, мотивные структуры, когомологии Хохшильда, циклические когомологии, алгебры Хопфа, группа Кремоны, многообразия Фано, метрики Кэлера–Эйнштейна, исключительные фактор-особенности, гипотеза Ленга, K3-поверхность, рациональные эндоморфизмы, зеркальная симметрия, геометрическое квантование, когомологии Флоера, торы Чеканова, поверхность дель Пеццо, дивизор Вейля, обратная задача теории Галуа

Краткая аннотация: Приводятся результаты исследований в области алгебраической геометрии, комплексной геометрии, дифференциальной геометрии и геометрической теории представлений.

Основные темы исследования - теория производных категорий, циклические когомологии, геометрическая теория представлений, геометрия и арифметика гиперкэлеровых многообразий (в частности, K3-поверхности), геометрия комплексных многообразий (кэлеровых и локально конформно кэлеровых).

Результаты носят теоретический характер и являются существенно новыми. Возможны приложения к теоретической физике, дифференциальной геометрии, теории чисел и задачам классификации комплексных многообразий.

Оглавление

1. Введение

За отчетный период (2011-й год) Лабораторией алгебраической геометрии и ее приложений было организовано совместно с Математическим институтом им.В.А.Стеклова РАН 4 международные конференции в г.Москве; первая летняя школа “Алгебра и геометрия” в г.Ярославле, где Лаборатория выступила главным организатором, а также 2 летние школы в г.Ярославле и в г.Екатеринбурге, где Лаборатория была со-организатором. Кроме того, сотрудники Лаборатории приняли участие в организации 3 международных конференций в Италии, Австрии и Хорватии, который проводил Университет Вены. Сотрудниками Лаборатории было опубликовано 53 статьи и подготовлено к печати более 45 препринтов; по результатам этой работы сделано более 50 докладов. Всего сотрудники Лаборатории приняли участия более чем в 60 конференциях, семинарах и школах как в России, так и за рубежом.

Научная деятельность сотрудников Лаборатории была отмечена различными премиями и наградами. На выборах 2011г. Д.О.Орлов был избран членом-корреспондентом РАН по отделению математика. А.И.Зыкин получил премию Московского математического общества за цикл работ по асимптотическим проблемам теории чисел. А.В.Фонарев получил второе место в номинации “Аспиранты и студенты” VI Конкурса Мёбиуса. Сотрудники Лаборатории А.И.Ефимов, М.С.Вербицкий, А.Г.Кузнецов, Л.Е.Посицельский, Е.Ю.Смирнов, В.А.Тиморин стали победителями конкурса Гранты Саймонса для математиков. На знаменитом семинаре Бурбаки (июнь 2011г., Париж) был представлен доклад Д.Хойбрехтса “A Global Torelli theorem for hyperkahler manifolds [after M.Verbitsky]”, по работам М.С.Вербицкого. С.О.Горчинский, В.С.Жгун и В.А.Тиморин получили персональные гранты Президента РФ.

Сотрудниками лаборатории были прочитаны около 40 курсов лекций, многие курсы читались впервые.

Были получены значительные результаты по основным темам, заявленным на 2011-й год:

- Доказательство глобальной теоремы Торелли для гиперкелеровых многообразий
- Доказательство частных случаев гомологической зеркальной симметрии (кривые)

- Построение рациональных точек на многообразиях, снабженных бирациональными автоморфизмами
- Изучение мотивных структур, возникающих в некоммутативной геометрии, посредством когомологий Хохшильда и циклических когомологий
- Исследования в области производной и некоммутативной алгебраической геометрии
- Исследование бирациональной классификации алгебраических многообразий и проблем рациональности
- Исследование топологии параболических Застав Дринфельда. Приложения к гипотезе АГТ (Алдай-Гайотто-Тачикава).
- Построение исчисления Шуберта в кольце многогранников Гельфанда-Цетлина
- Исследование гомологических и гомотопических свойств аддитивных категорий
- Исчисление неприводимых компонент пространства Гурвица и пространства модулей алгебраических поверхностей
- Построение специальных лагранжевых слоений в многообразиях Фано
- Исследование параметрических расширений Пикара-Вессио
- Исследование многообразий Фано с нетривиальными группами автоморфизмов
- Исследование рациональности и стабильной рациональности факторпространств по действиям групп
- Изучение сизигий проективных вложений однородных пространств и стабильных расслоений на однородных пространствах
- Изучение функториальных гомотопических произведений и их приложений в геометрии и математематической физике

- Исследование пространства модулей инстантонов и рациональных кривых в пространствах твисторов: гладкость, связность, компактность

- Исследование асимптотических свойств дзета и L-функций в семействах многообразий над конечными полями.

- Организация комплекса компьютерных экспериментов в теории представлений и гомологической алгебре.

Результаты работ по этим темам составляют содержание настоящего отчета. Также в отчет вошли краткие обзоры работ научных сотрудников лаборатории В.С.Жгуна и К.Г.Куюмжиян, которые проводились вне рамок вышеперечисленных тем и записки 3-х курсов лекций, прочитанных за отчетный период.

В число приложений к отчету включена таблица, полученная Д. Мироновым в работе по по теме “Организация комплекса компьютерных экспериментов в теории представлений и гомологической алгебре”, и отражающая кратности вхождения представления алгебраической группы в ее тензорный квадрат.

2. Построение рациональных точек на многообразиях, снабженных бирациональными автоморфизмами

Знаменитая гипотеза Ленга утверждает, что рациональные над числовым полем точки не могут быть плотны по Зарискому на многообразии общего типа. В последние годы было предпринято несколько попыток расширить гипотезу Ленга до (разумеется, гипотетической) геометрической характеризации многообразий над числовым полем с плотными рациональными точками (возможно, после конечного расширения коэффициентов: в таком случае говорят о потенциальной плотности). Все эти гипотезы сходятся на том, что многообразия с тривиальным каноническим классом должны быть потенциально плотными, но примеров до сих пор очень мало. Хорошо известно и нетрудно доказать, что абелевы многообразия потенциально плотны, но в односвязном случае ситуация неясна даже для общих К3-поверхностей (хотя для специальных К3, например, эллиптических или с бесконечной группой автоморфизмов, есть результаты Богомолова и Чинкеля конца 90х - начала 2000х годов). В 2007 году Америк и Вуазен показали, что свойство потенциальной плотности выполнено для многообразия прямых на общей кубике в $\mathbb{P}^5$; это четырехмерное гиперкэлерово многообразие, то есть, в некотором смысле аналог К3-поверхности, что служит некоторым утешением.

Для построения рациональных точек естественно использовать автоморфизмы или эндоморфизмы, определенные над тем же числовым полем. В самом деле, орбита рациональной точки будет состоять из рациональных точек. К сожалению, интересных автоморфизмов не так много и приходится рассматривать рациональные отображения в себя, которые значительно труднее для изучения. Простой пример, недавно описанный Америк и вышедший в начале 2011 года - это статья "On an automorphism of $Hilb^{[2]}$ of certain K3 surfaces", Proc. Edinburgh Math. Soc. 54 (2011), 1-7, где разбирается случай схемы Гильберта пар точек на К3 поверхности, допускающей два вложения в трехмерное пространство в качестве квартики. Такая схема Гильберта имеет две независимых инволюции, и их можно использовать для доказательства потенциальной плотности рациональных точек. Этот пример не покрывается более ранними результатами Богомолова, Хассета и Чинкеля.

Бирациональные автоморфизмы тоже отсутствуют во многих интересных случаях, но, как уже было сказано выше, у некоторых интересных семейств многообразий есть рациональные эндоморфизмы большой степени. В недавно вышедшей в Compositio Mathematica работе: "Remarks on endomorphisms and rational points", Compositio Mathematica 147 (2011), 1819-1842, Америк, Богомолов и Ровинский показали возможность изучения арифметики таких эндоморфизмов "динамическими методами", например, с помощью линеаризации отображения в окрестности неподвижной точки. В частности, при этом получается более простое доказательство теоремы о потенциальной плотности Америк и Вуазен.

Здесь естественно возникает общий вопрос: можно ли утверждать, что орбиты алгебраических точек "столь же велики", сколь и орбиты общих комплексных? В самом деле, как несколько лет назад показали Америк и Кампана, замыкания по Зарискому общих комплексных точек расслаивают многообразие над некоторой базой, так что если из каких-то соображений ясно (а так часто бывает), что наш эндоморфизм не сохраняет расслоений, то можно найти комплексную точку с орбитой, плотной по Зарискому. К сожалению, при доказательстве этого результата нужно исключать из рассмотрения точки, лежащие на счетном объединении собственных подмногообразий, поэтому он ничего не говорит об итерации алгебраических точек. В вышедшей в 2011 году статье: "Existence of non-preperiodic algebraic poins for a rational self-map of infinite order", Math. Research Letters 18 (2011), 251-256, Америк удалось сделать первый шаг в этом направлении: она доказала, что отображение бесконечного порядка всегда имеет алгебраическую точку с бесконечной орбитой.

Изучение лагранжевых расслоений гиперкэлеровых многообразий - давно стоящая и важная одновременно в нескольких контекстах (классификация, зеркальная симметрия) проблема. Следующий вопрос поставлен Бовиллем: пусть имеется неприводимое гиперкэлерово многообразие X и лагранжев тор $T \subset X$. Верно ли, что он является слоем лагранжева расслоения на X (возможно, мероморфного)? Греб, Лен и Ролленске недавно показали, что это верно в неалгебраическом случае. Америк обнаружила простое доказательство для алгебраических многообразий размерности 4 (в заметке "A remark on a question of Beauville about lagrangian fibrations", arxiv:11102852) и в настоящее время вместе с Ф. Кампана (Университет Нанси, Франция) работает над обобщением этого результата на высшие размерности.

Литература

[1] Amerik, E., *A remark on a question of Beauville about lagrangian fibrations*, arXiv:1110.2852.

[2] Amerik, E., *On an automorphism of Hilb[2] of certain K3 surfaces*, Proc. Edinburgh Math. Soc., 2011. No. 54(1)

[3] Amerik, Ekaterina, *Existence of non-preperiodic algebraic points for a rational self-map of infinite order*, Math. Res. Lett. 18 (2011), no. 2, 251-256

[4] Bogomolov, F.A. Amerik, E., Rovinsky, M., *Remarks on endomorphisms and rational points* Compositio Mathematica, 2011. No. 8

[5] Daniel Greb, Christian Lehn, Sönke Rollenske, *Lagrangian fibrations on hyperkähler manifolds: intersubsections of Lagrangians, L-reduction, and fourfolds*, arXiv:1110.2680

3. Исследование рациональности и стабильной рациональности факторпространств по действиям групп

Стабильная рациональность - одна из классических тем алгебраической геометрии, восходящая к работам руководителя Лаборатории Алгебраической Геометрии Ф. А. Богомолова середины 1980-х ([B1]). Если V - точное представление алгебраической группы, стабильная рациональность фактора V/G есть рациональность $V/G \times \mathbb{C}^n$, для достаточно большого n. Богомолов доказал, что это свойство не зависит от выбора представления, то есть является инвариантом группы, и построил когомологические препятствия стабильной рациональности.

Библиография работ по стабильной рациональности групп измеряется десятками (а то и сотнями) статей, но этот предмет продолжает активно развиваться. Среди других применений, идеи Богомолова оказались полезны для доказательства рациональности пространства модулей пространственных кривых ([BG], [BGK]).

В работе [BP], Богомолов и Петров изучают неразветвленные когомологии конечных групп, которые являются единственным известным препятствием к стабильной рациональности. Неразветвленные когомологии были впервые определены Богомоловым в работе [B2] (см. также [B3]), и остаются одной из центральных тем теории стабильно рациональности алгебраических групп.

В работе [B3], Богомолов высказал гипотезу, что неразветвленные когомологии простой конечной группы с конечными коэффициентами всегда равны нулю. В работе [BP] эта гипотеза доказана для группы A_n четных перестановок.

Вопрос о стабильной рациональности алгебраических групп доселе не решен, хотя есть немало гипотез, утверждающих стабильную рациональность тех или иных групп В работе [BBG], Богомолов, Бенинг и Граф фон Ботмер изучают стабильную рациональность групповых расширений. В качестве приложения, доказана стабильная рациональность аффинной группы.

Литература

[B1] Bogomolov, F. A. *Stable rationality of quotient spaces for simply connected groups*, Mat. Sb. (N.S.) 130(172) (1986), no. 1, 3-17, 128.

[B2] Bogomolov F.A., *The Brauer group of quotient spaces of linear representations,* Math. USSR-Izv., 1988, 30(3), 455-485

[B3] Bogomolov F.A., *Stable cohomology of groups and algebraic varieties,* Russian Acad. Sci. Sb. Math., 1993, 76(1),

[BBG] Bogomolov, F.A., Böhning, C., Graf von Bothmer, H., *Rationality of quotients by linear actions of affline groups*, Science China Mathematics, 2011. No. 54.

[BP] F.A. Bogomolov, Petrov T., *Unramified cohomology of alternating group*, CEJM, 2011, No. 9 (5), pp. 936-948

[BG] Böhning, Christian; Graf von Bothmer, Hans-Christian, *Rationality of the moduli spaces of plane curves of sufficiently large degree*, Invent. Math. 179 (2010), no. 1, 159-173.

[BGK] Böhning, Christian; Graf von Bothmer, Hans-Christian; Kröker, Jakob, *Rationality of moduli spaces of plane curves of small degree* Experiment. Math. 18 (2009), no. 4, 499-508.

4. Доказательство глобальной теоремы Торелли для гиперкэлеровых многообразий

4.1. Теорема Торелли: история вопроса

Руджеро Торелли доказал свою знаменитую теорему в 1913-м году ([To]). Теорема Торелли позволяет восстановить кривую по ее якобиану, то есть по пространству первых когомологий с заданной на нем структурой Ходжа.

Теоремы типа Торелли ([W]) хорошо известны в алгебраической геометрии, и лежат в основе большинства явных конструкций пространства модулей. Говоря современным языком, теорема Торелли осуществляет биекцию между множеством деформаций комплексного многообразия и множеством классов изоморфизма структур Ходжа. Теорема Торелли, в самой сильной форме, доказана для тора и для K3 поверхностей, но в более общей ситуации (в частности, для гиперкэлеровых многообразий) имел место, в лучшем случае, локальный аналог этого утверждения.

Локальная теорема Торелли была доказана для K3 поверхности Г. Тюриной, Шафаревичем и Пятецким-Шапиро, ([Tj]), для общего гиперкэлерового многообразия научным руководителем Лаборатории Богомоловым ([B1]), а для многообразий Калаби-Яу – Богомоловым, Тианом и Тодоровым ([B2, Ti, Td2]). Этот результат лежит в основе зеркальной симметрии - плодотворного направления науки на стыке математики и струнной физики.

Не считая комплексных торов (для которых этот результат довольно прост, и известен со времен Зигеля), глобальная теорема Торелли была доказана только для K3 поверхностей и это считалось колоссальным достижением. Первооткрывателем теоремы Торелли для K3 считается сотрудник Лаборатории Алгебраической Геометрии Вик. С. Куликов, [K], доказавший ее в 1977-м году (частичные результаты были получены Бернсом и Раппопортом в 1975; [BR]) Впрочем, интенсивная работа над улучшением доказательства теоремы Торелли шла и после доказательства Куликова; доказательство теоремы Торелли для K3 превратилось в своего рода новый раздел математики ([Td1, Be, L, Si, M, F]).

До работы заведующего Лабораторией Алгебраической Геометрии М. Вербицкого [V2], доказательство глобальной теоремы Торелли казалось невозможным, ибо для установления биекции между гиперкэлеровыми многообразиями и классами эквивалентности структур Ходжа было два препятствия. Во-первых, бимероморфно эквивалентные многообразия могут быть неизоморфны ([De]), но они всегда имеют одинаковые периоды, а пространство модулей бирациональных классов многообразий, вообще говоря, не существует. Во-вторых, существовали гиперкэлеровы многообразия, заведомо не бимероморфно эквивалентные, но имеющие одинаковые периоды и один и тот же деформационный класс ([Na, Ma2]).

В работе [V2], эти проблемы разрешаются следующим образом. Используя классические методы общей топологии, Вербицкий строит пространство Тейхмюллера бимероморфно эквивалентных деформаций гиперкэлерова многообразия, таким образом, что бимероморфное пространство модулей получается как его фактор по дискретной группе. Эта дискретная группа ("группа монодромии" в работах Э. Маркмана, [Ma1, Ma2]) посчитана явно с точностью до подгруппы конечного индекса. Для определения группы монодромии Вербицкий использовал теорему о группе автоморфизмов когомологий, полученную в [V1], фундаментальные результаты Д. Салливана, [Su].

Работа Вербицкого нашла широкое международное признание; на семинаре Бурбаки (июнь 2011, Париж) был представлен доклад Д. Хойбрехтса, "A Global Torelli theorem for hyperkähler manifolds [after M. Verbitsky]".

4.2. Теорема Торелли для гиперкэлеровых многообразий: обзор приложений

Из рецензии, присланной редакцией Duke Math. Journal.

"В реферируемой статье доказана теорема Торелли для компактных гиперкэлеровых многообразий, также известных как неприводимые голоморфно симплектические многообразия. Это самое важное достижение в этой области за последние 10 лет! Автор обобщил теорему Торелли для K3 поверхностей, которую 40 лет назад доказали Пятецкий-Шапиро, Шафаревич и Бернс-Раппопорт. Она произвела революцию в теории компактных гиперкэлеровых многообразий и уже сейчас имеет многочисленные приложения.

1) *Апостолов использует теорему Торелли, чтобы посчитать число компонент связности пространства модулей компактных проективных голоморфно-симплектических многообразий типа* $K3^{[n]}$,

для поляризации заданной степени Богомолова-Бовилля ([A]). Многообразия типа $K3^{[n]}$ суть гладкие проективные многообразия, которые деформационно эквивалентны схеме Гильберта точек на поверхности K3.

2) *Буасьер и Сарти используют Глобальную Теорему Торелли, чтобы доказать, что группа бирациональных автоморфизмов проективного неприводимого голоморфно симплектического многообразия конечно порождена ([BS]).*

3) *Гриценко, Хулек и Санкаран используют результаты статьи Вербицкого в их исследовании пространства модулей голоморфно симплектических многообразий, доказывая, что некоторые компоненты этого пространства модулей – многообразия общего типа ([GSH]).*

4) *В препринте Хассетта и Чинкеля доказана их гипотеза об обильном коне голоморфно симплектических многообразий типа $K3^{[2]}$. Доказательство основано на глобальной теореме Торелли Вербицкого. Гипотеза Хассетта и Чинкеля сформулирована в их статье "Moving and ample cones of holomorphic symplectic fourfolds" ([HT]).*

5) *Маркман использует результаты этой статьи, чтобы вычислить бирациональный конус на проективном голоморфно симплектическом многообразии, и доказать гипотезу Моррисона о бирациональном конусе для таких многообразий ([Ma3]).*

6) *Монгарди использует Глобальную теорему Торелли в классификации пар (X, ι) неприводимых голоморфно симплектических многообразий типа $K3^{[2]}$ с симплектической инволюцией.*

Уверен, что я пропустил немало приложений. Очевидно, что статья Вербицкого будет стандартной ссылкой отныне и надолго. Важность результатов этой статьи была замечена организаторами семинара Бурбаки, которые пригласили Д. Хойбрехтса выступить с рассказом о работе Вербицкого ([H]).”

Среди других приложений Глобальной теоремы Торелли, упомянем работу [AV], написанную А. Ананьиным и М. Вербицким, в которой доказано, что любая компонента пространства модулей поляризованных гиперкэлеровых многообразий плотна в пространстве модулей гиперкэлеровых многообразий, несмотря на то, что она локально является дивизором.

Литература

[AV] Sasha Anan'in, Misha Verbitsky, *Any component of moduli of polarized hyperkaehler manifolds is dense in its deformation space*, arXiv:1008.2480.

[A] Apostol Apostolov, *Moduli spaces of polarized irreducible symplectic manifolds are not necessarily connected*, arXiv:1109.0175.

[Be] Beauville, Arnaud *Le theoreme de Torelli pour les surfaces $K3$: fin de la demonstration* Geometry of $K3$ surfaces: moduli and periods (Palaiseau, 1981/1982). Asterisque No. 126 (1985), 111-121.

[B1] Bogomolov, F. A. *Hamiltonian Kählerian manifolds.* Dokl. Akad. Nauk SSSR 243 (1978), no. 5, 1101-1104.

[B2] Bogomolov, F. A., *Kähler manifolds with trivial canonical class,* Preprint, Institut des Hautes Etudes Scientifiques (1981), 1-32.

[BS] Samuel Boissiere, Alessandra Sarti, *A note on automorphisms and birational transformations of holomorphic symplectic manifolds*, arXiv:0905.4370.

[BR] Burns, Dan; Rapoport, Michael (1975), *On the Torelli problem for kählerian K-3 surfaces*, Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure. Quatrime Série 8 (2): 235-273.

[De] Debarre, O., *Un contre-exemple au théorème de Torelli pour les variétés symplectiques irréductibles,* C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 299 (1984), no. 14, 681–684.

[F] Friedman, Robert, *A new proof of the global Torelli theorem for $K3$ surfaces*, Ann. of Math. (2) 120 (1984), no. 2, 237-269.

[GSH] V. Gritsenko, K. Hulek, G.K. Sankaran, *Moduli of K3 Surfaces and Irreducible Symplectic Manifolds*, arXiv1012.4155.

[HT] B. Hassett, Yu. Tschinkel, *Moving and ample cones of holomorphic symplectic fourfolds*, Geom. Funct. Anal. 19 (2009), no. 4, 1065-1080.

[H] Daniel Huybrechts, *A global Torelli theorem for hyperkaehler manifolds (after Verbitsky)*, arXiv:1106.5573.

[K] V. Kulikov, *Degenerations of K3 surfaces and Enriques'surfaces,* Math. USSR Izvestiya, (1977), 957-989.

[L] E. Loojenga, *A Torelli theorem for Kähler-Einstein K3 surfaces*, Lecture Notes in Mathematics, 1981, Volume 894/1981, 107-112.

[Ma1] Markman, E., *On the monodromy of moduli spaces of sheaves on $K3$ surfaces*, J. Algebraic Geom. 17 (2008), no. 1, 29–99, arXiv:math/0305042.

[Ma2] Markman, E. *Integral constraints on the monodromy group of the hyperkahler resolution of a symmetric product of a K3 surface,* International Journal of Mathematics Vol. 21, No. 2 (2010) 169-223, arXiv:math/0601304.

[Ma3] Markman, E. *A survey of Torelli and monodromy results for holomorphic-symplectic varieties*, Proceedings of the conference "Complex and Differential Geometry", Springer Proceedings in Mathematics, 2011, Volume 8, 257–322, arXiv:math/0601304.

[Mn] Giovanni Mongardi, *Symplectic involutions on deformations of* $K3^{[2]}$, arXiv:1107.2854.

[M] Morrison, David R. *Semistable degenerations of Enriques' and hyperelliptic surfaces*, Duke Math. J. 48 (1981), no. 1, 197-249.

[Na] Namikawa, Y., *Counter-example to global Torelli problem for irreducible symplectic manifolds*, Math. Ann. 324 (2002), no. 4, 841–845, arXiv:math/0110114.

[Si] Siu, Y.-T., *Every K3 surface is Kähler*, Invent. Math. 73 (1983), 139-150.

[Su] Sullivan, D., *Infinitesimal computations in topology*, Publications Mathématiques de l'IHÉS, 47 (1977), p. 269-331

[Tj] Tjurina, G. N., *The space of moduli of a complex surface with $q = 0$ and $K = 0$.* In: "Algebraic Surfaces", Seminar Shafarevich, Proc. Steklov Inst. 75 (1965).

[To] Ruggiero Torelli, *Sulle varietà di Jacobi*, Rend. della R. Acc. Nazionale dei Lincei , (5), 22, 1913, 98-103.

[Ti] G. Tian, *Smoothness of the universal deformation space of compact Calabi-Yau manifolds and its Petersson-Weil metric*, in *Math. Aspects of String Theory*, S.-T. Yau, ed., Worlds Scientific, 1987, 629–646.

[Td1] Todorov, A. N. *Applications of the Kähler-Einstein-Calabi-Yau metric to moduli of K3 surfaces*, Inventiones Math. 6-1, 251-265 (1980).

[Td2] A. Todorov, *The Weil-Petersson geometry of the moduli space of $SU(n \geq 3)$ (Calabi-Yau) manifolds*, Comm., Math. Phys. **126** (1989), 325–346.

[V1] Verbitsky, M., *Cohomology of compact hyperkähler manifolds and its applications,* alg-geom electronic preprint 9511009, 12 pages, LaTeX, also published in: GAFA vol. 6 (4) pp. 601-612 (1996).

[V2] M. Verbitsky, *A global Torelli theorem for hyperkahler manifolds*, arXiv:0908.4121

[W] A. Weil (1957). *Zum Beweis des Torellischen Satzes,* Nachr. Akad. Wiss. Göttingen, Math.-Phys. Kl. IIa: 32-53.

5. Исследование бирациональной классификации алгебраических многообразий и проблем рациональности

5.1. Особенности трехмерных экстремальных окрестностей рациональных кривых

Трехмерная экстремальная окрестность рациональной кривой – это росток (X, C) трехмерного комплексного пространства вдоль неособой рациональной кривой такой, что многообразие X имеет лишь терминальные особенности, антиканонический дивизор $-K_X$ обилен и имеется морфизм-стягивание $f : X \to Z$, для которого кривая C – является слоем. Изучение (и классификация) экстремальных окрестностей очень важны для эффективного применения теории минимальных моделей (например, в программе Саркисова). Она была начата в работе С. Мори [Mor88], за которую он получил Филдсовскую медаль, и продолжена в серии работ [Mor02], [KM92], [Tzi05], [MP08a] [MP08b], [MP09], [Tzi10].

Классификация экстремальных окрестностей дается в терминах общих элементов линейных систем $-K_X$ и $|\mathscr{O}_X|_X$, в локальных терминах поведения кривой C в особых точках X. Экстремальные окрестности делятся также на три большие группы по типу соответствующего стягивания $f : X \to Z$: дивизориальные, малые (флипповые) и $\mathbb{Q}$-расслоения на коники.

За отчетный период сотрудником лаборатории опубликована работа [MP11a] и работа [MP11b] сдана в печать (обе – в соавторстве с С. Мори). В первой работе классифицированы экстремальные окрестности, для которых общий элемент не содержит центральной кривой C и имеет особенность типа A_n. Во второй работе полностью классифицированы экстремальные окрестности, содержащие точку типа (IC) или (IIB) в смысле Мори [Mor88].

5.2. Автоморфизмы аффинных многообразий

Автоморфизмы аффинных многообразий – очень сложный объект, они изучались многими математиками, но до настоящего времени не сформировано хорошей техники работы с ними. Одним из простейших примеров аффинного многообразия является конус над неособым проективным многообразием $Y \subset \mathbb{P}^n$. В этом случае группа автоморфизмов конуса бесконечномерна тогда и только тогда, когда на нем имеется эффективное действие одномерной унипотентной группы $\mathbb{C}^+$. За отчетный период сотрудником лаборатории опубликована работа [KPZ11b] (в соавторстве), где получен геометрический критерий существования эффективного действия группы $\mathbb{C}^+$ на конусе в терминах его базисного многообразия $Y \subset \mathbb{P}^n$: многообразие Y должно содержать цилиндрическое аффинное подмножество, для которого дивизор поляризации распределен на границе. Это дает возможность строить многочисленные примеры конусов с бесконечномерной группой автоморфизмов. Наиболее интересные из них – те для которых вложение $Y \subset \mathbb{P}^n$ задается антиканонической поляризацией, т.е. когда Y – многообразие Фано (или поверхность дель Пеццо). Построено большое число примеров: поверхности дель Пеццо степени ≥ 4, квадрики, пересечения двух квадрик, трёхмерные многообразия Фано V_5 и V_{22}. В некоторых случаях наблюдается интересный эффект: многообразия Фано рода 9 и 10 обладающие цилиндром образуют лишь замкнутые подмножества в пространствах модулей всех многообразий Фано [KPZ11a]. Предположительно, общие такие многообразия не имеют цилиндра. В последнее время наметился прогресс в доказательстве того, что поверхности дель Пеццо степени ≤ 3 не могут содержать антиканонически поляризованного цилиндра.

5.3. Подгруппы в группе Кремоны

После появления фундаментальной работы [DI09], где была завершена классификация конечных подгрупп в двумерной группе Кремоны, возник естественный вопрос о многомерных обобщениях. В работе [Pro09] опубликованной сотрудником лаборатории в отчетный период были классифицированы простые подгруппы в трехмерной группе Кремоны. Эта работа пробудила интерес к исследованиям в этой области (в связи с классификационными вопросами [CS09], [CS10], проблемами рациональности [Bea11a] и с вычислениями существенной размерности групп [Dun10], [Bea11b]). В частности, основной результат работы дает отрицательный ответ на вопрос, поставленный Ж.-П. Серром [Ser09]: большинство конечных групп не допускают вложения в Cr_3.

В работе [Pro11c] был дан положительный ответ на другую проблему, поставленную Ж.-П. Серром: ранг конечной p-элементарной абелевой подгруппы в трехмерной группе Кремоны ограничен.

Была также развита общая техника работы с трехмерными G-многообразиями (см. [Pro10a], [Pro11a]; работа [Pro11a] подготовлена за отчетный период). В этих работах начата классификация особых трехмерных многообразий Фано, для которых группа классов дивизоров Вейля обладает "большим числом симметрий". Двумерным аналогом таких многообразий Фано являются поверхности дель Пеццо.

5.4. Вырождения поверхностей дель Пеццо

Вопрос о вырождениях проективной плоскости в алгебраических семействах таких, что специальный слой имеет лишь факторособенности был поставлен М. Манетти [Man91]. Полный ответ на этот вопрос был дан в совместной работе сотрудника лаборатории с П. Хаккиным [HP10]. Оказалось, что почти все такие вырождения получаются из некоторых "максимальных" торических, которые, в свою очередь, параметризуются решениями уравнения Маркова. В этой же работе были получены аналогичные результаты для вырождений поверхностей дель Пеццо в $\mathbb{Q}$-горенштейновых семействах, при дополнительном условии, что число Пикара центрального слоя равно 1.

За отчетный период сотрудником лаборатории к печати была подготовлена работа [Pro11b], где исследуются $\mathbb{Q}$-горенштейновы вырождения поверхностей дель Пеццо с произвольным числом Пикара. Получена оценка на число особых точек и исследованы вырождения с "большим" числом особых точек.

В последнее время было обнаружено замечательная связь между вырождениями поверхностей дель Пеццо и исключительными наборами векторных расслоений (см. [Hac11]). Однако, хорошее объяснение этому феномену еще не получено.

5.5. Рациональность полей инвариантов

Классическая проблема Э. Нётер (связанная с обратной задачей теории Галуа) спрашивает рационально ли фактормногообразие V/G аффинного (или проективного) пространства по конечной линейной группе G. Во многих случаях ответ положителен (см. напр. [Pro10b], [HK10], [KP10]). С другой стороны, бирациональный инвариант, открытый Богомоловым в конце 1980-х – так называемая неразветвленная группа Брауера, позволяет доказать нерациональность V/G во многих случаях

([Бог87], [Бог89], [Бог91]). В настоящее время проблема Э. Нётер далека от своего полного решения. Поэтому наиболее интересными являются случаи малой размерности.

За отчетный период сотрудником лаборатории к печати была подготовлена работа [Tre11], где доказывается, что фактор проективной плоскости по конечной подгруппе автоморфизмов всегда рационален над произвольным полем характеристики 0. Из этого следует, что для произвольного поля k характеристики 0 и конечной группы $G \subset GL_3(\mathrm{k})$, подполе инвариантов $\mathrm{k}(x_1, x_2, x_3)^G$ изоморфно чисто трансцендентному расширению поля k.

5.6. Курсы лекций

За отчетный период сотрудником лаборатории были подготовлены записки лекций "Алгебра-3", читавшихся на механико-математическом факультете МГУ. Электронная версия курса будет размешена на сайте мехмата.

Литература

[Bea11a] A. Beauville. Non-rationality of the symmetric sextic Fano threefold. *ArXiv e-prints*, February 2011.

[Bea11b] A. Beauville. On finite simple groups of essential dimension 3. *ArXiv e-prints*, January 2011.

[CS09] Ivan Cheltsov and Constantin Shramov. Five embeddings of one simple group. *ArXiv e-print*, 0910.1783, 2009.

[CS10] Ivan Cheltsov and Constantin Shramov. Three embeddings of the Klein simple group into the Cremona group of rank three. *ArXiv e-print*, 2010.

[DI09] Igor V. Dolgachev and Vasily A. Iskovskikh. Finite subgroups of the plane Cremona group. In *Algebra, arithmetic, and geometry: in honor of Yu. I. Manin. Vol. I*, volume 269 of *Progr. Math.*, pages 443–548. Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 2009.

[Dun10] Alexander Duncan. Essential dimensions of A_7 and S_7. *Math. Res. Lett.*, 17(2):263–266, 2010.

[Hac11] Paul Hacking. Exceptional bundles associated to degenerations of surfaces. *ArXiv e-print*, arXiv:1107.2644, 2011.

[HK10] Shou-Jen Hu and Ming-Chang Kang. Noether's problem for some p-groups. In *Cohomological and geometric approaches to rationality problems*, volume 282 of *Progr. Math.*, pages 149–162. Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 2010.

[HP10] Paul Hacking and Yuri Prokhorov. Smoothable del Pezzo surfaces with quotient singularities. *Compositio Math.*, 146(1):169–192, 2010.

[KM92] János Kollár and Shigefumi Mori. Classification of three-dimensional flips. *J. Amer. Math. Soc.*, 5(3):533–703, 1992.

[KP10] Ming-chang Kang and Yu. Prokhorov. Rationality of three-dimensional quotients by monomial actions. *J. Algebra*, 324(9):2166–2197, 2010.

[KPZ11a] T. Kishimoto, Yu. Prokhorov, and M. Zaidenberg. Affine cones over Fano threefolds and additive group actions. *ArXiv e-print*, 1106.1312, 2011.

[KPZ11b] T. Kishimoto, Yu. Prokhorov, and M. Zaidenberg. Group actions on affine cones. In *Peter Russell's Festschrift, Proceedings of the conference on Affine Algebraic Geometry held in Professor Russell's honour, 1–5 June 2009, McGill Univ., Montreal.*, volume 54 of *Centre de Recherches Mathématiques CRM Proc. and Lect. Notes*, pages 123–163, 2011.

[Man91] Marco Manetti. Normal degenerations of the complex projective plane. *J. Reine Angew. Math.*, 419:89–118, 1991.

[Mor88] Shigefumi Mori. Flip theorem and the existence of minimal models for 3-folds. *J. Amer. Math. Soc.*, 1(1):117–253, 1988.

[Mor02] Shigefumi Mori. On semistable extremal neighborhoods. In *Higher dimensional birational geometry (Kyoto, 1997)*, volume 35 of *Adv. Stud. Pure Math.*, pages 157–184. Math. Soc. Japan, Tokyo, 2002.

[MP08a] Shigefumi Mori and Yuri Prokhorov. On **Q**-conic bundles. *Publ. Res. Inst. Math. Sci.*, 44(2):315–369, 2008.

[MP08b] Shigefumi Mori and Yuri Prokhorov. On **Q**-conic bundles. II. *Publ. Res. Inst. Math. Sci.*, 44(3):955–971, 2008.

[MP09] S. Mori and Yu. Prokhorov. On **Q**-conic bundles, III. *Publ. Res. Inst. Math. Sci.*, 45(3):787–810, 2009.

[MP11a] S. Mori and Yu. Prokhorov. Threefold extremal contractions of type IA. *Kyoto J. Math.*, 51(2):393–438, 2011.

[MP11b] S. Mori and Yu. Prokhorov. Threefold extremal contractions of types (IC) and (IIB). *ArXiv e-print*, 1106.5180, 2011.

[Pro09] Yu. Prokhorov. Simple finite subgroups of the Cremona group of rank 3. *ArXiv e-print*, 0908.0678, 2009. to appear in J. Alg. Geom.

[Pro10a] Yu. Prokhorov. G-Fano threefolds, I. *ArXiv e-print*, 1012.4959, 2010. to appear in Advances in Geometry.

[Pro10b] Yuri Prokhorov. Fields of invariants of finite linear groups. In *Cohomological and geometric approaches to rationality problems*, volume 282 of *Progr. Math.*, pages 245–273. Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 2010.

[Pro11a] Yu. Prokhorov. G-Fano threefolds, II. *ArXiv e-print*, 1101.3854, 2011.

[Pro11b] Yu. Prokhorov. A note on degenerations of del Pezzo surfaces. *ArXiv e-print*, 1108.5051, 2011.

[Pro11c] Yuri Prokhorov. p-elementary subgroups of the Cremona group of rank 3. In *Classification of algebraic varieties*, EMS Ser. Congr. Rep., pages 327–338. Eur. Math. Soc., Zürich, 2011.

[Ser09] Jean-Pierre Serre. A Minkowski-style bound for the orders of the finite subgroups of the Cremona group of rank 2 over an arbitrary field. *Mosc. Math. J.*, 9(1):193–208, 2009.

[Tre11] A. S. Trepalin. Rationality of the quotient of $\mathbf{P}^2$ by finite group of automorphisms over arbitrary field of characteristic zero. *ArXiv e-print*, 1110.6338, 2011.

[Tzi05] Nikolaos Tziolas. Three dimensional divisorial extremal neighborhoods. *Math. Ann.*, 333(2):315–354, 2005.

[Tzi10] N. Tziolas. Three-fold divisorial extremal neighborhoods over cE_7 and cE_6 compound DuVal singularities. *Internat. J. Math.*, 21(1):1–23, 2010.

[Бог87] Ф. А. Богомолов. Группа Брауэра факторпространств линейных представлений. *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, 51(3):485–516, 1987.

[Бог89] Ф. А. Богомолов. Группы Брауэра полей инвариантов алгебраических групп. *Матем. сб.*, 180(2):279–293, 1989.

[Бог91] Ф. А. Богомолов. Абелевы подгруппы групп Галуа. *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, 55(1):32–67, 1991.

6. Доказательство частных случаев гомологической зеркальной симметрии (кривые)

Гомологическая зеркальная симметрия, предложенная Концевичем, позволяет интерпретировать производную категорию когерентных пучков на комплексном многообразии в терминах симплектической геометрии (катефории Фукаи) зеркально двойственного многообразия. В последние 15 лет этому подходу было посвящено колоссальное количество статей, в том числе, с доказательствами частных случаев этой гипотезы. Ее обобщение, предложенное Кацарковым позволяет изучать категорию Фукаи на многообразии общего типа ([5]), в частности, на компактной кривой рода больше 1 (для эллиптической кривой, гомологическая зеркальная симметрия известна из работ А. Полищука 1990-х). Сотрудником лаборатории А. Ефимовым был доказан частный случай гипотезы Кацаркова о гомологической зеркальной симметрии. Гипотеза Кацаркова была доказана П. Зайделем для случая кривых рода 2, и Ефимовым для кривых произвольного рода ([1, 4]).

В работе Ефимова, кривая понимается как симплектическое многообразие, т.е. как компактная ориентируемая поверхность M рода $g \geq 2$ с симплектической формой. Зеркалом к ней является трехмерная модель Ландау-Гинзбурга, т.е. пара (X, W), где X — гладкое алгебраическое многообразие, $\dim X = 3$, и $W : X \to \mathbb{C}$ — регулярная функция. Доказана эквивалентность между совершенными комплексами над A_∞-категорией Фукаи и карубиевой оболочкой триангулированной категории особенностей единственного особого слоя $W^{-1}(0)$ модели Ландау-Гинзбурга. Также была доказана аналогичная гипотеза для двумерной сферы без n точек ([3]).

