федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего профессионального образования «Национальный
исследовательский университет «Высшая школа экономики» (НИУ ВШЭ)

УДК: 511.2, 512.7, 514.7

Согласовано
Проректор НИУ ВШЭ
________________ М.М.Юдкевич
29 декабря 2012г.

ОТЧЕТ
О НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОЙ РАБОТЕ

в рамках Постановления Правительства РФ от 09 апреля 2010г. № 220 «О мерах по привлечению ведущих ученых в российское образовательное учреждение высшего профессионального образования» (Договор № 11.G34.31.0023)

по проекту: Алгебраическая геометрия и ее приложения (годовой, этап № 3)

Руководитель НИР, ведущий ученый	
Доктор физико-математических наук	________________________Ф.А. Богомолов
	дата, подпись

Москва 2012

СПИСОК ИСПОЛНИТЕЛЕЙ

д.ф.-м.н.	подпись, дата	**Ф.А. Богомолов (3.13, 3.14, 3.16,3.20)**
д.ф.-м.н.	подпись, дата	**И.В. Артамкин (3.14)**
к.ф.-м.н.	подпись, дата	**Е.А. Америк (3.15)**
д.ф.-м.н.	подпись, дата	**А.И. Бондал (3.5)**
PhD	подпись, дата	**М.С. Вербицкий (3.2, 3.3, 3.7)**
к.ф.-м.н.	подпись, дата	**А.Л. Городенцев (3.17)**
к.ф.-м.н.	подпись, дата	**С.О. Горчинский (3.18)**
	подпись, дата	**О.В. Гришина (3.5)**
к.ф.-м.н.	подпись, дата	**А.Д. Елагин (3.5)**
к.ф.-м.н.	подпись, дата	**А.И. Ефимов (3.5)**
к.ф.-м.н.	подпись, дата	**В.С. Жгун (3.7)**
к.ф.-м.н.	подпись, дата	**А.И. Зыкин (3.13)**
д.ф.-м.н.	подпись, дата	**Д.Б. Каледин (3.4)**
к.ф.-м.н.	подпись, дата	**В.А. Кириченко (3.8)**
д.ф.-м.н.	подпись, дата	**А.Г. Кузнецов (3.5)**
д.ф.-м.н.	подпись, дата	**В.С. Куликов (3.14)**
PhD	подпись, дата	**К.Г. Куюмжиян (3.20)**
к.ф.-м.н.	подпись, дата	**А.М. Левин (3.12)**
к.ф.-м.н.	подпись, дата	**С.М. Львовский (3.17)**
	подпись, дата	**Е.А.Малинина (3.13)**
к.ф.-м.н.	подпись, дата	**Н.С.Маркарян (3.5)**
д.ф.-м.н.	подпись, дата	**Д.О.Орлов (3.5)**
к.ф.-м.н.	подпись, дата	**Л.Е. Посицельский (3.11)**
д.ф.-м.н.	подпись, дата	**Ю.Г. Прохоров (3.10)**
к.ф.-м.н.	подпись, дата	**В.В. Пржиялковский (3.10)**
д.ф.-м.н.	подпись, дата	**М.З. Ровинский (3.16)**

к.ф.-м.н.	подпись, дата	**А.А. Рослый (3.5)**
к.ф.-м.н.	подпись, дата	**С.Ю. Рыбаков (3.19)**
к.ф.-м.н.	подпись, дата	**Е.Ю. Смирнов (3.8)**
к.ф.-м.н.	подпись, дата	**В.А. Тиморин (3.8)**
д.ф.-м.н.	подпись, дата	**Н.А. Тюрин (3.15)**
к.ф.-м.н.	подпись, дата	**Е.Б.Фейгин (3.6)**
к.ф.-м.н.	подпись, дата	**М.В. Финкельберг (3.6)**
д.ф.-м.н.	подпись, дата	**И.А. Чельцов (3.9)**
PhD	подпись, дата	**В.В. Шевчишин (3.7, 3.15)**
к.ф.-м.н.	подпись, дата	**К.А. Шрамов (3.9)**
	подпись, дата	**Я.В. Абрамов (3.17)**
к.ф.-м.н.	подпись, дата	**Р.Я. Будылин (3.18)**
	подпись, дата	**Г.С. Мутафян (3.6)**
	подпись, дата	**И.В. Нетай (3.17)**
	подпись, дата	**А.О. Солдатенков (3.7)**
	подпись, дата	**А.С. Трепалин (3.10)**
	подпись, дата	**А.В. Фонарёв (3.5)**
	подпись, дата	**Е.А. Абрикосов (3.14)**
	подпись, дата	**Д.В. Кубрак (3.13)**
	подпись, дата	**Н.Е. Сахарова (3.12)**
	подпись, дата	**Л.А. Суханов (3.17)**
Нормоконтролёр	подпись, дата	**В.В. Кузнецова**