Чтобы придать точное значение симплектической стороне зеркальной гипотезы, необходимо определить так называемую "категорию Фукаи" симплектического многообразия. Определение категории Фукаи чрезвычайно запутано, местами просто некорректно, и требует сотен страниц для полного обоснования. В работе [2], Ефимову удалось доказать гипотезу Концевича-Сойбельмана, которая позволяет обойтись без тяжелых геометрических теорем и анализа ценой более подробного изучения триангулированных категорий. Можно сказать, что до этой работы у всей деятельности по гомологической зеркальной симметрии не было четкого математического фундамента, а теперь он, трудами Ефимова, появился.

Литература

[1] Ефимов, А. И., *Заметка о зеркальной симметрии для кривых*, УМН, 65:5(395) (2010), 191-192

[2] Ефимов, А. И., *Доказательство гипотезы Концевича-Сойбельмана*, Математический Сборник РАН, 2011. No. 202:4, pp. 65-84.

[3] M. Abouzaid, D. Auroux, A. Efimov, L. Katzarkov and D. Orlov, *Homological mirror symmetry for punctured spheres,* arXiv:1103.4322.

[4] A. Efimov, *Homological mirror symmetry for curves of higher genus,* arXiv:0907.3903, accepted to Adv. Math.

[5] Anton Kapustin, Ludmil Katzarkov, Dmitri Orlov and Mirroslav Yotov, *Homological Mirror Sym metry for manifolds of general type,* Central European Journal of Mathematics Volume 7, Number 4, 571-605.

7. Исследования в области производной и некоммутативной алгебраической геометрии

Некоммутативная алгебраическая геометрия - бурно развивающийся раздел математики, связанный с теорией производных категорий. Вкратце, алгебраическое многообразие в немалой степени задается своей производной категорией когерентных пучков, а производная категория когерентных пучков – объект, по сути своей, некоммутативный. Заменив абелевы категории на триангулированные, алгебры на DG-алгебры, а условия ассоциативности – на A_∞-ассоциативность, можно работать с объектами некоммутативной природы как если бы они принадлежали обычной (коммутативной) алгебраической геометрии.

В работах сотрудника лаборатории Д. Орлова, было дано определение категории матричных факторизаций для неаффинных моделей Ландау-Гинзбурга и был построен вполне строгий функтор из категории матричных факторизаций в триангулированную категорию особенностей соответствующего слоя. Было доказано, что этот функтор является эквивалентностью для гладких LG-моделей ([5, 6, 7]).

Также в работах сотрудников лаборатории Д. Орлова и А. Ефимова была доказана зеркальная симметрия для сферы с выкинутыми точками, т.е. что категория Фукая проколотой сферы с произвольным числом точек эквивалентна триангулированной категории особенностей зеркально-симметричной модели Ландау-Гинзбурга ([8]).

Д. Орловым были изучены полные точные функторы между триангулированными категориями. При некоторых условиях на категорию доказывается, что такой функтор является и строгим. В частности, это верно для категории совершенных комплексов и ограниченной производной категории когерентных пучков на нетеровой связной схеме ([9]).

Сотрудник лаборатории А. Кузнецов добился значительных результатов в построении исключительных наборов на однородных многообразиях (проблема, которая оставалась нерешенной на протяжении 25 лет). В работе [4] в производных категориях когерентных пучков на изотропных грассманианах (относительно невырожденных квадратичных и симплектических форм) были построены исключительные наборы длины, равной рангу группы Гротендика.

Сотрудник лаборатории А. Елагин получил новый результат о замене базы ([1]); его аналоги играют важную роль в этальной геометрии, геометрии когерентных пучков и теории производных мотивов Воеводского. Была доказана теорема о связи производных категорий когерентных пучков на различных многообразиях: установлена связь между производными категориями когерентных пучков многообразия и его этального накрытия.

А именно: пусть X – относительный спектр пучка алгебр A над Y. Когда верно, что задание объекта производной категории когерентных пучков на X равносильно заданию объекта производной категории когерентных пучков на Y вместе с действием пучка алгебр A на нём? Это имеет место тогда и только тогда, когда морфизм f эталeн.

Как следствие, получаем, что такое описание производной категории когерентных пучков на X возможно, если X – накрытие Y, построенное по линейному расслоению на Y конечного порядка в группе Пикара или X получено из Y конечным сепарабельным расширением поля.

Литература

[1] A. D. Elagin, *Cohomological descent theory for a morphism of stacks and for equivariant derived categories*, Sbornik: Mathematics, 2011, Vol. 202. No. 4. pp. 495-526

[2] A.I. Efimov, V. Lunts, D.O. Orlov, *Deformation theory of objects in homotopy and derived categories III: abelian categories* Advances in mathematics, 2011, No. 226:5, pp. 3857-3911

[3] Alexander Kuznetsov, *Base change for semiorthogonal decompositions* Compositio Mathematica, 2011, No. 147, pp. 852-876.

[4] Alexander Kuznetsov, Alexander Polishchuk *Exceptional collections on isotropic Grassmannians*, arXiv:1110.5607.

[5] D. O. Orlov *Formal completions and idempotent completions of triangulated categories of singularities*, Advances in mathematics, 2011, No. 226:1. pp. 206-217.

[6] D. O. Orlov, *Matrix factorizations for nonaffine LG-models*, Mathematische Annalen, 2011, No. 4.

[7] D. O. Orlov, *Landau-Ginzburg Models, D-branes, and Mirror Symmetry*, arXiv:1111.2962.

[8] Mohammed Abouzaid, Denis Auroux, Alexander I. Efimov, Ludmil Katzarkov, Dmitri Orlov, *Homological mirror symmetry for punctured sphere*, arXiv:1103.4322.

[9] Canonaco A., Orlov D. O., Stellari P. *Does full imply faithful?* arXiv:1101.5931, принята к публикации в Journal of Noncommutative Geometry

8. Исследование пространства модулей инстантонов и рациональных кривых в пространствах твисторов: гладкость, связность, компактность

8.1. Пространство модулей инстантонов на $\mathbb{C}P^3$

Изучение пространства модулей стабильных расслоений на $\mathbb{C}P^3$ имеет богатую историю, которая уходит корнями в работы Мамфорда и Хартсхорна 1960-х годов. В начале 1970-х появилась гипотеза (ее обыкновенно приписывают Барту), что пространство модулей стабильных расслоений ранга 2 на $\mathbb{C}P^3$ гладко.

Если выражаться чуть более точно, следует рассмотреть пространство модулей математических инстантонов (расслоений ранга 2, удовлетворяющих определенному когомологическому условию, имеющую ту же природу, что регулярность Кастельнуово-Энриквеса). Такие расслоения автоматически стабильны. Второй класс Черна математического инстантона называется его **зарядом**. Гипотеза Барта утверждает, что пространство модулей инстантонов на $\mathbb{C}P^3$ с зарядом c гладко, неприводимо и имеет размерность $8c-3$ ([CTT, Conjecture 1.2]).

Барт в 1977 доказал эту гипотезу для случая $c=1$ ([B1]); Хартсхорн доказал ее в 1978-м году для $c=2$ ([2]), а Эллингсруд и Стромме доказали случай $c=3$ (1981, [ES]). Для случая $c=4$, неприводимость была доказана Бартом (citeB2, 1981), а гладкость – Ле Потье ([LeP], 1983). Недавно, А. Тихомиров ([T]) доказал неприводимость пространства модулей инстантонов для всех нечетных значений c.

8.2. Гладкость пространства модулей и трисимплектическая геометрия

В работах М. Жардима и М. Вербицкого, гладкость пространства модулей инстантонов была доказана для любого заряда, и установлено, что его размерность равна предсказанной гипотезой Барта.

Аргумент основан на изучении открытой авторами геометрической структуры на многообразиях, так называемой тригиперкэлеровой структуры. В работе [JV1], Жардим и Вербицкий доказали, что пространство модулей инстантонов изоморфно компоненте пространства модулей рациональных кривых на пространстве твисторов гиперкэлерова многообразия. На этой компоненте Жардим и Вербицкий построили трисимплектическую структуру и изучили его свойства. Среди прочего, было доказано, что трисимплектическое многообразие допускает каноническую голоморфную связность без кручения. Аналогичная связность была построена Черном в его диссертации 1936-го года годы для 3-сетей ([C]).

В работе [JV2], Жардим и Вербицкий построили аналог гиперкэлеровой редукции для трисимплектических многообразий, ассоциированных с пространствами твисторов. Используя эту конструкцию, им удалось доказать гладкость пространства модулей, решив 30-летнюю проблему, над частными случаями которой ломали голову десятки математиков.

Литература

[B1] W. Barth, Some properties of stable rank-2 vector bundles on $\mathbf{P}_n$. Math. Ann. **226** (1977), 125–150.

[B2] W. Barth, Irreducibility of the space of mathematical instanton bundles with rank 2 and $c_2 = 4$. Math. Ann. **258** (1981/82), 81–106.

[C] S. S. Chern, *Eine Invariantentheorie der Dreigewebe aus r-dimensionalen Mannigfaltigkeiten im R_{2r},* Abhandl. Math. Semin. Univ. Hamburg, 1936.

[CTT] I. Coandă, A. S. Tikhomirov, G. Trautmann, Irreducibility and smoothness of the moduli space of mathematical 5-instantons over $\mathbb{P}^3$. Internat. J. Math. **14** (2003), 1–45.

[ES] G. Ellingsrud and S.A. Stromme, Stable rank 2 vector bundles on $\mathbb{P}^3$ with $c_1 = 0$ and $c_2 = 3$. Math. Ann. **255** (1981), 123–135.

[H] R. Hartshorne, Stable vector bundles of rank 2 on $\mathbb{P}^3$. Math. Ann. **238** (1978), 229–280.

[JV1] M. Jardim, M. Verbitsky, *Moduli spaces of framed instanton bundles on $\mathbb{CP}^3$ and twistor sections of moduli spaces of instantons on $\mathbb{C}^2$*, Adv. Math., 2011, No. 227. pp. 1526-1538.

[JV2] Marcos Jardim, Misha Verbitsky, *Trihyperkahler reduction and instanton bundles on* CP^3, arXiv:1103.4431, 40 pages.

[LeP] J. Le Potier, Sur l'espace de modules des fibrés de Yang et Mills. In: *Mathematics and physics*, 65–137. Progr. Math. **37**, Birkhцзuser Boston, 1983.

[T] A. S. Tikhomirov. *Moduli of mathematical instanton vector bundles with odd* c_2 *on projective space*, Preprint arXiv:1101.3016.

9. Исследование многообразий Фано с нетривиальными группами автоморфизмов

Группа автоморфизмов проективного пространства $\mathbb{P}^n$, также известная как группа Кремоны $\mathrm{Cr}_n(\mathbb{C})$, является классическим объектом изучения в алгебраической геометрии. Теория конечных подгрупп в $\mathrm{Cr}_2(\mathbb{C})$ ведет свое начало в работах С. Кантора, Бертини, Вимана и других. Классификация таких подгрупп была завершена совсем недавно в работе И. Долгачева и В. Исковских [2] с использованием современных методов теории минимальных моделей. К настоящему моменту мы также знаем, как выяснить, сопряжены ли две таких подгруппы в группе $\mathrm{Cr}_2(\mathbb{C})$ или нет.

Группа автоморфизмов трехмерного проективного пространства $\mathbb{P}^3$, то есть группа Кремоны $\mathrm{Cr}_3(\mathbb{C})$ ранга 3, является существенно более сложным объектом, чем $\mathrm{Cr}_2(\mathbb{C})$ (например, в отличие от $\mathrm{Cr}_2(\mathbb{C})$, для нее до сих пор неизвестна разумная система образующих, и существенного прогресса в этом направлении в ближайшее время не предвидится). До недавнего времени не было даже известно, всякая ли конечная подгруппа вкладывается в $\mathrm{Cr}_3(\mathbb{C})$. Недавно Ю. Прохоров доказал, что не далеко не всякая. Более того, верна следующая

Theorem: [3, Theorem 1.3] Пусть $\bar{G}$ — простая неабелева конечная группа, допускающая вложение в $\mathrm{Cr}_3(\mathbb{C})$. Тогда $\bar{G}$ является одной из следующих групп: $\mathbb{A}_5$, $\mathbb{A}_6$, $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_7)$, $\mathbb{A}_7$, $\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_8)$, $\mathrm{PSp}_4(\mathbb{F}_3)$. Все перечисленные возможности действительно реализуются.

Три года назад И. Чельцов и К. Шрамов начали разрабатывать подход к вопросу о классах сопряженности конечных подгрупп в группе $\mathrm{Cr}_3(\mathbb{C})$ на основе теории эквивариантной бирациональной жесткости. В частности, они установили, что в $\mathrm{Cr}_3(\mathbb{C})$ существует ровно 2 класса сопряженности подгрупп, изоморфных $\mathrm{PSp}_4(\mathbb{F}_3)$ (см. [4]). Отметим, что для подгрупп в $\mathrm{Cr}_3(\mathbb{C})$, изоморфных $\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_8)$ и $\mathbb{A}_7$, имеется ровно по одному классу сопряженности — это следует из [3] и [1]. Оставшиеся группы из списка простых неабелевых конечных подгрупп в группе $\mathrm{Cr}_3(\mathbb{C})$ оказались существенно более сложными для изучения. И. Чельцов и К. Шрамов в работе [4] построили примеры пяти несопряженных вложений группы $\mathbb{A}_6$ в группу $\mathrm{Cr}_3(\mathbb{C})$, а в работе [5] — примеры трех несопряженных вложений группы $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_7)$ в группу $\mathrm{Cr}_3(\mathbb{C})$.

В последнее время И. Чельцов и К. Шрамов изучали вложения группы $\mathbb{A}_5$ в группу $\mathrm{Cr}_3(\mathbb{C})$, а также связанный с этим вопрос $\mathbb{A}_5$-эквивариантной бирациональной жесткости многообразия Фано V_5 индекса 2 антиканонической степени 40. Заметим, что это многообразие (*без* учета действия группы) является рациональным, то есть очень далеким от бирационально жесткого. Эквивариантная бирациональная жесткость многообразия V_5 была доказана при помощи разработанного И. Чельцовым и К. Шрамовым подхода; статья, содержащая этот результат, в данный момент готовится к печати. С помощью этого результата были построены первые примеры несопряженных вложений группы $\mathbb{A}_5$ в группу $\mathrm{Cr}_3(\mathbb{C})$. В качестве приложения методов доказательства был построен пример трехмерного многообразия Фано V_{10} индекса 1 антиканонической степени 10, допускающего метрику Кэлера–Эйнштейна (раньше такие примеры также не были известны).

Упомянутый выше подход основан на изучении автоморфизмов алгебраических многообразий при помощи оценки на альфа-инварианты Тиана. Тот же набор технических средств позволяет изучать исключительные и слабо исключительные фактор-особенности. На этом пути И. Чельцовым и К. Шрамовым за последний год были построены бесконечные серии слабо исключительных фактор-особенностей в любой размерности, получен критерий слабой исключительности для размерности 5 и эффективное достаточное условие для размерности 6 (см. [7]). Также впервые был построен пример исключительной фактор-особенности в размерности 9 (см. [6]).

Литература

[1] A. Beauville, *Non-rationality of the symmetric sextic Fano threefold* arXiv:math/1102.1255 (2011).

[2] I. Dolgachev, V. Iskovskikh, *Finite subgroups of the plane Cremona group* Progress in Mathematics, Birkhauser, Boston **269** (2009), 443–548

[3] Yu. Prokhorov, *Simple finite subgroups of the Cremona group of rank* 3 Journal of Algebraic Geometry, to appear

[4] I. Cheltsov, C. Shramov, *Five embeddings of one simple group* Transactions of American Mathematical Society, to appear

[5] I. Cheltsov, C. Shramov, *Three embeddings of the Klein simple group into the Cremona group of rank three*
arXiv:math/1010.1918 [math.AG]

[6] I. Cheltsov, C. Shramov, *Nine-dimensional exceptional quotient singularities exist*
arXiv:math/1110.6782 [math.AG]

[7] I. Cheltsov, C. Shramov, *Weakly-exceptional singularities in higher dimensions*, arXiv:1111.1920.

10. Исследование гомологических и гомотопических свойств аддитивных категорий

Исторически, некоммутативная геометрия возникла просто как желание обощить, насколько возможно, разнообразные понятия алгебраической геометрии на некоммутативные кольца. Довольно ясно, что все понятия обощить невозможно –в часности, никакого разумного аналога спектра и топологии Зарисского для некоммутативных колец скорее всего нет. Однако выяснилось, что довольно многое таки обобщается.

Первый большой прорыв в этой науке был в начале 80х годов, когда в работах, назависимо, А. Конна в Париже и Б. Цыгана с Киеве было показано, как построить для общего некоомутативного кольца теорию гомологий, которая в коммутативном случае дает когомологии де Рама, важнейший инвариант алгебраического многообразия. Эта теория, известная как теория циклических гомологий, получила большую известность и нашла массу применений (и принесла одному из своих создателей А. Конну премию Филдса).

Однако настоящий расцвет некоммутативной геометрии начался позже, примерно в середине 90х годов, и продолжается до сих пор. Отчасти он был мотивирован идеями, пришедшими из современной физики, отчасти – чисто математическими соображениями. С современной точки зрения, введенной в работах М.Концевича, А. Бондала, Б. Келлера и многих других, некоммутативная геометрия видится как "геометрия триангулированных категорий". Базовым объектом изучения является триангулированная категория разумного происхождения (в частности, снабженная оснащением); целью, в первую очередь – развить для нее гомологический аппарат, аналогичный по силе тому, что существует в настоящее время для алгебраических многообразий. Собственно алгебраическому многообразию отвечает производная категория когерентных пучков на нем. При этом даже и на такой "коммутативный" объект полезно смотреть некоммутативно – так, производная категория когерентных пучков на гладком компактном мнгообразия всегда эквивалентна производной категории совершенных DG-модулей над гладкой компактной – ном вообще говоря, некоммутативной – DG-алгеброй (по меткому выражению А. Бондала, "любое многообразие аффинно в производном смысле").

В работах Д. Каледина последних лет упор делается на построении в некоммутативном контексте аналога кристаллических когомологий алгебраических многообразий, со всеми присущими им дополнительными "мотивными" структурами (такими, как эндоморфизм Фробениуса).

За послений год достигнуто следующее. Построено некоторое обощение классической конструкции "векторов Витта", позволяющее для любой алгебры над конечным полем написать функториальный комплекс, названный "комплексом Витта-Хохшильда". Этот комплекс обобщает обычный комплекс Хохшильда в точности в том же смысле, в котором комплекс де Рама-Витта, введенный П. Делинем и Л. Иллюзи в 70х годах, обощает обычный комплекс де Рама. В частности, имеется полный аналог классической теоремы Хохшильда-Костанта-Розенберга: если кольцо таки коммутативно, то когомологии комплекса Хохшильда-Витта канонические изоморфны членам "большого" комплекса де Рама-Витта, а дифференциал Конна-Цыгана наних совпадает с дифференциалом де Рама.

Таким образом, некоммутативное обобщениа кристаллических когомологий построено.

В настоящее время проводится исследование связи некоммутативных кристальных когомологий с т.н. "циклической К-теорией" Т. Гудвилли, с тем,чтобы в дальнейшем связать кристаллические когомологии, и коммутативные, и некоммутативные, с обычной алгебраической К-теорией (что имеет выходы на гипотезу Тэйта, гипотезу Берча-Свиннертон-Дайера, и т.д.)

Работы по комплексу Хохшильда-Витта в настоящее время готовятся к публикации (и будут опубликованы в качестве препринтов в первом квартале 2012 года). Уже опубликовано три работы:

1. "Universal Witt vectors and the Japanese cocycle" – здесь построена инвариантная и концептуальаная интерпретация произведения в векторах Витта – именно такая интерпретация допускает некоммутативное обобщение.

2. "Homology of infinite loop spaces" – здесь дано простое доказательство принадлежащей Т. Пирашвили формулы для гомологий спектра, заданного бесконечнократным пространством петель.

3. "Cohomology of exact categories and (non-)additive sheaves", совместно с W. Lowen из Антверпенского Университета – здесь изучаются хохшильдовские когомологии аддитивных категорий – теория, парная к теории хохшильдовских гомологий – и даны первые применения к теории деформаций аддитивных и абелевых категорий.

Литература

[K1] Dmitry Kaledin, *Universal Witt vectors and the Japanese cocycle*, preprint, `imperium.lenin.ru/ kaledin/math/jap.pdf`.

[K2] Dmitry Kaledin, *Homology of infinite loop spaces*, preprint.

[KW] Dmitry Kaledin, Wendy Lowen, *Cohomology of exact categories and (non-)additive sheaves*, arXiv:1102.5756.

11. Изучение сизигий проективных вложений однородных пространств и стабильных расслоений на однородных пространствах

11.1. Алгебры сизигий вложений Сегре

В этом разделе мы находим алгебры сизигий вложений Сегре

$$\mathbb{P}^{\acute{n}} \times \mathbb{P}^{\grave{n}} \hookrightarrow \mathbb{P}^{\acute{n}\grave{n}+\acute{n}+\grave{n}}$$

(см. Теоремы 1.1 и 1.2). А именно, следуя [KhR] и [G] мы опишем комплекс Кошуля, когомологиями которого являются пространства сизигий, затем опишем проективные координатные алгебра орбит старшего веса, а затем вычислим пространства сизигий вложений Сегре и опишем умножение в алгебре сизигий.

11.1.1. Комплекс Кошуля

Пусть $\varphi\colon X \to \mathbb{P}(W)$ — вложение проективного многообразия X в проективное пространство. Обозначим символом $S = S^{\bullet}(W^*)$ проективную координатную алгебру $\mathbb{P}(W)$, символом A проективную координатную алгебру X. Рассмотрим *минимальную свободную резольвенту*

$$\ldots \to F_2 \to F_1 \to F_0 \to A,$$

являющуюся свободной точной последовательностью градуированных свободных S-модулей вида

$$F_p = \bigoplus_{q \geqslant m_p} R_{p,q} \otimes_{\mathbb{C}} S[-q],$$

где $R_{p,q}$ — конечномерные векторные пространства *сизигии порядка p степени q*. Минимальность резольвенты означает, что все однородые компоненты дифференциала имеют положительную степень. Следовательно, тензорное умножение на тривиальный S-модуль $\mathbb{C}$ аннулирует все дифференциалы в минимальной свободной резольвенте, откуда

$$R_{p,q} = (\mathrm{Tor}_p^S(A, \mathbb{C}))_q. \tag{11.1.1}$$

Пространства сизигий могут быть найдены тензорным умножением комплекса Кошуля (например, см. [G])

$$\ldots \xrightarrow{d} K_2 \xrightarrow{d} K_1 \xrightarrow{d} K_0 \xrightarrow{d} \mathbb{C} \to 0$$

тривиального S-модуля $\mathbb{C}$ на A, где $K_i = \Lambda^i W^* \otimes S[-i]$:

$$0 \to \Lambda^n W^* \otimes_{\mathbb{C}} A[-n] \to \ldots \to W^* \otimes_{\mathbb{C}} A[-1] \to A \to 0. \qquad (11.1.2)$$

Поскольку дифференциалы однородны, мы можем разложить комплекс на однородные компоненты (11.1.2):

$$\ldots \longrightarrow \Lambda^{p+1} W^* \otimes A_{q-1} \xrightarrow{d_{p-1,q+1}} \Lambda^p W^* \otimes A_q \xrightarrow{d_{p,q}} \Lambda^{p-1} W^* \otimes A_{q+1} \longrightarrow \ldots$$

Тождественное преобразование в $W \otimes W^*$ индуцирует естественное отображение $\imath\colon \Lambda^p W^* \to \Lambda^{p-1} W^* \otimes W^*$, двойственное к отображению внешнего умножения $\Lambda^{p-1} W \otimes W \to \Lambda^p W$. Поскольку определено умножение $m_q\colon W^* \otimes A_q \to A_{q+1}$, мы можем определить $d_{p,q}$ как композицию:

$$\begin{tikzcd}
\Lambda^p W^* \otimes A_q \arrow[r, "\imath \otimes \mathrm{Id}"] \arrow[dr, "d_{p,q}"'] & \Lambda^{p-1} W^* \otimes W^* \otimes A_q \arrow[d, "\mathrm{Id} \otimes m_q"] \\
& \Lambda^{p-1} W^* \otimes A_{q+1}
\end{tikzcd}$$

Группы *Кошулевых когомологий* — группы

$$\mathscr{K}_{p,q} = \frac{\ker(d_{p,q})}{\mathrm{im}(d_{p+1,q-1})}.$$

Наконец, мы получаем

$$R_{p,p+q} = (\mathrm{Tor}_p^S(A, \mathbb{C}))_{p+q} = \frac{\ker(d_{p,q})}{\mathrm{im}(d_{p+1,q-1})} = \mathscr{K}_{p,q}. \qquad (11.1.3)$$

11.1.2. Проективные координатные алгебры

Пусть G — редуктивная алгебраическая группа. Фиксируем в ней максимальный тор $T \subset G$ и порядок на корнях. Символом $W = V_{-\lambda}$ обозначим единственное неприводимое представление со старшим весом $-\lambda$. Пусть W — орбита вектора старшего веса w с весом $-\lambda$.

Замечание 1.1. Напомним, что $G \cdot w = X = G/P$ является проективным многообразием.

Предложение 1.1
Во введённых обозначениях проективная координатная алгебра X есть

$$\bigoplus_{n \geqslant 0} V_{n\lambda},$$

где $V_{n\lambda}$ — неприводимое представление со старшим весом $n\lambda$.

Доказательство. Проективная координатная алгебра $\mathbb{P}(W)$ равна

$$S = \bigoplus_{n \geqslant 0} S^n W = \bigoplus_{n \geqslant 0} S^n V_\lambda.$$

Пусть $w \in W$ — вектор старшего веса, ω — симметрическая форма степени n. Допустим, ω имеет вес $n\lambda$. Тогда $\omega(G \cdot w) \neq 0$. Допустим, ω имеет меньший вес. Тогда

$$\omega(G \cdot w) = \{\omega(gw) | g \in G\} = \{g^{-1}\omega | g \in G\}(w) =$$

$$= (G \cdot \omega)(w) = \left\{ \sum_{\alpha < \lambda} \omega_\alpha(g) | g \in G \right\}(w) = 0,$$

где $g\omega = \sum\limits_{\alpha<\lambda} \omega_\alpha(g)$ — весовое разложение. Отсюда следует, что представление A_n неприводимо и имеет старший вес $n\lambda$. $\square$

Следствие 1.1
Во введённых обозначениях когомологии комплекса представлений группы G

$$\ldots \to \Lambda^{p+1} W^* \otimes_{\mathbb{C}} V_{(q-1)\lambda} \to \Lambda^p W^* \otimes_{\mathbb{C}} V_{q\lambda} \to \Lambda^{p-1} W^* \otimes_{\mathbb{C}} V_{(q+1)\lambda} \to \ldots$$

являются пространствами сизигий $X = G \cdot w \subset W$.

Напомним, что Σ_λ — функтор Шура, и для $G = \mathrm{GL}(V)$ представление $\Sigma_\lambda V$ единственное со старшим весом λ.

Следствие 1.2
Пусть $W_1 \otimes \ldots \otimes W_m$ — неприводимое представление группы $\mathrm{GL}(V_1) \times \ldots \times \mathrm{GL}(V_m)$, и $X \subset \mathbb{P}(W)$ — орбита старшего веса $\lambda_1 \oplus \ldots \oplus \lambda_m$, где $W = W_1 \otimes \ldots \otimes W_m$. Тогда проективная координатная алгебра X равна

$$A = \bigoplus_{n \geqslant 0} \Sigma_{-n\lambda_1} V_1 \otimes \ldots \otimes \Sigma_{-n\lambda_m} V_m$$

как $\mathrm{GL}(V_1) \times \ldots \times \mathrm{GL}(V_m)$-модуль.

Следующая серия утверждений в этом параграфе не нужна для последующего текста, но представляет самостоятельный интерес.

Пусть A — градуированная алгебра. Она называется *порождённой первой степенью*, если естественное отображение $\mathrm{T}^\bullet(A_1) \to A$ сюръективно. Порождённая первой степенью алгебра A называется *квадратичной*, если ядро J_A как двусторонний идеал в $\mathrm{T}^\bullet(A_1)$ порождено подпространством $I_A = J_A \cap \mathrm{A}_1 \subset A_1 \otimes A_1$. Обозначим символом V пространство A_1, символом Q пространство $I_A \subset \mathrm{T}^2(A_1)$, символом (V, Q) алгебру A. *Квадратичная двойственная алгебра* $A^!$ определена парой $(V^*, Q^\perp)$.

Квадратичная алгебра называется *кошулевой*, если выполнены следующие эквивалентные условия.

- $A \simeq \mathrm{Ext}^{\mathbb{C}}_{T(V^*)/(I^\perp)}(\mathbb{C}, \mathbb{C})$.
- $\mathrm{Ext}^{i,j}_{\mathrm{T(V^*)/(I^\perp)}}(\mathbb{C}, \mathbb{C}) = 0$ для $i \neq j$, где $\mathrm{Ext}^{i,j}$ означает j-ую градуированную компоненту модуля Ext^i.
- для каждого $m \geqslant 3$ существует базис $E \subset V^{*\otimes n}$ в $V^{*\otimes n}$, для которого $W_\alpha \cap E$ — базис в W_α, где $W_\alpha = V^{*\otimes\alpha} \otimes Q^\perp \otimes V^{*\otimes(m-\alpha-2)}$.

Хорошо известно, что проективные координатные алгебры орбит старшего веса в проективизациях неприводимых представлений кошулевы (см.[PP]), но для удобства читателя приведём доказательство.

Градуированная алгебра A называется *биномиальной*, если существует базис $E = \{e_i\}$ в A как в векторном пространстве, для которого $e_i \cdot e_j \in E$ для всех i, j, и каждая однородная компонента A_n порождена некоторым подмножеством E.

Предложение 1.2
Пусть $A = (V, Q)$ — квадратичная биномиальная алгебра, порождённая первой степенью. Тогда A кошулева.

Доказательство. Пусть $V \cap E = \{v_1, \dots, v_n\}$, $\{v_1^* \dots, v_n^*\}$ — двойственный базис для $\{v_1, \dots, v_n\}$, $Q = \langle\{q_1, \dots, q_N\}\rangle$, $q_i = v_{\alpha_i} \otimes v_{\beta_i}$. Тогда $Q^\perp = \langle v_\gamma^* \otimes v_\delta^* \rangle$, где $v_\gamma \otimes v_\delta \notin Q$. Следовательно,

$$W_\nu = V^{*\otimes\nu} \otimes Q^\perp \otimes V^{*\otimes m-\nu-2} =$$

$$= \langle\{v_{\gamma_1}^* \otimes \dots \otimes v_{\gamma_m}^* | (\gamma_{\nu+1}, \gamma_{\nu+2}) \notin \{(i,j) | v_{\gamma_i} \otimes v_{\gamma_j} \in Q\}\}\rangle,$$

$$\{v_{\gamma_1}^* \otimes \dots \otimes v_{\gamma_m}^* | (\gamma_{\nu+1}, \gamma_{\nu+2}) \notin \{(i,j) | v_{\gamma_i} \otimes v_{\gamma_j} \in Q\}\} \subset \{v_{\gamma_1}^* \otimes \dots \otimes v_{\gamma_m}^*\},$$

$$\langle\{v_{\gamma_1}^* \otimes \dots \otimes v_{\gamma_m}^*\}\rangle = V^{*\otimes n}.$$

□

Предложение 1.3
Пусть W — неприводимое представление группы $\mathrm{GL}(V)$, $X \subset \mathbb{P}(W)$ — орбита старшего веса λ. Тогда проективная координатная алгебра X биномиальна.

Доказательство. Проективная координатная алгебра X равна $\bigoplus\limits_{n\geqslant 0} \Sigma_{n\lambda} V$. Напомним, что каждая неприводимая компонента имеет базис, состоящий из полустандартных таблиц Юнга, перемножаемых по правилу Литтлвуда–Ричардсона (см. [F, Part 1, §1]). В произведении $\Sigma_{n\lambda}V$ и $\Sigma_{m\lambda}V$ все компоненты, кроме $\Sigma_{(m+n)\lambda}V$, равны нулю. Такие таблицы Юнга составляют биномиальный базис алгебры A. □

Аналогичным образом проективная координатная алгебра старшего веса в представлении группы $\mathrm{GL}(V_1) \times \dots \times \mathrm{GL}(V_n)$ в любом неприводимом представлении биномиальна. Далее мы будем рассматривать только орбиты такого вида. Следовательно, все проективные координатные алгебры в последующем тексте будут кошулевыми.

11.1.3. Пространства сизигий

Пусть $\mathbb{P}^{\acute{n}} \times \mathbb{P}^{\grave{n}} \to \mathbb{P}^{\acute{n}\grave{n}+\acute{n}+\grave{n}}$ — вложение Сегре. В координатах оно имеет вид

$$((\acute{x}_0 \colon \dots \acute{x}_{\acute{n}}), (\grave{x}_0 \colon \dots \colon \grave{x}_{\grave{n}})) \mapsto (\acute{x}_0\grave{x}_0 \colon \dots \colon \acute{x}_i\grave{x}_j \colon \dots \colon \acute{x}_{\acute{n}}\grave{x}_{\grave{n}}).$$

Обозначим $\{x_{i,j}\}$ координаты на $\mathbb{P}^{\acute{n}\grave{n}+\acute{n}+\grave{n}}$, символом S проективную координатную алгебру $\mathbb{P}^{\acute{n}\grave{n}+\acute{n}+\grave{n}}$.

Имеем групповые действия

$$\mathrm{GL}(\acute{n}+1) = \acute{G} \colon \acute{S} = \mathbb{C}[\acute{x}, \dots, \acute{x}_{\acute{n}}],$$

$$\mathrm{GL}(\grave{n}+1) = \grave{G} : \grave{S} = \mathbb{C}[\grave{x}, \ldots, \grave{x}_{\grave{n}}].$$

Обозначим $\acute{V} = \acute{S}_1$ и $\grave{V} = \grave{S}_1$ двойственные к тавтологическим представления групп $\acute{G}$ и $\grave{G}$. Пространство $W = S_1 = \acute{V} \otimes \grave{V}$ является представлением группы $G = \acute{G} \times \grave{G}$.

Напомним, что группа $\acute{G} \times \grave{G}$ эквивариантно действует на градуированной алгебре A, и A_n равно $S^n(\acute{V}) \otimes S^n(\grave{V})$ как G-модуль.

Зафиксируем некоторые обозначения. Пусть T — диаграмма Юнга. Обозначим $\widetilde{T}_n$ диаграмму, соответствующую представлению минимального веса в разложении $\Sigma_T(V) \otimes S^n(V)$. Диаграмма $\widetilde{T}_n$ получается добавлением по клетке в конец первых n столбцов T. Обозначим символом $\mathrm{wt}(T)$ вес T (то есть количество клеток), символом $l(T)$ длину диагонали T, символом T' транспонированную диаграмму T.

Теорема 1.1
Существует канонический изоморфизм представлений группы G:

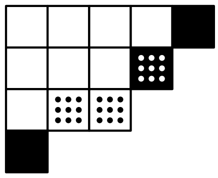
$$R_{p,q} = \bigoplus_{\substack{\mathrm{wt}(T)=p \\ l(T)=q-p}} \left(\Sigma_{\widetilde{T}_{l(T)}}(\acute{V}) \otimes \Sigma_{\widetilde{T'}_{l(T)}}(\grave{V}) \right).$$

Доказательство. Из следствия (1.1) достаточно вычислить группы когомологий следующего комплекса представлений группы G:

$$\begin{aligned} \ldots \to \Lambda^{p+1}(\acute{V} \otimes \grave{V}) \otimes S^{q-1}(\acute{V}) \otimes S^{q-1}(\grave{V}) \to \\ \to \Lambda^{p}(\acute{V} \otimes \grave{V}) \otimes S^{q}(\acute{V}) \otimes S^{q}(\grave{V}) \to \\ \to \Lambda^{p-1}(\acute{V} \otimes \grave{V}) \otimes S^{q+1}(\acute{V}) \otimes S^{q+1}(\grave{V}) \to \ldots \end{aligned} \qquad (11.1.4)$$

Разложим комплекс в сумму подкомплексов, где в каждом представлении все неприводимые компоненты имеют один старший вес. Поскольку между этого подкомплексами нет морфизмов, их когомологии можно вычислить отдельно.

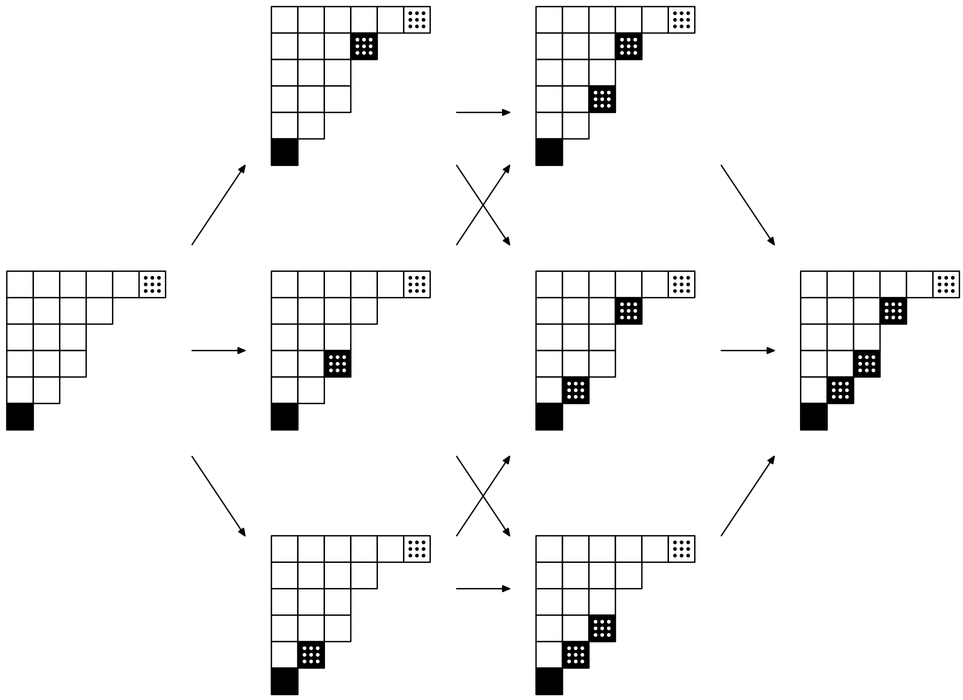
Как известно, $\Lambda^k(\acute{V} \otimes \grave{V}) = \sum_{\lambda} \Sigma_\lambda(\acute{V}) \otimes \Sigma_{\lambda'}(\grave{V})$, где λ пробегает все диаграммы Юнга веса n. Неприводимые G-модули нумеруются парами диаграмм Юнга. Транспонируем вторую диаграмму и наложим на первую. Покрасим клетки, приходящие из $S^q(\acute{V})$, чёрным цветом, клетки из $S^q(\grave{V})$ — в крапинку, оставив клетки из $\Lambda^k(\acute{V} \otimes \grave{V})$ незакрашенными. Таким образом, мы получили *раскрашенную диаграмму*, в которой клетки белые и чёрные, сплошные и в крапинку. Заметим, что объединение всех белых сплошных, всех белых и всех сплошных клеток образуют корректные диаграммы Юнга. Кроме того, не бывает двух чёрных клеток в одной строке и двух клеток в крапинку в одном строке. Раскрашенные диаграммы имеют следующий вид.



Объединим диаграммы в группы. Две диаграммы отнесём к одной группе, если они имеют совпадающие множества

- всех клеток,
- чёрных сплошных клеток,
- белых клеток в крапинку.

Заметим, что в одной группе у диаграмм множества белых сплошных клеток и чёрных клеток в крапинку могут отличаться. Каждый неприводимый G-модуль в комплексе Кошуля соответствует раскрашенной диаграмме. Дифференциал d сохраняет группу. Иллюстрация ниже показывает действие d на одной группе.



Таким образом, если в группе более одной диаграммы, то она не делает вклада в группы когомологий. Легко видеть, что любая диаграмма с чёрной клеткой в крапинку принадлежит к группе, не дающей вклада в группы когомологий. Кроме того, если мы можем заменить белую сплошную клетку на чёрную клетку в крапинку, то обе эти диаграммы принадлежат одной группе и не дают вклада в когомологии.

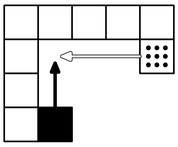
Очевидно, с чёрной клеткой в крапинку не может быть клеток в крапинку в одном столюце и чёрных клеток в одной строке. Кроме того, не может быть клеток в крапинку сверху, чёрных клеток слева и белых сплошных клеток справа снизу, ибо иначе белые клетки или клетки в крапинку не образуют корректную диаграмму. Это значит, что дифференциал отправляет G-модуль, соответствующий диаграмме T в сумму G-модулей, соответствующих диаграммам T', которые можно получить заменой белой сплошной клетки в диаграмме T в некотором *внешнем углу*[1] на чёрную клетку в крапинку.

Опишем все G-модули, дающие вклад в группы когомологий. Любой такой G-модуль получается при помощи следующей конструкции.

[1]клетка, для которой нет клеток ниже и справа в диаграмме

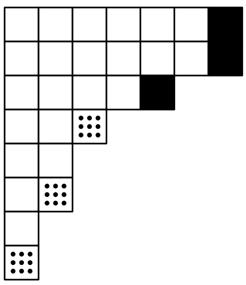
Возьмём незакрашенную диаграмму Юнга T и будем считать её клетки сплошными белыми. добавим чёрные клетки и клетки в крапинку так, чтобы нельзя было никакой внешний угол диаграммы T сделать чёрным в крапинку, получив корректную раскрашенную диаграмму. Таким образом, мы должны добавить клетку в крапинку ниже или чёрную клетку справа от каждого внешнего угла. Количестве чёрных сплошных и белых в крапинку должны совпадать.

Рассмотрим два соседних внешних угла (второй сверху справа от первого). Мы не можем добавить чёрную клетку справа от первого клетку в крапинку под вторым, иначе не получим корректную раскрашенную диаграмму или получим чёрную клетку в крапинку.



По этой причине если мы добавляем чёрную клетку справа от некоторого внешнего угла, то должны добавить чёрные клетки правее любого внешнего угла, расположенного сверху справа или выше относительно данного. Аналогично для клеток в крапинку.

Количества добавляемых чёрных клеток и клеток в крапинку должны быть не меньше длины диагонали T, иначе иначе мы не добаим клеток справа снизу от внешнего угла, расположенного справа или ниже от конца диагонали. С другой стороны, добавить больше клеток мы также не можем, иначе получим чёрную клетку в крапинку. Иллюстрация ниже показывает пример единственного способа добавить раскрашенные клетки к белой сплошной диаграмме.



Таким образом, к каждой белой сплошной диаграмме T можно единственным образом добавить чёрные клетки и клетки в крапинку, получив раскрашенную диаграмму, дающую вклад в группы когомологий. Таким образом, вычислены группы когомологий неприводимых компонент, и группы когомологий комплекса (11.1.4) получаются по формуле из теоремы 1.1. $\square$

11.1.4. Умножение

Умножение в алгебре сизигий индуцировано умножением в DG-алгебре $A \otimes \Lambda^\bullet(W)$,

$$m\colon (\Lambda^{p_1}(\acute{V} \otimes \grave{V}) \otimes S^{q_1}\acute{V} \otimes S^{q_1}\grave{V}) \otimes (\Lambda^{p_2}(\acute{V} \otimes \grave{V}) \otimes S^{q_2}\acute{V} \otimes S^{q_2}\grave{V}) \to \\ \Lambda^{p_1+p_2}(\acute{V} \otimes \grave{V}) \otimes S^{q_1+q_2}\acute{V} \otimes S^{q_1+q_2}\grave{V}.$$

Оно получается из естественных умножений

$$\Lambda^{p_1}(\acute{V} \otimes \grave{V}) \otimes \Lambda^{p_2}(\acute{V} \otimes \grave{V}) \to \Lambda^{p_1+p_2}(\acute{V} \otimes \grave{V}),$$

$$S^{q_1}\acute{V} \otimes S^{q_2}\acute{V} \to S^{q_1+q_2}\acute{V}, \quad S^{q_1}\grave{V} \otimes S^{q_2}\grave{V} \to S^{q_1+q_2}\grave{V}.$$

Первое отправляет $(\Sigma_\lambda \acute{V} \otimes \Sigma_{\lambda'}\grave{V}) \otimes (\Sigma_\mu \acute{V} \otimes \Sigma_{\mu'}\grave{V}) \to \sum\limits_{\nu \subset \lambda \otimes \mu} (\Sigma_\nu \acute{V} \otimes \Sigma_{\nu'}\grave{V})$.

В алгебре когомологий слагаемые

$$\Sigma_\nu \acute{V} \otimes \Sigma_{\nu'}\grave{V} \otimes S^{q_1+q_2}\acute{V} \otimes S^{q_1+q_2}\grave{V}$$

в произведении

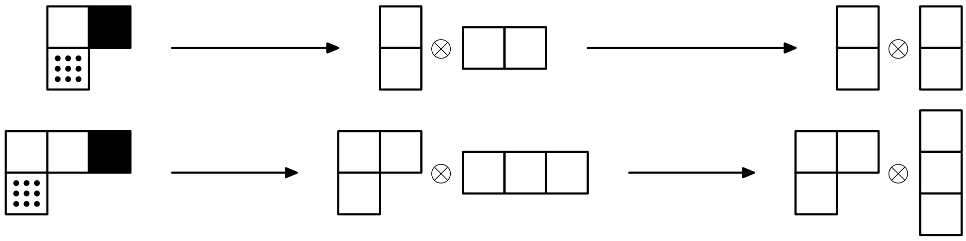
$$(\Sigma_\lambda \acute{V} \otimes \Sigma_{\lambda'}\grave{V} \otimes S^{q_1}\acute{V} \otimes S^{q_2}\grave{V}) \otimes (\Sigma_\mu \acute{V} \otimes \Sigma_{\mu'}\grave{V} \otimes S^{q_2}\acute{V} \otimes S^{q_2}\grave{V})$$

равны нулю, если $l(\lambda) + l(\mu) \neq l(\nu)$. все другие компоненты остаются. Это доказывает следующую теоремы. (Напомним, что T' — это транспонированная диаграмма T, символ $\widetilde{T}_k$ определён перед теоремой 1.1.)

Теорема 1.2

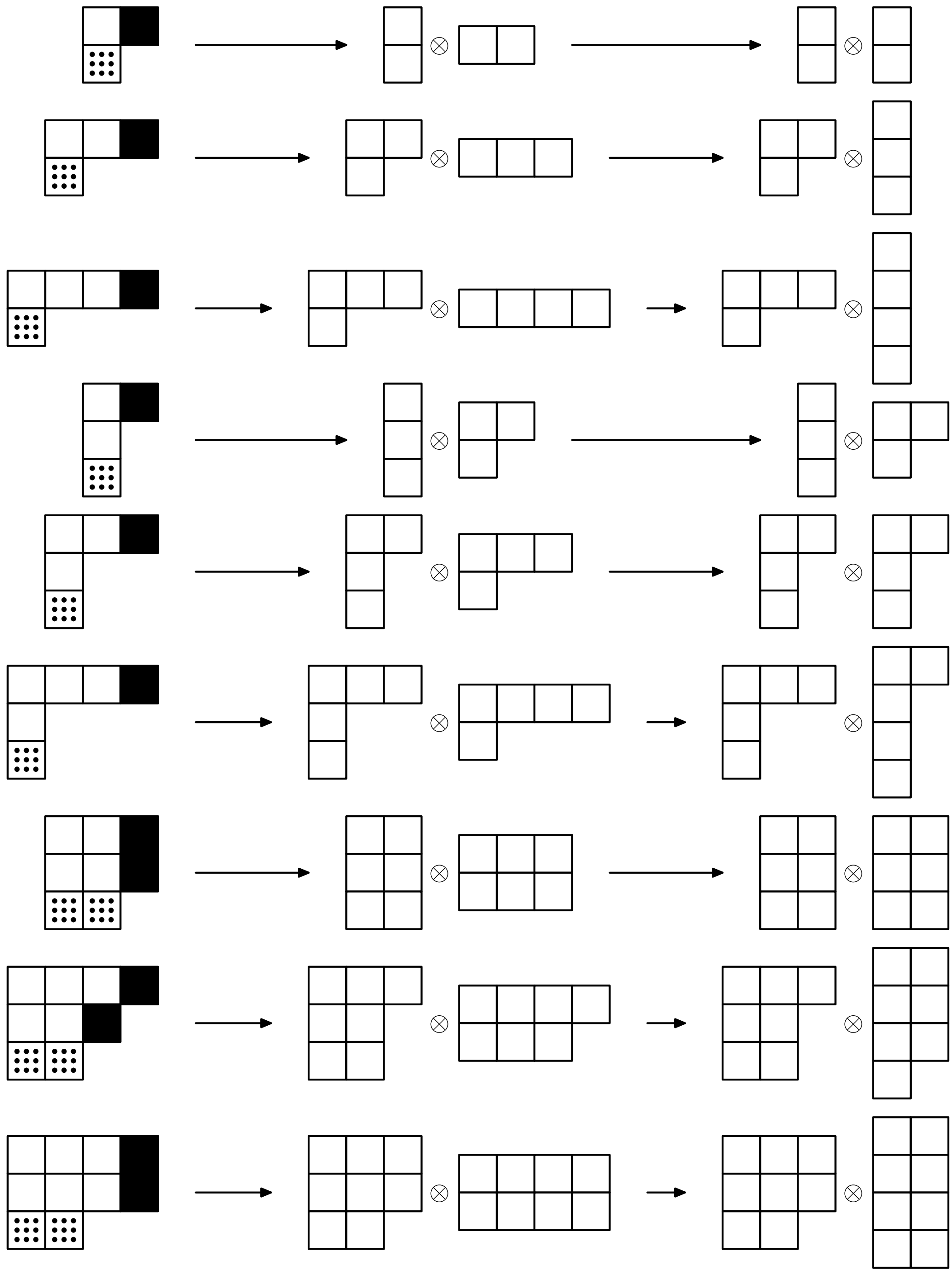
Пусть $\mathscr{T}_1$ и $\mathscr{T}_2$ — две раскрашенные диаграммы Юнга, соответствующие двум G-модулям в алгебре сизигий, T_1 и T_2 — их белые сплошные части. Тогда их произведение состоит из всех $T = \widetilde{\left(\widetilde{T}'_{l(T)}\right)}'_{l(T)}$, для которых $T \subset T_1 \otimes T_2$ и $l(T) = l(T_1) + l(T_2)$. (Очевидно, $l(\widetilde{T}_m) = l(T)$, когда $m \leqslant l(T)$.)

Пример 1.1. Рассмотрим вложение Сегре $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^2 \hookrightarrow \mathbb{P}^5$. Существует две диаграммы ширины не более 2 и высоты не более 1. Алгебра сизигий состоит из трёх $\mathrm{GL}(2) \times \mathrm{GL}(3)$-модулей.



Имеем $R_{1,2} = \Lambda^2\mathbb{C}^2 \otimes \Lambda^2\mathbb{C}^3$, $R_{2,3} = \Sigma_{2,1}\mathbb{C}^2 \otimes \Lambda^3\mathbb{C}^3$ и нулевое умножение.

Пример 1.2. Рассмотрим вложение Сегре $\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^3 \hookrightarrow \mathbb{P}^{11}$. Существует девять диаграмм ширины не более 3 и высоты не более 2. Алгебра сизигий состоит из девяти $\mathrm{GL}(3) \times \mathrm{GL}(4)$-модулей.



Имеем

$$R_{1,2} = \Lambda^2\mathbb{C}^3 \otimes \Lambda^2\mathbb{C}^4,$$
$$R_{2,3} = \Sigma_{2,1}\mathbb{C}^3 \otimes \Lambda^3\mathbb{C}^4 \oplus \Lambda^3\mathbb{C}^3 \otimes \Sigma_{1,2}\mathbb{C}^3,$$
$$R_{3,4} = \Sigma_{3,1}\mathbb{C}^3 \otimes \Lambda^4\mathbb{C}^4 \oplus \Sigma_{2,1,1}\mathbb{C}^3 \otimes \Sigma_{2,1,1}\mathbb{C}^4,$$
$$R_{4,5} = \Sigma_{3,1,1}\mathbb{C}^3 \otimes \Sigma_{2,1,1,1}\mathbb{C}^4$$
$$R_{4,6} = \Sigma_{2,2,2}\mathbb{C}^3 \otimes \Sigma_{2,2,2}\mathbb{C}^4,$$
$$R_{5,7} = \Sigma_{3,2,2}\mathbb{C}^3 \otimes \Sigma_{2,2,2,1}\mathbb{C}^4,$$
$$R_{6,8} = \Sigma_{3,3,2}\mathbb{C}^3 \otimes \Sigma_{2,2,2,2}\mathbb{C}^4.$$

Ненулевое умножение существует только между следующими модулями:

$$R_{3,4} \times R_{1,2} \to R_{4,6}, \quad R_{4,5} \times R_{1,2} \to R_{5,7}, \quad R_{4,5} \times R_{2,3} \to R_{6,8}.$$

Умножения между ними индуцированы следующими естественными умножениями:

$$\Sigma_{2,1,1}\mathbb{C}^3 \otimes \Sigma_{2,1,1}\mathbb{C}^4 \times \Lambda^2\mathbb{C}^3 \otimes \Lambda^2\mathbb{C} \to \Sigma_{2,2,2}\mathbb{C}^3 \otimes \Sigma_{2,2,2}\mathbb{C}^4,$$
$$\Sigma_{3,1,1}\mathbb{C}^3 \otimes \Sigma_{2,1,1,1}\mathbb{C}^4 \times \Lambda^2\mathbb{C}^3 \otimes \Lambda^2\mathbb{C} \to \Sigma_{3,2,2}\mathbb{C}^3 \otimes \Sigma_{2,2,2,1}\mathbb{C}^4,$$
$$\Sigma_{3,1,1}\mathbb{C}^3 \otimes \Sigma_{2,1,1,1}\mathbb{C}^4 \times \Sigma_{2,1}\mathbb{C}^3 \otimes \Lambda^3\mathbb{C} \to \Sigma_{3,3,2}\mathbb{C}^3 \otimes \Sigma_{2,2,2,2}\mathbb{C}^4.$$

11.2. Системы результантов

Пусть $\Bbbk$ — алгебраически замкнутое поле, $V = \Bbbk^{n+1}$ — векторное пространство с координатами $x = (x_0, x_1, \ldots, x_n)$, и

$$f_i(x) \in S^{d_i}V^* \subset \Bbbk[x_0, \ldots, x_m] \qquad (0 \leqslant i \leqslant m)$$

однородные многочлены фиксированных степеней $d_i = \deg(f_i)$. Хорошо известно, что наличие у f_i общего нуля в $\mathbb{P}^n$ равносильно обращению в нуль *системы результантов* — конечного набора универсальных полиномов от коэффициентов многочленов f_i, зависящего только от n и набора степеней $\deg(f_i)$.

Если число уравнений $m+1$ равно числу неизвестных $n+1$, система результантов состоит из единственного многочлена, который мы будем называть просто *результантом* и обозначать $R(f_0, f_2, \ldots, f_n)$.

В настоящем разделе мы покажем, как получить систему результантов для любого количества многочленов от $n+1$ переменных в виде набора коэффициентов разложения одного результанта для для подходящего набора из $n+1$ однородных уравнений.

А именно, зафиксируем набор степеней $c_0, c_1, \dots, c_n$, таких что все

$$c_k \geqslant \max_{0 \leqslant i \leqslant m} \deg(f_i)$$

и рассмотрим пространство $\mathscr{A}$ полиномиальных матриц $A = (A_{ij})$ с

$$A_{ij} \in S^{d_i - \deg(f_j)} V^* \qquad (0 \leqslant i \leqslant n\,,\ 0 \leqslant j \leqslant m)\,.$$

Результатом умножения такой матрицы на столбец высоты $m+1$, составленный из многочленов (f_i), является набор из $n+1$ однородных многочленов

$$F_i(x) = \sum_{j=0}^{m} A_{ij}(x) f_j(x) \in S^d V^* \qquad (0 \leqslant i \leqslant n) \tag{11.2.1}$$

от $x = (x_0, x_1, \dots, x_n)$ степеней $c_0, c_2, \dots, c_n$. Мы будем рассматривать результант этого набора многочленов

$$R\Big(F_0, F_2, \dots, F_n\Big) \tag{11.2.2}$$

как многочлен от коэффициентов многочленов A_{ij}, т. е. как полином на пространстве $\mathscr{A}$.

Теорема 2.1
Коэффициенты разложения (11.2.2) как многочлена от коэффициентов многочленов $A_{ij}(x)$ составляют систему результантов для многочленов f_i, т. е. все они одновременно обращаются в нуль тогда и только тогда, когда многочлены $f_0, \dots, f_m$ имеют общий ноль на $\mathbb{P}_n$.

Доказательство. Если многочлены f_i одновременно обращаются в нуль в точке $x \in \mathbb{P}_n$, то x является общим нулем и для всех многочленов (11.2.1) при любом выборе A, так что результант (11.2.2) тождественно зануляется на всех A.

Наоборот, пусть многочлен (11.2.2) на пространстве матриц A тождественно равен нулю. Рассмотрим для каждого $x \in \mathbb{P}_n$ линейное подпространство $H_x \subset \mathscr{A}$, состоящее из всех матриц A, для которых $n+1$

многочленов (11.2.1) обращаются в нуль в точке x. Если x не является общим нулём многочленов f_i, то линейное отображение $\mathscr{A} \to \Bbbk^{n+1}$, сопоставляющее матрице A набор значений многочленов (11.2.1) в точке x, эпиморфно. Поэтому $\operatorname{codim}_{\mathscr{A}}(H_x) = n+1$. С другой стороны, так как результант (11.2.2) тождественно зануляется на $\mathscr{A}$, $\mathscr{A} = \bigcup_{x\in\mathbb{P}^n} H_x$, что невозможно по соображениям размерности. □

Замечание 2.1. Точно таким же образом можно получить критерий одновременного обращения в нуль набора сечений $s_0, s_1, \dots, s_m$ очень обильных линейных расслоений $\mathscr{L}_0, \mathscr{L}_1, \dots, \mathscr{L}_m$ на произвольном проективном многообразий размерности $n < m$ как условие обращения в нуль результанта $R\big(\sum_j A_{ij}s_j\big)$, рассматриваемого как многочлена на пространстве наборов сечений A_{ij} таких линейных расслоений $\mathscr{L}'_{ij}$, что $\mathscr{L}_i \otimes \mathscr{L}'_{ij} = \mathscr{C}_i$ составляют некий заранее фиксированный набор очень обильных линейных расслоений.

Замечание 2.2. Как показывает доказательство теоремы 2.1, вместо всего пространства матриц $\mathscr{A}$ достаточно рассматривать любое его подпространство $\mathscr{W} \subset \mathscr{A}$, такое что при каждом $x \in \Bbbk^{n+1}$ наборы значений многочленов (11.2.1) по всевозможным $A \in \mathscr{W}$ покрывают всё пространство $\Bbbk^{m+1}$. В этом случае ограничение на $\mathscr{W}$ результанта (11.2.2), рассматриваемого как полином на пространстве $\mathscr{A}$, тождественно зануляется, если и только если все f_i имеют общий нуль в $\mathbb{P}_n$.

11.3. Дифференциальные инварианты $\mathbf{SL_2}$-орбит

В этом разделе мы, следуя идеям П. Бибикова, сопоставим всем SL_2-орбитам стандартного неприводимого представления V_n разделяющие эти орбиты идеалы в алгебре дифференциальных инвариантов продолженного дифференциального уравнения Эйлера, а затем расширим эту конструкцию на произвольные (приводимые) конечномерные SL_2-модули.

Всюду ниже мы понимаем под *дифференциальным уравнением* на сечения локально тривиального расслоения

$$p : E \to B\,. \tag{11.3.1}$$

замкнутое относительно дифференцирований подмногообразие в расслоении струй

$$j^k p : J^k(E) \to B\,. \tag{11.3.2}$$

Если группа G действует на расслоении (11.3.1), то она действует и на всех расслоениях струй (11.3.2) и это действие продолжается на струи бесконечного порядка. Под G-*инвариантными* дифференциальными уравнениями мы понимаем уравнения, инвариантные относительно такого действия.

Термины *дифференциальный инвариант* и *инвариантное дифференцирование* всегда относятся к алгебрам регулярных функций на пространствах струй.

11.3.1. Дифференциальные инварианты уравнения Эйлера

Хорошо известно, что конечномерные представления группы SL_2 являются прямыми суммами неприводимых представлений

$$V_n = \Big\{ \sum_i a_i x^i y^{n-i} \mid a_i \in \Bbbk, 0 \le i \le n \Big\}.$$

Отметим, что все элементы V_n удовлетворяют уравнению Эйлера

$$x f_x + y f_y = n f \tag{11.3.3}$$

на тривиальном одномерном расслоении

$$E = \Bbbk^2 \times \Bbbk \to \Bbbk^2 \tag{11.3.4}$$

над пространством тавтологического представления $\Bbbk^2$.

Как показал П. Бибиков, поле дифференциальных инвариантов ограничения действия SL_2 на уравнение Эйлера имеет вид

$$\Bbbk(p, H, \nabla H, \nabla^2 H, \ldots, \nabla^k H, \ldots)\,,$$
$$\text{где} \qquad H = p_{xx}p_{yy} - (p_{xy})^2 \quad \text{и} \quad \nabla = p_y \frac{d}{dx} - p_x \frac{d}{dy}\,.$$

Очевидно, что все элементы этого поля действительно являются дифференциальными инвариантами. Чтобы увидеть, что никаких других дифференциальных инвариантов нет, заметим, что ограничение любой функции на $J^\infty(E)$ на наше дифференциальное уравнение выражается через

$x,\ y,\ p,\ p_x,\ p_{xx},\ \dots,\ p_{nx},\ \dots$:

$$
\begin{aligned}
p_{kx,(l+1)y} &= (n-k-l)\,\frac{1}{y}\,p_{kx,ly} - \frac{x}{y}\,p_{(k+1)x,ly}\\
p_{(k+1)x,ly} &= (n-k-l)\,\frac{1}{y}\,p_{(k+1)x,(l-1)y} - \frac{x}{y}\,p_{(k+2)x,(l-1)y}\\
p_{(k+2)x,(l-1)y} &= (n-k-l)\,\frac{1}{y}\,p_{(k+2)x,(l-2)y} - \frac{x}{y}\,p_{(k+3)x,(l-2)y}\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
p_{(k+l+1)x,y} &= (n-k-l)\,\frac{1}{y}\,p_{(k+l)x} - \frac{x}{y}\,p_{(k+l-1)x}\,,
\end{aligned}
$$

то есть дифференциальные инварианты лежат в алгебре

$$\Bbbk(y)[x, p, p_x, p_{xx}, \dots, p_{nx}, \dots]\,.$$

Вычисляя H через производные по x:

$$
\begin{aligned}
H = p_{xx}p_{yy} - (p_{xy})^2 &=\\
&= p_{xx}(\frac{n-1}{y}p_y - \frac{x}{y}p_{xy}) - (\frac{n-1}{y}p_x - \frac{x}{y}p_{xx})^2 =\\
= p_{xx}(\frac{n-1}{y}(\frac{n}{y}p - \frac{x}{y}p_x) &- \frac{x}{y}(\frac{n-1}{y}p_x - \frac{x}{y}p_{xx})) - (\frac{n-1}{y}p_x - \frac{x}{y}p_{xx})^2 =\\
&= \frac{n-1}{y^2}(np_{xx}p - (n-1)(p_x)^2)
\end{aligned}
$$

заключаем, что H является аффинной функцией по p_{xx}, и значит, ∇H является аффинной функцией по p_{xxx}, а $\nabla^k H$ — аффинной функцией по $p_{(k+2)x}$. Поэтому из алгебраической независимости

$$p, p_{xx}, p_{xxx}, \dots, p_{kx}, \dots$$

вытекает, что $p, H, \nabla H, \nabla^2 H, \dots, \nabla^k H, \dots$ алгебраически независимы, и поле $\Bbbk(x, y, p, p_x, p_{xx}, \dots, p_{kx}, \dots)$ совпадает с полем

$$\Bbbk(H, \nabla H, \dots, \nabla^k H, \dots)(x, y, p, p_x) = \Bbbk(H, \nabla H, \dots, \nabla^k H, \dots)(x, y, p_x, p_y)\,.$$

Теперь всё следует из такого предложения:

Предложение 3.1
В поле $\Bbbk(H, \nabla H, \ldots, \nabla^k H, \ldots)(x, y, p, p_x)$ дифференциальными инвариантами являются только элементы поля $\Bbbk(H, \nabla H, \nabla^2 H, \ldots, \nabla^k H, \ldots)(p)$.

Доказательство. Поскольку в $V_1 \oplus (V_1)^*$ инвариантны лишь функции от свертки $xp_x + yp_y$ в поле $\Bbbk(H, \nabla H, \ldots, \nabla^k H, \ldots)(x, y, p_x, p_y)$ инвариантами могут быть только элементы подполя $\Bbbk(H, \nabla H, \ldots, \nabla^k H, \ldots)(xp_x + yp_y)$. □

Продолженные уравнения $\varepsilon^{(n)}$. Обозначим через $\varepsilon^{(n)}$ продолжение уравнения Эйлера (11.3.3):

$$\varepsilon^{(1)} = \{xp_x + yp_y - np = 0\}$$

из $J^1(E)$ в $J^n(E)$. Мы собираемся исследовать расслоение

$$F\colon \varepsilon^{(n)} \to \varepsilon^{(n)} /\!/ \mathrm{SL}_2 = \operatorname{Spec}\left(\frac{\Bbbk[J^n(E)]}{\left(\frac{d^{k+l}}{dx^k dy^l} xp_x + yp_y - np\right)}\right)^{\mathrm{SL}_2}.$$

Поскольку на $\varepsilon^{(n)}$ имеются координаты

$$(x, y, p_{nx}, p_{(n-1)x,y}, p_{(n-2)x,2y}, \ldots, p_{ny})$$

размерность $\varepsilon^{(n)}$ равна $n+3$. Как многообразие $\varepsilon^{(n)}$ изоморфно аффинному пространству $\mathbb{A}^{n+3}$ — такой изоморфизм задаётся выбором координат

$$(x, y, p_{nx}, p_{(n-1)x,y}, p_{(n-2)x,2y}, \ldots, p_{ny}) .$$

и превращает действие SL_2 на $\varepsilon^{(n)}$ в стандартное линейное представление

$$V_1 \oplus V_n .$$

Теорема 3.1
Множество точек с незамкнутыми SL_2-орбитами в $\varepsilon^{(n)}$ имеет вид

$$(a, b) \oplus f(x, y) ,$$

где (a, b) — корень $f(x, y)$ порядка не меньше $n/2$.

Доказательство. В силу критерия Гильберта-Мамфорда замкнутости орбиты редуктивной группы (верной, кстати, в поле любой характеристики), SL_2-орбита элемента линейного SL_2-представления замкнута тогда и только тогда, когда замкнута T-орбита этого элемента, где T — максимальный тор в SL_2. Выберем координаты (x, y) так, чтобы T действовал диагональными матрицами $\mathrm{diag}(\lambda, \lambda^{-1})$. Тогда действие T на элемент $V_1 \oplus V_n$ имеет вид

$$(\lambda x, \lambda^{-1} y, \lambda^{-n} p_{nx}, \ldots, \lambda^{2i-n} p_{(n-i)x,iy}, \cdots, \lambda^n p_{ny}).$$

T-орбита замкнута в том и только в том случае, если координаты, умножающиеся на λ в отрицательной (или наоборот положительной) степени, равны 0. □

Идеалы $\boldsymbol{I_{s(x,y)}}$. Обозначим через K множество точек $\varepsilon^{(n)}$ из незамкнутых SL_2-орбит. Из доказанной выше теоремы следует, что коразмерность K в $\varepsilon^{(n)}$ больше 1. Если же $n > 1$, то коразмерность $F(K)$ в $\varepsilon^{(n)}/\!/\,\mathrm{SL}_2$ больше 1. По критерию категорного фактора Игусы в любом слое F имеется ровно одна замкнутая SL_2-орбита, а все слои из $\varepsilon^{(n)} \backslash K$ неприводимы и изоморфны фактору SL_2 по замкнутой подгруппе[1]. Поэтому прообраз в $\varepsilon^{(n)} \backslash K$ неприводимого двумерного замкнутого подмножества из $\varepsilon^{(n)}/\!/\,\mathrm{SL}_2$ неприводим и имеет размерность 5 (а прообраз одномерного неприводимого 4-мерен и неприводим).

Подставим теперь вместо координат $p_{kx,ly}$ соответствующие струи некоторого полиномиального сечения[2] $s(x, y)$ расслоения $E \to B$. Тогда образы любых трёх дифференциальных инвариантов

$$\mathrm{Sol}(s)^*(F_1)(x, y), \mathrm{Sol}(s)^*(F_2)(x, y), \text{ и } \mathrm{Sol}(s)^*(F_3)(x, y)$$

удовлетворяют полиномиальному соотношению

$$Z(\mathrm{Sol}(s)^*(F_1), \mathrm{Sol}(s)^*(F_2), \mathrm{Sol}(s)^*(F_3)) = 0$$

[1] а именно, стабилизатору точки слоя — из теоремы о размерности слоёв следует, что этот стабилизатор дискретен

[2] т. е. вместо $p_{kx,ly}$ подставляем полиномиальную функцию

$$\mathrm{Sol}(s)^*(p_{kx,ly})(x, y) = \frac{\partial^{k+l}}{\partial x^k \partial y^l} s(x, y)$$

(образ гомоморфизма вычисления $\mathrm{Sol}(s)^* \colon \Bbbk[B] \to \Bbbk[J^\infty(E)]$, на сечении $s(x, y)$)

(это следует из того, что невозможно вложить кольцо многочленов от 3 переменных в кольцо многочленов от 2 переменных — должно быть нетривиальное ядро). Таким образом, имеется идеал соотношений

$$I_{s(x,y)} \subset \Bbbk[p, H, \nabla H, \dots, \nabla^{n-2}H]$$

между образами конечного числа дифференциальных инвариантов

$$\begin{gathered} s(x,y) = \mathrm{Sol}(s)^*(p)(x,y) \\ \mathrm{Hes}(x,y) = \mathrm{Sol}(s)^*(H)(x,y) \\ J_1(x,y) = \mathrm{Sol}(s)^*(\nabla H)(x,y) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ J_{n-2}(x,y) = \mathrm{Sol}(s)^*(\nabla^{n-2}H)(x,y) \end{gathered}$$

где n есть степень многочлена $s(x,y)$.

Предложение 3.2
Если SL_2-орбита точки $s(x,y) \in V_n$ двумерна, то $J_1(x,y) = 0$, а идеал $I_{s(x,y)}$ задает одномерное подмногообразие

Доказательство. В V_n имеется ровно две двумерные орбиты — это орбиты x^n и $(xy)^{\frac{n}{2}}$. Для обеих утверждение проверяется простым подсчетом. □

Теорема 3.2 (модификация теоремы П. Бибикова)
SL_2-орбиты двух многочленов $f_1(x,y)$ и $f_2(x,y)$ совпадают тогда и только тогда, когда совпадают их идеалы соотношений $I_{f_1(x,y)}$ и $I_{f_2(x,y)}$.

Доказательство. Рассуждение практически дословно повторяет доказательство более общей теоремы 3.5, приведённое ниже на стр. 69. □

Пример 3.1. Пусть $n = 2$. Тогда $\mathrm{Hes}(x,y) = D(f(x,y))$ — дискриминант формы $f(x,y)$. Тогда идеал $I_{f(x,y)}$ имеет вид $H - c$, $c \in \Bbbk$ (действительно, орбита формы степени 2 однозначно определяется своим дискриминантом). Полученная стратификация — 0-мерная клетка (из 1 точки) с меткой $(((0,1)))$ и 1-мерная клетка (изоморфная $\Bbbk^*$) с меткой $(((0,1),(0,0)))$.

11.3.2. Орбиты SL_2 в приводимых конечномерных представлениях

Результаты предыдущего раздела практически дословно переносятся на приводимые SL_2-модули $V = \bigoplus\limits_{i=1}^{m} V_{n_i}$. А именно, рассмотрим над пространством B тавтологического представления с координатами (x, y) тривиальное расслоение

$$E = B \times \Bbbk^m = B \times \bigoplus_{i=1}^{m} \Bbbk = \bigoplus_{i=1}^{m} E_i$$

и дифференциальное уравнение $\varepsilon_i^{(1)} = \{xp_{i,x}+yp_{i,y} = n_i p_i\}$. Легко видеть, что p_i и

$$H_i = p_{i,xx}p_{i,yy} - (p_{i,xy})^2$$

(где $i = 1, \cdots, m$) являются дифференциальными инвариантами, а

$$\nabla_i = p_{i,x}\frac{d}{dy} - p_{i,y}\frac{d}{dx}$$

являются инвариантными дифференцированиями.

Теорема 3.3
Поле дифференциальных инвариантов действия SL_2 на уравнении

$$xp_{i,x} + yp_{i,y} = n_i p_i \qquad (1 \leqslant i \leqslant m)$$

изоморфно полю функций на произведении бесконечномерного проаффинного пространства

$$\{(\nabla^k H_i,\ i = 1, \ldots, m;\ k = 0, 1, \ldots, l, \ldots)\}$$

и проективного конуса над грассманианом

$$CGr(2, m+1) = \{(\det\left(\begin{smallmatrix} y & -x \\ p_{i,x} & p_{i,y}\end{smallmatrix}\right), \det\left(\begin{smallmatrix} p_{i,x} & p_{i,y} \\ p_{j,x} & p_{j,y}\end{smallmatrix}\right))\}$$

и порождается над $\Bbbk$ элементами

$$\begin{array}{rl} p_i & (1 \leqslant i \leqslant m) \\ \nabla_i p_j & (1 \leq i, j \leq m) \\ H_i & (1 \leqslant i \leqslant m) \\ \nabla_i H_i & (1 \leqslant i \leqslant m) \\ \vdots & \quad \vdots \\ \nabla_i^k H_i & (1 \leqslant i \leqslant m)\,, \end{array} \tag{11.3.5}$$

которые связаны соотношениями

$$\nabla_i p_i = 0\,, \quad \nabla_i p_j = -\nabla_j p_i\,,$$
$$\nabla_i p_j \nabla_k p_l + \nabla_i p_l \nabla_j p_k + \nabla_i p_k \nabla_l p_j = 0\,,$$
$$n_i p_i \nabla_j p_l + n_j p_j \nabla_k p_i + n_k p_k \nabla_j p_i = 0\,.$$

Доказательство. Мы уже видели, что элементы (11.3.5) являются дифференциальными инвариантами. Покажем, что никаких других инвариантов нет. Для этого заметим, что ограничение любой функции с $J^\infty(E)$ на

$$xp_{i,x} + yp_{i,y} = n_i p_i$$

выражается через $x, y, p_i, p_{i,x}, p_{i,xx}, \dots, p_{i,nx}, \dots$:

$$\begin{aligned}
p_{i,kx,(l+1)y} &= (n-k-l)\frac{1}{y}p_{i,kx,ly} - \frac{x}{y}p_{i,(k+1)x,ly}\\
p_{i,(k+1)x,ly} &= (n-k-l)\frac{1}{y}p_{i,(k+1)x,(l-1)y} - \frac{x}{y}p_{i,(k+2)x,(l-1)y}\\
p_{i,(k+2)x,(l-1)y} &= (n-k-l)\frac{1}{y}p_{i,(k+2)x,(l-2)y} - \frac{x}{y}p_{i,(k+3)x,(l-2)y}\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
p_{i,(k+l+1)x,y} &= (n-k-l)\frac{1}{y}p_{i,(k+l)x} - \frac{x}{y}p_{i,(k+l-1)x}.
\end{aligned}$$

то есть дифференциальные инварианты лежат в поле

$$\Bbbk(y)(x, p_i, p_{i,x}, p_{i,xx}, \dots, p_{i,nx}, \cdots)_{i=1,\cdots,m}\,.$$

Вычисляя H_i через производные по x:

$$H_i = \frac{n-1}{y^2}(np_{i,xx}p_i - (n-1)(p_{i,x})^2)\,.$$

видим, что H_i является аффинной функцией по p_{xx}, и значит, $\nabla_i H_i$ является аффинной функцией по $p_{i,xxx}$, а $\nabla_i^k H_i$ — аффинной функцией по $p_{i,(k+2)x}$. Отсюда p_i, H_i, $\nabla_i H_i$, $\nabla_i^2 H_i$, $\dots$, $\nabla_i^k H_i$, $\dots$ (где $1 \leqslant i \leqslant m$) алгебраически независимы и

$$\begin{aligned}
&\Bbbk(x, y, p_i, p_{i,x}, p_{i,xx}, \dots, p_{i,kx}, \dots) =\\
&\qquad = \Bbbk(H_i, \nabla_i H_i, \dots, \nabla_i^k H_i, \dots)(x, y, p_i, p_{i,x}) =\\
&\qquad\qquad = \Bbbk(H_i, \nabla_i H_i, \dots, \nabla_i^k H_i, \dots)(x, y, p_{i,x}, p_{i,y})\,.
\end{aligned}$$

Доказательство завершает следующее далее предложение. □

Предложение 3.3
В поле $\Bbbk(H_i, \nabla_i H_i, \ldots, \nabla_i^k H_i, \cdots)_{i=1,\ldots,m}(x, y, p_i, p_{i,x})$ дифференциальными инвариантами являются только элементы поля

$$\Bbbk(H_i, \nabla_i H_i, \nabla_i^2 H_i, \ldots, \nabla_i^k H_i, \ldots)_{i=1,\ldots,m}(p_i, \nabla_i p_j)_{1\le i<j\le m}.$$

Доказательство. Поскольку в $V_1 \oplus V_1^{*\oplus n}$ инвариантами являются только функции от сверток $xp_{i,x} + yp_{i,y}$ и определителей $p_{i,x}p_{j,y} - p_{i,y}p_{j,x}$ в поле

$$\Bbbk(\nabla_i^k H_i)(x, y, p_{i,x}, p_{i,y})$$

инварианты исчерпываются $\Bbbk(\nabla_i^k H_i)(xp_{i,x} + yp_{i,y}, p_{i,x}p_{j,y} - p_{i,y}p_{j,x})$ □

Пример 3.2. Если $V = V_n \oplus V_m$, то

$$\left(\frac{\Bbbk(J^\infty(E))}{(xp_{i,x} + yp_{i,y} = n_i p_i)}\right)^{\mathrm{SL}_2} \simeq \Bbbk[p_1, p_2, \nabla_1 p_2, \nabla_1^k H_1, \nabla_2^k H_2]_{k\ge 0}\,.$$

Рассмотрим теперь подмногообразие

$$\varepsilon = \bigoplus_{i=1}^m \varepsilon_i^{(n_i)} \subset \bigoplus_{i=1}^m J^{n_i}(E)$$

(прямая сумма над $B = \Bbbk^2$). Поскольку на $\varepsilon_i^{(n_i)}$ имеются координаты

$$x, y, p_{i,n_i x}, p_{i,(n_i-1)x,y}, p_{i,(n_i-2)x,2y}, \ldots, p_{i,n_i y}\,,$$

размерность $\dim \varepsilon = m + 2 + \sum_{i=1}^m n_i$. Кроме того, имеется расслоение $F\colon \varepsilon \to \varepsilon /\!/ \mathrm{SL}_2$. Как многообразие ε изоморфно аффинному пространству — такой изоморфизм задаётся выбором координат $x, y, p_{i,(n_i-k)x,ky}$ и превращает действие SL_2 на ε в стандартное представление $V_1 \oplus \bigoplus_{i=1}^m V_{n_i}$.