РЕФЕРАТ

Ключевые слова: группа Галуа, функциональное поле, рациональная точка многообразия, К3 поверхность, рациональные кривые, конечное поле, кэлерово многообразие, гиперкэлерово многообразие, гиперкомплексное многообразие,отображение периодов, специальное лагранжево подмногообразие, лагранжево слоение, калибрация, локально конформно кэлерово многообразие,кэлеров потенциал, плюрисубгармоническая функция, комплексное многообразие, некэлерово многообразие, накрытие, монодромия, биголоморфизм, теорема Торелли, пространство Тэйхмюллера, группа Тэйхмюллера, некоммутативная геометрия, аддитивные категории, заставы Дринфельда, когомологии Горески–Макферсона, алгебра Вирасоро, модули Верма, алгебра Гельфанда–Цетлина, стабильные расслоения, дифференциальная теория Галуа, теория Пикара–Вессио, A_∞-алгебры, сизигии, комплекс Кошуля,алгебры Кошуля, пространство Гурвица, исчисление Шуберта, многогранники Ньютона, многогранники Ньютона-Окунькова, операторы Демазюра, мотивные структуры, когомологии Хохшильда, циклические когомологии, алгебры Хопфа, группа Кремоны, многообразия Фано, метрики Кэлера–Эйнштейна, исключительные фактор-особенности, гипотеза Ленга, К3-поверхность, рациональные эндоморфизмы, зеркальная симметрия, геометрическое квантование, когомологии Флоера, торы Чеканова, поверхность дель Пеццо, дзета-функция, исключительный набор, ПБВ-вырождение, многообразие флагов,бесконечная транзитивность.

Краткая аннотация: Приводятся результаты исследований в области алгебраической геометрии, комплексной геометрии, дифференциальной геометрии, геометрической теории представлений и теории чисел.

Основные темы исследования - теория производных категорий, дифференциальная теория Галуа, геометрическая теория представлений, бирациональная алгебраическая геометрия, геометрия комплексных многообразий (кэлеровых, гиперкэлеровых, гиперкомплексных).

Результаты носят теоретический характер и являются существенно новыми. Возможны приложения к теоретической физике, дифференциальной геометрии, теории чисел.

Содержание

1 Введение

За отчетный период (2012-й год) Лабораторией алгебраической геометрии и ее приложений было организовано 7 международных конференций в г.Москве; вторая летняя школа “Алгебра и геометрия” в г.Ярославле, где Лаборатория выступила главным организатором. Сотрудниками Лаборатории была опубликована 61 статья и подготовлено к печати 34 препринта; по результатам этой работы сделано более 90 докладов. Всего сотрудники Лаборатории приняли участия более чем в 60 конференциях, семинарах и школах как в России, так и за рубежом.

Научная деятельность сотрудников Лаборатории была отмечена различными премиями и наградами. Сотрудник лаборатории А. И. Ефимов получил грант Королевского Общества “Newton Research Fellowship”. Е.Б.Фейгин, также являющийся сотрудником лаборатории, получил персональный грант Президента РФ. Сотрудники Лаборатории С. О. Горчинский, Д. Б. Каледин, В. В. Пржиялковский, Е. Ю. Смирнов, А. О. Солдатенков, В. А. Тиморин, А. В. Фонарев стали лауреатами конкурса стипендий фонда “Династия”. А. И. Зыкин, А. Г. Кузнецов, Е. Ю. Смирнов, Ю. Г. Прохоров, В. А. Тиморин, Е. Б. Фейгин стали победителями конкурса грантов Саймонса для математиков. Стажер-исследователь Лаборатории Д.В.Кубрак получил второе место в номинации “Студенты” VII Конкурса Мёбиуса. Кроме того, лауреатами конкурса научно-исследовательских работ студентов (НИРС) НИУ ВШЭ стали Д. В. Кубрак (1 место), Н. Е. Сахарова (2 место), Л. А. Суханов (3 место). Стажер-исследователь лаборатории А. О. Солдатенков был награжден специальной стипендией для аспирантов НИУ ВШЭ. Стажер-исследователь Е. А. Абрикосов получил стипендию фонда Потанина. И. В. Нетай получил стипендию фонда Саймонса для студентов и аспирантов математиков.

Сотрудниками лаборатории были прочитаны около 40 курсов лекций, многие курсы читались впервые.

Были получены значительные результаты по основным темам, заявленным на 2012-й год:

- Доказательство классической гипотезы о гладкости пространства модулей математических инстантонов ранга 2 на $\mathbb{CP}^3$.
- Использование теоремы Торелли для изучения геометрии и топологии гиперкэлеровых многообразий.

- Исследование мотивного применения циклических когомологий в контексте некоммутативной гипотезы Тэйта.
- Триангулированные категории в алгебраической геометрии.
- Вырожденные многообразия флагов и теория Ли.
- Геометрия гиперкомплексных многообразий.
- Развитие теории выпуклых тел Ньютона-Окунькова для исследования геометрии многообразий с действием группы.
- Исследование конечных подгрупп в группе Кремоны.
- Бирациональная классификация алгебраических многообразий и проблемы рациональности.
- Развитие гомологической теории слабо искривленных дифференциально-градуированных и гомотопически ассоциативных алгебр над топологическими локальными кольцами.
- Сингулярные значения модулярных форм и специальные значения L-функций.
- Изучение асимптотических свойств семейств многообразий над конечными и числовыми полями.
- Инварианты неприводимых компонент пространства Гурвица и пространства модулей алгебраических поверхностей.
- Лагранжевы расслоения на гиперкэлеровых многообразиях.
- Линейные и полулинейные гладкие представления "больших" групп.
- Исследование гомологических и гомотопических свойств алгебр сизигий проективных вложений орбит классических групп в приложениях к геометрии и математической физике.
- Исследование изомонодромных дифференциальных уравнений методами дифференциальных категорий.
- DG-модули над алгеброй де Рама.