Теорема 3.4
Множество точек с незамкнутыми SL_2-орбитами в ε имеет вид

$$(a, b) \oplus \bigoplus_{i=1}^m f_i(x, y)\,,$$

где (a, b) — корень $f_i(x, y)$ порядка не меньше $n_i/2$ для всех $1 \leqslant i \leqslant m$.

Доказательство. В силу критерия Гильберта-Мамфорда замкнутости орбиты редуктивной группы (верной, кстати, в поле любой характеристики), SL_2-орбита элемента линейного SL_2-представления замкнута тогда и только тогда, когда замкнута T-орбита этого элемента, где T — максимальный тор в SL_2. Выберем координаты (x, y) так, чтобы T действовал диагональной матрицей $\mathrm{diag}(\lambda, \lambda^{-1})$. Тогда T-орбита элемента из $V_1 \oplus \bigoplus_{i=1}^{m} V_{n_i}$ имеет вид

$$(\lambda x, \lambda^{-1} y, \lambda^{2k-n_i} p_{i,(n_i-k)x,ky})$$

и замкнута в том и только в том случае, когда все координаты, умножающиеся на λ в отрицательной (или наоборот положительной) степени, равны 0. □

Обозначим через K множество точек ε из незамкнутых SL_2-орбит. Из только что доказанной теоремы следует, что коразмерность K в ε больше 1. Если же $\sum_i n_i > 1$, то коразмерность $F(K)$ в $\varepsilon /\!/ \mathrm{SL}_2$ больше 1. По критерию Игусы в любом слое F ровно одна замкнутая SL_2-орбита, и все слои над $\varepsilon /\!/ \mathrm{SL}_2$ в $\varepsilon \setminus K$ неприводимы и изоморфны фактору SL_2 по какой-то замкнутой подгруппе. Поэтому прообраз в $\varepsilon \setminus K$ неприводимого двумерного замкнутого подмножества в $\varepsilon /\!/ \mathrm{SL}_2$ неприводим и имеет размерность 5 (а прообраз одномерного неприводимого есть 4-мерное неприводимое).

Подставим теперь вместо координат $p_{i,kx,ly}$ соответствующие струи для некоторого полиномиального сечения[1] $s(x, y) = (s_i(x, y))_{i=1,\cdots,m}$ расслоения $E \to B$. Тогда образы любых трёх дифференциальных инвариантов $\mathrm{Sol}(s)^*(F_1)(x, y)$, $\mathrm{Sol}(s)^*(F_2)(x, y)$ и $\mathrm{Sol}(s)^*(F_3)(x, y)$ удовлетворяют полиномиальному соотношению

$$Z(\mathrm{Sol}(s)^*(F_1), \mathrm{Sol}(s)^*(F_2), \mathrm{Sol}(s)^*(F_3)) = 0$$

(это следует из того, что невозможно вложить кольцо многочленов от 3 переменных в кольцо многочленов от 2 переменных — должно быть

[1] т.е. вместо $p_{i,kx,ly}$ подставлена полиномиальная функция

$$\mathrm{Sol}(s)^*(p_{i,kx,ly})(x, y) = \frac{\partial^{k+l}}{\partial x^k \partial y^l} s_i(x, y)$$

(образ гомоморфизма вычисления $\mathrm{Sol}(s)^* \colon \Bbbk[B] \to \Bbbk[J^\infty(E)]$ на сечении $s(x, y)$)

нетривиальное ядро). Таким образом, имеется идеал $I_{s(x,y)}$ в

$$A = \Bbbk[p_i, \nabla_i p_j, H_1, \nabla_1 H_1, \ldots, \nabla_1^{n_1-2} H_1,$$

$$H_2, \nabla_2 H_2, \ldots, \nabla_2^{n_2-2} H_2, \cdots, H_m, \nabla_m H_m, \ldots, \nabla_m^{n_m-2} H_m]$$

соотношений для образов конечного числа дифференциальных инвариантов

$$\begin{gathered} s_i(x,y) = \mathrm{Sol}(s)^*(p_i)(x,y) \\ \mathrm{Hes}_i(x,y) = \mathrm{Sol}(s)^*(H_i)(x,y) \\ J_{i,1}(x,y) = \mathrm{Sol}(s)^*(\nabla_i H_i)(x,y) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ J_{i,n_i-2}(x,y) = \mathrm{Sol}(s)^*(\nabla_i^{n_i-2} H_i)(x,y) \\ D_{ij}(x,y) = \mathrm{Sol}(s)^*(\nabla_i p_j)(x,y) \end{gathered}$$

(где n_i есть степень многочлена $s_i(x,y)$).

Предложение 3.4
Если SL_2-орбита точки $s(x,y) \in V_n$ 2-мерна, то $J_{i,1}(x,y) = 0$, а идеал $I_{s(x,y)}$ задает одномерное подмногообразие. □

Теорема 3.5
SL_2-орбиты двух наборов многочленов $f_1(x,y) = (f_{1,i}(x,y))_{i=1}^m$ и $f_2(x,y) = (f_{2,i}(x,y))_{i=1}^m$ совпадают тогда и только тогда, когда совпадают их идеалы соотношений $I_{f_1(x,y)}$ и $I_{f_2(x,y)}$.

Доказательство. Значения $\mathrm{Sol}(f_k)^*(I)(g(x,y))$ и $\mathrm{Sol}(f_k)^*(I)(x,y)$, где I дифференциальный инвариант, совпадают. Поэтому, если орбиты совпадают, то соотношения между значениями в точках одни и те же. Значит, идеалы соотношений тоже совпадают.

Пусть теперь идеалы соотношений совпадают. Идеалу

$$I_{s(x,y)} \subset \Bbbk[\varepsilon/\!/\,\mathrm{SL}_2]$$

(т.е. ядру гомоморфизма $\mathrm{Sol}(s) \to \Bbbk[B] = \Bbbk[x,y]$) сопоставим идеал соотношений

$$I'_{s(x,y)} \subset \Bbbk[\varepsilon/\!/\,\mathrm{SL}_2]\,,$$

а этому идеалу — идеал $I(V(F^*(I'_{s(x,y)}))) \subset \Bbbk[\varepsilon] = \Bbbk[\varepsilon \backslash K]$ (идеал полного прообраза сечения как вложения). Получаем равенство

$$I_1 = I(V(F^*(I'_{f_1(x,y)}))) = I_2 = I(V(F^*(I'_{f_2(x,y)}))) \,.$$

SL_2-орбита подмногообразия $\{\bigoplus\limits_{i=1}^{m} j^{n_i} f_{k,i}(x,y)\} \subset \bigoplus\limits_{i=1}^{m} J^{n_i}(E)$ лежит в $V(I_1)$. $V(I_1)$ имеет размерность 5, если орбита $f_k(x,y) \in \bigoplus\limits_{i=1}^{m} V_{n_i}$ 3-мерна, и размерность 4, если орбита $f_k(x,y) \in \bigoplus\limits_{i=1}^{m} V_{n_i}$ 2-мерна. Значит, поскольку размерность орбиты множества $\{\bigoplus\limits_{i=1}^{m} j^{n_i} f_{2,i}(x,y)\}$ равна два плюс размерность орбиты $f_k(x,y)$ как элемента $\bigoplus\limits_{i=1}^{m} V_{n_i}$, то размерность $V(I_1)$ совпадает с размерностью орбиты множества $\{\bigoplus\limits_{i=1}^{m} j^{n_i} f_{k,i}(x,y)\}$.

Таким образом, орбиты множеств $\{\bigoplus\limits_{i=1}^{m} j^{n_i} f_{1,i}(x,y)\}$ и $\{\bigoplus\limits_{i=1}^{m} j^{n_i} f_{k,i}(x,y)\}$ пересекаются, а значит можно выбрать такие представители орбит $f_k(x,y)$, $k = 1,2$, что $\{\bigoplus\limits_{i=1}^{m} j^{n_i} g_1(f_{1,i})(x,y)\}$ и $\{\bigoplus\limits_{i=1}^{m} j^{n_i} g_2(f_{2,i})(x,y)\}$ пересекаются. Но поскольку на координатах $p_{i,lx,(n_i-l)y}$ в точке пересечения стоят коэффициенты многочленов $g_k(f_k)_i(x,y)$ (умноженные на $l!(n-l)!$), то эти два набора многочленов равны. Значит, $f_1(x,y)$ и $f_2(x,y)$ лежат на одной SL_2-орбите. $\square$

Литература

[KhR] A.L. Gorodentsev, A.S. Khoroshkin, A.N. Rudakov, On syzygies of highest weight orbits, Amer. Math. Soc. Transl. (2), Vol 221 (2007), p. 79-120

[G] M. Green, Koszul cohomology and the geometry of projective varieties, I, II. J. Diff. Geom. (1984) **(19)**, p. 125-171; **(20)**, p. 279-289.

[F] W. Fulton, Young tableaux. CUP (1997)

[PP] A. Polishchuk, L. Positselsky, Quadratic algebras. AMS(2005).

[VP] Э. Б. Винберг, В. Л. Попов, Геометрическая теория инвариантов

[1] Овсянников, Групповой анализ дифференциальны уравнений

[P] В. Л. Попов, О замкнутости некоторых орбит алгебраических групп, Функц. анализ и его прил., 31:4 (1997), 76-79

[KL] B. Kruglikov, V. Lychagin, Invariants of pseudogroup actions: Homological methods and Finiteness theorem, `arXiv:math/0511711v2 [math.DG]`

12. Изучение функториальных гомотопических произведений и их приложений в геометрии и математической физике

12.1. A_∞-копроизведения

Мы фиксируем основное поле $\Bbbk$ нулевой характеристики и работаем с градуированными векторными пространствами $V = \bigoplus\limits_{n\in\mathbb{Z}} V_n$ над $\Bbbk$. Линейное отображение

$$V \xrightarrow{\varphi} W$$

имеет степень k, если $\forall\ i\ \varphi(V_i) \subset W_{i+k}$. Тензорное произведение операторов действует на тензорный моном с учётом Кошулева правила знаков:

$$\begin{aligned}
&(f_1 \otimes f_2 \otimes \cdots \otimes f_m) \circ (g_1 \otimes g_2 \otimes \cdots \otimes g_m) = \\
&\qquad (-1)^{\varepsilon(f;g)}\,(f_1{\circ}g_1) \otimes (f_2{\circ}g_2) \otimes \cdots \otimes (f_m{\circ}g_m)\ , \\
&f_1 \otimes f_2 \otimes \cdots \otimes f_m\,(v_1 \otimes v_2 \otimes \cdots \otimes v_m) = \\
&\qquad (-1)^{\varepsilon(f;v)} f_1(v_1) \otimes f_2(v_2) \otimes \cdots \otimes f_m(v_m)\ ,
\end{aligned} \tag{12.1.1}$$

где ε зависит от двух упорядоченных наборов степеней так:

$$\begin{aligned}
\varepsilon\,(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m\,;\, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m) = \\
\deg\alpha_m \cdot (\deg\beta_1 + \cdots + \deg\beta_{m-1}) + \\
\deg\alpha_{m-1} \cdot (\deg\beta_1 + \cdots + \deg\beta_{m-2}) + \cdots + \\
\deg\alpha_2 \cdot \deg\beta_1\,.
\end{aligned}$$

Скобка $[f,g] \overset{\text{def}}{=} fg - (-1)^{\deg f \deg g} gf$ всегда означает *градуированный* коммутатор. Все дифференциалы $V \xrightarrow{\partial} V$ всегда имеют степень -1 . Заметим, что

$$[\partial, \partial] = 2\,\partial^2 = 0\,.$$

Через $V[k]$ обозначается комплекс с $V[k]_i = V_{i+k}$ и $\partial_{V[k]} = (-1)^k \partial_V$. Таким образом, тождественное отображение $s : V \longrightarrow V[1]$ имеет степень -1 и коммутирует с дифференциалом: $s{\circ}\partial_V = -\partial_{V[1]}{\circ}s$.

Будем обозначаем через $\mathsf{T}V \overset{\text{def}}{=} \prod\limits_{n\geqslant 1} V^{\otimes n}$ *редуцированную пополненную* тензорную алгебру. Её элементами являются формальные некоммутативные степенные ряды без свободного члена

$$\tau = \sum_{k \geqslant 1} \tau_k \,, \quad \tau_k \in V^{\otimes k} \,.$$

Мы называем число k *тензорной степенью* компоненты $\tau_k \in V^{\otimes k}$, тогда как *полная степень* $\deg \tau_k$ вычисляется как сумма внутренних степеней отдельных тензорных сомножителей $\deg(v_1 \otimes v_2 \otimes \cdots \otimes v_k) = \sum \deg(v_\nu)$.

Дифференцирование алгебры $\mathsf{T}V$ - это $\Bbbk$-линейное отображение $\mathsf{T}V \xrightarrow{D} \mathsf{T}V$, удовлетворяющее правилу Лейбница

$$D \circ \mu = \mu \circ (D \otimes 1 + 1 \otimes D) \,,$$

где $\mathsf{T}V \otimes \mathsf{T}V \xrightarrow{\mu} \mathsf{T}V$ - тензорное умножение. В применении к элементам (с учётом Кошулева правила знаков (12.1.1)) это выглядит как

$$D(\omega_1 \otimes \omega_2) = (D\omega_1) \otimes \omega_2 + (-1)^{\deg D \cdot \deg \omega_1} \omega_1 \otimes (D\omega_2) \,.$$

Имеется $\Bbbk$-линейная биекция между дифференциалами $\mathsf{T}V \xrightarrow{D} \mathsf{T}V$ и линейными отображениями $V \xrightarrow{\delta} \mathsf{T}V$, сопоставляющая дифференцированию D его сужение

$$\delta_D = D|_V : V \xrightarrow{\delta} \mathsf{T}V \,.$$

Обратное сопоставление продолжает δ по правилу Лейбница до отображения D_δ , определенного на всем $\mathsf{T}V$. При этой биекции градуированному коммутатору дифференциалов $[D_{\delta_1}, D_{\delta_2}]$ соответствует *скобка Герштенхабера* $\{\delta_1, \delta_2\}$, определяемая из равенства $D_{\{\delta_1,\delta_2\}} \stackrel{\text{def}}{=} [D_{\delta_1}, D_{\delta_2}] = D_{\delta_1} D_{\delta_2} - (-1)^{\deg \delta_1 \cdot \deg \delta_2} D_{\delta_2} D_{\delta_1}$.

Определение 1.1
A_∞-*копроизведение* на V - это дифференцирование $D : \mathsf{T}(V[1]) \longrightarrow \mathsf{T}(V[1])$ степени $\deg D = -1$ с квадратом $D^2 = 0$.

Всякое A_∞-копроизведение D определяет и однозначно определяется $\Bbbk$-линейным отображением

$$\delta = \sum_{n \geqslant 1} \delta_n = D|_{V[1]} \, : \, V[1] \longrightarrow \mathsf{T}(V[1])$$

степени -1, таким что $\{\delta,\delta\}=0$. В терминах неподкрученного комплекса V однородные компоненты ряда δ представляют собою отображения

$$V \xrightarrow{\widetilde{\delta}_n} V^{\otimes n}$$

степени $n-2$, определяемые из коммутативной диаграммы

$$\begin{tikzcd} V[1] \arrow[r, "\delta_n"] & V[1]^{\otimes n} \\ V \arrow[u, "s"] \arrow[r, "\widetilde{\delta}_n"] & V^{\otimes n} \arrow[u, "s^{\otimes n}"'] \end{tikzcd}$$

где $V \xrightarrow{s} V[1]$ - тождественное отображение (напомним, что $\deg s=-1$ и $\deg \delta_n=-1$). В этой интерпретации равенство $\{\delta,\delta\}=0$ превращается в бесконечную систему квадратичных соотношений между отображениями $V \xrightarrow{\widetilde{\delta}_n} V^{\otimes n}$. Для $n=1,\,2,\,3,\,\ldots$ они выглядят следующим образом:

$$\begin{aligned} \{\delta_1,\delta_1\}=0 &\iff \widetilde{\delta}_1^2=0 \\ \{\delta_1,\delta_2\}+\{\delta_2,\delta_1\}=0 &\iff \widetilde{\delta}_2\widetilde{\delta}_1=(\widetilde{\delta}_1\otimes 1+1\otimes\widetilde{\delta}_1)\,\widetilde{\delta}_2 \\ \delta_2^2+\{\delta_1,\delta_3\}=0 &\iff (\widetilde{\delta}_2\otimes 1)\otimes\widetilde{\delta}_2-(1\otimes\widetilde{\delta}_2)\otimes\widetilde{\delta}_2= \\ &\qquad (\widetilde{\delta}_1\otimes 1\otimes 1+1\otimes\widetilde{\delta}_1\otimes 1+1\otimes 1\otimes\widetilde{\delta}_1)\,\widetilde{\delta}_3+\widetilde{\delta}_3\widetilde{\delta}_1 \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

Первое уравнение утверждает, что $\widetilde{\delta}_1 : V \longrightarrow V$ — это дифференциал на V. Второе — что коумножение $\widetilde{\delta}_2 : V \longrightarrow V\otimes V$ согласовано с $\widetilde{\delta}_1$ по правилу Лейбница. Третье уравнение означает, что коассоциатор $(\widetilde{\delta}_2\otimes 1)\otimes\widetilde{\delta}_2-(1\otimes\widetilde{\delta}_2)\otimes\widetilde{\delta}_2 : V \longrightarrow V^{\otimes 3}$ коумножения $\widetilde{\delta}_2$ гомотопен нулю посредством гомотопии $\widetilde{\delta}_3$ и т. д.

В терминах двойственного пространства, двойственное отображение

$$\mathsf{T}(V^*[-1]) \xrightarrow{\delta^*} V^*[-1]$$

задаёт на двойственном пространстве V^* последовательность n-арных операций

$$\underbrace{V^*\otimes\ \cdots\ \otimes V^*}_{n} \xrightarrow{\widetilde{\delta}_n^*} V^*\,, \quad n=1,\,2,\,3,\,\ldots\,, \tag{12.1.2}$$

степени $\deg\widetilde{\delta}_n^* = 2-n$. Они называются *высшими умножениями* и удовлетворяют двойственным квадратичным соотношениям, утверждающим, что $\widetilde{\delta}_1^*$ и $\widetilde{\delta}_2^*$ снабжают V^* DGA-структурой, возможно неассоциативной, но с гомотопным нулю ассоциатором, причём стягивающая ассоциатор гомотопия — это "тройное произведение" $\widetilde{\delta}_3^*$ и т. д.

В физике высшие произведения (12.1.2)

$$\langle v_1^*, v_2^*, \dots, v_n^*\rangle \stackrel{\text{def}}{=} \widetilde{\delta}_n^*(v_1^*, v_2^*, \dots, v_n^*)$$

возникают как корреляторы в квантовых теориях поля и обычно выражаются с помощью разного рода интегралов, часто лишённых точного математического смысла. Квадратичные соотношения между такими интегралами интерпретируются при этом как допустимые преобразования таких интегралов, имеющие вид частичных свёрток различных наборов интегрируемых переменных. Высшие корреляторы, возникающие в "эффективной теории" на каком-либо пространстве W, часто вычисляются путём редукции некоторой "свободной теории", имеющейся на большем пространстве V. Математически такого рода вычисление обычно представляет собою перенос A_∞-структуры вдоль той или иной деформационной ретракции.

12.1.1. Перенос A_∞-копроизведения вдоль SDR-данных

Следуя [HS], мы называем *строгой деформационной ретракцией* (или, коротко, *SDR- данными*) диаграмму

$$\gamma \circlearrowright V \underset{\sigma}{\overset{\pi}{\rightleftarrows}} W\,, \tag{12.1.3}$$

в которой (V,∂_V) и (W,∂_W) - комплексы векторных пространств, π и σ - морфизмы этих комплексов[1], а $\gamma : V \longrightarrow V$ – гомотопия степени 1, такие что

$$\pi\sigma = 1_W\,,\quad \sigma\pi = 1_V + \partial_V\gamma + \gamma\partial_V\,,\quad \gamma^2 = 0\,,\quad \pi\gamma = 0\,,\quad \gamma\sigma = 0\,. \tag{12.1.4}$$

Типичным примером SDR-данных является ретракция на гомологии. Представим V в виде $V = A\oplus B\oplus C$, где $B = \operatorname{im}\partial_V$ - пространство границ, $C\subset\ker\partial_V$ трансверсально к B в $\ker\partial_V$, а $A\subset V$ трансверсально

[1]это означает, что $\partial_W\pi = \pi\partial_V$ и $\partial_V\sigma = \sigma\partial_W$

$\ker \partial_V$ in V. Таким образом, ∂_V изоморфно отображает A на B и аннулирует $B \oplus C$, а элементы подпространства $C \cong H(V)$ составляют полную систему различных представителей для классов гомологий. Диаграмма

$$\gamma \circlearrowright V \underset{\sigma}{\overset{\pi}{\rightleftarrows}} C\,,$$

в которой C рассматривается как комплекс с нулевым дифференциалом, проекция π и вложение σ определяются выбранным нами разложением $V = A \oplus B \oplus C$, а гомотопия γ изоморфно отображает B в A при помощи $-\partial_V|_A^{-1}$ и аннулирует $C \oplus A$, является строгой деформационной ретракцией. В самом деле, соотношение $\sigma\pi = 1_V + [\partial_V, \gamma]$ выполнено, поскольку $-[\partial_V, \gamma]$ проектирует V на $A \oplus B$ вдоль C, а все остальные соотношения очевидны.

Формула суммирования по деревьям Всякая строгая деформационная ретракция (12.1.3) позволяет по любому A_∞-копроизведению

$$\mathsf{T}(V[1]) \xrightarrow{D_\delta} \mathsf{T}(V[1])$$

на V, заданному при помощи ряда

$$\delta = \partial_{V[1]} + \sum_{n \geqslant 2} \delta_n\,, \quad V[1] \xrightarrow{\delta_n} V[1]^{\otimes n}\,,$$

линейный член которого $\delta_1 : V[1] \longrightarrow V[1]$ совпадает с дифференциалом

$$\delta_1 = \partial_{V[1]} = -\partial_V\,,$$

канонически построить *индуцированную* A_∞-структуру на W

$$D_{\delta_{\mathrm{ind}}} : \mathsf{T}(W[1]) \longrightarrow \mathsf{T}(W[1])\,,$$

которая задаётся степенным рядом $\delta_{\mathrm{ind}} = \partial_{W[1]} + \sum\limits_{n \geqslant 2} \delta_{\mathrm{ind},n}$.

Компонента n-той степени $\delta_{\mathrm{ind},n} : W[1] \longrightarrow W[1]^{\otimes n}$ этого ряда допускает при $n \geqslant 2$ следующее явное описание через суммы по деревьям. Наделим каждое планарное дерево Γ с одним корнем, n листьями, и внутренними вершинами валентности $\geqslant 3$ естественной ориентацией, ведущей от корня к листьям, повесим операторы

$W \xrightarrow{\sigma} V$	на входящее корневое ребро
$V \xrightarrow{\pi} W$	на все выходящие ребра-листья
$V \xrightarrow{\gamma} V$	на все внутренние ребра
$V \xrightarrow{\delta_k} V^{\otimes k}$	на все вершины валентности $(k+1)$

и обозначим через $\delta_\Gamma : W[1] \longrightarrow W[1]^{\otimes n}$ композицию всех этих операторов вдоль заданного дерева Γ. Тогда

$$\delta_{\mathrm{ind},n} = \sum_{\Gamma} \delta_\Gamma\,. \tag{12.1.5}$$

Мы будем называть (12.1.5) *формулой суммирования по деревьям.*

Импликация $D_\delta^2 = 0 \Rightarrow D_{\delta_{\mathrm{ind}}}^2 = 0$ не вполне очевидна. Она неоднократно передоказывалась многими независимыми авторами как в различных конкретных интерпретациях SDR-формализма, так и с различными дополнительными техническими ограничениями на SDR-данные[1]. Для удобства читателя мы приведём здесь набросок очень короткого доказательства формулы (12.1.5) в достаточной для наших приложений общности.

12.1.2. Доказательство формулы суммирования по деревьям

Воспользуемся стандартным подъёмом SDR-данных

$$\gamma \looparrowright V \underset{\sigma}{\overset{\pi}{\rightleftarrows}} W$$

до строгой деформационной ретракции между тензорными алгебрами

$$\gamma_{\mathsf{T}} \looparrowright \mathsf{T}(V) \underset{\sigma_{\mathsf{T}}}{\overset{\pi_{\mathsf{T}}}{\rightleftarrows}} \mathsf{T}(W)\,. \tag{12.1.6}$$

В этой диаграмме дифференциалы $\partial_{\mathsf{T}(V)}$, $\partial_{\mathsf{T}(W)}$ продолжают дифференциалы ∂_V, ∂_W на пространства $\mathsf{T}(V)$, $\mathsf{T}(W)$ по правилу Лейбница, отображения π_{T} , σ_{T} продолжают морфизмы комплексов π, σ до *гомоморфизмов*

[1] близкие к нашей точке зрения недавние версии таких доказательств можно найти в [GL], [HS], [M], [Sm] и др. работах

тензорных алгебр, а гомотопия γ_{T} продолжает гомотопию $V \xrightarrow{\gamma} V$ на все $\mathsf{T}(V)$ по *скрученному* правилу Лейбница

$$\gamma_{\mathsf{T}}\circ\mu = \mu\circ((f-g)\otimes\gamma_{\mathsf{T}} + \gamma_{\mathsf{T}}\otimes 1)\,.$$

Соотношения (12.1.4) для диаграммы (12.1.6) проверяются прямым бесхитростным вычислением[1] (см. к примеру [EM]).

Рассмотрим A_∞-копроизведение $D : \mathsf{T}(V) \longrightarrow \mathsf{T}(V)$ как формальное возмущение дифференциала D_{∂_V} в SDR-данных (12.1.6). При выполнении некоторых технических ограничений такое возмущение дифференциала канонически продолжается при помощи простых точных формул до возмущения всей диаграммы, задающей SDR-данные.

Лемма 1.1 (о возмущении дифференциала)
Пусть SDR-данные $\gamma \circlearrowright V \underset{\sigma}{\overset{\pi}{\rightleftarrows}} W$ и $\Bbbk$-линейное отображение $V \xrightarrow{\varepsilon} V$ удовлетворяют следующим двум условиям:

(1) возмущение $\partial'_V = \partial_V + \varepsilon$ тоже является дифференциалом, т. е. ${\partial'_V}^2 = 0$;

(2) эндоморфизмы $(1-\gamma\varepsilon)^{-1} = 1 + \sum_{m\geqslant 1}(\gamma\varepsilon)^m$ и $(1-\varepsilon\gamma)^{-1} = 1 + \sum_{m\geqslant 1}(\varepsilon\gamma)^m$ корректно определены[2] на V.

---

[1] если морфизмы комплексов $f, g : V \rightrightarrows V$ гомотопны: $f-g = [\partial,\gamma]$, то их продолжения до гомоморфизмов DG-алгебр $f_{\mathsf{T}}, g_{\mathsf{T}} : \mathsf{T}(V) \rightrightarrows \mathsf{T}(V)$ также гомотопны посредством продолжения γ до скрученного f-g-дифференцирования $\mathsf{T}(V)$ по правилу $\gamma_{\mathsf{T}}\circ\mu = \mu\circ(f\otimes\gamma_{\mathsf{T}} + \gamma_{\mathsf{T}}\otimes g)$; в самом деле, ограничение $\gamma_{\mathsf{T}}|_{V^{\otimes n}} = \sum\limits_{\alpha+\beta=n-1} f^{\otimes\alpha}\otimes\gamma\otimes g^{\otimes\beta}$ и

$$[\partial_{\mathsf{T}},\gamma_{\mathsf{T}}]|_{V^{\otimes n}} = \sum_{\alpha+\beta=n-1} f^{\otimes\alpha}\otimes(\partial\gamma+\gamma\partial)\otimes g^{\otimes\beta} = \sum_{\alpha+\beta=n-1} f^{\otimes\alpha}\otimes(f-g)\otimes g^{\otimes\beta} = f^{\otimes n} - g^{\otimes n}$$

[2] это условие заведомо выполняется, когда $\gamma\varepsilon$ и $\varepsilon\gamma$ локально нильпотентны (во всех наших приложениях дело будет обстоять именно так); более общим образом, это условие выполняется когда $\mathrm{End}\,(E)$ полно относительно какой-либо нормы, такой что $||fg|| \leqslant ||f||\cdot||g||$ и $||\varepsilon|| \ll 1$

Тогда возмущённая диаграмма $\gamma' \circlearrowright (V,\partial'_V) \overset{\pi'}{\underset{\sigma'}{\rightleftarrows}} (W,\partial'_W)$, в которой

$$\begin{aligned}
\sigma' &= (1-\gamma\varepsilon)^{-1}\sigma = \sigma + \gamma\varepsilon\sigma + \gamma\varepsilon\gamma\varepsilon\sigma + \gamma\varepsilon\gamma\varepsilon\gamma\varepsilon\sigma + \ \cdots\ ,\\
\pi' &= \pi(1-\varepsilon\gamma)^{-1} = \pi + \pi\varepsilon\gamma + \pi\varepsilon\gamma\varepsilon\gamma + \pi\varepsilon\gamma\varepsilon\gamma\varepsilon\gamma + \ \cdots\ ,\\
\gamma' &= (1-\gamma\varepsilon)^{-1}\gamma = \gamma(1-\varepsilon\gamma)^{-1} = \gamma + \gamma\varepsilon\gamma + \gamma\varepsilon\gamma\varepsilon\gamma + \ \cdots\ ,\\
\partial'_W &= \partial_W + \varepsilon_{\mathrm{ind}}\,, \text{ где } \quad \varepsilon_{\mathrm{ind}} = \pi\varepsilon\sigma' = \pi'\varepsilon\sigma = \pi\varepsilon\sigma + \pi\varepsilon\gamma\varepsilon\sigma + \pi\varepsilon\gamma\varepsilon\gamma\varepsilon\sigma + \ \cdots
\end{aligned}$$

задаёт строгую деформационную ретракцию между возмущёнными комплексами (V,∂'_V) и (W,∂'_W).

Доказательство. Начнем с проверки возмущенных версий тех соотношений из (12.1.4), где не участвует дифференциал ∂'_W. Из $\gamma^2 = 0$ следует, что

$$(\gamma')^2 = (1-\gamma\varepsilon)^{-1}\gamma^2(1-\varepsilon\gamma)^{-1} = 0\,. \tag{12.1.7}$$

Так как $\gamma(1-\gamma\varepsilon)^{-1} = \gamma = (1-\varepsilon\gamma)^{-1}\gamma$, из $\pi\gamma = 0$ и $\gamma\sigma = 0$ вытекает, что

$$\begin{aligned}
\pi'\gamma' &= \pi(1-\varepsilon\gamma)^{-1}\gamma(1-\varepsilon\gamma)^{-1} = \pi\gamma(1-\varepsilon\gamma)^{-1} = 0\ ,\\
\gamma'\sigma' &= (1-\gamma\varepsilon)^{-1}\gamma(1-\gamma\varepsilon)^{-1}\sigma = (1-\gamma\varepsilon)^{-1}\gamma\sigma = 0\ .
\end{aligned} \tag{12.1.8}$$

Эта выкладка показывает также, что

$$\pi\gamma' = \gamma'\sigma = 0\ . \tag{12.1.9}$$

Для вычисления композиций $\pi'\sigma'$ и $\sigma'\pi'$, заметим, что

$$\begin{aligned}
(1-\gamma\varepsilon)^{-1} &= 1 + \gamma'\varepsilon\\
(1-\varepsilon\gamma)^{-1} &= 1 + \varepsilon\gamma'
\end{aligned}$$

и перепишем π' и σ' как $\pi' = \pi(1+\varepsilon\gamma')\,,\ \sigma' = (1+\gamma'\varepsilon)\sigma\,.$ С учетом (12.1.7) , (12.1.9)

$$\pi'\sigma' = \pi(1+\varepsilon\gamma')(1+\gamma'\varepsilon)\sigma = \pi\sigma = 1\ .$$

Чтоб найти $\sigma'\pi'$, используем равенства $\sigma\pi = 1 + \partial_V\gamma + \gamma\partial_V$ и $\varepsilon^2 = -\partial_V\varepsilon - \varepsilon\partial_V :$

$$\begin{aligned}
\sigma'\pi' = (1+\gamma'\varepsilon)\sigma\pi(1+\varepsilon\gamma') &= (1+\gamma'\varepsilon)(1+\partial_V\gamma+\gamma\partial_V)(1+\varepsilon\gamma') =\\
&= 1 + \gamma'\varepsilon + \varepsilon\gamma' - \gamma'\partial_V\varepsilon\gamma' - \gamma'\varepsilon\partial_V\gamma' +\\
&+ (1+\gamma'\varepsilon)\partial_V\gamma(1+\varepsilon\gamma') + (1+\gamma'\varepsilon)\gamma\partial_V(1+\varepsilon\gamma')\ .
\end{aligned} \tag{12.1.10}$$

Так как $\gamma\varepsilon\gamma' = \gamma'\varepsilon\gamma = \gamma' - \gamma$, два последних слагаемых в (12.1.10) переписываются как

$$\begin{aligned}&(1+\gamma'\varepsilon)\partial_V\gamma(1+\varepsilon\gamma') + (1+\gamma'\varepsilon)\gamma\partial_V(1+\varepsilon\gamma') =\\ &\quad = (1+\gamma'\varepsilon)\partial_V\gamma' + \gamma'\partial_V(1+\varepsilon\gamma') = \partial_V\gamma' + \gamma'\partial_V + \gamma'\varepsilon\partial_V\gamma' + \gamma'\partial_V\varepsilon\gamma' \,.\end{aligned}$$

Таким образом, лишние члены в (12.1.10) сокращаются, и мы получаем

$$\sigma'\pi' = 1 + \gamma'\varepsilon + \varepsilon\gamma' + \gamma'\partial_V + \partial_V\gamma' = 1 + [\partial'_V, \gamma'] \,. \tag{12.1.11}$$

Соотношения, содержащие $\partial'_W = \partial_W + \varepsilon' = \pi\partial'_V\sigma' = \pi'\partial'_V\sigma$ вытекают из (12.1.11). А именно, выкладка

$$\begin{aligned}\partial'_W\pi' &= \pi\partial'_V\sigma'\pi' = \pi\partial'_V(1+\partial'_V\gamma'+\gamma'\partial'_V) = && \text{(because of } {\partial'_V}^2 = 0)\\ &= \pi(1+\partial'_V\gamma')\partial'_V = \pi(1+\varepsilon\gamma'+\partial_V\gamma')\partial'_V = && \text{(because of } \pi\partial'_V = \partial'_W\pi)\\ &= \pi(1+\varepsilon\gamma')\partial'_V + \partial_W\pi\gamma'\partial'_V = && \text{(because of } \pi\gamma' = 0)\\ &= \pi'\partial'_V\end{aligned}$$

показывает, что $\partial'_W\pi' = \pi'\partial'_V$. Равенство $\sigma'\partial'_W = \partial'_V\sigma'$ проверяется аналогично. Из этих коммутационных соотношений получаем ${\partial'_W}^2 = \partial'_W\pi'\partial'_V\sigma = \pi'\partial'_V\partial'_V\sigma = 0$. $\square$

12.1.3. Окончание доказательства

Пусть заданы SDR-данные $\gamma \looparrowright (V, \partial_V) \underset{\sigma}{\overset{\pi}{\rightleftarrows}} (W, \partial)$ и A_∞-копроизведение

$$\mathsf{T}(V[1]) \xrightarrow{D_\delta} \mathsf{T}(V[1]) \,,$$

линейная компонента которого совпадает с дифференциалом

$$\delta_1 : V[1] \xrightarrow{-\partial_V} V[1].$$

Рассмотрим D как возмущение

$$D = \partial_{\mathsf{T}(V[1])} + D_\delta = D_{\partial_{V[1]}+\delta}$$

дифференциала $\partial_{\mathsf{T}(V[1])}$ в SDR-данных

$$\gamma_{\mathsf{T}}[1] \looparrowright (\mathsf{T}(V[1], \partial_{\mathsf{T}(V[1])}) \underset{\sigma_{\mathsf{T}}[1]}{\overset{\pi_{\mathsf{T}}[1]}{\rightleftarrows}} (\mathsf{T}(W[1], \partial_{\mathsf{T}(W[1])}) \tag{12.1.12}$$

представляющих собою сдвинутый на единицу подъём исходной ретракции до ретракции между тензорными алгебрами, описанный в 12.1.2). По 1.1 возмущение D канонически продолжается до возмущения

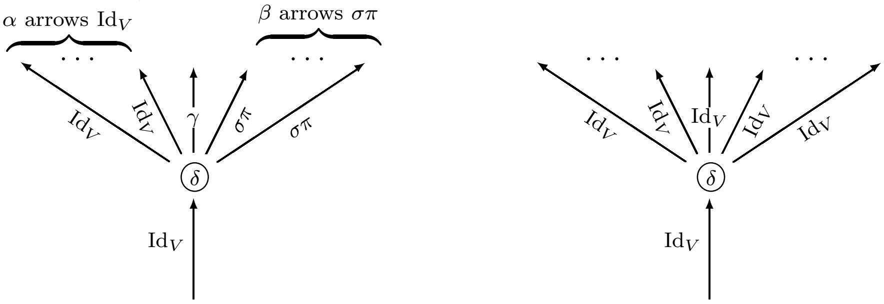
$$\gamma'_{\mathsf{T}} \looparrowright (\mathsf{T}(V[1], D) \underset{\sigma'}{\overset{\pi'}{\rightleftarrows}} (\mathsf{T}(W[1], D_{\delta_{\mathrm{ind}}})$$

всей диаграммы (12.1.12). Возникающее таким образом A_∞-копроизведение $D_{\delta_{\mathrm{ind}}} = D_{\partial_{\mathsf{T}(W[1])}} + D_{\delta_{\mathrm{ind}}} = D_{\partial_{W[1]}+\delta_{\mathrm{ind}}}$ задаётся рядом $\delta_{\mathrm{ind}} = \partial_{W[1]} + \sum\limits_{n\geqslant 2} \delta_{\mathrm{ind},n}$ и имеет

$$\widetilde{\delta}_{\mathrm{ind},n} = \pi^{\otimes n} \circ \left(\delta + \delta\gamma_{\mathsf{T}}\delta + \delta\gamma_{\mathsf{T}}\delta\gamma_{\mathsf{T}}\delta + \delta\gamma_{\mathsf{T}}\delta\gamma_{\mathsf{T}}\delta\gamma_{\mathsf{T}}\delta + \cdots\right)_{n,1} \circ \sigma\,,$$

где $\big(*\big)_{n,1} : V \longrightarrow V^{\otimes n}$ обозначает ту однородную компоненту забранного в скобки оператора, которая переводит $V \subset \mathsf{T}(V)$ в $V^{\otimes n} \subset \mathsf{T}(V)$. Она равна сумме всех ориентированных деревьев с одним входом n выходами, которые можно составить из венчиков вида

$\big(1^{\otimes\alpha} \otimes \gamma \otimes (\sigma\pi)^{\otimes\beta}\big) \circ \delta_{\alpha+\beta+1}$ приход. из $\gamma_{\mathsf{T}}\delta$: $\qquad$ δ_k приход. из δ:



где правый венчик допускается только в качестве последнего элемента композиции. Поскольку общее число операторов γ в произведении $\delta\gamma_{\mathsf{T}}\delta \ldots \gamma_{\mathsf{T}}\delta$ равно числу внутренних ребер в каждом из рассматриваемых нами деревьев, и вклад любого дерева, содержащего γ на выходном листе, уничтожается последующим применением $\pi^{\otimes n}$, мы приходим в итоге к формуле (12.1.5).