- Исследование связи унирациональности алгебраического многообразия с существованием бесконечно транзитивной модели у его стабилизации.

Результаты работ по этим темам составляют содержание настоящего отчета. Также в отчет вошли следующие приложения: аннотации курсов лекций, прочитанных в рамках повышения квалификации сотрудников Лаборатории (Приложение 1), аннотации докладов по проведенным научным исследованиям сотрудников, привлекаемых Лабораторией на основании договоров гражданско-правового характера (Приложение 2).

2 Проведение видеоконференций и курсов дистанционного обучения

В течение 2012г. Лаборатория алгебраической геометрии и ее приложений провела несколько международных конференций, в том числе: "Birational and affine geometry" ("Бирациональная и аффинная геометрия"); международная конференция, посвященная 65-летию А.Г.Хованского (Askoldfest); первая международная конференция по алгебраической геометрии, теории элементарных частиц и теории струн "Relation of String Theory to Gauge Theories and Moduli Problems of Branes" ("Связь теории струн с калибровочными теориями и проблемы модулей бран"); международный научно-исследовательской семинар по комплексной геометрии и голоморфным слоениям, посвященный памяти Марко Брунеллы; ежегодная мемориальная конференция "Алгебраическая и дифференциальные геометрии Андрея Тюрина"; посвященная памяти Андрея Николаевича Тюрина; международная конференция "Дзета-функции"; международная конференции, посвященная 60-летию В.С.Куликова. Кроме того, была проведена вторая летняя школа "Алгебра и геометрия" в г.Ярославле. Доклады на проведенных Лабораторией конференциях и лекции для студентов были записаны и выложены на официальном сайте Лаборатории: http://ag.hse.ru/video/

Часть докладов на проведенных конференциях транслировалась в прямом эфире в сети интернет.

Кроме того, были записаны наиболее интересные доклады на еженедельных семинара Лаборатории и некоторые курсы лекций научных сотрудников Лаборатории, в том числе:

- "Исключительные группы и алгебры Ли" (Абрамов Я.В.)
- "Комплексные поверхности" (М.С.Вербицкий)
- "Дополнительные главы теории чисел, часть 2" (Зыкин А.И.)
- "Алгебра -2" для первого курса (Смирнов Е.Ю.)
- "Геометрия" (со-руководитель Тиморин В.А.)
- "Гиперболические группы по Громову" (Вербицкий М.С.)
- "Введение в теорию чисел" (Зыкин А.И.)

- “Алгебра-3 для второго курса” (Смирнов Е.Ю.)
- “Алгебра-1 для первого курса” (Фейгин Е.Б.)

Часть вышеперечисленных курсов входит в рабочие учебные планы факультета математики НИУ ВШЭ, к курсам кроме видеозаписи лекций имеются конспекты лекций, листки с задачами, задания к экзаменам. Материалы доступны в сети интернет, в частности, на сайте факультета математики: www.math.hse.ru в разделе “Студентам” - “Учебные материалы” и “Курсы прошлых лет”. Размещение в открытом доступе всех учебных материалов дает возможность студентам из других ВУЗов (не только Москвы, но и из других городов России) ознакомиться с разработанными научными сотрудниками Лаборатории учебными программами, а на все возникающие вопросы, студенты всегда могут получить ответ по электронной почте и с использованием других интернет-ресурсов, в частности, Skype. Ведущий ученый, научный руководитель Лаборатории Ф.А.Богомолов также регулярно дает консультации студентам и ведет научную работу с сотрудниками Лаборатории с помощью интернет-ресурсов, которые позволяют, в частности, устраивать и видео-конференции, для людей находящихся в разных точках мира.

В декабре 2012г. Лаборатория ввела в эксплуатацию видеокомплекс, который позволяет не только записывать доклады и лекции для дальнейшего выкладывания их в сети интернет, но и вести их трансляцию в режиме on-line с возможностью обратной связи. Ввод в эксплуатацию данного комплекса, позволит усовершенствовать и внедрить в полном объеме программу дистанционного обучения, которая разработана в Лаборатории. Данная программа включает в себя, в частности, трансляцию лекций, публикацию в сети интернет их видеозаписей, конспектов лекций и листков с задачами, а также обязательную обратную связь с преподавателем с использованием имеющихся интернет-ресурсов, возможность задать вопрос, получить консультацию, вместе разобрать сложную математическую задачу.

3 Доказательство классической гипотезы о гладкости пространства модулей математических инстантонов ранга 2 на $\mathbb{CP}^3$.

Пространства модулей инстантонов на $\mathbb{CP}^2$ строятся из четверки матриц с использованием классического подхода ADHM. Эта конструкция (принадлежащая Атье, Дринфельду, Хитчину и Манину) был впоследствии понята в контексте гиперкэлеровой редукции.

Подобная интерпретация пространства модулей для $\mathbb{CP}^3$ была найден Маркосом Жардимом и Игорем Френкелем. Совместно с Жардимом, Михаил Вербицкий (заместитель руководителя Лаборатории) нашел геометрическую интерпретацию для этого матричного описания. Это позволило решить гипотезу Барта 30-летней давности, доказав, что модули инстантонов ранга 2 на $\mathbb{P}^3$ являются гладкими.

Жардимом и Вербицким найден новый вид геометрической структуры, называемый трисимплектическая структура, и доказал, что пространство инстантонов обладает этой структурой. Они построили каноническую связность на любом трисимплектическом многообразии и определили геометрические процедуры редукции в трисимплектической геометрии.

Трисимплектическая структура на комплексном $2n$-мерном многообразии это тройка голоморфных симплектических форм, таких что любая линейная комбинация этих форм имеет ранг $2n$, n или 0. Жардим и Вербицкий и показали, что трисимплектическое многообразие оснащено голоморфной 3-сетью и связность Черна этой 3-сети голоморфна, не имеет кручения и сохраняет три симплектических формы. Жардим и Вербицкий построили трисимплектические структуры на модулях регулярных рациональных кривых в пространстве твисторов гиперкэлерова многообразия и определили трисимплектическую редукцию трисимплектического многообразия, которое является комплексифицированной формой гиперкэлеровой редукции. Жардим и Вербицкий доказали, что трисимплектическая редукция в пространстве регулярных рациональных кривых в пространстве твисторов многообразия согласована с гиперкэлеровой редукцией на (Marcos Jardim, Misha Verbitsky, “Trihyperkahler reduction and instanton bundles on $\mathbb{CP}^3$”, arXiv: 1103.4431).

Это соображение основано на гладкости модулей рациональных кривых в пространстве твисторов, которое было также исследовано Вербицким в 2012 году. Было показано, что компактность неприводимых компонент пространства модулей (известная для кэлеровых многообразий) также может быть доказана для некоторых некэлеровых и даже некомплексных многообразий с помощью теоремы компактности Громова (M. Verbitsky, “Pseudoholomorphic curves on nearly Kahler manifolds”, arXiv:1208.6321).

Этот подход был еще более плодотворным для изучения твисторного пространства, где было показано (с помощью свойства Мойшезона, полученных из геометрии рациональных кривых), что твисторное пространство не может иметь симплектическую эрмитову или даже плюризамкнутую метрику (M. Verbitsky, “Rational curves and special metrics on twistor spaces”, arXiv:1210.6725).

4 Использование теоремы Торелли для изучения геометрии и топологии гиперкэлеровых многообразий.

Пространство модулей комплексных структур на данном гладком ориентированном многообразии M определяется, согласно Кодаире и Спенсеру, как фактор многообразия Фреше всех интегрируемых почти комплексных структур по действию группы сохраняющих ориентацию диффеоморфизмов, которая рассматривается как группа Ли Фреше. Глобальная теорема Торелли для гиперкэлеровых многообразий является утверждением о модулях, пространстве Тейхмюллера и группе классов отображений гиперкэлерова многообразия. Пространство Тейхмюллера компактного многообразия является фактором многообразия Фреше всех интегрируемых почти комплексных структур на M по группе изотопий. Когда M является многообразием с неотрицательным каноническим расслоением, пространство Тейхмюллера является комплексным многообразием (не обязательно хаусдорфовым); этот результат в этой конкретной форме получен Ф. Катанезе.

Группа классов отображений является фактором всей группы диффеоморфизмов по изотопиям, и пространство модулей является фактором пространства Тейхмюллера по группе классов отображений.

В работе “A global Torelli theorem for hyperkahler manifolds” М. Вербицкий (заместитель руководителя Лаборатории) найден способ выразить оба геометрических объекты в явном виде. Оказывается, что можно редуцировать нехаусдорфовы точки пространства Тейхмюллера, получая гладкое однородное компактное многообразие, изоморфное пространству периодов структур Ходжа на вторых когомологиях. Группа классов отображений была вычислена с помощью вычисления группы автоморфизмов когомологий, полученного ранее Вербицким, и результата Салливана, выражающего группу классов отображений кэлерова многообразия в терминах группы автоморфизмов когомологий.

В совместной работе с Сашей Ананьиным (бразильский математик, который провел несколько месяцев в 2012 году в Лаборатории алгебраической геометрии) с помощью глобальной теоремы Торелли была показано, что любой дивизор в пространстве Торелли, полученный путем фиксирования поляризации, плотен в соответствующих модулях. В 2012 году с помощью применения этого результата было доказано, что любое гиперкэлерово многообразие, принадлежащее какому-либо из известных классов ($K3^{[n]}$, обобщенные Куммеровы и два примера, приведенные О'Грэйди), не является гиперболическим (Ljudmila Kamenova, Misha Verbitsky, "Families of Lagrangian fibrations on hyperkaehler manifolds", arXiv:1208.4626).