12.2. A_∞ – структуры в математической физике

Центральным вопросом геометрии является вопрос о том, что такое пространство. В дифференциальной геометрии таковым является гладкое многообразие, в алгебраической геометрии — схема. В современной математической физике пространства — это супермногообразия с нечетным векторным полем, квадрат которого равен нулю, или Q – многообразия, кольца функций на которых являются DG – алгебрами. Если такая DG – алгебра содержит ацикличный подкомплекс, то стягивая его, мы получаем на фактор пространстве не ассоциативную или лиеву, но ∞ структуру, т. е. начинающийся с дифференцирования набор операций, содержащий умножение и высшие умножения, удовлетворяющий квадратичным соотношениям. Про такую структуру также можно думать как об обобщённом пространстве, и эта точка зрения позволяет по – новому взглянуть на задачи математической физики, в частности, на квантование теорий поля.

12.2.1. DG-алгебраизация физической теории.

В традиционном подходе основными объектами, или *полями* (классической) теории поля являются функции или дифференциальные формы на гладком многообразии, составляющие бесконечномерное пространство, и задачей квантовой теории поля является отыскание функциональных интегралов по этому пространству. В наиболее интересных случаях такие интегралы плохо определены, и вычисление каждого из них представляет собою, скорее, некоторый правдоподобный алгоритм, изменяющийся от задачи к задаче.

Оказывается, однако, что в целом ряде интересных случаев результаты вычислений являются ни чем иным, как значениями старших гомотопических произведений на комплексах дифференциальных форм, обслуживающих классическую теорию. В этой связи возникает идея заменить соответствующие бесконечномерные DG – алгебры на конечномерные, которые им гомотопически эквивалентны, или представить их как пределы конечномерных DG – алгебр, так чтобы все старшие операции вычислялись в них стандартными средствами линейной алгебры и алгебраической геометрии.

Хорошим примером описываемой ситуации является теория относительности Эйнштейна в формализме Палатини. Отметим, что традиционный формализм, в котором основной переменной является (псевдо)риманова метрика на касательном расслоении, математически хорошо самосогласован только на классическом уровне (где он прекрасно описывает множество физических явлений), но плохо совместим с наличием частиц спина $1/2$ (спиноров), принимающих значения в расслоениях со структурной группой $\mathrm{Sp}(p,q)$, двулистно соответствующую ортогональную группу $SO(p,q)$ (физически интересен случай $p=3$, $q=1$), и потому не являющихся “естественными тензорами”. Поэтому удобнее считать, что исходными геометрическими данным в теории Эйнштейна являются гладкое многообразие X, оснащённое главным $\mathrm{Spin}(p,q)$–расслоением P со связностью ∇, кривизна которой

$$F=\nabla^2$$

является 2–формой со значении в ассоциированном присоединенном расслоении. Следующим данным является гладкий морфизм

$$e: TX \longrightarrow V \tag{12.2.1}$$

между касательным расслоением к X и векторным расслоением V на X, тавтологически ассоциированным с P. Этот морфизм задается 1–формой e на X со значением в V. В качестве действия рассматривается

$$S=\int \langle \wedge^{d-2} e \wedge F \rangle \tag{12.2.2}$$

где $d=p+q=\dim X$ — размерность пространства–времени, $\wedge^{d-2}e$ — $(d-2)$–форма со значениями в $\Lambda^{d-2}V$, $\wedge^{d-2}e\wedge F$ является d–формой со значением в $\Lambda^d V$, а операция $\langle * \rangle$ отождествляет расслоение $\Lambda^d V$ с расслоением функций. Таким образом, лагранжиан Палатини

$$\langle \wedge^{d-2} e \wedge F \rangle$$

представляет собою d–формой на пространстве–времени X. Соответствующие уравнения движения имеют вид

$$\wedge^{d-3} e \wedge \nabla e = 0\ , \quad \wedge^{d-3} e \wedge F = 0 \tag{12.2.3}$$

где ∇e — 2–форма со значениями в V. Первое уравнение является условием на $(d-1)$–форму со значением в $\Lambda^{d-2}V$, а второе — на $(d-1)$–форму со значением в $\Lambda^{d-1}V$. Именно в этом месте подходы Эйнштейна и Палатини расходятся.

В подходе Эйнштейна морфизм e в (12.2.1) считается изоморфизмом. В этом случае он индуцирует на пространстве–времени невырожденную метрику g — обратный образ стандартной метрики η в слоях расслоения V:

$$g = e^*(\eta)$$

и сохраняющую ее связность $e^*(\nabla)$ — обратный образ связности ∇ в расслоении V. Можно показать, что в этом случае первое из уравнений (12.2.3) выражает отсутствие у этой связности кручения[1], а второе — зануление её кривизны Риччи.

В подходе Палатини не требуется, чтобы морфизм e был изоморфизмом, и допускаются решения, в которых e вырождается и даже тождественно обращается в ноль. Вопрос о том, насколько это физически осмымленно, можно считать открытым — выбор того или иного подхода в конечном счете определяется экспериментом — и мы не будем им здесь задаваться. То, что для нас действительно существенно — это возможность заменить в формализме Палатини пространство X на коммутативную DG – алгебру.

В самом деле, если расслоение V топологически тривиально, связность на нем можно рассматривать как 1 – форму ω^a со значениями во внешнем квадрате пространства V. Её кривизна дается формулой

$$F^{ab} = d\omega^{ab} + \omega^{ab} \wedge \omega^{bc}$$

где d — внешний дифференциал, а предкручение

$$(\nabla e)^a = de^a + \omega^{ab} e^b \,.$$

Таким образом, оба уравнения Палатини (12.2.3) можно переписать в терминах внешнего умножения и внешнего дифференцирования, и в таком виде они могут решаться в любой градуированно коммутативной DG – алгебре.

Другим типичным примером алгеброизуемых уравнений теории поля являются (d – мерные) уравнения Янга – Миллса. Подлежащая им геометрическая структура — это G – расслоение V на пространстве – времени X (здесь G – разрешимая группа Ли), связность D в этом расслоении и поле P, являющееся сечением произведения присоединёного расслоения и $\Lambda^{d-2}V^*$:

$$P \in \mathrm{ad}V \otimes \Lambda^{d-2}V \,.$$

[1] оно в точности равно ∇e в этом случае

Соответствующее действие имеет вид

$$S = \int e^*(P)D^2 + \langle P, P\rangle^2$$

Мы полагаем, что те уравнения теории поля, которые могут быть переформулированы на языке DG – алгебр, образуют выделенный класс в конгломерате всех уравнений математической физики. Квантование таких уравнений, с алгебраической точки зрения, состоит в их продолжении с ассоциативных (супер) коммутативных или лиевых DG – алгебр на более широкий класс ∞ – ассоциативных (соотв. лиевых) алгебр.

12.3. Барицентрически устойчивое функториальное A_∞-копроизведение симплициальных цепей

Математически проще осуществлять такое продолжение, имея дело не с бесконечномерной DG – алгеброй типа алгебры Де Рама гладких дифференциальных форм, а с конечномерной DG – алгеброй, в том или ином смысле “приближающей” алгебру Де Рама. Простейшим примером такого приближения является симплициальный цепной комплекс комбинаторной триангуляции подлежащего многообразия X.

Для конечного множества M мы будем обозначать через $\overline{C} = \overline{C}(M)$ комплекс ориентированных симплициальных цепей стандартной триангуляции стандартного комбинаторного симплекса с множеством вершин M. Напомним, что *комбинаторный симплициальный комплекс* — это триангулированное топологическое пространство, в котором каждый симплекс однозначно определяется вершинами. Такое пространство задаётся множеством вершин M и множеством симплексов Δ, которое является подмножеством в множестве всех подмножеств в M, содержащим все элементы из M, и вместе с каждым $\sigma \in \Delta$ содержащим также и все его подмножества. Комплекс $\Delta = \mathscr{S}(M)$, состоящий из всех подмножеств в M, называется *стандартным комбинаторным симплексом* с множеством вершин M .

Всюду далее запись $[X_1, X_2, \ldots, X_k]$ означает линейно упорядоченный наборов элементов произвольного происхождения.

Симплексы $\{x_1, x_2, \ldots, x_k\} \in \Delta$, рассматриваемые как неупорядоченные неориентированные множества, обозначаются нами через $\underline{x_1\, x_2\, \ldots\, x_k}$. Они образуют полную подкатегорию в категории $\mathscr{S}(M)$ всех подмножеств M. По определению, *ориентированный* симплекс $\overline{x_1\, x_2 \ldots x_k}$ —

это орбита $[x_1, x_2, \ldots, x_k]$ под действием знакопеременной подгруппы $\mathfrak{A}_k \subset \mathfrak{S}_k$ перестановками номеров элементов. Таким образом, с каждым симплексом $\underline{x_1\, x_2\, \ldots\, x_k}$ связаны два ориентированных симплекса. Через $\overline{C}_k(\Delta)$ мы обозначаем векторное пространство, натянутое на ориентированные симплексы $\overline{x_1\, x_2\, \ldots\, x_k}$ мощности k, отфакторизованное по требованию, чтобы сумма двух ориентированных симплексов, возникающих из одного и того же неориентированного симплекса, была равна 0. Таким образом, для стандартного комбинаторного симплекса $\overline{C}_k(\mathscr{S}(M)) = \Lambda^k(\Bbbk^M)$ представляет собою k-тую внешнюю степень векторного пространства $\Bbbk^M$ с базисом M.

Пространства ориентированных симплексов естественно организуются в цепной комплекс

$$0 \longrightarrow \overline{C}_m \xrightarrow{\overline{\partial}} \overline{C}_{m-1} \xrightarrow{\overline{\partial}} \cdots \xrightarrow{\overline{\partial}} \overline{C}_2 \xrightarrow{\overline{\partial}} \overline{C}_1 \longrightarrow 0$$

с дифференциалом

$$\overline{\partial}\, :\, \overline{x_1\, x_2\, \ldots\, x_k} \longmapsto \sum_{\nu=1}^{k} (-1)^\nu \cdot \overline{x_1\, \ldots\, x_{\nu-1}\, x_{\nu+1}\, \ldots\, x_k}.$$

Мы обозначаем этот комплекс $\overline{C}$ и называем *цепным комплексом* комбинаторного симплициального комплекса Δ. Отметим, что симплициальный цепной комплекс, традиционно используемый в топологии, в наших обозначениях выглядит как $\overline{C}[1]$, поскольку мы используем в качестве степени мощность $|\sigma|$ симплекса σ, тогда как *топологическая степень* равна размерности $\dim \sigma = |\sigma| - 1$. Таким образом, A_∞- копроизведение *топологических* симплициальных цепей — это дифференцирование

$$\overline{C}[2] \xrightarrow{\delta} \mathsf{T}(\overline{C}[2])$$

степени -1, а его однородные компоненты $\overline{C} \xrightarrow{\widetilde{\delta}_n} \overline{C}^{\otimes n}$ в нашей градуировке имеют степень $2n - 3$ и *нечётны*, т. е. удовлетворяют квадратичным соотношениям без знаков.

На знаменитой топологической конференции 1935 г. в Москве, когда мультипликативные структуры на (ко)гомологиях ещё не были построены, Колмогоров высказал идею построения копроизведения δ_2 : $\overline{C} \longrightarrow \overline{C} \otimes \overline{C}$, которое было бы *функториально* относительно вложений $M \hookrightarrow M'$. Заметим, что из такой функториальности автоматически вытекает эквивариантность по отношению к действию симметрической группы $\mathfrak{S}_M = \mathrm{Aut}\,(M)$, а также наличие согласованной системы таких произведений на цепных комплексах *сразу всех* комбинаторных симплициальных комплексов Δ.

Колмогоров даже предложил формулу для такого копроизведения. Чтобы её написать, как-нибудь занумеруем элементы $M = [x_1, x_2, \dots, x_m]$ и для каждого $Y \subset M$ обозначим через $\overline{Y}$ подмножество, ориентированное по возрастанию номеров входящих в него элементов. Положим $\overline{M}_i \overset{\text{def}}{=} \overline{M \smallsetminus \{x_i\}}$, и для двух непересекающихся ориентированных $\overline{Y} = \overline{y_1\, y_2\, \dots\, y_k}$, $\overline{Z} = \overline{z_1\, z_2\, \dots\, z_\ell}$ пусть

$$\overline{X \cdot Y} \overset{\text{def}}{=} \overline{y_1\, y_2\, \dots\, y_k z_1\, z_2\, \dots\, z_\ell}\,.$$

В этих обозначениях, копроизведение Колмогорова $\delta_2^{\text{к}}$ действует на стандартный ориентированный симплекс $\overline{M}$ по формуле

$$\frac{1}{|M|}\sum_{i=1}^{m}(-1)^{i+1}\sum_{Y\subseteq M_i}\mathrm{sgn}(Y)\binom{|M|-1}{|Y|}^{-1}\overline{Y\cdot\{x_i\}}\otimes\overline{\{x_i\}\cdot(M_i\smallsetminus Y)} \tag{12.3.1}$$

(вторая сумма берется по всем подмножествам $Y \subset M_i = M \smallsetminus \{x_i\}$, включая $Y = \varnothing$ и $Y = M_i$), где через $|\ast|$ обозначается количество элементов в множестве, через $\binom{\ast}{\ast}$ - число, обратное к биномиальному коэффициенту, а $\mathrm{sgn}(Y)$ обозначает знак тасующей перестановки $\overline{M}_i \leftrightarrow \overline{Y \cdot (M_i \smallsetminus Y)}$.

Например:

$$\delta_2^{\text{к}}(\overline{01}) = \frac{+\left(\overline{10}\otimes\overline{0}+\overline{0}\otimes\overline{01}\right)-\left(\overline{01}\otimes\overline{1}+\overline{1}\otimes\overline{10}\right)}{2} = -\frac{1}{2}\,\mathrm{ad}_{\overline{01}}\left(\overline{0}+\overline{1}\right)$$

где $\mathrm{ad}_a : b \mapsto a\otimes b - b\otimes a$ - оператор коммутирования в тензорной алгебре.

Копроизведение (12.3.1) корректно определено[1], функториально по отношению к включениям $M_1 \hookrightarrow M_2$ и согласованно с дифференциалом $\delta_1 = \overline{\partial}$ на симплициальном цепном комплексе, но *не ассоциативно*. Это последнее обстоятельство, видимо, и явилось главной причиной того, что идея Колмогорова, не вызвав должного интереса, на долгие годы

[1] т. е. зависит от выбранного линейного порядка на M, а только от ориентации на цепях

осталась в стороне от основных топологических течений[1]. Однако в настоящее время вопрос Колмогорова снова стал актуален в связи с задачами вычисления тонких когомологических инвариантов гомотопического типа (высшие произведения Масси и т. д.), задачами эффективного комбинаторного описания характеристических классов триангулированных многообразий, а также как интересная и глубокая точно решаемая математическая модель топологической квантовой теории поля, где проблема Колмогорова звучит как задача построения "свободной теории" на пространстве $\overline{C}$, которая при редукции на $H(\overline{C})$ индуцирует эффективную теорию с корреляторами, задаваемыми высшими произведениями Масси.

12.4. Функториальная барицентрическая ретракция

В этом разделе мы покажем, что над полем нулевой характеристики имеется единственная[2] функториальная относительно вложений $M \hookrightarrow M'$ строгая деформационная ретракция между цепным комплексом $\overline{C}(M)$ стандартного комбинаторного симплекса с множеством вершин M и цепным комплексом $\overline{C}(B(M))$ его барицентрического подразделения. Наличие такой ретракции позволяет по любому функториальному A_∞-копроизведению, продолжающему произведение Колмогорова (12.3.1), построить ещё одно функториальное A_∞-продолжение произведения (12.3.1), которое естественно называть *барицентрическим разбиением* исходного продолжения. Ниже мы приводим явные комбинаторные формулы как для самой ретракции, так и для индуцированных ею барицентрических разбиений функториальных A_∞-структур.

12.4.1. Флаги и барицентрические подразделения

Флаг длины k в M — это цепочка строго вложенных неориентированных множеств

$$F_1 \subset F_2 \subset \cdots \subset F_k \tag{12.4.1}$$

[1] на той же конференции было предложено гораздо более простое копроизведение Александера"– Уитни $\delta_2^{\mathrm{AW}}([x_1, x_2, \ldots, x_k]) = \sum_{i=1}^{k} [x_1, x_2, \ldots, x_i] \otimes [x_i, x_{i+1}, \ldots, x_k]$, корректно определенное только на уровне линейно упорядоченных цепей и действующее на комплексе $\overline{C}$ лишь с точностью до гомотопии, но достаточное для решения такой задачи, как построение ассоциативного произведения в когомологиях, на которой в те годы и были сосредоточены главные усилия

[2] с точностью до очевидного перескалирования вложения и проекции

Флаг (12.4.1) определяет и однозначно определяется упорядоченным набором своих *градуировочных компонент*

$$[G_1, G_2, \ldots, G_k]\,, \quad G_1 \overset{\text{def}}{=} F_1\,, \quad G_i \overset{\text{def}}{=} F_i \smallsetminus F_{i-1}$$

для $i \geqslant 2$. Мы будем часто использовать запись $[G_1, G_2, \ldots, G_k]$ в качестве альтернативного обозначения для флага (12.4.1).

Флаг (12.4.1) называется *насыщенным*, если каждая его градуированная компонента состоит из одной точки. Насыщенные флаги (12.4.1) биективно соответствуют линейным порядкам на множестве F_k.

Напомним, что *барицентрическим подразделением* $B(M)$ симплекса с множеством вершин M, называется симплициальный комплекс, вершины которого — это непустые подмножества в M (т. е. всевозможные объекты категории $\mathscr{S}(M)$), а k-вершинные симплексы — это флаги длины k в M (в частности, ориентированные ребра $B(M)$ — это морфизмы $F_1 \subset F_2$ в категории $\mathscr{S}(M)$, ориентированные 2-мерные грани — это пары последовательных морфизмов $F_1 \subset F_2 \subset F_3$ в $\mathscr{S}(M)$, и т. д.). Мы будем называть цепной комплекс симплициального комплекса $B(M)$ *барицентрическим комплексом* и обозначать через $\underline{C}^{[M]} = \overline{C}^{[B(M)]}$. Он имеет вид

$$0 \longrightarrow \underline{C}_{m+1} \xrightarrow{\partial} \underline{C}_m \xrightarrow{\partial} \cdots \xrightarrow{\partial} \underline{C}_2 \xrightarrow{\partial} \underline{C}_1 \longrightarrow 0\,.$$

Базис векторного пространства $\underline{C}_k$ состоит из флагов $F_1 \subset F_2 \subset \cdots \subset F_k$ длины k, и дифференциал $\underline{C}_k \xrightarrow{\partial} \underline{C}_{k-1}$ отправляет такой флаг в

$$\sum_{\nu=1}^{k} (-1)^{\nu} F_1 \subset \cdots \subset F_{\nu-1} \subset F_{\nu+1} \subset \cdots \subset F_k$$

В терминах градуировочных компонент это переписывается в виде

$$\sum_{\nu=1}^{k-1} (-1)^{\nu}\, [G_1, \ldots, G_{\nu-1}, G_{\nu} \sqcup G_{\nu+1}, G_{\nu+2}, \cdots, G_k]$$

(т. е. ν-тая запятая заменяется объединением).

12.4.2. Описание функториальной барицентрической ретракции

Пусть $\Bbbk$ поле нулевой характеристики. Мы собираемся построить функториальную по отношению к вложениям множеств вершин строгую деформационную ретракцию

$$\gamma \circlearrowright \overline{C}^{[B(M)]} \underset{\sigma}{\overset{\pi}{\rightleftarrows}} \overline{C}^{[M]}\,, \tag{12.4.2}$$

и показать, что такая ретракция единственна с точностью до очевидного перескалирования $\sigma \mapsto t\sigma$, $\pi \mapsto t^{-1}\pi$ с произвольным ненулевым $t \in \Bbbk$.

Отметим, что из функториальности диаграммы (12.4.2) вытекает, что точно такая же ретракция имеется *сразу для всех* комбинаторных симплициальных комплексов $\Delta \subset \mathscr{S}(M)$. Кроме того, функториальность означает также и эквивариантность диаграммы (12.4.2) относительно действия группы перестановок $\mathrm{Aut}\,(M)$. С учётом этой эквивариантности, SDR-отношения

$$\pi\sigma = 1_W\ , \quad \sigma\pi = 1_V + \partial_V\gamma + \gamma\partial_V\ , \quad \gamma^2 = 0\ , \quad \pi\gamma = 0\ , \quad \gamma\sigma = 0$$

представляют собою сильно переопределенную систему линейных уравнений на отображения σ, π и γ, и возможность решить её — это своего рода удача. Далее мы приводим явные комбинаторные формулы для этих отображений.

Существует единственный с точностью до постоянного множителя сплетающий оператор $\sigma : \overline{C} \hookrightarrow \underline{C}$ из знакового представления симметрической группы $\mathrm{Aut}\,(M)$ на ориентированных гранях M в регулярное представление на флагах. Геометрически, оно переводит каждый ориентированный симплекс в ориентированную цепь, образованную всеми симплексами его барицентрическими разбиения. В комбинаторных терминах

$$\sigma\left(\overline{x_1\, x_2\, \dots\, x_k}\right) = \sum_{g \in \mathfrak{S}_k} \mathrm{sgn}(g)[x_{g(1)}\, x_{g(2)}\, \dots\, x_{g(k)}] \tag{12.4.3}$$

(знакопеременная сумма всех насыщенных флагов множества $\{x_1, x_2, \dots, x_k\}$). Например:

$$\sigma(\overline{012}) = ([0,1,2] + [1,2,0] + [2,1,0]) - ([0,2,1] + [2,1,0] + [1,0,2])\ ,$$

Очевидно, что $\overline{C} \overset{\sigma}{\hookrightarrow} \underline{C}$ коммутирует с дифференциалами.

Формула для функториальной проекции $\pi : \underline{C} \longrightarrow \overline{C}$ уже менее очевидна и содержит знаменатели:

$$\pi\left(F_1 \subset F_2 \subset \cdots \subset F_k\right) = \frac{1}{\prod\limits_{\nu=1}^{k} |F_\nu|} \cdot \sum_{\substack{(x_1, x_2, \dots, x_k) \in \\ G_1 \times G_2 \times \cdots \times G_k}} \overline{x_1\, x_2\, \dots\, x_k}\,. \tag{12.4.4}$$

(сумма ориентированных симплексов $\overline{x_1\, x_2\, \dots\, x_k}$, отвечающих всевозможным выборам $x_i \in F_i \smallsetminus F_{i-1}$, делённая на произведение мощностей множеств, составляющих флаг). Например: $\pi([\underline{01}]) = \frac{1}{2}\left(\overline{0}+\overline{1}\right)$, $\pi([0,1]) = \frac{1}{2}\,\overline{01}$, $\pi([\underline{01},2]) = \frac{1}{6}\left(\overline{02}+\overline{12}\right)$, $\pi([0,\underline{12}]) = \frac{1}{3}\left(\overline{01}+\overline{02}\right)$.

Функториальная гомотопия $\gamma : \underline{C} \longrightarrow \underline{C}$ степени 1 устроена ещё немного сложнее. По определению, она аннулирует все насыщенные флаги и отправляет каждый ненасыщенный флаг $F_1 \subset F_2 \subset \cdots \subset F_k$ в

$$\sum_{\substack{i:\\ |F_i|>i}} (-1)^i \cdot \prod_{\nu=1}^{i} |F_\nu|^{-1} \cdot \sum_{\substack{(x_1,x_2,\dots,x_i)\in\\ G_1\times G_2\times\cdots\times G_i}} \sum_{g\in\mathfrak{S}_i} \operatorname{sgn}(g)\cdot F^{(i)}(x,g)\,, \tag{12.4.5}$$

где мы обозначили через $F^{(i)}(x,g)$ флаг

$$\underline{x_{g(1)}} \subset \underline{x_{g(1)}x_{g(2)}} \subset \cdots \subset \underline{x_{g(1)}\,x_{g(2)}\,\dots\,x_{g(i)}} \subset F_i \subset F_{i+1} \subset \cdots \subset F_k$$

длины $(k+1)$. Иначе говоря, для каждого i, такого что подфлаг $F_1 \subset \cdots \subset F_i$ не насыщен, мы формируем всевозможные насыщенные флаги с градуровочными компонентами $x_i \in G_i$, дополняем их справа флагом $F_i \subset \cdots \subset F_k$ и берём знакопеременную сумму таких флагов (по всем перестановкам $x_1, x_2, \dots, x_i$), делённую, как и выше, на $(-1)^i \prod\limits_{\nu=1}^{i} |F_\nu|$. Полученные для каждого i взвешенные суммы складываются.

Действие γ на два комбинаторно различных внутренних ребра барицентрического подразделения треугольника таково:

$$\begin{aligned}
\gamma([\underline{2},\underline{01}] &= -\frac{1}{3}\Big([\underline{2},\underline{0},\underline{1}] - [\underline{0},\underline{2},\underline{1}] + [\underline{2},\underline{1},\underline{0}] - [\underline{1},\underline{2},\underline{0}]\Big)\\
\gamma([\underline{01},\underline{2}] &= \frac{1}{2}\Big([\underline{0},\underline{1},\underline{2}] + [\underline{1},\underline{0},\underline{2}]\Big)\\
&\quad -\frac{1}{6}\Big([\underline{0},\underline{2},\underline{1}] - [\underline{2},\underline{0},\underline{1}] + [\underline{1},\underline{2},\underline{0}] - [\underline{2},\underline{1},\underline{0}]\Big)
\end{aligned}$$

Действие γ на точки, ребра и треугольники симплекса произвольной размерности задаётся формулами

$$\gamma(X) = \frac{1}{|X|}\sum_{x\in X}(\underline{x}\subset X)$$

$$\gamma(X\subset Y) = \frac{1}{|X|}\sum_{x\in X}(\underline{x}\subset X\subset Y) - \frac{1}{|X||Y|}\sum_{\substack{x\in X\\ y\in Y\smallsetminus X}}\Big[\,(\underline{x}\subset \underline{xy}\subset Y) - (\underline{y}\subset \underline{xy}\subset Y)\,\Big]$$

$$\begin{aligned}\gamma(X\subset Y\subset Z) = {} & \frac{1}{|X|}\sum_{x\in X}(\underline{x}\subset X\subset Y\subset Z)\\ & - \frac{1}{|X||Y|}\sum_{\substack{x\in X\\ y\in Y\smallsetminus X}}\Big[\,(\underline{x}\subset \underline{xy}\subset Y\subset Z) - (\underline{y}\subset \underline{xy}\subset Y\subset Z)\,\Big]\\ & + \frac{1}{|X||Y||Z|}\sum_{\substack{x\in X\\ y\in Y\smallsetminus X\\ z\in Z\smallsetminus Y}}\Big[\,(\underline{x}\subset \underline{xy}\subset \underline{xyz}\subset Z) - (\underline{y}\subset \underline{xy}\subset \underline{xyz}\subset Z)\\ & \qquad + (\underline{y}\subset \underline{yz}\subset \underline{xyz}\subset Z) - (\underline{z}\subset \underline{yz}\subset \underline{xyz}\subset Z)\\ & \qquad + (\underline{z}\subset \underline{xz}\subset \underline{xyz}\subset Z) - (\underline{x}\subset \underline{xz}\subset \underline{xyz}\subset Z)\,\Big]\end{aligned}$$

(флаги, в которых имеются несобственные включения следует считать нулями).

12.5. Барицентрически устойчивое функториальное A_∞-копроизведение

Функториальная ретракция (12.4.2) между цепным комплексом $\overline{C}^{[M]}$ стандартного симплекса $\mathscr{S}(M)$ и цепным комплексом $\overline{C}^{[B(M)]}$ его барицентрического подразделения $B(M)$ позволяет канонически сопоставить каждому функториальному A_∞-копроизведению $\delta^{[M]}$ на $\overline{C}^{[M]}$ новое функториальное A_∞-копроизведение $\delta^{[M]}_{\mathrm{bar}}$, которое получается переносом с $\overline{C}^{[B(M)]}$ на $\overline{C}^{[M]}$ A_∞-копроизведения $\delta^{[B(M)]}$, индуцированного на $\overline{C}^{[B(M)]}$ исходным A_∞-копроизведением $\delta^{[M]}$ в силу его функториальности. Это новое произведение δ_{bar} естественно называть *барицентрическим измельчением* копроизведения δ. Будем называть функториальное A_∞-копроизведение δ^{bs} *барицентрически устойчивым*, если его барицентрическое измельчение совпадает с ним самим.

Из формулы суммирования по деревьям (12.1.5) следует, что каждая однородная компонента $\widetilde{\delta}^{\mathrm{bs}}_n : \overline{C} \longrightarrow \overline{C}^{\otimes n}$ барицентрически устойчивого

A_∞-копроизведения δ^{bs} удовлетворяет соотношению[1]

$$\widetilde{\delta}_n^{\mathrm{bs}} = \sum_{\Gamma} \widetilde{\delta}_{\Gamma}^{\mathrm{bs}} = A(\widetilde{\delta}_n^{\mathrm{bs}}) + B(\widetilde{\delta}_{<n}^{\mathrm{bs}})$$

в котором через $A(\widetilde{\delta}_n^{\mathrm{bs}}) \overset{\text{def}}{=} \pi^{\otimes n} \circ \widetilde{\delta}^{\mathrm{bs}} \circ \sigma$ обозначено слагаемое, отвечающее одновершинному дереву (венчику с одним корнем и n листьями). Это единственное слагаемое, зависящее от $\widetilde{\delta}_n^{\mathrm{bs}}$, причём зависимость эта *линейная.* Сумма всех прочих членов обозначена через $B(\widetilde{\delta}_{<n}^{\mathrm{bs}})$. Таким образом, барицентрическая устойчивость функториального A_∞-копроизведения δ^{bs} равносильна равенствам

$$(1 - A) \cdot \widetilde{\delta}_n^{\mathrm{bs}} = B(\widetilde{\delta}_{<n}^{\mathrm{bs}}) \quad \text{для всех } n \geqslant 3 \tag{12.5.1}$$

и равенствам $\widetilde{\delta}_1^{\mathrm{bs}} = \pi \circ \widetilde{\delta}_1^{\mathrm{bs}} \circ \sigma$, $\widetilde{\delta}_2^{\mathrm{bs}} = (\pi \otimes \pi) \circ \widetilde{\delta}_2^{\mathrm{bs}} \circ \sigma$, возникающим для $n =$ 1, 2

Нетрудно показать, что пары тензоров $\overline{C}^{[M]} \xrightarrow{\widetilde{\delta}_1^{[M]}} \overline{C}^{[M]}, \overline{C}^{[M]} \xrightarrow{\widetilde{\delta}_2^{[M]}} \overline{C}^{[M]\otimes 2}$ (комбинаторных) степеней -1 и $+1$, удовлетворяющих правилу Лейбница, функториальных по M и переходящих в себя под действием линейных преобразований

$$\delta_1^{[M]} \mapsto \pi \circ \delta_1^{[B(M)]} \circ \sigma \qquad \text{и} \qquad \delta_2^{[M]} \mapsto \pi^{\otimes 2} \circ \delta_2^{B([M])} \circ \sigma$$

образуют одномерное пространство, порождённое симплициальный цепным дифференциалом $\overline{\partial}$ и копроизведением Колмогорова (12.3.1).

Решая рекурсивное уравнение (12.5.1) относительно δ_n^{bs}, можно надеяться однозначно восстановить по этим δ_1^{bs} , δ_2^{bs} все остальные компоненты устойчивое A_∞-копроизведения δ^{bs}, которое, таким образом, окажется единственным с точностью до постоянного множителя.

Гипотеза 5.1
Собственные значения линейного оператора A : $\delta_n^{[M]} \mapsto \pi^{\otimes n} \circ \delta_n^{B([M])} \circ \sigma$, который действует на функториальных в M тензорах $\overline{C}^{[M]} \xrightarrow{\delta_n^{[M]}} \overline{C}^{[M]\otimes n}$

[1] напомним, что суммирование в среднем члене происходит по всем ориентированным от корня к листьям планарным деревьям с одним входом и n выходами, на входящем и выходящих рёбрах которых размещаются, соответственно, операторы σ и π, на всех внутренних ребрах — оператор γ, а в каждой вершине валентности i — оператор коумножения $\widetilde{\delta}_i^{\mathrm{bs}}$

(комбинаторной) степени $2n-2$, никогда не равны 1 при $n \geqslant 3$ и экспоненциально убывает при $n \to +\infty$. Таким образом, барицентрически устойчивое функториальное A_∞-копроизведение комбинаторных симплициальных цепей однозначно с точностью до множителя вычисляется при помощи рекуррентной формулы

$$\delta_n^{\mathrm{bs}} = (1-A)^{-1} \cdot B(\delta_{<n}^{\mathrm{bs}})\,, \qquad (12.5.2)$$

где $B(\delta_{<n}^{\mathrm{bs}})$ является суммой по всем ориентированным от корня к листьям планарным деревьям с одним входом и n выходами, на входящем и выходящих рёбрах которых размещаются, соответственно, операторы σ и π, на всех внутренних ребрах — оператор γ, а в каждой вершине валентности i — оператор коумножения $\widetilde{\delta}_i^{\mathrm{bs}}$. $\square$

В настоящее время мы умеем доказывать эту гипотезу только в простейших нетривиальных случаях — для двух- и трёхвершинных симплексов. Для двухвершинного симплекса нам удалось получить законченную точную формулу для барицентричсески устойчивого функториального A_∞-копроизведения. Ответ оказался весьма интересным:

Теорема 5.1
Для каждого $n \geqslant 3$

$$\widetilde{\delta}_n^{\mathrm{bs}}\left(\overline{01}\right) = \frac{B_{n-1}}{(n-1)!} \cdot \mathrm{ad}_{\overline{01}}^{n-1}\left(\overline{0}-\overline{1}\right) = \\ = \frac{B_{n-1}}{(n-1)!} \cdot \sum_{\beta=0}^{n-1} (-1)^\beta \binom{n-1}{\beta} \cdot \overline{01}^{\otimes(n-1-\beta)} \otimes \left(\overline{0}-\overline{1}\right) \otimes \overline{01}^{\otimes\beta}$$

где через B_{n-1} обозначено число Бернулли, а через $\mathrm{ad}_a : b \mapsto a\otimes b - b\otimes a$ — взятие коммутатора в тензорной алгебре. $\square$

Доказательство этой теоремы мы дадим ниже, в разделе 12.6. А сейчас отметим, что так как $B_k = 0$ при всех нечётных $k \geqslant 3$, все операции чётной валентности, за исключением, собственно, колмогоровского копроизведения

$$\widetilde{\delta}_2^{\mathrm{bs}}(\overline{01}) = B_1 \cdot \mathrm{ad}_{\overline{01}}\left(\overline{0}+\overline{1}\right)\,,$$

обращаются в нуль, а все старшие произведения нечётной степени сворачиваются в ряд Тодда

$$\Bigl(1 + \sum_{k\geqslant 2} \frac{B_k}{k!}\,\mathrm{ad}_{\overline{01}}^k\Bigr)\circ\overline{\partial}\,.$$

Доказательство 5.1 для трёхвершинного симплекса будет дано в заключительном разделе 12.7.

Отметим, что рекурсивная формула (12.5.2) (в предположении, что все собственные числа оператора A отличны от 1 на всех n – арных операциях с $n \geqslant 3$ и равны 1 на дифференциале и бинарной операции) *всегда* задаёт A_∞ – структуру — не только на симплициальном цепном комплексе, но и в общей ситуации, описываемой следующей теоремой:

Теорема 5.2
Для любой строгой деформационной ретракции

$$\gamma \circlearrowright V \underset{\sigma}{\overset{\pi}{\rightleftarrows}} W\,,$$

между произвольными комплексами (V, ∂_V) и (W, ∂_W) и любого линейного оператора

$$I : \mathrm{Hom}\,(V, \mathsf{T}V) \longrightarrow \mathrm{Hom}\,(W, \mathsf{T}W)\,,$$

перестановочного со всеми композициями, определим для каждого $n \in \mathbb{N}$ оператор

$$A_n : \mathrm{Hom}\,(V, V^{\otimes n}) \longrightarrow \mathrm{Hom}\,(W, W^{\otimes n})$$

правилом $A(\varphi) = \pi^{\otimes n} \circ I(\varphi) \circ \sigma$. Если при $n \geqslant 3$ операторы A_n не имеют собственного значения 1, но при $n = 1$ дифференциал ∂_V переводится оператором A_1 в себя, то любое A_2 – инвариантное коумножение $\delta_2 : V \longrightarrow V \otimes V$, удовлетворяющее правилу Лейбница по отношению к ∂_V, продолжается по рекурсивной формуле (12.5.2) до A_* – инвариантной структуры A_∞ – коалгебры на V. ☐

12.6. Замкнутая формула для отрезка

Поскольку (комбинаторная) степень n – арного коумножения

$$\widetilde{\delta}_n : \overline{C} \longrightarrow \overline{C}^{\otimes n} \tag{12.6.1}$$

равна $2n-3$, значение копроизведения на точке $\widetilde{\delta}(\overline{0})$ имеет единственную компоненту и с точностью до постоянного множителя равно

$$\widetilde{\delta}(\overline{0}) = \widetilde{\delta}_2(\overline{0}) = \overline{0} \otimes \overline{0} \tag{12.6.2}$$

Мы по определению полагаем этот множитель равным единице, т. е.*задаём* функториальное копроизведение (топологически) $0-$мерного симплекса формулой (12.6.2).