5 Исследование мотивного применения циклических когомологий в контексте некоммутативной гипотезы Тэйта.

Некоммутативная алгебраическая геометрия понимается здесь в гомологическом или категорном смысле, как недавно и ввели ее Концевич, Тоен, Келлер, Орлов и другие. Грубо говоря, некоммутативное многообразие это DG-категория, рассмотренная с точностью до DG-Морита-эквивалентности (доклад Б. Келлера на ICM 2006 года является отличным обзором на эту тему). Обычному алгебраическому многообразию X сопоставляется производная категория когерентных пучков на X с ее стандартным DG-оснащением.

Эта область является текущим исследовательским проектом Дмитрия Каледина, работающего в Лаборатории.

Первые результаты Каледина в этой области были получены около пяти лет назад. Было показано, что при некоторых неограничительных предположениях периодические циклические гомологии гладкой и собственной DG-алгебра над конечным полем допускают версию изоморфизма Картье. С помощью этого изоморфизма Каледин смог развить версию хорошо известного метода Делиня и Иллюзи и доказать, опять же при неограничительных предположениях, некоммутативную теорему о редукции Ходжа к де Раму, ранее высказанную как гипотезу Концевичем и Зойбельманом.

Будучи уже в штате Лаборатории, Дмитрий Каледин значительно улучшил и расширил свои ранние результаты.

Каледин набросал программу из уже известных результатов и дальнейших гипотез, рассказанную в разделе докладов “Motivic structures in Non-Commutative Geometry” на Международном математическом конгрессе в Хайдарабаде в 2010 (опубликовано в Proc. ICM2010). Записывая результаты, указанные выше, приблизительно весной 2010 года Каледин также понял, что некоторые возможны новые улучшения, возможно с потенциально очень сильными следствиями, это направление стало его главной темой с 2010 года.

Помимо когомологий де Рама, алгебраические многообразия над конечным полем также допускают так называемые кристаллические когомологии, обнаруженные Гротендиком в конце 1960-х годов. Если многообразие гладко, то кристаллические когомологии можно вычислить комплексом де Рама-Витта, построенным Делинем и Иллюзи в 1970-е годы. Кристаллические когомологии оснащены эндоморфизмом Фробениуса, и комплекс де Рама-Витта имеет определенные канонические эндоморфизмы, которые "уточняют" морфизм Фробениуса. Основываясь на этой структуре, можно написать некоторые взвешенные группы когомологий, которые являются естественным пространством, содержащим образ регуляторного отображения из алгебраической K-теории (грубо говоря, это аналогично ситуации l-адических когомологий, где берутся инварианты по отношению к действию Фробениуса). Некоторые авторы, например Милн, ожидают, что для гладкого и собственного алгебраического многообразия над алгебраическим замыканием конечного поля это регуляторное отображение становится изоморфизмом, если тензорно умножить K-группу на $\mathbb{Z}_p$. Даже если это верно, доказательство должно быть очень трудным (на уровне сложности доказательства гипотезы Тейта —аналогичного утверждения для l-адических когомологий).

Есть надежда на то, чтобы построить некоммутативную версию комплекса де Рама–Витта со всеми его естественными дополнительными структурами, таким образом, обобщая кристаллические когомологии для некоммутативных условий. Тогда можно надеяться построить регуляторное отображение из алгебраической K-теории и доказать, что для гладкой и собственной DG-категории над алгебраическим замыканием конечного поля оно становится изоморфизмом после про- пополнения. Это влечет, в частности, коммутативную версию утверждения, данную выше.

В некотором смысле, часть этой программы уже сделана в теории топологических циклических гомологий: в частности, Хессельхольтом и другими было показано, что так называемый "Спектр $TR(A)$" для гладкой коммутативной алгебры A над конечным полем, на самом деле является спектром Эйленберга–Маклейна, соответствующим комплексу де Рама-Витта A. Более того, так называемое "циклотомическое отображение следа" Бокштедта–Сяна–Мадсена служит регуляторным отображением для этой теории, и Hesselholt и Madsen доказали, что для конечномерной алгебры A он становится изоморфизмом после про- пополнения. Тем не менее, используемые ими конструкции чрезвычайно громоздкие, используют много топологической техники и, как следствие этого, скорее всего не могут привести к более глубоким результатам. В частности, DG-обобщения кажутся очень тяжелыми.

Из набросков программы выше, часть, касающаяся комплекса де

Рама-Витта, более или менее закончена и записана, она уже была представлена на нескольких конференций и сериях докладов. Показано, что можно построить “комплекс Хохшильда-Витта”, который имеет точно такое же отношение к комплексу Хохшильда, какое комплекс де Рама-Витта имеет к обычному комплексу де Рама. Опубликованная часть этой работы содержится в статье “Witt vectors and the Japanese cocycle”, Moscow Mathematical Journal, 2012, 12 (3), стр. 593-604, в ней переинтерпретируется обычное умножение коммутативных векторов Витта новым K-теорным способом.