Из тех же градуировочных соображений вытекает, что искомое нами функториальное $n-$арное копроизведение (12.6.1) на симплексе $\overline{01}$ комбинаторной степени 2 (т. е. топологически одномерном) лежит в линейной оболочке отображений

$$\begin{array}{l} \overline{01} \longmapsto \overline{01}^{\otimes\alpha} \otimes \overline{0} \otimes \overline{01}^{\otimes\beta} \\ \overline{01} \longmapsto \overline{01}^{\otimes\alpha} \otimes \overline{1} \otimes \overline{01}^{\otimes\beta} \end{array} \quad (\text{where } \alpha, \beta \geqslant 0,\ \alpha+\beta = n-1)$$

Поскольку функториальность в одномерном случае означает коммутирование с перестановкой $0 \leftrightarrow 1$ двух вершин, пространство функториальных копроизведений линейно порождается отображениями

$$\delta_n^\alpha \,:\, \overline{01} \longmapsto \overline{01}^{\otimes\alpha} \otimes \left(\overline{0} + (-1)^n \cdot \overline{1}\right) \otimes \overline{01}^{\otimes\beta} . \tag{12.6.3}$$

Легко видеть, что тензоры (12.6.3) — это в точности собственные векторы оператора

$$A_n :\ \delta_n^{[\overline{01}]} \mapsto \pi^{\otimes n} \circ \delta_n^{[B(\overline{01})]} \circ \sigma$$

и их собственные значения равны $(1/2)^{n-1}$ при нечётных n и $(1/2)^{n-2}$ при чётных n. В самом деле,

$$\begin{aligned} &\delta_n^\alpha \circ \sigma \left(\overline{01}\right) = \delta_n^\alpha([0,1] - [1,0]) = \\ &= [0,1]^{\otimes\alpha} \otimes (\underline{0} + (-1)^n \cdot \underline{01}) \otimes [0,1]^{\otimes\beta} - [1,0]^{\otimes\alpha} \otimes (\underline{1} + (-1)^n \cdot \underline{01}) \otimes [1,0]^{\otimes\beta} \end{aligned}$$

так что применяя $\pi^{\otimes n}$, получаем

$$\begin{aligned} &\pi^{\otimes n} \circ \delta_n^\alpha \circ \sigma \left(\overline{01}\right) = \\ &\frac{1}{2^{n-1}} \cdot \overline{01}^{\otimes\alpha} \otimes \left(\overline{0} + (-1)^n \cdot \frac{\overline{0}+\overline{1}}{2}\right) \otimes \overline{01}^{\otimes\beta} - \frac{1}{2^{n-1}} \cdot \overline{10}^{\otimes\alpha} \otimes \left(\overline{1} + (-1)^n \cdot \frac{\overline{0}+\overline{1}}{2}\right) \otimes \overline{10}^{\otimes\beta} \\ &\qquad = \frac{3+(-1)^n}{2^n} \cdot \overline{01}^{\otimes\alpha} \otimes \left(\overline{0} + (-1)^n \cdot \overline{1}\right) \otimes \overline{01}^{\otimes\beta} = \frac{3+(-1)^n}{2^n} \cdot \delta_n^\alpha \left(\overline{01}\right) . \end{aligned}$$

Вычисляя $\widetilde{\delta}_2^{\mathrm{bs}} \circ \widetilde{\delta}_1^{\mathrm{bs}} + \left(1 \otimes \widetilde{\delta}_1^{\mathrm{bs}} + \widetilde{\delta}_1^{\mathrm{bs}} \otimes 1\right) \circ \widetilde{\delta}_2^{\mathrm{bs}} = 0$ на $\overline{01}$ и пользуясь фиксированным выше значением (12.6.2) для значения копроизведения на точке, получаем

$$0 = \overline{0}\otimes\overline{0} - \overline{1}\otimes\overline{1} - x\cdot\left(\overline{0}+\overline{1}\right)\otimes\left(\overline{0}-\overline{1}\right) + y\cdot\left(\overline{0}-\overline{1}\right)\otimes\left(\overline{0}+\overline{1}\right) = \\ = (1-x+y)\cdot\left(\overline{0}\otimes\overline{0}-\overline{1}\otimes\overline{1}\right) + (x+y)\cdot\left(\overline{1}\otimes\overline{0}-\overline{0}\otimes\overline{1}\right)$$

Таким образом, $\widetilde{\delta}_2^{\mathrm{bs}}(\overline{01}) = \frac{1}{2}\,\left((\overline{0}+\overline{1})\otimes\overline{01} - \overline{01}\otimes(\overline{0}+\overline{1})\right) = -\frac{1}{2}\cdot\mathrm{ad}_{\overline{01}}(\overline{0}+\overline{1})$.

12.6.1. Вычисление $\widetilde{\delta}_3^{\mathrm{bs}}$.

При $n = 3$ сумма в операторе B состоит ровно из двух деревьев, начинающихся с венчика $\widetilde{\delta}_2^{\mathrm{bs}}\circ\sigma$, который действует на отрезок по правилу

$$\begin{tikzcd} \overline{01} \arrow[d, mapsto, "\sigma"] \\ {[0,1]-[1,0]} \arrow[d, mapsto, "\widetilde{\delta}_2^{\mathrm{bs}}"] \\ \dfrac{\mathrm{ad}_{[1,0]}\,(\underline{1}+\underline{01}) - \mathrm{ad}_{[0,1]}\,(\underline{0}+\underline{01})}{2} \end{tikzcd}$$

Гомотопия γ действует нулём на всё, кроме единственного ненасыщенного флага $\underline{01}$, т. е. уничтожает все сомножители кроме $\underline{01}$, который она заменяет на $\widetilde{\delta}_2^{\mathrm{bs}}\circ\gamma\,(\underline{01})$. В частности, ко всем сомножителям $[0,1]$ и $[1,0]$ ненулевым образом действует только π. Поэтому

$$\underline{01} \xmapsto{\gamma} \frac{[0,1]+[1,0]}{2} \xmapsto{\widetilde{\delta}_2^{\mathrm{bs}}} -\frac{\mathrm{ad}_{[0,1]}\,(\underline{0}+\underline{01}) + \mathrm{ad}_{[1,0]}\,(\underline{1}+\underline{01})}{2}\,.$$

Продуктивно воспринимать $\widetilde{\delta}_3^{\mathrm{bs}}$ как композицию двух “пропогаторов”

$$\overline{C} \xrightarrow{[\widetilde{\delta}_2^{\mathrm{bs}}\circ\sigma]} \overline{C}\otimes\underline{C}\,\oplus\,\underline{C}\otimes\overline{C} \xrightarrow{[\widetilde{\delta}_2^{\mathrm{bs}}\circ\gamma]} \overline{C}^{\otimes 3}\,.$$

Первый из них $\overline{C} \xrightarrow{[\widetilde{\delta}_2^{\mathrm{bs}}\circ\sigma]} \overline{C}\otimes\underline{C}\,\oplus\,\underline{C}\otimes\overline{C}$ получается из $\widetilde{\delta}_2^{\mathrm{bs}}\circ\sigma$ удалением всех $\underline{0}$, $\underline{1}\in\ker\gamma$ и заменой всех $[0,1]$, $[1,0]$ на $\pi([0,1]) = \overline{01}/2$, $\pi([1,0]) = -\overline{01}/2$, т. е. действует по правилу

$$\overline{01} \xmapsto{[\widetilde{\delta}_2^{\mathrm{bs}}\circ\sigma]} \frac{1}{4}\,\left(\mathrm{ad}_{\overline{10}}\,(\underline{01}) - \mathrm{ad}_{\overline{01}}\,(\underline{01})\right) = -\frac{1}{2}\,\mathrm{ad}_{\overline{01}}\,(\underline{01})\,.$$

После чего второй пропагатор $\overline{C} \otimes \underline{C} \oplus \underline{C} \otimes \overline{C} \xrightarrow{[\widetilde{\delta}_2^{\mathrm{bs}} \circ \gamma]} \overline{C}^{\otimes 3}$ заменяет все $\underline{01}$ на

$$(\pi \otimes \pi) \circ \widetilde{\delta}_2^{\mathrm{bs}} \circ \gamma \left(\underline{01}\right) = -\frac{1}{2}\, \pi \otimes \pi \left(\mathrm{ad}_{[0,1]} \left(\underline{0} + \underline{01}\right) + \mathrm{ad}_{[1,0]} \left(\underline{1} + \underline{01}\right)\right) =$$

$$= -\frac{1}{8}\, \mathrm{ad}_{\overline{01}} \left(\overline{0} - \overline{1}\right) .$$

Таким образом сумма по деревьям в этом случае равна $\frac{1}{16}\, \overline{01} \longmapsto \mathrm{ad}^2_{\overline{01}} \left(\overline{0} - \overline{1}\right)$. Применение к ней $(1 - A)^{-1}$ умножает результат на соответствующее собственное значение $\left(1 - \frac{1}{4}\right)^{-1} = \frac{4}{3}$. Итак, окончательно,

$$\widetilde{\delta}_3^{\mathrm{bs}}(\overline{01}) = \frac{1}{12} \cdot \mathrm{ad}^2_{\overline{01}} \left(\overline{0} - \overline{1}\right)$$

12.6.2. Доказательство теоремы 5.1

Мы будем доказывать теорему 5.1 индукцией по n. Доказательство естественно разбивается на два шага:

(1) В рекурсивной формуле для $\widetilde{\delta}_n^{\mathrm{bs}}$ ненулевой вклад в сумму по деревьям вносят лишь “одноствольные” деревья, вдоль ствола которых действуют гомотопии γ. Вклад каждого такого дерева можно воспринимать как композицию последовательных пропагаторов

$$\underline{C} \longrightarrow \underline{C} \cdot \overline{C}^{\otimes k} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \bigoplus_{\mu + \nu = k-1} \overline{C}^{\otimes \mu} \otimes \underline{C} \otimes \overline{C}^{\otimes \nu}$$

точно также, как это делалось выше, в 12.6.1, при вычислении $\widetilde{\delta}_3^{\mathrm{bs}}$. Используя предположение индукции на $\widetilde{\delta}_{<n}^{\mathrm{bs}}$, вклад каждого такого пропагатора можно выразить через числа Бернулли. Мы сделаем это в 12.6.3.

(2) В 12.6.4 мы покажем, что из полученных на первом шагу формул для пропагаторов при помощи суммирования по деревьям воспроизводится требуемый по индукции вид $\widetilde{\delta}_n^{\mathrm{bs}}$ на $n-$том шагу. Ключевым моментом в вычислении суммы по деревьям является следующее свойство чисел Бернулли, которое мы докажем в заключительном разделе 12.6.5 :

$$\frac{B_m}{m!} = \frac{1}{16} \cdot \left(1 - \frac{1}{2^m}\right)^{-1} \cdot \sum_{\substack{m-2= \\ k_1 + \dots + k_i}} \left(\frac{-B_{k_1}}{2^{k_1} k_1!}\right) \cdot \; \cdots \; \cdot \left(\frac{-B_{k_i}}{2^{k_i} k_i!}\right) \qquad (12.6.4)$$

где суммирование происходит по всем представлением числа $(m-2)$ в виде суммы занумерованных чётных натуральных чисел.

12.6.3. Вычисление вкладов пропагаторов.

Как и в 12.6.1 вклад каждого дерева является композицией пропагаторов. Сначала к $\overline{01}$ применяется *корневой* пропагатор

$$\overline{C} \xrightarrow{[\widetilde{\delta}_r^{\mathrm{bs}}\circ\sigma]} \underline{C}\cdot\overline{C}^{\otimes(r-1)},$$

который сперва переводит $\overline{01}$ в

$$\overline{01} \xmapsto{\widetilde{\delta}_r^{\mathrm{bs}}\circ\sigma} \frac{B_{r-1}}{(r-1)!}\left(\mathrm{ad}_{[0,1]}^{r-1}(\underline{0}-\underline{01}) - \mathrm{ad}_{[1,0]}^{r-1}(\underline{1}-\underline{01})\right),$$

а затем применяет π ко всем сомножителям $[0,1]$, $[1,0]$ и приводит результат по модулю $\ker\gamma$. Поскольку при нечётных r

$$\mathrm{ad}_{\overline{01}}^{r-1}(\underline{0}-\underline{1}) \equiv 0 \pmod{\ker\gamma},$$

корневой пропагатор отличен от нуля лишь при чётных r, откуда по индуктивному предположению $r=2$, ибо все $B_{2k+1}=0$. Итак, корневой пропагатор всегда действует по правилу

$$\overline{01} \xmapsto{[\widetilde{\delta}_2^{\mathrm{bs}}\circ\sigma]} -\frac{\mathrm{ad}_{\overline{01}}(\underline{01})}{2} \pmod{\ker\gamma}.$$

Следом за корневым пропагатором применяются *стволовые пропагаторы*

$$\underline{C} \xrightarrow{[\widetilde{\delta}_k^{\mathrm{bs}}\circ\gamma]} \underline{C}\cdot\overline{C}^{\otimes(k-1)},$$

каждый из которых сначала действует на входной тензор по правилу

$$\underline{01} \xmapsto{\widetilde{\delta}_k^{\mathrm{bs}}\circ\gamma} \frac{B_{k-1}}{(k-1)!}\cdot\frac{\mathrm{ad}_{[0,1]}^{k-1}(\underline{0}-\underline{01}) + \mathrm{ad}_{[1,0]}^{k-1}(\underline{1}-\underline{01})}{2}$$

а затем применяет π ко всем сомножителям $[0,1]$ и $[1,0]$. В результате получается

$$\frac{B_{k-1}}{2^k(k-1)!}\cdot\left|\begin{array}{ll}\mathrm{ad}_{\overline{01}}^{k-1}(\underline{0}+\underline{1}-2\cdot\underline{01}) & \text{(for odd } k\text{)}\\ \mathrm{ad}_{\overline{01}}^{k-1}(\underline{0}-\underline{1}) & \text{(for even } k\text{)}\end{array}\right.$$

Так как $\underline{0} - \underline{1} \in \ker\gamma$, все стволовые пропагаторы, кроме самого последнего, имеют нечётные тензорные степени k и действуют по формуле

$$\underline{01} \xmapsto{[\widetilde{\delta}_k^{\mathrm{bs}}\circ\gamma]} \frac{-B_{k-1}}{2^{k-1}(k-1)!}\cdot \mathrm{ad}_{\overline{01}}^{k-1}\left(\underline{01}\right) .$$

Наконец, поскольку $\underline{0}+\underline{1}-2\cdot\underline{01} \in \ker\pi$, последний стволовой пропагатор имеет чётную тензорную степень, с необходимостью равную 2, and takes

$$\underline{01} \xmapsto{(\pi\otimes\pi)\circ\widetilde{\delta}_2^{\mathrm{bs}}\circ\gamma} -\frac{1}{8}\cdot \mathrm{ad}_{\overline{01}}\left(\overline{0}-\overline{1}\right) .$$

12.6.4. Шаг индукции.

Из предыдущего вычисления вытекает, что для каждого чётного $n \geqslant 4$ сумма по деревьям обращается в нуль и, тем самым, $\delta_n^{\mathrm{bs}} = 0$. Для нечётного n сумма по деревьям равна

$$\frac{1}{16}\sum_{\substack{n-3=\\ k_1+\cdots+k_i}}\left(\frac{-B_{k_1}}{2^{k_1}k_1!}\right)\cdot\ \cdots\ \cdot\left(\frac{-B_{k_i}}{2^{k_i}k_i!}\right)\cdot \mathrm{ad}_{\overline{01}}^{n-1}(\overline{0}-\overline{1})$$

где сложение происходит по всем способам распределения $(n-3)$ имеющихся валентностей между *внутренними* стволовыми пропагаторами[1]. Этот тензор является собственным для A с собственным значением 2^{1-n}. Поэтому из формулы (12.6.4) следует, что

$$\delta_n^{\mathrm{bs}}\left(\overline{01}\right) = \frac{1}{16}\left(1-\frac{1}{2^{n-1}}\right)^{-1}\sum_{\substack{n-3=\\ k_1+\cdots+k_i}}(-1)^i\prod_{\nu=1}^{i}\frac{B_{k_\nu}}{2^{k_\nu}k_\nu!}\cdot \mathrm{ad}_{\overline{01}}^{n-1}(\overline{0}-\overline{1}) =$$
$$= \frac{B_{n-1}}{(n-1)!}\cdot \mathrm{ad}_{\overline{01}}^{n-1}\left(\overline{0}-\overline{1}\right)$$

Итак, для завершения доказательства нам осталось проверить соотношение (12.6.4) на числа Бернулли.

[1] т. е. не корневым и не последним

12.6.5. Доказательство рекурсивной формулы (12.6.4).

Числа Бернулли B_i с $i \geqslant 3$ можно определять при помощи "котангенсумы"

$$(t/2)\cdot \operatorname{cth}(t/2) = 1 + \sum_{k\geqslant 3}(B_k/k!)\cdot t^k\,.$$

Из очевидного тождества $\operatorname{cth}(t) = \frac{1}{2}\left(\operatorname{cth}(t/2)+\operatorname{th}(t/2)\right)$ следует равенство

$$t\cdot\operatorname{cth}(t) - (t/2)\cdot\operatorname{cth}(t/2) = (t^2/4)\cdot\left((t/2)\cdot\operatorname{cth}(t/2)\right)^{-1}\,.$$

Раскладывая $(1+\sum(B_k/k!)t^k)^{-1}$ в сумму геометрической прогрессии и сравнивая коэффициенты при t^m, мы получаем формулу

$$(2^m-1)\cdot\frac{B_m}{m!} = \frac{1}{4}\sum_{\substack{m-2=\\ k_1+\dots+k_i}}(-1)^i\prod_{\nu=1}^{i}\frac{B_{k_\nu}}{k_\nu!}\,,$$

Нужная нам формула (12.6.4) получается из неё умножением обоеих частей на

$$(2^m-1)^{-1} = \left(1-\frac{1}{2^m}\right)^{-1}\cdot\frac{1}{2^{k_1}}\cdot\;\cdots\;\cdot\frac{1}{2^{k_i}}\cdot\frac{1}{4}\,.$$

12.7. Копроизведение на треугольнике.

Для треугольника с множеством вершин $M=\{1,2,3\}$ функториальная проекция (12.4.4) переводит каждый трёхчленный флаг $F_1\subset F_2\subset F_3$ в

$$\frac{1}{6}\cdot\overline{123}\,,$$

двучленные флаги $\underline{x}\subset\underline{xy}$ — в половины ориентированных сторон треугольника

$$\frac{1}{2}\cdot\overline{xy}\,,$$

двучленные флаги вида $\underline{x}\subset\underline{xyz}$ — в комбинации ориентированных сторон вида

$$\frac{1}{3}\cdot\left(\overline{xy}+\overline{xz}\right)\,,$$

двучленные флаги вида $\underline{xy}\subset\underline{xyz}$ — в комбинации вида

$$\frac{1}{6}\cdot\left(\overline{xz}+\overline{yz}\right)\,,$$

наконец одночленные флаги вида $\underline{x}$ проецируются в вершины $\overline{x}$, барицентры сторон $\underline{xy}$ — в полусуммы вершин $(\overline{x}+\overline{y})/2$, а барицентр всего треугольника $\underline{123}$ — в среднее всех вершин

$$\frac{1}{3}\cdot(\overline{x}+\overline{y}+\overline{z})\ .$$

Для каждой из шести перестановок $g\in\mathfrak{S}_3$ обозначим через ι_g изоморфизм ориентированного симплекса $\overline{123}$ с ориентированным симплексом $[g(1),g(2),g(3)]$ (отвечающим флагу $\underline{g(1)}\subset\underline{g(1)g(2)}\subset\underline{g(1)g(2)g(3)}$ барицентрического разбиения $B(M)$), действующий как $1\mapsto\underline{g(1)}\,,\quad 2\mapsto\underline{g(1)g(2)}\,,\quad 3\mapsto\underline{g(1)g(2)g(3)}$. Тогда

$$\sigma|_{\overline{C}_3}=\sum_{g\in\mathfrak{S}_3}\iota_g\,. \tag{12.7.1}$$

Далее, для каждой компоненты δ_n функториального A_∞-копроизведения на $\overline{C}=\overline{C}^{[M]}$ обозначим через $\underline{\delta}_n$ соответствующую ей в силу функториальности операцию на комплексе $\underline{C}=\overline{C}^{[B(M)]}$ барицентрического разбиения. Тогда оператор A действует на отображение $\delta_n:\overline{C}\longrightarrow\overline{C}^{\otimes n}$ (комбинаторной) степени $2n-3$ по правилу

$$A:\delta_n\longmapsto\pi^{\otimes n}\circ\underline{\delta}_n\circ\sigma\,. \tag{12.7.2}$$

Предложение 7.1
При $n\geqslant 3$ все собственные значения оператора (12.7.2) отличны от 1.

Доказательство. В полученной в предыдущем разделе явной формулы для копроизведения отрезка вытекает, что при $n\geqslant 3$ у ограничения оператора A на подпространства функториальных отображений[1] $\overline{C}_2\longrightarrow\overline{C}^{\otimes n}$ и $\overline{C}_1\longrightarrow\overline{C}^{\otimes n}$ нет единичных собственных значений. Поэтому достаточно доказать предложение для ограничения оператора (12.7.2) на пространство отображений $\overline{C}_3\longrightarrow\overline{C}^{\otimes n}$.

Поскольку $\dim\overline{C}_3=1$, мы можем отождествить каждое такое отображение с его значением на базисном векторе $\overline{123}$, т. е. с некоторым элементом пространства $\overline{C}^{\otimes n}$. При таком отождествлении оператор (12.7.2)

[1] A-инвариантные в силу функториальности этих отображений

можно воспринимать как оператор на пространстве $\overline{C}^{\otimes n}$, равный в силу соотношения (12.7.1) сумме

$$A|_{\overline{C}_3} = \sum_{g\in\mathfrak{S}_3} \pi^{\otimes n} \circ \iota_g : \overline{C}^{\otimes n} \longrightarrow \overline{C}^{\otimes n}. \tag{12.7.3}$$

Оценим нормы слагаемых в этой сумме. Оператор $\pi \circ \iota_g$ действует на одномерную компоненту $\overline{C}_3$ умножением на $1/6$, а его ограничения на трёхмерные компоненты $\overline{C}_2$ и $\overline{C}_1$ имеют (с точностью до сопряжения матрицей перестановки) матрицы

$$\begin{pmatrix} 1/2 & 1/3 & 0 \\ 0 & 1/3 & 1/6 \\ 0 & 0 & 1/6 \end{pmatrix} \qquad \text{и} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 0 & 1/2 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}$$

соответственно. Таким образом, нормы ограничения $\pi\circ\iota_g$ на однородные компоненты комплекса $\overline{C}$ (комбинаторных) степеней 1, 2, 3 суть

$$\frac{1}{36}, \quad \frac{19}{36}, \quad \frac{11}{6}.$$

Рассмотрим теперь ограничение $\pi\circ\iota_g$ на однородную компоненту в $\overline{C}^{\otimes n}$, порождённую тензорными мономами, содержащими k_i сомножителей из $\overline{C}_i$, $i = 1, 2, 3$. Поскольку тотальная степень $\delta_n \in \overline{C}^{\otimes n}$ равна $2n-3$, мы имеем равенства $k_1 = k_3$ и $k_1 + k_2 + k_3 = n$. Поэтому норма $\pi\circ\iota_g$ на этой компоненте не превосходит

$$\left(\frac{1}{36}\cdot\frac{11}{6}\right)^{k_1} \cdot \left(\frac{19}{36}\right)^{k_2} \leqslant \left(\frac{19}{36}\right)^{n},$$

а норма суммы (12.7.3) не превосходит

$$36 \cdot \left(\frac{19}{36}\right)^{n}.$$

Таким образом, при $n \geqslant 5$ норма заведомо меньше 1. Оставшиеся случаи $n = 3$ и $n = 4$ были явно просчитаны нами на компьютере: собственные числа оператора A_n на образе оператора B_n для малых n таковы:

$$\begin{aligned} &\text{для } n = 3\colon \quad \frac{1}{6^2} \quad \frac{8}{6^2} \\ &\text{для } n = 4\colon \quad \frac{6}{6^3} \quad \frac{11}{6^3} \\ &\text{для } n = 5\colon \quad \frac{1}{6^4} \quad \frac{8}{6^4} \quad \frac{9}{6^4} \quad \frac{36}{6^4} \quad \frac{78}{6^4}. \end{aligned}$$

□

В заключение отметим, что полученное на компьютере значение 3−валентного барицентрически устойчивое функториального копроизведения на треугольнике имеет вид:

$$
\begin{aligned}
\delta_3^{\mathrm{bs}}\left(\overline{012}\right) = &+ \frac{11}{2205}\Big(+\overline{01}\otimes\overline{12}\otimes\overline{01} - \overline{01}\otimes\overline{02}\otimes\overline{12} - \overline{01}\otimes\overline{02}\otimes\overline{01} - \overline{01}\otimes\overline{12}\otimes\overline{02} \\
&\qquad + \overline{02}\otimes\overline{01}\otimes\overline{02} + \overline{02}\otimes\overline{12}\otimes\overline{02} - \overline{02}\otimes\overline{01}\otimes\overline{12} - \overline{02}\otimes\overline{12}\otimes\overline{01} \\
&\qquad + \overline{12}\otimes\overline{01}\otimes\overline{12} - \overline{12}\otimes\overline{01}\otimes\overline{02} - \overline{12}\otimes\overline{02}\otimes\overline{01} - \overline{12}\otimes\overline{02}\otimes\overline{12}\Big) \\
&+ \frac{13}{4410}\Big(+\overline{01}\otimes\overline{01}\otimes\overline{02} - \overline{01}\otimes\overline{01}\otimes\overline{12} - \overline{01}\otimes\overline{02}\otimes\overline{02} - \overline{01}\otimes\overline{12}\otimes\overline{12} \\
&\qquad + \overline{02}\otimes\overline{01}\otimes\overline{01} + \overline{02}\otimes\overline{12}\otimes\overline{12} - \overline{02}\otimes\overline{02}\otimes\overline{01} - \overline{02}\otimes\overline{02}\otimes\overline{12} \\
&\qquad + \overline{12}\otimes\overline{12}\otimes\overline{02} - \overline{12}\otimes\overline{02}\otimes\overline{02} - \overline{12}\otimes\overline{12}\otimes\overline{01} - \overline{12}\otimes\overline{01}\otimes\overline{01}\Big) \\
&+ \frac{1}{168}\Big(+\overline{012}\otimes\overline{01}\otimes\left(\overline{0}-\overline{1}\right) + \overline{012}\otimes\overline{02}\otimes\left(\overline{0}-\overline{2}\right) + \overline{012}\otimes\overline{12}\otimes\left(\overline{1}-\overline{2}\right) \\
&\qquad + \overline{012}\otimes\left(\overline{0}-\overline{1}\right)\otimes\overline{01} + \overline{012}\otimes\left(\overline{0}-\overline{2}\right)\otimes\overline{02} + \overline{012}\otimes\left(\overline{1}-\overline{2}\right)\otimes\overline{12} \\
&\qquad + \left(\overline{0}-\overline{1}\right)\otimes\overline{01}\otimes\overline{012} + \left(\overline{0}-\overline{2}\right)\otimes\overline{02}\otimes\overline{012} + \left(\overline{1}-\overline{2}\right)\otimes\overline{12}\otimes\overline{012} \\
&\qquad + \overline{01}\otimes\left(\overline{0}-\overline{1}\right)\otimes\overline{012} + \overline{02}\otimes\left(\overline{0}-\overline{2}\right)\otimes\overline{012} + \overline{12}\otimes\left(\overline{1}-\overline{2}\right)\otimes\overline{012}\Big) \\
&- \frac{8}{735}\left(\overline{01}\otimes\overline{01}\otimes\overline{01} - \overline{02}\otimes\overline{02}\otimes\overline{02} + \overline{12}\otimes\overline{12}\otimes\overline{12}\right)
\end{aligned}
$$

Литература

[AS] M. Aguiar, F. Sottile. Structure of the Malvenuto-Reutenauer Hopf algebra of permutations// Adv. Math. V.191N.22005P.225–275, `arXiv:math/0203282`

[EM] S. Eilenberg, S. MacLane. On the groups $H(\pi, n)$, I & II // Ann. Math., V.58 1953P. 55–106 & V.60 1954P. 49–139.

[GKLLRT] I. M. Gelfand, D. Krob, A. Lascoux, B. Leclerc, V. S. Retakh, J.-Y. Thibon. Non-commutative symmetric functions// Adv. Math. V.1121995P.225–275

[GM] S. I. Gelfand, Yu. I. Manin. Methods of homological algebra// Springer 1996

[GL] V. K. A. M. Gugenheim, L. A. Lambe. Perturbation theory in differential homological algebra, I, II// IL. J. Math.V.33 1989P.556–582
`http: //www.math.su.se /~lambe /public /pubs.html`

[HK] J. Huebschmann and T. Kadeishvili. Small models for chain algebras // Math. Z. V.207 1991P. 245-280.

[HS] J. Huebschmann, J. Stasheff. Formal solution of master equation via HPT and deformation theory // `arXiv:math /9906036`.

[Ka] T. V. Kadeishvili. On the theory of homology of fiber spaces // Rus. Math. Surv. V.35 1980P. 231–238

[Ke1] B. Keller. Introduction to A_∞ algebras and modules //
`arxiv:math.RA /9910179v2`.

[Ke2] Keller B. Hochschild cohomology and derived Picard groups //
`http://www.institut.math.jussieu.fr /~keller /publ /hdP.pdf`

[M] Markl M. Transferring A_∞ strongly homotopy associative structures//
`arXiv:math.AT /0401007`.

[Sm] V. A. Smirnov. Homology of fiber spaces // Rus. Math. Surv. V.35 1980P. 294–298

[St] J. D. Stasheff. Homotopy associativity of H-spaces, I, II // Trans. Amer. Math. Soc.V.108 1963P. 275–312.

[Sw] M. E. Sweedler. Hopf Algebras // Benjamin, NY 1969

13. Построение исчисления Шуберта в кольце многогранников Гельфанда-Цетлина

Теория многогранников Ньютона раскрывает глубокую связь между алгебраической геометрией с одной стороны и выпуклой геометрией и комбинаторикой с другой. С торических многообразий эта теория была частично перенесена на сферические многообразия, а в последние годы в работах Каве-Хованского и Лазарсфельда-Мустачи были построены обобщения многогранников Ньютона для произвольных алгебраических многообразий (выпуклые тела Ньютона-Окунькова).

На настоящий момент, одним из основных направлений развития новой теории выпуклых тел Ньютона-Окунькова является построение достаточно богатого класса алгебраических многообразий, для которых тела Ньютона-Окунькова можно явно вычислить. Особенно интересны случаи, когда эти выпуклые тела оказываются многогранниками (так бывает, например, для сферических многообразий). Многобразия Шуберта и разрешения Ботта-Самельсона дают такой класс многообразий, особенно интересный благодаря связям с теорией представлений. Например, в недавней работе Каве показано, что струнные многогранники, изначально возникшие в теории представлений, могут быть получены как многогранники Ньютона-Окунькова многообразий полных флагов.

Естественно попытаться обобщить результаты классической теории многогранников Ньютона в этом контексте, то есть связать геометрию многобразий Шуберта и Ботта-Самельсона (в частности, многообразий флагов) с комбинаторикой их многогранников Ньютона-Окунькова. Для многообразия полных флагов полной линейной группы прогресс в этом направлении был достигнут сотрудниками лаборатории Валентиной Киричекно, Евгением Смирновым и Владленом Тимориным в работе [KST1] (в этом случае в качестве многогранника Ньютона-Окунькова можно выбрать многогранник Гельфанда-Цетлина). В [KST1] был предложен новый подход к исчислению Шуберта на многообразии полных флагов для полной линейной группы, а именно, моделирование теории пересечений на многообразии флагов через теоретико-множественное пересечение граней многогранника Гельфанда-Цетлина. Подход основан на конструкции Пухликова-Хованского, которая в [KST1] была также развита для непростых многогранников (в том числе для многогранника Гельфанда-Цетлина).

Для произвольной редуктивной группы многограннки Ньютона-Окунькова удобно описывать с помощью выпукло-геометрических операторов разделённых разностей, которые позволяют свести комбинаторику достаточно сложных многогранников к комбинаторике параллелепипедов. Классические операторы разделённых разностей (или операторы Демазюра) играют важную роль в исчислении Шуберта и теории представлений. В работе [KST3] были построены аналоги операторов разделённых разностей в контексте выпуклой геометрии.

Геометрические операторы Демазюра действуют на многогранниках и переводят многогранник в многогранник на единицу большей размерности. Например, многогранники Гельфанда-Цетлина и их обобщения можно получить, применяя подходящую композицию геометрических операторов Демазюра к точке. При этом выпукло-геометрические операторы Демазюра определены в гораздо более общей ситуации, не связанной с редуктивными группами и системами корней (классические операторы Демазюра в теории представлений и исчислении Шуберта строятся по системам корней).

Из недавних результатов Андерсона, давшего итеративное описание многогранников Ньютона-Окунькова для разрешений Ботта-Самельсона в случае полной линейной группы, можно вывести эффективное описание этих многогранников через выпукло-геометрические операторы Демазюра. С помощью результатов [KST3] планируется получить аналогичное описание для произвольных редуктивных групп. С помощью выпукло-геометрических операторов Демазюра удобно описывать многогранники Ньютона башен Ботта [KST3].

Другое направление, в котором можно использовать выпукло-геометрические операторы Демазюра - это перенос результатов работы [KST1] на произвольные редуктивные группы. Для полной линейной группы, в нескольких работах (Коган, Коган-Миллер и др.) разными методами с каждым многообразием Шуберта был связан набор граней многогранника Гельфанда-Цетлина. В частности, в [KST2] характеры Демазюра многообразий Шуберта вычисляются через экспоненциальные суммы по целым точкам в наборах граней. Однако все методы опираются на комбинаторный аппарат pipe-dreams, который для произвольных редуктивных групп отсутствует. С помощью выпукло-геометрических операторов Демазюра планируется разработать такой аппарат для произвольных редуктивных групп. Следующим этапом станет применение развитых для многообразий флагов методов к более общим сферическим многообразиям.

Также был достигнут прогресс в изучении кольца алгебраических кобордизмов (в том числе эквивариантных) многообразий полных флагов и других сферических многообразий В работе [HK] Кириченко и Хорнбостель построили исчисление Шуберта в кольце алгебраических кобордизмов многообразия полных флагов произвольной редуктивной группы. В работе [KK] Кириченко и Кришна описали кольцо эквивариантных кобордизмов, как комплексных, так и алгебраических, многообразия полных флагов и чудесных компактификаций симметрических пространств минимального ранга.

В [T1] Тиморин описал отображения из части плоскости в трехмерное пространство, переводящие отрезки прямых в отрезки плоских кривых, а также отображения из части плоскости в плоскость, переводящие отрезки прямых в дуги коник из трехмерных линейных систем.

Блох, Оверстигин, Тиморин и Птачек изучили топологические кубические многочлены. Это фактор-отображения, связанные с кубическими ламинациями Терстона. В препринте [BOPT] классифицируются такие ламинации, динамическое ядро которых либо пусто, либо состоит из одной вращательной щели.

Операция спаривания (matings) была введена Дуади и Хаббардом, ее изучением занимались Милнор, Рис, Тан Лей, Виттнер, Луо. Спаривание позволяет строить топологические модели рациональных функций, исходя из многочленов. В [MT] Тиморин и Машанова доказали существование простых дуг на границах гиперболических компонент в параметрических срезах пространства квадратичных рациональных функций, целиком состоящих из спариваний.

В [T2] Тиморин определили очень общий класс рациональных функций на сфере Римана, которые после счетного числа разрезов сферы становятся топологически полусопряженными с гиперболическими рациональными функциями.

Стажёр лаборатории Ростислав Девятов классифицировал действия диагональные действия редуктивной группы на произведении многообразий флагов с открытой орбитой [D1]. В [D2] построена серия примеров смежностных многогранников размерности D=2d, имеющих D+4 вершины. Доказано, что все они комбинаторно отличаются от циклического многогранника.

Стажёры лаборатории Максим Гумин и Данила Заев получили результаты в комбинаторной теории многогранников, полезные для приложений к алгебраической геометрии. В частности, определены и, в некоторых случаях, вычислены инварианты соотношений бордантности.

Литература

[BOPT] A. Blokh, L. Oversteegen, R. Ptacek, V. Timorin, Topological polynomials with a simple core, Submitted to the Proceedings of the International Conference "Frontiers in Complex dynamics" arXiv:1106.5022v1 [math.DS]

[D1] R. Devyatov, Generically transitive actions on multiple flag varieties, arXiv:1007.1353v1 [math.AG]

[D2] Р. А. Девятов, Смежностные многогранники с небольшим числом вершин, Матем. сб., 202:10 (2011), 31-54

[HK] J. Hornbostel, V.Kiritchenko, Schubert calculus for algebraic cobordism, Journal fur die reine und angewandte Mathematik (Crelles Journal), Volume 2011, no. 656, 59-85

[KK] V.Kiritchenko, A. Krishna, Equivariant Cobordism of Flag Varieties and of Symmetric Varieties, arXiv:1104.1089v1 [math.AG]

[KST1] V. Kiritchenko, E.Smirnov, V. Timorin, Schubert calculus and Gelfand-Zetlin polytopes, arXiv:1101.0278v2 [math.AG]

[KST2] V.A. Kiritchenko, E.Smirnov, V. Timorin, Gelfand-Zetlin polytopes and Demazure characters, Proceedings of the International Conference "50 years of IITP", Москва: ИППИ РАН, 2011

[KST3] V. Kiritchenko, E.Smirnov, V. Timorin, Convex chains for Schubert varieties, Oberwolfach reports, 41/2011, 15-18

[MT] I. Mashanova, V. Timorin, Captures, matings and regluings, arXiv:1111.5696v1 [math.DS] Submitted to the Proceedings of the International Conference "Polynomial Matings"

[T1] V. Timorin, Planarizations and maps taking lines to linear webs of conics, arXiv:1108.1612 [math.AG]

[T2] V. Timorin, Cut and semi-conjugate, arXiv:1110.3131 [math.DS]

14. Исчисление неприводимых компонент пространства Гурвица и пространства модулей алгебраических поверхностей

14.1. Пространство Гурвица и группа Галуа

Задача классификации конечнолистных накрытий проективной прямой, рассматриваемых с точностью до непрерывной деформации, является классической и изучается уже на протяжении более ста лет. Неприводимые компоненты пространства Гурвица параметризуют деформационно эквивалентные конечнолистные накрытия проективной прямой. Дискретными инвариантами этих неприводимых компонент являются: степень накрытия d, группа Галуа G накрытия, число b точек ветвления и тип τ локальных монодромий ветвления (то есть, набор длины b (с повторениями), состоящий из классов сопряженности C_i, $i = 1, \dots, m$, элементов группы G). Современное определение пространства Гурвица $\mathrm{HUR}^G_{d,b,\tau}$ накрытий с фиксированным набором дискретных инвариантов было дано Фултоном в работе [3].

Основным вопросом в рассматриваемой задаче является вопрос о числе неприводимых компонент пространства Гурвица накрытий с фиксированным набором дискретных инвариантов. Знаменитая теорема Люрота – Клебша – Гурвица (см. [1], [2]) дает ответ на этот вопрос в случае, когда группа Галуа накрытия – это симметрическая группа $\mathscr{S}_d$ и все точки ветвления имеют один и тот же тип локальных монодромий, а именно, транспозиции, и этот ответ звучит следующим образом: каждому такому набору дискретных инвариантов однозначно соответствует неприводимая компонента пространства Гурвица при условии, что число точек ветвления четно и не менее, чем $2(d-1)$ (в случае, когда число точек ветвления нечетно или когда это число меньше $2(d-1)$, то пространство Гурвица таких накрытий пусто). В дальнейшем теорема Люрота – Клебша – Гурвица была обобщена на случай, когда среди точек ветвления имеются точки с локальными монодромиями – транспозиции, но также имеется одна или две точки ветвления с другими типами локальных монодромий (см. [4] – [9]). Кроме того в [9] был приведен пример набора дискретных инвариантов накрытий, в котором три точки ветвления имеют локальные монодромии, не являющиеся транспозициями, и которому соответствует пространство Гурвица, состоящее по крайней мере из двух неприводимых компонент.

Подход к вычислению числа неприводимых компонент пространства $\mathrm{HUR}^G_{d,b,\tau}$, использовавшийся в упомянутых выше работах, основан на том, что неприводимые компоненты пространства $\mathrm{HUR}^G_{d,b,\tau}$ взаимно однозначно соответствуют орбитам действия группы кос Br_b на множестве упорядоченных наборов представителей классов сопряженности, входящих в тип τ, и в этих работах вычислялось число таких орбит при фиксированном типе τ. Наш подход к вычислению числа неприводимых компонент пространства $\mathrm{HUR}^G_{d,b,\tau}$ основан на том, что если фиксировать только степень накрытий d, группу G и типы локальных монодромий $C_1, \dots, C_m$, то на множестве всех неприводимых компонент всех пространств Гурвица накрытий с такими данными можно ввести структуру полугруппы. Введение полугрупповой структуры позволило использовать методы теории групп и полугрупп и получить следующие обобщения теоремы Люрота – Клебша – Гурвица.

Теорема 1: Пространство $\mathrm{HUR}^{\mathscr{S}_d}_{d,t}$ неприводимо, если тип t разложения на множители монодромии содержит не менее $3(d-1)$ транспозиций.