Часть, касающаяся обобщения для DG-категорий, эта часть также записана и может быть быстро завершена.

6 Триангулированные категории в алгебраической геометрии.

Главным гомологическим инвариантом алгебраического многообразия является его производная категория когерентных пучков . В ней содержится наиболее важная геометрическая информация о многообразии. Например, во многих случаях (для многообразий Фано или многообразий общего типа) многообразие может быть восстановлено по его производной категории когерентных пучков. С другой стороны, в некоторых случаях производная категория может быть явно описана через полуортогональное разложение или через исключительный набор, что дает много информации о геометрии исходного многообразия и становится мощным инструментом для исследований.

Некоторые важные результаты в этой области недавно были получены Александром Кузнецовым и Дмитрием Орловым, работающими в Лаборатории. В статье с неожиданными результатами Böhning, Graf von Bothmer и Sosna предъявили исключительную последовательность максимальной возможной длины 11 на классической поверхности Годо, которая является фактором квинтики Ферма по действию группы $\mathbb{Z}_5$.

В совместной статье с Валерием Алексеевым "Derived categories of Burniat surfaces and exceptional collections" (arXiv:1208.4348). Д. Орлов проводит аналогичное вычисление для поверхностей Бюрниа, которые могут быть описаны, как $\mathbb{Z}_2^2$-накрытия Галуа поверхности $\mathrm{Bl}_3\mathbb{P}^2$ или как $\mathbb{Z}_2^3$-факторы $(2,2,2)$-дивизоров в произведении трех эллиптических кривых.

Решетка Пикара поверхности Бюрниа изоморфна решетке для поверхности дель Пеццо шестой степени. Таким образом, число Пикара поверхности Бюрниа равно четырем, а длина максимальной исключительной последовательности равно только шести.

Результаты этого вычисления применимы к любым поверхностям Бюрниа, образующим четырехмерное семейство. Для любой такой поверхности X был найден исключительный набор длины шесть $\Upsilon = (L_1, \dots L_6)$, где L_i - линейные расслоения. Этот набор распадается в три блока размера 2, 3 и 1, так что пучки в каждом блоке взаимно ортогональны. Υ дает полуортогональное разложение ограниченной производной категории когерентных пучков на X.

Также они вычисляют дифференциальную градуированную (DG) алгебру эндоморфизмов коллекции Υ и показывают, что она формальна, то есть квази-изоморфна своей алгебре когомологий. Эта алгебра постоянна во всем семействе и для любой поверхности Бюрниа одна и та же.

Допустимая подкатегория $\mathscr{A}$, дополнительная к Υ, является "почти фантомной": ее гомологии Хохшильда тривиальны, а группа Гротендика - это группа кручения $\mathbb{Z}_2^6$.

С другой стороны, хорошо известно (Бондал – Орлов, 2001), что гладкое многообразие X с обильным каноническим дивизором может быть полностью восстановлено по своей производной категории. Из этого неожиданным образом следует, что, хотя $\mathscr{A}$ "почти фантомна", все нетривиальные вариации поверхности Бюрниа внутри четырехмерного семейства спрятаны в подкатегории $\mathscr{A}$ вместе с функтором склейки между этой подкатегорией и фиксированной подкатегорией $\mathscr{D}$.

Статья А. Кузнецова "Instanton bundles on Fano threefolds", CEJM 2012, 10(4), 1198-1231 является приложением методов производных категорий в геометрии. В этот статье Кузнецов рассматривает пространство модулей так называемых инстантонных расслоений на трехмерных многообразиях Фано индекса 2. Используя полуортогональные разложения, он доказывает несколько общих фактов об этих пространствах модулей и дает их явное описание для трехмерных многообразий степени 5 и 4.

В совместной статье с В. Лунцем "Categorical resolutions of irrational singularities" (A. Kuznetsov, V. Lunts) А. Кузнецовым построено категорное разрешение общих особенностей над полем характеристики ноль.

7 Вырожденные многообразия флагов и теория Ли.

Вырождения многообразий флагов, в частности ПБВ-вырождение (Пуанкаре–Биркгофа–Витта), является одним из направлений исследований Е. Фейгина, работающего в Лаборатории алгебраической геометрии. Эти исследования направлены на изучение ПБВ-вырождений различных алгебраических и геометрических объектов, возникающих в теории Ли. Ключевую роль здесь играют неприводимые представления простых алгебр Ли и (обобщенные) многообразия флагов, которые также являются важными объектами и в теории представлений, комбинаторике, алгебраической геометрии и теории алгебраических групп.

Грубо говоря, идея ПБВ-вырождения состоит в переходе от сложной некоммутативной алгебры Ли (или группы Ли) к более простой абелевой алгебре Ли (абелевой унипотентной группе Ли) той же размерности. Эта процедура позволяет получить новые структуры на исходных (классических) объектах, построить новые алгебраические многообразия с действием групп, а также дает геометрическую и теоретико-представленческую реализацию классических комбинаторных объектов.

Пусть $\mathfrak{g}$ - простая алгебра Ли с борелевской подалгеброй $\mathfrak{b} \subset \mathfrak{g}$ и дополнительной нильпотентной подалгеброй $\mathfrak{n}^-$, то есть $\mathfrak{g} = \mathfrak{b} \oplus \mathfrak{n}^-$. ПБВ-вырождение дает новую вырожденную алгебру $\mathfrak{g}^a = \mathfrak{b} \oplus (\mathfrak{n}^-)^a$, где $(\mathfrak{n}^-)^a$ -абелева Алгебра Ли, порожденная, как линейное пространство, векторами алгебры $\mathfrak{n}^-$. Эта новая алгебра обладает богатой теорией представлений. А именно, любому представлению со старшим весом V_λ классической алгебры Ли соответствует вырожденный объект V_λ^a, являющийся представлением вырожденной алгебры Ли $\mathfrak{g}^a$. Пространство V_λ^a имеет ту же размерность и тот же характер, что и его классическая версия; у него также имеется ПБВ-градуировка, позволяющая определить q-характер модуля V_λ; который может быть реализован в виде циклического представления полиномиального кольца, другими словами, этот характер изоморфен фактору определенного полиномиального кольца по идеалу соотношений. Е. Фейгин, Г. Фурье и П. Литтлманн в препринте "PBW–filtration over Z and compatible bases for $V_{\mathbb{Z}}(\lambda)$ in type A_n and C_n" (arXiv:1204.1854) описали структуру представлений V_λ^a для алгебр Ли $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_n$ и $\mathfrak{g} = \mathfrak{sp}_{2n}$. В частности, они нашли описание определяющего идеала и комбинаторную формулу для q-характеров вырожденных представлений. Кроме того, они нашли мономиальный базис для модулей V_λ^a (а следовательно и для классических представлений V_λ), используя многогранники Винберга.

Интересным и неожиданным оказывается тот факт, что теория представлений алгебры Ли $\mathfrak{g}^a$ намного богаче, чем у ее классической версии $\mathfrak{g}$, как это показано в препринте Е. Фейгина “Degenerate SL_n: representations and flag varieties”, (arXiv:1202.5848, выйдет в Функциональном Анализе и его приложениях). В этом направлении по-прежнему остается много открытых важных вопросов.

Также Е. Фейгиным были получены интересные результаты о комбинаторных структурах, возникающих в теории ПБВ-вырождений. Хорошо известно, что Эйлерова характеристика (полных) многообразий флагов для SL_n равна $n!$. Выяснилось (Е. Фейгин, 2011), что Эйлерова характеристика (полных) вырожденных многообразий флагов типа A задается приведенными числами Дженокки второго рода. Эти числа являются классическим объектом в комбинаторике и возникают в различных задачах. С использованием геометрических методов было получено новое комбинаторное описание этих чисел и их q-аналогов, определяемых через полиномы Пуанкаре вырожденных многообразий флагов. Е. Фейгин, Г. Церулли и М. Рейнеке смогли вывести явную формулу для этих чисел (E. Feigin, G. Cerulli Irelli, M. Reineke, “Quiver Grassmannians and degenerate flag varieties”, Algebra and Number Theory 6-1 (2012), 165–194), а также их производящую функцию (E. Feigin, “The median Genocchi numbers, Q-analogues and continued fractions”, European Journal of Combinatorics 33 (2012), pp. 1913–1918).

Другое комбинаторное приложение этой теории связано с изучением особых страт вырожденных многообразий флагов. В статье “Degenerate flag varieties: moment graphs and Schroder numbers” (E. Feigin, G. Cerulli Irelli, M. Reineke, arXiv:1206.4178) было доказано, что Эйлеровы характеристики гладких страт вырожденных многообразий флагов задаются большими числами Шредера, а соответствующие полиномы Пуанкаре получаются из исследования множества путей Шредера, а именно из подсчета диагональных шагов в путях.

8 Геометрия гиперкомплексных многообразий.

Гиперкэлерова геометрия, или, более точно, изучение гиперкэлеровых многообразий началось в конце 1970-х в пионерской работе Е. Калаби и Ф.Богомолова. С тех пор это — активно развивающаяся область. Работы С.Мукаи, А.Бовилля, Н.Хитчина, С.Саламона, С.-Т.Яу, и многих других вскрыли глубокие и неожиданные свойства гиперкэлеровых многообразий. Были открыты связи между гиперкэлеровой геометрией и такими различными областями математики как комплексная алгебраическая геометрия (включая знаменитую программу классификации С.Мори), симплектическая геометрия, теория представлений, теория калибровки и теория суперструн, зеркальная симметрия.

Зам. заведующего Лабораторией Михаил Вербицкий внес свой вклад в развитие гиперкэлеровой геометрии и связанных областей. Им было показано в 1993-98, что алгебро-геометрические объекты (подмногообразия, расслоения, когерентные пучки) на общих гиперкэлеровых многообразиях естественным образом согласованы с гиперкэлеровой структурой. Таким образом, все естественные алгебро-геометрические операции, примененные к гиперкэлеровым многообразиями, (такие как, например, взятие пространства модулей, или разрешение особенностей) дают снова гиперкэлеровы многообразия. Это позволяет говорить о гиперкэлеровой алгебраической геометрии.