Теорема: Неприводимые компоненты пространства Гурвица $\mathrm{HUR}^{\mathscr{S}_3}$ накрытий Галуа с группой Галуа $G = \mathscr{S}_3$ однозначно определяются типом разложения монодромии на множители принадлежащих им накрытий.

Пусть $C = C_\sigma$ – это класс сопряженности перестановки $\sigma \in \mathscr{S}_d$, действующей на множестве $I_d = \{1, \dots, d\}$. Обозначим через n_C порядок перестановки $\sigma \in C$, через $k_C = |C|$ – число перестановок, принадлежащих C, и через f_C – число элементов множества I_d, остающихся неподвижными при действии перестановки $\sigma \in C$ на множестве I_d.

Теорема 2: Пространство $\mathrm{HUR}^{\mathscr{S}_d}_{d,t}$ неприводимо, если тип разложения монодромии t содержит более чем $N_C = 3^{d-3}(2d-1)(d-1)m_C + n_C k_C + 1$ множителей, принадлежащих классу сопряженности C нечетной перестановки $\sigma \in \mathscr{S}_d$ такой, что $f_C \geq 2$.

Доказательство теорем 1 и 2 содержится в статьях [10], [11].

14.2. Пространство модулей алгебраических поверхностей

Исследование пространств модулей алгебраических поверхностей и, в частности, нахождение числа неприводимых (или связных) компонент пространства модулей поверхностей с фиксированным набором дискретных инвариантов (также как и задача о числе неприводимых компонент пространства Гурвица накрытий с фиксированным набором дискретных инвариантов) является классической и имеет богатую историю (см., например, обзор [12]). Одним из общих способов построения алгебраических поверхностей является представление этих поверхностей в виде конечнолистных разветвленных накрытий проективной плоскости, в частности, накрытия плоскости, разветвленные в конфигурациях прямых составляют важный класс проективных поверхностей, среди которых имеется много поверхностей с теми или иными замечательными свойствами (см., например, [13]).

В 2011 году Ф. Богомолов и В. Куликов исследовали вопрос о том, когда пространство конфигураций прямых на проективной плоскости с данной матрицей инцидентности конфигурации прямых является неприводимым (отметим, что в этом случае неприводимая компонента пространства модулей накрытий проективной плоскости, разветвленных в конфигурации прямых, однозначно определяется гомоморфизмом из фундаментальной группы дополнения к конфигурации прямых в симметрическую группу). В работе [14] были введены четыре операции на матрицах инцидентности конфигураций прямых и было показано, что если две матрицы инцидентности определяют однозначно неприводимые компоненты в пространствах конфигураций прямых, то матрицы инцидентности, полученные в результате применения этих операций, также однозначно определяют неприводимые компоненты.

Литература

[1] A. Clebsch: *Zür Theorie der Riemann'schen Fläche.* Math. Ann., 6 (1872), 216 – 230.

[2] A. Hurwitz: *Ueber Riemann'she Flächen mit gegebenen Verweigugspunkten.* Math. Ann., 39, (1981), 1 – 61.

[3] W. Fulton: *Hurwitz schemes and irreducibility of moduli of algebraic curves.* Ann. of Math., **90:3** (1969), 542 – 575.

[4] M. Fried and R. Biggers: *Moduli spaces of covers and the Hurwitz monodromy group.* J. Reine Angew Math., 335 (1982), 87 – 121.

[5] M.D. Fried and H. Völklein: *The inverse Galois problem and rational points on moduli space.* Math. Ann., 290, (1991), 771 – 800.

[6] V. Kanev: *Hurwitz spaces of Galois coverings of* $\mathbb{P}^1$*, whose Galois groups are Weyl groups.* J. Algebra 305 (2006), no. 1, 442 – 456.

[7] P. Kluitmann: *Hurwitz action and finite quotients of braid groups.* Braids (Santa Cruz, CA, 1986), 299 –325, Contemp. Math., 78, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1988.

[8] S. Mochizuki: *The geometry of the compactification of the Hurwitz scheme.* Publ. Res. Inst. Sci. 31 (1995), no, 3, 355 – 441.

[9] B. Wajnryb: *Orbits of Hurwitz action for coverings of a sphere with two special fibres.* Indag. Math. (N.S.), vol. 7 (1996), no. 4, 549 –558.

[10] Вик.С. Куликов: *Полугруппы разложений на множители и неприводимые компоненты пространства Гурвица.* Известия РАН, Сер. матем., Т. **75** вып. 4, (2011), 49–90.

[11] Вик.С. Куликов: *Полугруппы разложений на множители и неприводимые компоненты пространства Гурвица. II.* (будет опубликовано в Известия РАН, Сер. матем., Т. **76** вып. 3, (2012); см. также arXiv:1011.3619).

[12] F. Catanese: *Algebraic surfaces and their moduli spaces: real, differentiable and symplectic structures.* arXiv:0812.4318.

[13] F.Hirzebruch *Arrangements of lines and algebraic surfaces. Arithmetic and geometry* Progr. Math., 36, BirkhГзuser, Boston, Mass., 1983 Vol II, 113 –140,

[14] F. Bogomolov and Vik. Kulikov: *On the diffemorphic type of the complement to a line arrangement in a projective plane.* Central European Journal of Mathematics, 10:2, mart 2012.

15. Построение специальных лагранжевых слоений в многообразиях Фано.

Выбор темы

Одно из важных направлений современной математики связано с исследованием свойств алгебраических многообразий как симплектических. Непосредственно для самой алгебраической геометрии это дает возможность ввести ряд новых нестандартных инвариантов алгебраических многообразий, полезных для разрешения проблем классификации. Кроме того, в невероятно популярных в математических кругах проблемах Зеркальной Симметрии и Геометрического Квантования, приходящих из математической и теоретической физики, многообразия вообще не рассматриваются монофизически, каждое исследуемое многообразие обладает двумя природами - алгебраической и симплектической, - и главная задача - эти природы связать. Гипотетическая дуальность этих природ и лежит в основе явления Зеркальной Симметрии.

Однако общее алгебраической многообразие может обладать огромным количеством симплектических структур, и не понятно, какую из них выделить в качестве канонической. Поэтому естественной идеей является рассмотреть в первую очередь класс таких алгебраических многообразий, которые обладают некоторой выделенной симплектической структурой. Такой класс составлен многообразиями Фано: по определению многообразие X является многообразием Фано, если его антиканонический класс K_X^* обилен, то есть в некоторой степени задает вложение в проективное пространство соответствующим полным линейным рядом. Проективное пространство обладает канонической симплектической формой, ограничение которой на образ X при вложении естественно называть *канонической* (или, если угодно, антиканонической) симплектической формой на X.

Теперь мы готовы применить аппарат симплектической геометрии к алгебраическим многообразиям Фано. Но тут оказывается, что в отличие от алгебраической геометрии, симплектическая геометрия и топология компактных многообразий - предмет достаточно молодой, запас знаний и методов которого не слишком велик. Исследование и классификация лагранжевых подмногообразий компактных симплектических многообразий - один из основных методов, но много ли известно даже в "базовых" случаях? Классификация монотонных лагранжевых торов такого "простейшего" многообразия, как проективная плоскость, еще не завершена - относительно недавно Ю. Чеканов представил пример нестандартного монотонного тора в $\mathbb{CP}^2$, но никто не знает, исчерпывается ли множество возможных гамильтоново неэквивалентных типов двумя - Клиффорда и Чеканова.

Однако вернемся к нашей задаче. Напомним, что основные продуктивные подходы в Зеркальной Симметрии и Геометрическом Квантовании опираются на торическую геометрию. Торическая геометрия это предмет, в котором алгебраическая и симплектическая геометрия имеют один и тот же корень. Каждому торическому многообразию соответствует выпуклый многогранник, по которому восстанавливаются и алгебро - геометрические, и симплектические свойства. Кроме того, торическая структура наделяет многообразие каноническим лагранжевым слоением, слои которого в теории интегрируемых систем называются торами Лиувилля - Арнольда, а в торической геометрии - торами Клиффорда. Каноническое лагранжево слоение лежит в основе конструкций: в Геометрическом Квантовании из этих слоев выделяется конечное (или дискретное) подмножество слоев *Бора - Зоммерфельда*, и на этих слоях строится соответствующее квантовое фазовое пространство проквантованной системы; в Зеркальной Симметрии из этих слоев выделяется множество таких, которые обладают нетривиальными когомологиями Флоера, и именно эти слои составляют объекты категории Флоера - Фукаи (и фольклорная гипотеза утверждает, что условие Бора - Зоммерфельда = условию нетривиальности когомологий Флоера). Таким образом, если мы хотим перенести эти основные методы на более широкий класс многообразий, чем торические, нам необходимо научиться строить канонические (или почти канонические) лагранжевы слоения на симплектических многообразиях. В приложении к многообразиям Фано эта задача и является центральной для нашей группы.

Основные методы

Основная идея нашего подхода достаточно банальна - немного деформировать и обобщить понятие торического многообразия, введя более широкий класс *псевдоторических многообразий.* Это обобщение следует довольно старой идее "комплексификации" вещественных объектов. Эту идею пропагандировал В.И. Арнольд, эта же идея встречаетеся во многих работах С. Дональдсона. С точки зрения теории интегрируемых систем, торическое многообразие это набор первых интегралов, то есть гладких функций в инволюции. Комплексным аналогом вещественной функции, согласно Арнольду, является пучок Лефшеца. Пусть на компактном симплектическом многообразии имеется такой набор "полиданных": (вещественные данные) набор (но не полный) гладких функций в инволюции + (комплексные данные) семейство симплектических многообразий, параметризуемое в свою очередь торическим многообразием Y. В простейшем случае для $2n$ - мерного симплектического многообразия X вещественные данные состоят из $n-1$ функции f_i в инволюции, а комплексные - в пучке симплектических дивизоров D_α или симплектическом пучке Лефшеца, параметризуемым простейшим торическим многообразием - проективной прямой. Коммутационное соотношение между вещественными и комплексными данными очень простое - каждый дивизор D_{α_0} инвариантен относительна гамильтонова действия всех функций f_i, то есть согласно теореме Н. Нехорошева, каждый элемент пучка вместе с ограничением на него функций f_i есть вполне интегрируемая система. При этом оказывается, что псевдоторические многообразия обладают каноническими лагранжевыми слоениями - абсолютно так же, как и торические. Отличием является то, что кроме общих гладких слоев канонические слоения псевдоторических многообразий имеют сингулярные слои, но при этом типы особенностей таких слоев заранее известны и достаточны просты для того, чтобы доопределить для них условие Бора - Зоммерфельда или условие нетривиальности когомологий Флоера.

Основные результаты

"Неторические лагранжевы слоения торических многообразий Фано", С.А. Белев, Н.А. Тюрин Математические заметки , ISSN:0025-567X , Изд:МАИК Наука том 87 (2010) ном. 1, стр. 48-59

В работе представлено определение псевдоторической структуры ранга 1, доказано, что такая структура индуцирует каноническое лагранжево слоение на многообразии, и описаны особенности сингулярных слоев таких слоений. В качестве приложения построены псевдоторические структуры на некоторых торических многообразиях Фано.

"Псевдоторические структуры на торических и неторических многообразиях Фано" Н.А. Тюрин, Теоретическая и Математическая физика, Изд:МАИК НАУКА том 162 (2010) номер 3, стр 307 - 333

В работе дано общее определение псевдоторической структуры произвольного ранга. Доказано, что и для произвольного ранга существуют канонические лагранжевы слоения, описаны типы особенностей сингулярных слоев. Впервые построены примеры неторических многообразий с псевдоторическими структурами. Доказано, что произвольная гладкая комплексная квадрика обладает псевдоторической структурой и, как следствие, может быть наделена каноническим лагранжевым слоением.

"Специальные лагранжевы слоения многообразия флагов F3 ", Н.А. Тюрин, Теоретическая и Математическая физика, Изд:МАИК НАУКА том 167 (2011) номер 2, стр. 193-205

В работе изучается многообразие полных флагов в C^3. Доказано, что не будучи торическим, это многообразие обладает псевдоторической структурой ранга 1, общим слоем которой является гладкая поверхность дель Пеццо степени 6. Построено семейство лагранжевых слоений многообразия флагов, среди них выделены минимальные слоения, то есть, которые обладают минимальным набором сингулярных слоев. Доказано, что минимальное лагранжево слоение является специальным в смысле Ору. Исследована связь с торическими вырождениями многообразия флагов.

"Торы Чеканова и псевдоторические структуры", Н.А. Тюрин Успехи Математических наук, ISSN:0042-1316, Изд:Наука том 66 (2011) номер 1, стр. 136 - 137

Это краткое сообщение от ММО, развернутый текст

"Нестандартные торы и псевдоторические структуры", Н.А. Тюрин, принято в печать Теоретическая и математическая физика (2012)

В этих двух работах доказано, что экзотические лагранжевы торы Чеканова, предложенные в недавней работе Чеканова и Шленка, в гораздо более широкой общности могут бысть построены в терминах псевдоторических структур. В качестве приложения построен экзотический лагранжев тор в торической поверхности дель Пеццо степени 6.

Участие Н. А. Тюрина в конференциях.

Конструкция специальных лагранжевых слоений на многообразии флагов в C^2 была представлена в приглашенном докладе на международной конференции "Classical and Quantum Integrable systems - 2011" (ИФВЭ, Протвино, Россия) 23 - 27 января 2011 г. (название доклада "Special lagrangian fibrations on flag variety F^2")

Развернутый доклад на эту же тему был представлен на Школе-конференцию по алгебраической геометриии и комплексному анализу для молодых ученых России, (Российский фонд фундаментальных исследований, Математический институт им. В.А.Стеклова РАН, Ярославский государственный педагогический универститет им. К.Д.Ушинского, Лаборатория алгебраической геометрии Национального исследовательского Университета «Высшая школа экономики», Ярославль, Россия) 23 - 28 мая 2011г (название доклада "Специальные лагранжевы слоения многоо бразия флагов")

Доклад о связи геометрического квантования и зеркальной симметрии через лагранжеву геометрию был сделан на 36 Национальной конференции по теоретической физике Вьетнама (36th NCTP, Quy Nhon, Vietnam) 1 - 4 августа 2011 г. (название доклада "Abelian lagrangian geometry: from Geometric Quantization to Mirror Symmetry")

Построения торов типа Чеканова через псевдоторические структуры были предметом приглашенного доклада на международной конференции "GEOQUANT - 2011" (Chern Institute, Tyanjin, China), 9 - 16 сентября 2011 года (название доклада "Chekanov tori and pseudotoric structures")

Кроме того, был прочитан миникурс для студентов младших курсов на школе "Современная математика" (Российская Академия наук (отделение математики), Математический институт имени В.А.Стеклова, Департамент образования города Москвы и Московский центр непрерывного математического образования), Ратмино, Дубна, Россия, 18 - 29 июля 2011 г. (название курса "Предтеория инстантонов", 4 лекции)

План дальнейших исследований

В дальнейшем мы планируем сосредоточиться на следующих трех важнейших направлениях развития представленных выше методов.

Первая важная задача - это нахождение эффективного критерия существования псевдоторической структуры на многообразии Фано, а также конструктивного определения "дерева" многообразий Фано, обладающих такой структурой. В качестве первых наметок представим следующие наблюдения. Во - первых, известные примеры неторических многообразий Фано, обладающих псевдоторической структурой, допускают и торические вырождения. Одна из главных гипотез состоит в том, что существование торического вырождения эквивалентно существования псевдоторической структуры. Так образом, для неторического многообразия Фано имеется альтернатива: или рассматривать торическое вырождение (то есть сингуляризовать базу) и каноническое лагранжево слоение на нем, или рассматривать псевдоторическую структуру и индуцируемое ею каноническое лагранжево слоение. В последнем случае база остается гладкой, но имеются сингулярные слои. С другой стороны, псведоторическая структура может рассматриваться как результат некоторой операции, примененной к прямому произведению торических многообразий. В самом деле, и слой и база - торические, нет только структуры прямого произведения, а есть некоторая топологическая скрученность (так же топологически нетривиальное расслоение отличается от прямого произведения). Главная гипотеза здесь состоит в том, что такое "скручивание" на прямом произведении получается бирациональными преобразованиями. Если эта гипотеза верна, то мы можем строить "дерево" псевдоторических многообразий Фано, надстраивая над известными примерами новые большей размерности.

Вторая задача - непосредственное обобщение методов Геометрического Квантования и Зеркальной Симметрии на случай псевдоторических многообразий. Для этого необходимо модифицировать определения цикла Бора - Зоммерфельда на случай особых лагранжевых торов. Это кажется возможным в связи с тем, что определение цикла Бора - Зоммерфельда может быть дано в терминах периодов лагранжева тора относительно целочисленной симплектической формы, а периоды легко переносятся на случай особенностей, допускаемых в канонических слоениях псевдоторических структур. Гораздо более трудной задачей является определение когомологий Флоера для особых лагранжевых подмногообразий. Здесь пока что мы видим только одну возможность продвижения - она связана с тем, что во всех известных примерах торических многообразий гомологически нетривиальные слои являются монотонными лагранжевыми многообразиями. Если тогда рассматривать эти свойства как эквивалентные, то проблема будет решена - монотонность легко переносится на случай наших особенностей. В то же время, для торических многообразий, которые по определению не являются деформируемыми, можно рассматривать псевдоторические деформации, поскольку псевдоторическая структура на торическом многообразии есть результат деформации торической структуры. При этом возникает интересная модульная задача, а именно описать многообразие модулей псевдоторических структур на данном многообразии Фано, согласованных с фиксированной комплексной структурой.

Третья задача связана с построениями экзотических монотонных лагранжевых торов в торических многообразиях. Главная проблема здесь на сегодняшний день - отсутствие подходящих инвариантов, позволяющих различать гамильтоново неизотопные лагранжевы монотонные торы в компактных многообразиях. Более конкретно, в уже построенных нами примерах нестандартных торов мы пока не можем различить их гамильтонов тип, хотя есть осторожная уверенность в том, что как и в классическом случае Чеканова для проективной плоскости торы, получаемые псевдоторическими рассмотрениями, будут нестандартными.

Все проблемы и гипотезы, представленные выше, конечно, выходят за рамки возможного делания на ближайший год, но они уже четко сформулированы и представляют предмет нашей работы на ближайшее будущее.

Литература

[1] С.А. Белев, Н.А. Тюрин, *"Неторические лагранжевы слоения торических многообразий Фано",* Математические заметки , ISSN:0025-567X , Изд:МАИК Наука том 87 (2010) ном. 1, стр. 48-59

[2] Н. А. Тюрин, *"Псевдоторические структуры на торических и неторических многообразиях Фано"*, Теоретическая и Математическая физика , ISSN:0564-6162, Изд:МАИК НАУКА том 162 (2010), номер 3, стр 307 - 333

[3] N. A. Tyurin, *Special Lagrangian fibrations on the flag variety F3*, Theoretical and Mathematical Physics, 2011, No. 167 (2). pp. 567-576.

[4] Н.А. Тюрин, *"Торы Чеканова и псевдоторические структуры",* Успехи Математических наук, 2011, No. 66 (1). pp. 136-137.

[5] Н.А. Тюрин, *"Нестандартные торы и псевдоторические структуры"*, принято в печать “Теоретическая и математическая физика” (2012).

16. Исследование топологии параболических застав Дринфельда. Приложения к гипотезе АГТ

Алдай, Гайотто и Тачикава предложили гипотезу, связывающую 4-мерную суперсимметричную $N = 2$ калибровочную теорию с калибровочной группой G с некоторой двумерной конформной теорией поля. Одним из математических следствий этой гипотезы является выражение статсуммы вышеуказанной калибровочной теории (для $G = SL_2$) через скалярный квадрат вектора Уиттэкера в универсальном модуле Верма над алгеброй Вирасоро. Если же $G = SL_n$, то алгебра Вирасоро заменяется соответствующей W-алгеброй. Вышеуказанная статсумма была математически строго определена Н. Некрасовым около 10 лет назад как интеграл единичного класса в эквивариантных когомологиях компактификации Гизекера пространства модулей векторных расслоений на проективной плоскости. Если G не обязательно имеет тип A, то вместо компактификации Гизекера надо рассматривать компактификацию Уленбек, а вместо когомологий — когомологии Горески-Макферсона. Компактификация Уленбек является частным случаем компактификации Дринфельда — так называемого пространства застав — пространства отображений из проективной прямой в параболическое пространство флагов простой конечномерной или аффинной группы Ли. Этот частный случай отвечает аффинной группе Ли и максимальной компактной парахорической подгруппе. Если же рассмотреть конечномерную простую группу Ли и её параболическую подгруппу, то по аналогии с (вышеприведённым следствием из) АГТ гипотезой, соответствующая статсумма должна выражаться в терминах соответствующей конечной W-алгебры. Доказательству этого утверждения для $G = SL_n$ посвящена следующая серия работ.

Feigin, Boris; Finkelberg, Michael; Frenkel, Igor; Rybnikov, Leonid Gelfand-Tsetlin algebras and cohomology rings of Laumon spaces. Selecta Math. (N.S.) 17 (2011), no. 2, 337–361.

Пространства модулей Ломона — это гладкие пополнения пространств модулей отображений проективной прямой в пространства флагов полных линейных групп (конечномерный аналог компактификации Гизекера). Авторы вычисляют эквивариантные кольца когомологий ломоновских пространств в терминах подалгебры Гельфанда-Цетлина универсальной обёртывающей алгебры и формулируем гипотетический ответ для малого кольца квантовых когомологий в терминах коммутативной подалгебры сдвига аргумента.

Feigin, Boris; Finkelberg, Michael; Negut, Andrei; Rybnikov, Leonid Yangians and cohomology rings of Laumon spaces, Selecta Mathematica New Series vol. 17 (2011), no. 3, 573–607.

Авторы строят действие янгиана типа A в эквивариантных когомологиях ломоновских пространств через естественные соответствия. Действие аффинного янгиана строится в когомологиях аффинного варианта пространств Ломона. Авторы вычисляют матричные коэффициенты образующих аффинного янгиана в базисе неподвижных точек. Этот базис является аффинным аналогом базиса Гельфанда-Цетлина. Аффинный аналог алгебры Гельфанда-Цетлина сюръективно отображается на эквивариантные кольца когомологий аффинных пространств Ломона. Кольцо когомологий пространства модулей пучков без кручения на проективной плоскости, тривиализованных на бесконечной прямой (пространства Гизекера), естественно вкладывается в кольцо когомологий определённых пространств Ломона. Его образом служит образ центра янгиана полной линейной алгебры, естественно вложенного в аффинный янгиан. В частности, первый класс Черна детерминантного расслоения на пространстве Гизекера является образом некоммутативной степенной симметрической функции в центре.

Braverman, Alexander; Feigin, Boris; Finkelberg, Michael; Rybnikov, Leonid A Finite Analog of the AGT Relation I: Finite W-Algebras and Quasimaps' Spaces, Communications in Mathematical Physics vol. 308, no. 2 (2011), 457–478.

Авторы выдвигают гипотезу, что эквивариантные когомологии Горески-Макферсона пространства параболических застав Дринфельда снабжены действием конечной W-алгебры, связанной с главным нильпотентом подалгебры Леви соответствующей параболической. Это действие должно обладать несколькими естественными свойствами. Эта гипотеза обобщает известные результаты для случая полных флагов. Авторы доказывают эту гипотезу для групп типа A, пользуясь работами Брандэна и Клещёва о связи W-алгебр и сдвинутых янгианов.

Braverman, Alexander; Finkelberg, Michael Dynamical Weyl groups and equivariant cohomology of transversal slices on affine Grassmannians, Mathematical Research Letters vol. 18 (2011), no. 3, 505–512.

Пусть G — редуктивная группа, а $\check{G}$ — её двойственная по Ленглендсу. Авторы интерпретируют динамическую группу Вейля $\check{G}$ в терминах геометрии аффинного грассманниана группы G. В этой интерпретации динамические параметры соответствуют эквивариантным параметрам тора, естественно действующего на аффинном грассманниане G. Авторы предлагают гипотетическое обобщение этих результатов на аффинные группы Каца-Муди (в терминах геометрии двойного аффинного грассманниана).

Литература

[1] B.L. Feigin, L.G. Rybnikov, A. Braverman, M.V. Finkelberg *A finite analog of the AGT relation I: finite W-algebras and quasimaps' spaces*, Communications in Mathematical Physics, 2011, No. 2, vol 308. pp. 457–478.

[2] R. Bezrukavnikov, V. Ostrik, M.V. Finkelberg *Character D-modules via Drinfeld center of Harish-Chandra bimodules*, Inventiones mathematicae, 2011, pp. 1-32.

[3] A. Braverman, M.V. Finkelberg, *Dynamical Weyl groups and equivariant cohomology of transversal slices on affine Grassmannians*, Mathematical Research Letters, 2011, No. 18 (3). pp. 505-512.

[4] Frenkel I., L.G. Rybnikov, B.L. Feigin, M.V. Finkelberg, *Gelfand-Tsetlin algebras and cohomology rings of Laumon spaces*, Selecta Mathematica, New Series, 2011, No. 17 (2). pp. 337-361.

[5] L.G. Rybnikov, A. Negut, M.V. Finkelberg, B.L. Feigin *Yangians and cohomology rings of Laumon spaces*, Selecta Mathematica, New Series, 2011, No. 11(3). pp. 573-607.

[6] E. Feigin, M.V. Finkelberg *Degenerate flag varieties of type A: Frobenius splitting and BWB theorem*, arxiv:1103.1491.

[7] E. Feigin, M.V. Finkelberg, P. Littelmann, *Symplectic degenerate flag varieties*, arxiv:1106.1399.

17. Исследование параметрических расширений Пикара-Вессио

Классическая дифференциальная теория Галуа изучает группы симметрий решений линейных дифференциальных уравнений, или, что равносильно, группы автоморфизмов соответствующих расширений дифференциальных полей. Возникающие при этом группы являются линейными алгебраическими группами над полем констант. Эта теория появилась в девятнадцатом веке в работах Пикара и Вессио и приобрела современный вид благодаря деятельности Э. Колчина [1]. В работе [2] Ф. Кассиди и М. Сингер начали развитие параметрической теории Пикара–Вессио. В ней изучаются группы симметрий решений линейных дифференциальных уравнений, коэффициенты которых содержат параметры. Для этого строится дифференциальное поле, содержащее эти решения, а также все их производные по параметрам. Такое поле называется параметрическим расширением Пикара–Вессио (ППВ расширением). Возникающие при этом группы Галуа являются дифференциальными алгебраическими группами, заданными (возможно, нелинейными) дифференциальными уравнениями по параметрам.

В теории Пикара–Вессио традиционно предполагалось, что поле констант алгебраически замкнуто [1, 3]. Кассиди и Сингер продолжают работать в духе этой традиции. Они предполагают, что поле констант дифференциально замкнуто относительно дифференцирований по параметрам. Напомним, что дифференциальное поле дифференциально замкнуто, если оно содержит решения любой непротиворечивой системы полиномиальных дифференциальных уравнений с коэффициентами в нем. Это предположение является совершенно необходимым в подходе Кассиди–Сингера и лежит в основе их доказательства существования ППВ расширений. Однако данное предположение накладывает существенные ограничения на область применения этой теории: дифференциально замкнутые поля очень редко встречаются в реальных дифференциально-геометрических рассмотрениях.

Подобный эффект возникал и в классической дифференциальной теории Галуа: если поле констант не алгебраически замкнуто, то расширение Пикара–Вессио может и не существовать (см. знаменитый контрпример А. Зайденберга в [4]), а таком случае не будут определены ни дифференциальная группа Галуа, ни дифференциальное соответствие

Галуа. Начиная с работ Колчина, одна из самых значительных проблем в теории Пикара–Вессио заключалась в избежании ограничений на поле констант.

В работе [5] С. Горчинскому и соавторам удалось избежать предположения из параметрической теории Пикара–Вессио о том, что поле констант дифференциально замкнуто. Как следствие, устанавливается дифференциальное соответствие Галуа в параметрическом случае. С этой целью сначала развивается теория дифференциальных категорий, а также строится теория дифференциальных категорий Таннаки. Это позволяет доказать, что расширение ППВ существует при гораздо более слабом предположении на поле констант, а именно, поле констант должно быть относительно дифференциально замкнутым в поле, порожденном коэффициентами рассматриваемых линейных дифференциальных уравнений. Также, найдены достаточные условия на дифференциальное поле с параметрами, гарантирующие выполнение относительной дифференциальной замкнутости поля констант. Данные условия выполнены для широкого ряда дифференциальных полей, рассматриваемых на практике. Развитые методы построения ППВ расширения должны найти применение для явных вычислений дифференциальных соотношений между решениями линейных дифференциальных уравнений с параметрами.

Литература

[1] E. Kolchin, *Algebraic matric groups and the Picard–Vessiot theory of homogeneous linear ordinary differential equations*, Annals of Mathematics, **49**(1) (1948) 1–42

[2] P. Cassidy, M. Singer, *Galois Theory of Parametrized Differential Equations and Linear Differential Algebraic Group*, IRMA Lectures in Mathematics and Theoretical Physics, **9** (2007) 113–157

[3] M. van der Put, M. Singer, *Galois theory of linear differential equations*, Springer, Berlin (2003)

[4] A. Seidenberg, *Contribution to the Picard–Vessiot Theory of Homogeneous Linear Differential Equations*, American Journal of Mathematics, **78**(4) (1956) 808–818

[5] H. Gillet, S. Gorchinskiy, A. Ovchinnikov, *Parameterized Picard–Vessiot extensions and Atiyah extensions* (2011), arXiv:1110.3526

18. Изучение мотивных структур, возникающих в некоммутативной геометрии, посредством когомологий Хохшильда и циклических когомологий

Тема лежит на пересечении активно развивающихся областей математики. Развитие некоммутативной геометрии было инициировано запросами математической физике для развития адекватного способа описания обнаруженных в мат физике феноменов. С другой стороны, прогресс в конструировании мотивов позволил решить многие из давно стоящих задач как в алгебраической геометрии так и в теории чисел.

Было бы черезвычайно эффективно применить этот построенный инструментарий к решению проблем некоммутативной геометрии и, опосредованно, к задачам математической физики.

Проект основан на совпадении основного инструментария исследований как в некоммутативной геометрии так и в конструкции мотивов — *теории триангулированных категорий.* Первая трудность в реализации связана с тем, что локальная техника некоммутативной геометрии – когомологии Хохшильда и циклические когомологии не имеют очевидной категорной интерпретации; эта задача была успешно разрешена за отчетный период Д. Калединым, который предьявил категорный аналог комплекса Хохшильда и циклического комплекса, что внушает уверенность в дальнейшем быстром продвижении в реализации темы.

Другая ветвь исследования заключается в апробировании развиваемой техники на известных примерах. В качестве первого примера был исследован спектр алгебры Хопфа ориентированных хордовых диаграмм, возникшей при исследовании топологии функциональных пространств. С другой стороны, глубоко нетривиальная некоммутативная деформация проективной плоскости зависит от эллиптической кривой, что влечет необходимость исследования эллиптических и, для параметрического случая, модулярных мотивов.

Литература

[1] Dmitry Kaledin, *Motivic structures in non-commutative geometry*, arXiv:1003.3210.

[2] Dmitry Kaledin, Wendy Lowen, *Cohomology of exact categories and (non-)additive sheaves*, arXiv:1102.5756.

[3] A. Levin, A. Varchenko, *Cohomology of the complement to an elliptic arrangement*, arXiv:1106.5735.

[4] Francis C. S. Brown, Andrey Levin, *Multiple Elliptic Polylogarithms*, arXiv:1110.6917.

19. Исследование асимптотических свойств дзета и L-функций в семействах многообразий над конечными полями.

Асимптотическая теория дзета и L-функций была заложена в 80е–90е годы С. Г. Влэдуцем и М. А. Цфасманом, сначала для функциональных, а затем и для числовых полей. Исходной точкой для развития теории послужила следующая проблема: для положительного целого числа g и степени простого числа q найти максимальное число точек на кривой рода g над конечным полем $\mathbb{F}_q$. Задача оказывается весьма сложной и полный ответ в настоящее время известен лишь для $g = 1$ и $g = 2$. Также имеются частичные результаты для $g = 3$, которые получаются с помощью рассмотрения якобианов среди абелевых многообразий размерности 3 ([3], [5]).

С. Г. Влэдуц, В. Г. Дринфельд [1], а затем М. А. Цфасман [8], [9], [10] получили интересные результаты, рассматривая эту проблему под несколько другим углом. Более конкретно, им удалось доказать асимптотические границы для максимального числа точек на кривых, когда $g \to \infty$, а q фиксировано. Подобные границы получаются естественным образом при рассмотрении более общей задачи описания предельного поведения дзета-функций кривых в семействах. Оказывается, что асимптотическая теория дзета и L-функций является ключом к получению самых разнообразных результатов. Несколько примеров: обобщённая теорема Брауэра–Зигеля для функциональных и числовых полей, границы для регуляторов и дискриминантов, границы для числа точек на многообразиях над конечными полями. Многие сведения и результаты из асимптотической теории можно найти в работе А. И. Зыкина и Ф. Лебака [6].

Вопрос о поведении дзета-функций глобальных полей и многообразий над ними в критической полосе является трудным и важным для многих приложений. Частным случаем такого вопроса является знаменитая теорема Брауэра–Зигеля об асимптотическом поведении регулятора и числа классов идеалов в семействах полей алгебраических чисел. В работе [7] А. И. Зыкин и Ф. Лебак получают обобщение этой теоремы в случае кривых над конечными полями, а также полей алгебраических чисел (в предположении обобщённой гипотезы Римана). Например, было доказано, что для функционального поля $K/\mathbb{F}_r$ рода g имеет место формула:

$$\sum_{f=1}^{N} \frac{f\Phi_{rf}}{r^{(\frac{1}{2}+\epsilon)f}-1} + \frac{1}{\log r} \cdot Z_K\left(\frac{1+2\epsilon}{2}\right) + \frac{1}{r^{-\frac{1}{2}+\epsilon}-1} = O\left(\frac{g_K(\epsilon_0+1)}{r^{\epsilon_0 N}\epsilon_0} + r^{\frac{N}{2}}\right).$$

($\epsilon = \epsilon_0 + i\epsilon_1$ такое, что $\epsilon_0 = \Re\epsilon > 0$, Φ_q — число точек поля K с нормой, равной q, $Z_K(s)$ — логарифмическая производная дзета-функции поля K). В случае поля алгебраических чисел формула (и её доказательство) значительно сложнее. Этот результат позволяет получить обобщение теоремы Ихары [2] об асимптотическом поведении постоянных Эйлера–Кронекера на случай числовых полей, а также улучшает ранее известные результаты в направлении явной теоремы Брауэра–Зигеля [4].

Литература

[1] Влэдуц, С. Г.; Дринфельд, В. Г. О числе точек алгебраической кривой. Функ. Анализ и Прил. **17** (1983), no. 1, 68–69.

[2] Ihara, Y. On the Euler–Kronecker constants of global fields and primes with small norms. Algebraic geometry and number theory, Progr. Math., **253** (2006), Birkhäuser Boston, Boston, MA, 407–451.

[3] Lauter, K. Geometric methods for improving the upper bounds on the number of rational points on algebraic curves over finite fields, with an appendix by J. P. Serre. Journal of Algebraic Geometry **10** (2001), 19–36.

[4] Lebacque, P. Generalised Mertens and Brauer–Siegel Theorems. Acta Arith. **130** (2007), no. 4, 333–350.

[5] Lachaud, G., Ritzenthaler C, Zykin A. Jacobians among abelian threefolds: a formula of Klein and a question of Serre. Math. Res. Lett. 17 (2010), no. 2, 323–333.

[6] Zykin, A. I., Lebacque P., Asymptotic methods in number theory and algebraic geometry, Publications Mathematiques de Besancon, 2011, 47-73.

[7] Zykin, A. I., Lebacque P., On logarithmic derivatives of zeta functions in families of global fields, Intern. J. of Number Theory, 2011, Vol. 7 (7).

[8] Tsfasman, M. A. Some remarks on the asymptotic number of points. *Coding Theory and Algebraic Geometry*, Lecture Notes in Math. **1518**, 178–192, Springer—Verlag, Berlin 1992.

[9] Tsfasman, M. A.; Vlăduţ, S. G. Asymptotic properties of zeta-functions. J. Math. Sci. **84** (1997), Num. 5, 1445–1467.

[10] Tsfasman, M. A.; Vlăduţ, S. G. Asymptotic properties of global fields and generalized Brauer–Siegel theorem. Moscow Mathematical Journal, Vol. **2** (2002), Num. 2, 329–402.

19. Организация комплекса компьютерных экспериментов в теории представлений и гомологической алгебре.

Одной из важных экспериментальных задач теории представлений является вычисление разложений на неприводимые компоненты тензорных произведений. Общее решение не дает указания поведения различных параметров, таких как отсутствие кратностей, кратность вхождения тривиального представления и пр. Поэтому необходимо применять вычислительные методы для нахождения различных тензорных произведений с заданными свойствами.

Для вычислений использовались следующие алгоритмы (указан только код существенных функций):

```
poly* Ptensor(index n, poly* p)

{ poly* x,* y;

  if (n==0) return poly_one(Lierank(grp));

  if (n==1) return p;

  x=p; setshared(p); /* protect |p| against |freepol| */

  do { y=Tensor(x,p); freepol(x); x=y; } while (--n>1);

  clrshared(p); /* now |p| needs no more protection */

  return x;

}

poly* Tensor(poly* p,poly* q)

{ index i,j; poly* ans=poly_null(Lierank(grp));

  for (i=0; i<p->nrows; ++i)

    for (j=0; j<q->nrows; ++j)

      ans=Addmul_pol_pol_bin(ans,tensor_irr(p->elm[i],q->elm[j],NULL)

                          ,mult(p->coef[i],q->coef[j]));

  return ans;

}

bigint* Tensor_coef(poly* p, poly* q,vector* nu)

{ index i,j; bigint* ans=null;

  for (i=0; i<p->nrows; ++i)
```

```
    for (j=0; j<q->nrows; ++j)
    { poly* res=tensor_irr(p->elm[i],q->elm[j],nu->compon);
      ans=add(ans,mult(res->coef[0],mult(p->coef[i],q->coef[j])));
      freepol(res);
    }
  return ans;
}
local poly* tensor_irr(entry* lambda,entry* mu,entry* nu)
{ if (type_of(grp)==SIMPGRP) return simp_tensor_irr(lambda,mu,nu,&grp->s);
  if (simpgroup(grp)) return simp_tensor_irr(lambda,mu,nu,Liecomp(grp,0));
  { poly* result;
    index s=Ssrank(grp),td=grp->g.toraldim; /* size of toral part */

    { lambda+=s; mu+=s; /* move to start of toral part */
      if (nu==NULL)
      { result=mkpoly(1,td);
        addrow(lambda,mu,*result->elm,td); *result->coef=one;
      }
      else
      { entry* lm=mkintarray(td); boolean correct_weight;
        addrow(lambda,mu,lm,td); nu+=s; /* move to toral part of weight */
        correct_weight=eqrow(lm,nu,td); freearr(lm);
        if (correct_weight) result=poly_one(0);  else return poly_null(0);
      }
    }
    { index i;
      for (i=grp->g.ncomp-1; i>=0; --i)
      { simpgrp* g=Liecomp(grp,i); index d=g->lierank;
```

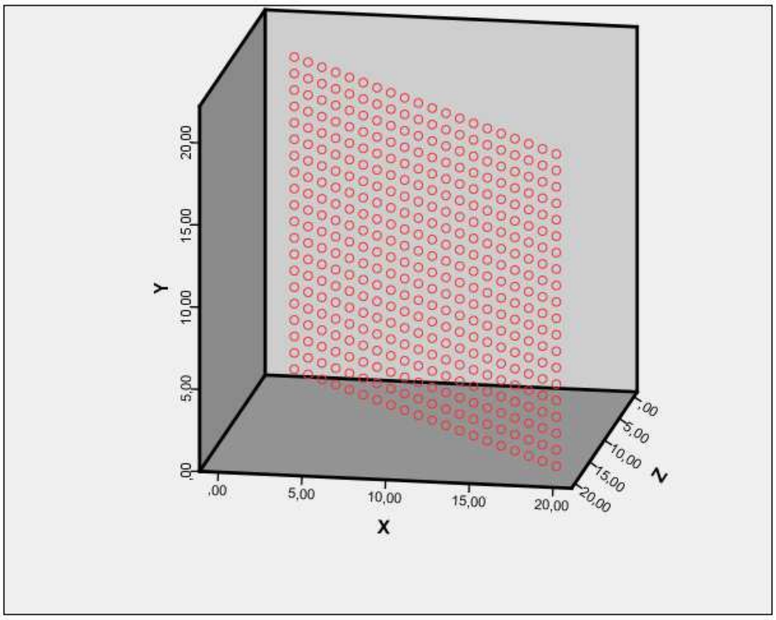
```
        lambda-=d; mu-=d;  if (nu!=NULL) nu-=d;
          /* move back to previous component */
        result= Disjunct_mul_pol_pol(simp_tensor_irr(lambda,mu,nu,g),result);
      }
    }
    return result;
  }
}
local poly* tensor_irr(entry* lambda,entry* mu,entry* nu)
{ if (type_of(grp)==SIMPGRP) return simp_tensor_irr(lambda,mu,nu,&grp->s);
  if (simpgroup(grp)) return simp_tensor_irr(lambda,mu,nu,Liecomp(grp,0));
  { poly* result;
    index s=Ssrank(grp),td=grp->g.toraldim; /* size of toral part */

    { lambda+=s; mu+=s; /* move to start of toral part */
      if (nu==NULL)
      { result=mkpoly(1,td);
        addrow(lambda,mu,*result->elm,td); *result->coef=one;
      }
      else
      { entry* lm=mkintarray(td); boolean correct_weight;
        addrow(lambda,mu,lm,td); nu+=s; /* move to toral part of weight */
        correct_weight=eqrow(lm,nu,td); freearr(lm);
        if (correct_weight) result=poly_one(0);  else return poly_null(0);
      }
    }
    { index i;
      for (i=grp->g.ncomp-1; i>=0; --i)
```

```
    { simpgrp* g=Liecomp(grp,i); index d=g->lierank;
      lambda-=d; mu-=d;  if (nu!=NULL) nu-=d;
        /* move back to previous component */
      result= Disjunct_mul_pol_pol(simp_tensor_irr(lambda,mu,nu,g),result);
    }
  }
  return result;
 }
}
local poly* simp_tensor_irr(entry* lambda,entry* mu,entry* nu,simpgrp* g)
{ poly* result; index i,r=g->lierank;
 the_g=g; testdom(lambda,(object)g); testdom(mu,(object)g);
 cur_expon=mkintarray(r);
 if (nu!=NULL)
        { goal=mkintarray(r); copyrow(nu,goal,r); /* |goal=nu| */
          for (i=0; i<r; ++i) ++goal[i];  /* |goal+=rho| */
        }
 else goal=NULL;

 { bigint* deg_lam=simp_dim_irr(lambda,g),* deg_mu=simp_dim_irr(mu,g);
  if (cmp(deg_lam,deg_mu)<0) { entry* t=lambda; lambda=mu; mu=t; }
  freemem(deg_lam); freemem(deg_mu);
 }

 { lamrho=mkintarray(r); copyrow(lambda,lamrho,r); /* |lamrho=lambda| */
  for (i=0; i<r; ++i) ++lamrho[i]; /* |lamrho+=rho| */
 }
 if (nu!=NULL) { totmul=null; setshared(null); }  else wt_init(r);
```

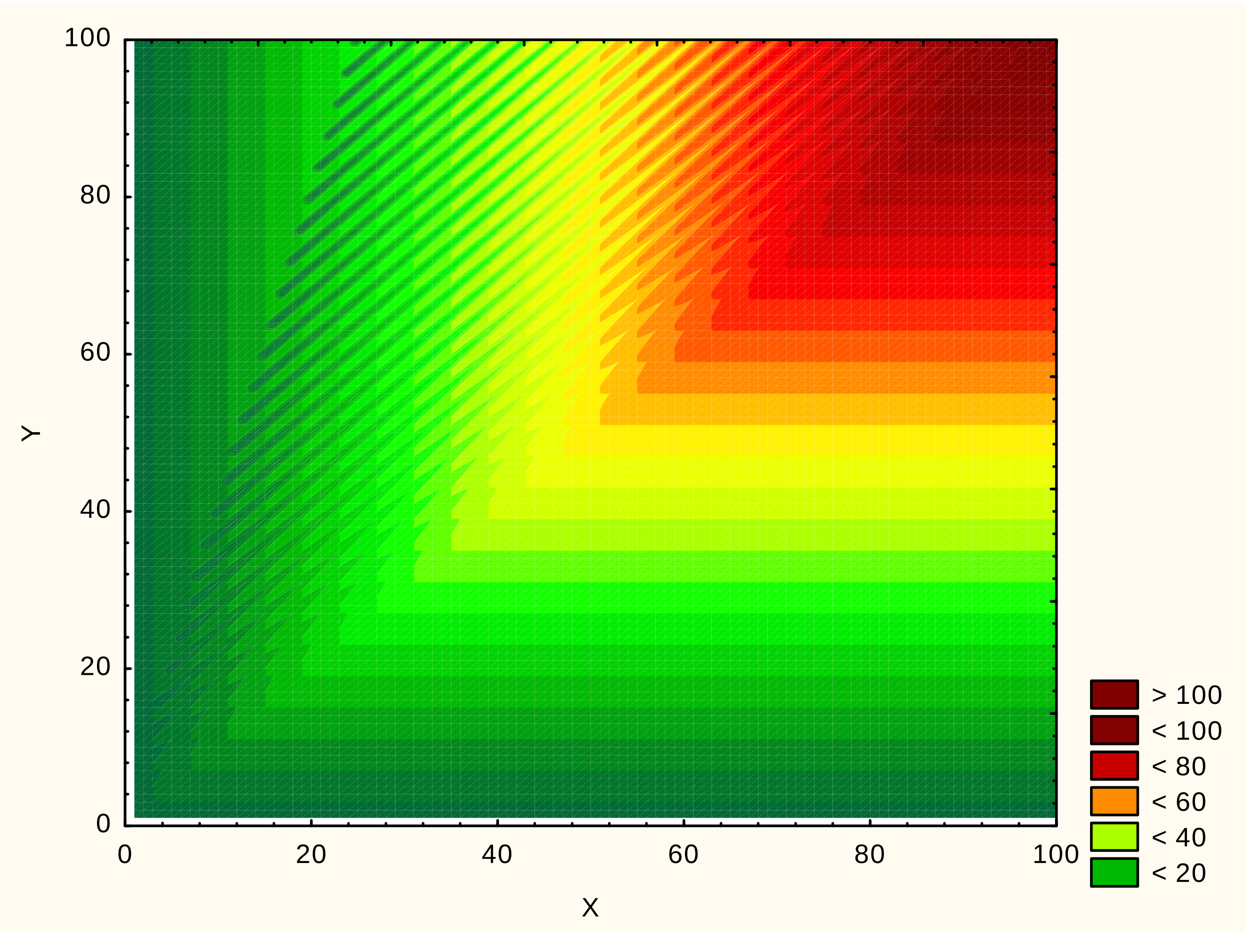
```
  { poly* domchar=simp_domchar(mu,NULL,g); /* compute dominant character */
    Weylloopinit(g);
    for (i=0; i<domchar->nrows; ++i) /* traverse dominant weights in character */
    { cur_mult=domchar->coef[i];
        /* |cur_mult| is alias for the relevant multiplicity (shared) */
      Weylloop(nu ? add_goal_wt : add_tensor_wt,domchar->elm[i]);
    }
    Weylloopexit();
    freemem(domchar);
  }

  freearr(cur_expon); freearr(lamrho);
  if (nu==NULL) return wt_collect();
   else
       { freearr(goal); result=mkpoly(1,0); result->coef[0]=totmul;
         setshared(totmul); return result;
       }
}
```

Общий объем экспериментально полученных данных превышает 10Гб. Приведем некоторые полученные результаты в виде диаграмм, в связи с тем, что таблицы занимают достаточно большой объем.

Рассмотрим группу SL(4,C). Зададимся вопросом для каких представлений с весом (x,y,z) в тензорный квадрате будет входить тривиальное подпредставление. Экспериментальный ответ показывает, что это представления веса (x,y,x). На диаграмме это показано таким образом:



Вторая поставленная задача состоит в вычислении кратностей вхождения представления V в его тензорный квадрат. Результат можно увидеть группы SL(3,C) и представлений с координатами старшего веса от 1 до 100. На следующей диаграмме:



21. Работы В. Жгуна по алгебраической геометрии

Одно из важных направлений эквивариантной алгебраической геометрии является исследование бирациональных G-инвариантов многообразий. Работа сотрудника лаборатории V.S.Zhgoon “On The Local structure theorem and equivariant geometry of cotangent vector bundle”, preprint arXiv:1001.1421 посвящена исследованию бирациональных инвариантов квазипроективных многообразий с действием редуктивной группы G. Наиболее важным инвариантом для нас была малая группа Вейля, которая обобщает понятие группы Вейля для редуктивной группы.

Первая часть работы посвящена исследованиям локальной структуры действий подгрупп группы G на квазипроективных многообразиях. Получены обобщения теоремы о Локальной структуре. Напомним, что теорема о локальной структуре описывает сужение действия редуктивной группы на алгебраическом многообразии до действия параболической подгруппы на открытом подмножестве этого многообразия. Нами было показано, что если многообразие не является квазиаффинным, то теорема о локальной структуре может быть существенно усилена. В классической формулировке в качестве искомой параболической подгруппы P берется нормализатор общей орбиты в X борелевской подгруппы B группы G. Усиленная теорема о локальной структуре описывает действие некоторой большей параболической подгруппы Q (содержащей группу P) на вообще говоря большем открытом подмножестве. При этом оказывается, что в формуле, описывающей структуру действия Q на открытом подмножестве в X, выделяется множитель изоморфный многообразию флагов для группы Q. Из этого утверждения мы выводим важное обобщение теоремы о локальной структуре.

Во второй части работы была исследована геометрия кокасательных расслоений и отображений моментов для квазипроективных многообразий. При изучении квазиаффинных многообразий основным инструментом является многообразие общих орисфер, то есть орбит общего положения для максимальной унипотенной группы. Но для изучения геометрии кокасательного расслоения квазипроективного многообразия этого семейства оказывается недостаточно, что видно на примере многообразий флагов. Для квазипроективных многообразий посредством клеточного разбиения Бялиницкого-Бируля мы построили специальное семейство вырожденных орисфер, для которого выполнены теоремы, аналогичные теоремам для квазиаффинных многообразий. А именно, мы доказали что G-разнесение конормального расслоения к построенному семейству плотно в кокасательном расслоении. Это позволило получить вычисление образа отображения моментов, основанное на геометрических рассуждениях и не использующее дифференциальных операторов. Также мы реализовали малую группу Вейля в качестве группы Галуа рационального накрытия кокасательного расслоения.

Как показали исследования проведенные в предыдущей работы, при изучении геометрии действий редуктивных групп на многообразии важную роль играет исследование действий групп на кокасательных расслоениях к рассматриваемым многообразиям. В связи с этим логично сформулировать аналогичные вопросы, полученные для кокасательных расслоений, в терминах эквивариантной симплектической геометрии. Хорошо извествна теорема Панюшева, которая говорит о том, что такой инвариант как сложность (размерность семейства общих орбит борелевской подгруппы в G) для конормального расслоения к G-инвариантному подмногообразию в многообразии X совпадает сос сложностью X. В работе сотрудника лаборатории В.С.Жгуна (совместно с Д.А.Тимашевым) "Симплектические многообразия с инвариантными лагранжевыми подмногообразиями" (принята в печать в Доклады Российской Академии Наук.) получено наиболее простое доказательство указанной выше теоремы (это доказательство следует из несколько более сильных результатов о геометрии конормальных расслоений, полученных авторами). Также было получено доказательство гипотезы Панюшева, которая утверждает, что сложность всех инвариантных лагранжевых подмногообразий в кокасательном расслоении постоянна и равна сложности многообразия X. Заметим, что эта гипотеза является непосредственным обобщение вышеуказанной теоремы, поскольку конормальные расслоения к инвариантным подмногообразиям являются лагранжевыми подмногообразиями в X (однако не исчерпывают весь класс ларганжевых подмногообразий).

Литература

[1] V. S. Zhgoon *"On The Local structure theorem and equivariant geometry of cotangent vector bundle"*, arXiv:1001.1421

[2] Dmitry A. Timashev, Vladimir S. Zhgoon, *Hamiltonian actions on symplectic varieties with invariant Lagrangian subvarieties*, arXiv:1109.5239

22. Работы К. Куюмжиян по алгебраической геометрии

Пусть G — классическая алгебраическая группа, то есть одна из $SL(n)$, $SP(n)$ и $SO(n)$. Пусть $T \subseteq G$ — максимальный тор, в случае $SL(n)$ это будет просто множество всех диагональных матриц. Каринэ Куюмжиян задалась следующим вопросом: когда в простом модуле группы G замыкания всех орбит максимального тора нормальны? Ответ на этот алгебро-геометрический вопрос можно дать в терминах старшего веса модуля, а доказательство имеет комбинаторный характер. В нём используется следующий критерий: замыкание орбиты тора нормально тогда и только тогда, когда соответствующее множество весов насыщенно, то есть в конусе, натянутом на это множество весов, нет "дыр".

В этом году К. Куюмжиян и И. Богданов решили аналогичную задачу для исключительных групп. Но, если для классических групп список таких модулей был довольно обширен, то среди модулей исключительных групп только два удовлетворяют этому условию: это случаи F_4 и G_2, первые фундаментальные представления.

Во всех доказательствах используется язык систем корней и их решёток корней и весов. Технически случай исключительных систем корней сложнее тем, что для заданного старшего веса множество всех весов представления можно задать формулой, но это не будет являться наглядным описанием. В процессе решения задачи использовалась программа Lie. В доказательстве использовались методы, похожие на методы для классических систем корней, в частности, соображения о вложенных множествах весов, унимодулярные и почти унимодулярные множества и разделяющие функции. Также, так как описания множеств весов очень сложны, во многих случаях требовалось применять отражения и строить элементы множеств весов. Данный результат изложен в препринте [1].

Также в рамках данного проекта исследовано свойство бесконечной транзитивности и гибкости для различных классов аффинных алгебраических многообразий. Действие группы G на множестве $A = A^1 \sqcup A^2 \sqcup \ldots \sqcup A^s$ называется *покомпонентно бесконечно транзитивным*, если для каждой s-ки $(m_1, \ldots, m_s)$ данное действие транзитивно на $(m_1+\ldots+m_s)$-ках формы $(a^1_1, \ldots, a^1_{m_1}, a^2_1, \ldots, a^2_{m_2}, \ldots, a^s_1, \ldots, a^s_{m_s})$, где $a^i_j \in A^i$. К. Куюмжиян и Ф. Мангольтом доказали следующую теорему для несвязных надстроек над полем вещественных чисел.

Пусть Y – аффинное алгебраическое мнообразие над полем $\mathbb{R}$, и $f \in \mathbb{R}[Y]$. Предположим, что для каждой компоненты связности Y^i множества Y_{reg} выполняются следующие свойства: $\dim Y^i \geq 2$ и f непостоянна на Y^i. Если Y является гибким и действие $SAut(Y)$ на Y_{reg} покомпонентно бесконечно транзитивно, то надстройка $X = SP(Y, f)$ является гибкой и действие $SAut(X)$ на X_{reg} покомпонентно бесконечно транзитивно.

Это обобщает результаты для связных надстроек и для надстроек над $\mathbb{C}$, полученные ранее. Для этого использовалось описание унипотентных однопараметрических подгрупп как экспонент локально нильпотентных дифференцирований. Данная теорема доказана в препринте [2].

Литература

[1] I. Bogdanov, K. Kuyumzhiyan, Simple modules of exceptional linear groups with normal closures of maximal torus orbits, arXiv:1105.4577

[2] K. Kuyumzhiyan, F. Mangolte, Very transitive actions on real affine suspensions, arXiv:1012.1961

23. Научно-педагогическая деятельность лаборатории

23.1. Подготовка записок лекционного курса “Basic algebraic geometry” (И. Артамкин, А. Городенцев)

В сентябре-декабре 2010 года (1-2 модуль 2010/2011 учебного года) была прочитана первая (вводная) половина курса Basic Algebraic Geometry, посвященная наработке базовых алгебраических понятий, в основном относящихся к коммутативной алгебре, необходимых для второй части курса, которая будет читаться в феврале-мае. Обе части курса стоят в учебном плане магистратуры факультета математики НИУ ВШЭ и программы Math in Moscow, первая под названием Basic Algebra (162 часа, из них 56 аудиторных часов, 6 кредитов), вторая — под названием Algebraic Geometry Start-up Course (162 часа, из них 60 аудиторных часов, 6 кредитов).

Первую часть прослушало и успешно сдало 8 магистрантов НИУ ВШЭ и трое слушателей Math in Moscow, Лектор: профессор факультета математики НИУ ВШЭ, научный сотрудник Лаборатории алгебраической геометрии и ее приложений И.В.Артамкин.

Вторая часть курса была прочитана в феврале-мае 2011г. (3-4 модуль 2010/2011 учебного года). Лектор: профессор факультета математики НИУ ВШЭ, научный сотрудник Лаборатории алгебраической геометрии и ее приложений А.Л.Городенцев. Наиболее важной задачей курса является выработка у студентов правильной геометрической интуиции, основанной на детальном изучении большого числа ключевых геометрических конфигураций классической проективной геометрии: теории проективных квадрик, исчислительной геометрии плоских кривых, многообразий Веронезе, Плюккера и Сегре а также геометрических соответствий между ними. Другой, не менее важной задачей является обучение студентов свободному переводу с языка коммутативной алгебры на язык аффинной и проективной геометрии. Наконец, итоговой задачей курса является овладение основами алгебраической геометрии в объёме, достаточном для эффективного посещения более глубоких алгеброгеометрических курсов, ориентированных на аспирантов, и самостоятельного изучения монографий по этому предмету. Курс прослушало и успешно сдало экзамены 6 магистрантов факультета математики и 3 слушателя программы Math in Moscow.

В Приложении к настоящему отчету представлены записки лекций по курсу, а также листы с задачами и материалы контрольных работ и экзаменов. Материалы курса доступны в Интернете на следующих страницах:

- http://www.hse.ru/org/persons/451657
- http://math.hse.ru/courses_math/mag1-basalg
- http://math.hse.ru/courses_math/mag1-algeom

23.2. Подготовка записок лекционного курса М. Вербицкого "Алгебраическая геометрия"

В течение осеннего семестра 2011/2012 учебного года на факультете математики НИУ ВШЭ был прочитан новый курс "Алгебраическая геометрия". Курс рассчитан на студентов 3-го курса бакалавриата и входит в РУПы факультета. Автор курса и ведущий лектор - доцент факультета ма тематики, заведующий Лабораторией алгебраической геометрии и ее приложений М.С.Вербицкий.

М.С.Вербицкий подготовил записки лекций:

Лекция 1: теорема Гильберта о нулях и алгебраические множества.

Лекция 2: теорема Гильберта о нулях, функторы, эквивалентность категорий.

Лекция 3: Сильная теорема Гильберта о нулях и локализация.

Лекция 4: Неприводимые компоненты, нетеровость и теорема Гильберта о базисе.

Лекция 5: Теорема Эмми Нетер о кольце инвариантов.

Лекция 6: Тензорное произведение модулей.

Лекция 7: Тензорное произведение колец

Лекция 8: Топология Зариского, доминантные морфизмы и целая зависимость

Лекция 9: Целые замыкания и факторпространство

Лекция 10: Лемма Нетер о нормализации

Программа курса была реализована как цикл нетрудных задач, таким образом, что студенты, при желании, могли освоить весь материал, последовательно решая задачи.

Записи лекции доступны на сайте факультета математики[1], там же выложены листки с задачами. В Приложении к настоящему отчету представлены записки лекций по курсу, а также листы с задачами и материалы контрольных работ и экзаменов.

23.3. Подготовка записок лекционного курса М. Вербицкого "Комплексная алгебраическая геометрия"

Краткое описание курса

В весеннем семестре 2011-го года, сотрудник лаборатории М. Вербицкий прочел продолжение годичного курса "Комплексная алгебраическая геометрии" в Институте Математики имени Стеклова, в рамках НОЦ Института Математики.

Курс состоял из 9 занятий по 4 часа: две лекции плюс семинарское занятие с разбором задач, решенных студентами, у доски.

Студентам были привиты основы математической культуры, необходимой для занятия кэлеровой геометрией: анализа на многообразиях, дифференциальной геометрии, структур на многообразиях и приложений комплексного анализа. Лекции заканчивались живым обсуждением материала курса и задач.

Разработанный курс лекций содержал богатый медийный компонент: в дополнение к листочкам с задачами, которые раздавались на каждом занятии, студенты получали файлы с кратким конспектом лекций. Во время лекции эти файлы проектировались на экран по соседству с доской, что существенно облегчало презентацию и запоминание. Каждая лекция была записана на видео, с целью последующей публикации на серверах лаборатории.

[1] http://math.hse.ru/bac3-11-ag

23.4. Видеокурсы лекций по алгебрической геометрии

В течение 2011г. Лаборатория алгебраической геометрии и ее приложений провела 4 международные конференции: "Instantons in Complex Geometry", конференция, посвященная 65-летию Ф.А.Богомолова, семинар "Derived Categories in Algebraic Geometry" ("Производные категории в алгебраической геометрии") и семинар "Geometric structures on complex manifolds" ("Геометрические структуры на комплексных многообразиях")

В ходе этих конференций производилась видеозапись докладов.

Кроме того, Лаборатория алгебраической геометрии и ее приложений была основным организатором летней школы "Алгебра и геометрия" в г.Ярославле. В школе приняло участие 65 студентов, аспирантов и молодых ученых из России, стран СНГ и из-за рубежа. Прочитанные на школе лекции также были записаны.

Кроме того, были записаны некоторые курсы и семинары, которые читали сотрудники Лаборатории алгебраической геометрии в течение весеннего семестра 2010/2011 учебного года и осеннего семестра 2011/2012 учебного года, а именно:

1) "Кэлеровы многообразия и комплексная алгебраическая геометрия" (М.С.Вербицкий)
2) "Алгебраическая теория чисел" (А.И.Зыкин)
3) "Алгебра-2" (А.Д.Елагин)
4) "Анализ-2" (В.А.Тиморин)
5) "Алгебраические группы и группы Ли" (Я.В.Абрамов)
6) "Дополнительные главы теории чисел" (А.И.Зыкин)
7) "Программа Мори" (М.С.Вербицкий)
8) "Алгебра-3" (А.Д.Елагин)
9) "Алгебра-1" (Е.Ю.Смирнов)

Все записи доступны на сайте Лаборатории www.ag.hse.ru

24. Публикации лаборатории

Литература

[1] Amerik, E., *Existence of non-preperiodic algebraic points for a rational self-map of infinite order*, Mathematical Research Letters, 2011. No. 18(2). C. 251-256

[2] Amerik, E., *On an automorphism of Hilb[2] of certain K3 surfaces*, Proc. Edinburgh Math. Soc., 2011. No. 54(1)

[3] Bogomolov, F.A. Amerik, E., Rovinsky, M., *Remarks on endomorphisms and rational points* Compositio Mathematica, 2011. No. 8

[4] Bogomolov, F.A., Hassett B., Tschinkel, Yu., *Constructing rational curves on K3 surfaces*, Duke Mathematical Journal, 2011. No. 3 (Vol.157). pp. 535-550

[5] Bogomolov, F.A., Tschinkel Yu. *Introduction to birational anabelian geometry*, Current Developments in Algebraic Geometry, MSRI publication, 2011. No. 59

[6] F.A. Bogomolov, V.S. Kulikov *On the diffemorphic type of the complement to a line arrangement in a projective plane*, Central European Journal of Mathematics, 2011.

[7] Bogomolov, F.A., Bohning, C., Graf von Bothmer, H., *Rationality of quotients by linear actions of affline groups*, Science China Mathematics, 2011. No. 54.

[8] Bogomolov, F.A., Tschinkel Yu. *Reconstruction of higher-dimensional function fields*, Moscow Mathematical Journal, 2011, No. 11 (Vol.2) pp. 185-204.

[9] Oliveira B., Bogomolov, F.A., *Symmetric Differentials of Rank 1 and Holomorphic Maps*, Pure and Applied Mathematics Quarterly, 2011, No. 4 (Vol. 7), pp. 1085-1104.

[10] F.A. Bogomolov, Petrov T., *Unramified cohomology of alternating group*, CEJM, 2011, No. 9 (5), pp. 936-948

[11] Будылин Р.Я., *Адельное построение класса Черна*, Математический Сборник РАН, 2011, No. 202 (11). с. 75-97

[12] Будылин Р.Я. *Неравенство, полученное при рассмотрении нестабильных решеток ранга 2*, Успехи математических наук, 2011. No. 66:4. с. 183-184.

[13] M. Verbitsky *A CR twistor space of a G2-manifold* Differential Geometry and its Applications, 2011, No. 29 (apr), pp. 101-107

[14] Ornea L., Verbitsky, M., *A report on locally conformally Kaehler manifolds*, Harmonic Maps and Differential Geometry, Contemporary Mathematics 2011, 284 pp. Volume 542.

[15] M. Verbitsky *Hodge theory on nearly Kaehler manifolds,* Geometry and Topology, 2011, No. 15. pp. 2111-2133

[16] M. Verbitsky *Hyperholomorpic connections on coherent sheaves and stability*, Central European Journal of Mathematics, 2011. No. 9 (3). pp. 535-557.

[17] M. Verbitsky *Manifolds with parallel differential forms and Kaehler identities for G_2-manifolds*, Journal of Geometry and Physics, 2011, No. 61 (6). pp. 1001-1016.

[18] Jardim M., Verbitsky, M. *Moduli spaces of framed instanton bundles on CP^3 and twistor subsections of moduli spaces of instantons on C^2*, Adv. Math., 2011, No. 227. pp. 1526-1538.

[19] Ornea L., Verbitsky, M., *Oeljeklaus-Toma manifolds admitting no complex subvarieties*, Mathematical Research Letters, 2011, No. 04 (18). pp. 747-754.

[20] Р. А. Девятов, *Смежностные многогранники с небольшим числом вершин,* Матем. сб., 202:10 (2011), 31-54

[21] A. D. Elagin, *Cohomological descent theory for a morphism of stacks and for equivariant derived categories*, Sbornik: Mathematics, 2011, Vol. 202. No. 4. pp. 495-526

[22] A.I. Efimov, V. Lunts, D.O. Orlov, *Deformation theory of objects in homotopy and derived categories III: abelian categories* Advances in mathematics, 2011, No. 226:5, pp. 3857-3911

[23] Ефимов А. И., *Доказательство гипотезы Концевича-Сойбельмана*, Математический Сборник РАН, 2011. No. 202:4, pp. 65-84.

[24] Zykin, A. I., Lebacque P., *Asymptotic methods in number theory and algebraic geometry,* Publications Mathematiques de Besancon, 2011, No. 47-73.

[25] Zykin, A. I., Lebacque P., *On logarithmic derivatives of zeta functions in families of global fields*, Intern. J. of Number Theory, 2011, No. Vol. 7 (7).

[26] V.A. Kiritchenko, Hornbostel J. *Schubert calculus for algebraic cobordism*, Journal für die reine und angewandte Mathematik, 2011, No. 656. pp. 59-85.

[27] Alexander Kuznetsov, *Base change for semiorthogonal decompositions* Compositio Mathematica, 2011, No. 147, pp. 852-876.

[28] Куликов В.С., *Полугруппы разложений на множители и неприводимые компоненты пространства Гурвица*, Известия РАН, серия математическая, 2011, No. 75:4.

[29] Куликов В.С., *Полугруппы разложений на множители и неприводимые компоненты пространства Гурвица II,* Известия РАН, серия математическая, 2011, (принято к печати).

[30] Нетай И. В. *Параболически связные подгруппы*, Математический Сборник РАН, 2011, No. 202:8, pp. 81-94.

[31] D. O. Orlov *Formal completions and idempotent completions of triangulated categories of singularities*, Advances in mathematics, 2011, No. 226:1. pp. 206-217.

[32] D. O. Orlov, *Matrix factorizations for nonaffine LG-models*, Mathematische Annalen, 2011, No. 4.

[33] L. Positselski, *Coherent analogues of matrix factorizations and relative singularity categories*, arXiv:1102.0261.

[34] Positselski, L., Polishchuk A., *Hochschild (co)homology of the second kind I*, accepted by Transactions of the American Mathematical Society, July 2011.

[35] L. Positselski, *Mixed Artin-Tate motives with finite coefficients*, Moscow Mathematical Journal, 2011, No. 11/2. pp. 317-402.

[36] L. Positselski *Two kinds of derived categories, Koszul duality, and comodule-contramodule correspondence*, Memoirs of the Amer. Math. Soc., 2011, No. 212/996. pp. v+133 pp.

[37] V.V. Przyjalkowski, *Hori-Vafa mirror models for complete intersubsections in weighted projective spaces and weak Landau-Ginzburg models*, Central European Journal of Mathematics, 2011, No. 9(5). pp. 972-977

[38] Kishimoto T., Yu.Prokhorov, Zaidenberg M., *Group actions on affine cones*, Peter Russell's Festschrift, Proceedings of the conference on Affine Algebraic Geometry held in Professor Russell's honour, 1–5 June 2009. McGill Univ., Montreal.: CRM Proceedings andLecture Notes, 2011.

[39] Yu. Prokhorov, *Simple finite subgroups of the Cremona group of rank 3*, Journal of Algebraic Geometry, 2011, September 12.

[40] Mori S., Yu.Prokhorov *Threefold extremal contractions of type IA*, Kyoto Journal of Mathematics, 2011, No. 51 (2). pp. 393-438.

[41] Yu. Prokhorov *Elementary subgroups of the Cremona group of rank 3*, EMS Series of Congress Reports, 2011, pp. 327-338.

[42] A.O. Soldatenkov, *Holonomy of the Obata Connection on SU(3)*, International Mathematics Research Notices, 2011, No. 8.

[43] N. A. Tyurin, *Special Lagrangian fibrations on the flag variety F3*, Theoretical and Mathematical Physics, 2011, No. 167 (2). pp. 567-576.

[44] Н.А. Тюрин, *"Торы Чеканова и псевдоторические структуры"*, Успехи Математических наук, 2011, No. 66 (1). pp. 136-137.

[45] Н.А. Тюрин, *"Нестандартные торы и псевдоторические структуры"*, принято в печать "Теоретическая и математическая физика" (2012).

[46] B.L. Feigin, L.G. Rybnikov, A. Braverman, M.V. Finkelberg *A finite analog of the AGT relation I: finite W-algebras and quasimaps' spaces*, Communications in Mathematical Physics, 2011, No. 2, vol 308. pp. 457–478.

[47] R. Bezrukavnikov, V. Ostrik, M.V. Finkelberg *Character D-modules via Drinfeld center of Harish-Chandra bimodules*, Inventiones mathematicae, 2011, pp. 1-32.

[48] A. Braverman, M.V. Finkelberg, *Dynamical Weyl groups and equivariant cohomology of transversal slices on affine Grassmannians*, Mathematical Research Letters, 2011, No. 18 (3). pp. 505-512.

[49] Frenkel I., L.G. Rybnikov, B.L. Feigin, M.V. Finkelberg, *Gelfand-Tsetlin algebras and cohomology rings of Laumon spaces*, Selecta Mathematica, New Series, 2011, No. 17 (2). pp. 337-361.

[50] L.G. Rybnikov, A. Negut, M.V. Finkelberg, B.L. Feigin *Yangians and cohomology rings of Laumon spaces*, Selecta Mathematica, New Series, 2011, No. 11(3). pp. 573-607.

[51] I. Cheltsov, C. Shramov, *On exceptional quotient singularities*, Geometry and Topology, 2011, No. 15. pp. 1843-1882.

[52] V.V. Shevchishin, Ivashkovich S. *Local properties of J-complex curves in Lipschitz-continuous structures*, Math.Z., 2011, No. 268(3-4). pp. 1159-1210 [статья]

[53] V.V. Shevchishin, V.S. Matveev, *Two-dimensional superintegrable metrics with one linear and one cubic integral*, J.Geom.Phys., 2011, No. 61(8). pp. 1353-1377.

25. Препринты лаборатории

Литература

[1] Abramov, Y. V., *System of Resultants as a collection of coefficients of a unique Resultant,* arXiv:1111.4974

[2] Абрамов, Я.В., *Ноттингемская группа и экспоненциальное отображение Артина-Хассе*, статья подана в журнал " Математические заметки"

[3] Amerik, E., *A remark on a question of Beauville about lagrangian fibrations*, arXiv:1110.2852.

[4] Bogomolov, F. A., Bohning C., Graf von Bothmer H. *Linear bounds for levels of stable rationality*, arXiv:1102.4973.

[5] Bohning C., Bogomolov, F.A., *Stable cohomology of alternating groups*, arXiv:1108.2814.

[6] Fedor Bogomolov, Yuri Tschinkel, *Galois theory and projective geometry*, arXiv:1112.4634.

[7] Ornea L., Vuletescu V., Verbitsky, M., *Blow-ups of locally conformally Kahler manifolds*, arXiv:1108.4885

[8] Marcos Jardim, Misha Verbitsky, *Trihyperkahler reduction and instanton bundles on* CP^3, arXiv:1103.4431, 40 pages.

[9] R. Devyatov, *Generically transitive actions on multiple flag varieties,* arXiv:1007.1353v1 [math.AG].

[10] Sergey Gorchinskiy, Alexei Rosly *A polar complex for locally free sheaves*, arXiv:1101.5114.

[11] Henri Gillet, Sergey Gorchinskiy, Alexey Ovchinnikov, *Parameterized Picard–Vessiot extensions and Atiyah extensions*, arXiv:1110.3526.

[12] Sergey Gorchinskiy, Vladimir Guletskii, *Positive model structures for abstract symmetric spectra*, arXiv:1108.3509.

[13] A.I. Efimov, *Cohomological Hall algebra of a symmetric quiver*, arXiv:1103.2736, accepted to Compositio Mathematica.

[14] A.I. Efimov, *Quantum cluster variables via vanishing cycles*, arXiv:1112.3601.

[15] Mohammed Abouzaid, Denis Auroux, Alexander I. Efimov, Ludmil Katzarkov, Dmitri Orlov, *Homological mirror symmetry for punctured sphere*, arXiv:1103.4322.

[16] Dmitry A. Timashev, Vladimir S. Zhgoon, *Hamiltonian actions on symplectic varieties with invariant Lagrangian subvarieties*, arXiv:1109.5239

[17] Dmitry Kaledin, Wendy Lowen, *Cohomology of exact categories and (non-)additive sheaves*, arXiv:1102.5756.

[18] Valentina Kiritchenko, Amalendu Krishna *Equivariant cobordism of flag varieties and of wonderful symmetric varieties*, arXiv:1104.1089

[19] Valentina Kiritchenko, Evgeny Smirnov, Vladlen Timorin, *Schubert calculus and Gelfand-Zetlin polytopes*, arXiv:1101.0278.

[20] Alexander Kuznetsov, Alexander Polishchuk *Exceptional collections on isotropic Grassmannians*, arXiv:1110.5607.

[21] Ilya I. Bogdanov, Karine G. Kuyumzhiyan, *Simple Modules of Exceptional Groups with Normal Closures of Maximal Torus Orbits*, arXiv:1105.4577.

[22] A. Levin, A. Varchenko, *Cohomology of the complement to an elliptic arrangement*, arXiv:1106.5735.

[23] Francis C. S. Brown, Andrey Levin, *Multiple Elliptic Polylogarithms*, arXiv:1110.6917.

[24] Nikita Markarian, *Manifoldic homology and Chern-Simons formalism*, arXiv:1106.5352.

[25] Igor V. Netay, *Syzygy algebras for the Segre embedding*, arXiv:1108.3733.

[26] Igor V. Netay, *Parabolically connected subgroups*, arXiv:1103.4902.

[27] Canonaco A., Orlov D. O., Stellari P. *Does full imply faithful?* arXiv:1101.5931, принята к публикации в Journal of Noncommutative Geometry

[28] D. O. Orlov, *Landau-Ginzburg Models, D-branes, and Mirror Symmetry*, arXiv:1111.2962.

[29] Atanas Iliev, Ludmil Katzarkov, Victor Przyjalkowski, *Double solids, categories and non-rationality*, arXiv:1102.2130.

[30] Nathan Owen Ilten, Jacob Lewis, Victor Przyjalkowski, *Toric Degenerations of Fano Threefolds Giving Weak Landau-Ginzburg Models*, arXiv:1102.4664.

[31] Yuri Prokhorov, *A note on degenerations of del Pezzo surfaces*, arXiv:1108.5051.

[32] Shigefumi Mori, Yuri Prokhorov, *Threefold extremal contractions of types (IC) and (IIB)*, arXiv:1106.5180.

[33] Takashi Kishimoto, Yuri Prokhorov, Mikhail Zaidenberg *Affine cones over Fano threefolds and additive group actions*, arXiv:1106.1312.

[34] Yuri Prokhorov, *G-Fano threefolds, II*, arXiv:1101.3854.

[35] Inna Mashanova, Vladlen Timorin, *Captures, matings and regluings*, arXiv:1111.5696.

[36] Vladlen Timorin *Cut and semi-conjugate*, arXiv:1110.3131.

[37] Vladlen Timorin *Planarizations and maps taking lines to linear webs of conics*, arXiv:1108.1612.

[38] Alexander Blokh, Lex Oversteegen, Ross Ptacek, Vladlen Timorin, *Topological polynomials with a simple core*, arXiv:1106.5022.

[39] Andrey S. Trepalin *Rationality of the quotient of $\mathbb{P}^2$ by finite group of automorphisms over arbitrary field of characteristic zero*, arXiv:1110.6338.

[40] E. Feigin, M.V. Finkelberg *Degenerate flag varieties of type A: Frobenius splitting and BWB theorem*, arxiv:1103.1491.

[41] E. Feigin, M.V. Finkelberg, P. Littelmann, *Symplectic degenerate flag varieties*, arxiv:1106.1399.

[42] Anton Fonarev, *On minimal Lefschetz decompositions for Grassmannians*, arXiv:1108.2292.

[43] I. Cheltsov, C. Shramov, *Nine-dimensional exceptional quotient singularities exist*
arXiv:math/1110.6782.

[44] I. Cheltsov, C. Shramov, *Five embeddings of one simple group*, arXiv:0910.1783, accepted by Transactions of American Mathematical Society.

[45] Ivan Cheltsov, Andrew Wilson, *Del Pezzo surfaces with many symmetries*, arXiv:1101.1988.

[46] I. Cheltsov, C. Shramov, *Weakly-exceptional singularities in higher dimensions*, arXiv:1111.1920.

26.Приложения.

Приложение 1 Организация комплекса компьютерных экспериментов в теории представлений и гомологической алгебре

Приложение 2 Краткие аннотации некоторых докладов и выступлений на семинарах Лаборатории.

Приложение 3 Публикации

Приложение 4 Записки лекций по курсу Algebraic Geometry. Start up Course

Приложение 5 Листки задач по курсу Basic Algebraic Geometry

Приложение 6 Записки лекций и листки с задачами по курсу "Алгебраическая геометрия"

Приложение 7 Записки лекций и листки с задачами по курсу "Комплексная алгебраическая геометрия"

Все приложения представляются на электронном носителе.