Условие гиперкэлеровости достаточно сильное, интуитивное понимание кватернионной структуры лучше отражено в условии гиперкомплексности, которое слабее. Можно определить гиперкомплексное многообразие, как многообразие, наделенное тремя комплексными структурами, которые удовлетворяют кватернионному условию. В 1996 М. Вербицкий показал, что это условие можно определить в алгебро-геометрическом контексте - можно говорить о сингулярных гиперкомплексных пространствах и гиперкомплексных схемах. В терминах голономии можно говорить о гиперкомплексном многообразии как о многообразии со связностью без кручения с голономией в $\mathrm{GL}(n, \mathbb{H})$. Как показал Обата, такая связность существует и единственна на каждом гиперкомплексном многообразии.

В физике часто встречаются гиперкомплексные многообразия с кватернионной эрмитовой метрикой, такой что имеется связность с тотально антисимметричным кручением, сохраняющая метрику и кватернионную структуру. Такие многообразия называются гиперкэлеровыми многообразиями с кручением. Гиперкэлеровы многообразия с кручением(HKT-многообразия) были введены P.S.Howe и G.Papadopoulos в 1996, и с тех пор много обсуждались в физической литературе. В физике HKT-многообразия появляются как многообразия модулей бран солитонов в супергравитации и M-теории. HKT-многообразия также появляются как пространство модулей некоторых специальных черных дыр при $N = 2$ супергравитации.

Геометрия гиперкомплексных многообразий достаточно богата, но еще недостаточно понята. Существуют компактные однородные примеры, компактные неоднородные примеры, полученные как деформации, компактные неоднородные примеры, полученные как тотальные пространства различных расслоений. Ясно, что придумать новые примеры гиперкомплексных многообразий не так сложно, как в случае гиперкэлеровых многообразий. Большинство этих примеров HKT-многообразия (однако, Гранчаров и Фини нашли гиперкомплексные многообразия, не имеющие HKT-метрики).

Связь между гиперкомплексными многообразиями и HKT-метриками такая же, как между комплексными многообразиями и кэлеровой метрикой. Существует понятие HKT-потенциала. Локально HKT-метрика может быть построена так же, как кэлерова: можно взять выпуклую функцию в качестве потенциала. Как доказали Banos и Swann, локально любая HKT-метрика допускает потенциал.

HKT-структура, открытая физиками, революционизирует математическое изучение гиперкомплексной геометрии. В статье Вербицкого (2002) аргумент суперсимметричности используется чтобы найти двойственность Лефшецова типа на гармонических спинорах на гиперкомплексных многообразиях. Позднее эти результаты были использованы, чтобы изучить гиперкомплексные многообразия, имеющие кэлерову метрику. Было показано, что такие многообразия всегда гиперкэлеровы.

В статье “Calibrations in hyperkaehler geometry” (Gueo Grantcharov, Misha Verbitsky, выйдет в Commun. Contemp. Math.) некоторые из этих феноменов были объяснены с помощью теории калибровки. Авторы описали семейство калибровок, естественно возникающее на гиперкэлеровом многообразии. Эти калибровки калибруют голоморфный Лагранжиан, голоморфные изотропные и голоморфные коизотропные подмногообразия. Когда M является HKT (гиперкэлеровым с кручением) многообразием с голономией в $\mathrm{SL}(n, \mathbb{H})$, то существует другое семейство калибровок Φ_i, которое калибрует голоморфный Лагранжиан и голоморфные коизотропные подмногообразия. Калибровки Φ_i, вообще говоря, не параллельны по отношению к какой-либо связности без кручения на M. В статье "Subvarieties of hypercomplex manifolds with holonomy in $SL(n, H)$" (Journal of Geometry and Physics, Volume 62, Issue 11, 2012, стр. 2234-2240) М. Вербицкий и А.Солдатенков (оба они работают в Лаборатории) успешно применили некоторые из этих результатов к изучению подмногообразий HKT-многообразий с голономией в $\mathrm{SL}(n, \mathbb{H})$. Вербицкий и Солдатенков проанализировали алгебраическую геометрию такого многообразия с комплексной структурой общего положения L, индуцированной кватернионами. Они доказали, что (M, L) не содержит дивизоров и все комплексные подмногообразия коразмерности 2 трианалитичны (так что, также гиперкомплексны).

Андрей Солдатенков также решил сложную проблему голономии, открытую с тех пор как Joyce открыл гиперкомплексную структуру на компактных однородных многообразиях в начале 1990-х. Примеры таких многообразий многочисленны, но ни на одном из них (за исключением многообразий Хопфа) не была известна голономия связности Обаты. В статье "Holonomy of the Obata connection on $SU(3)$" (Int. Math. Res. Notices (2012), Vol. 2012 (15), 3483-3497), Солдатенков показал, что голономия связности Обаты на $SU(3)$ с однородной гиперкомплексной структурой максимальная возможная (то есть $GL(2, H)$. По сей день, это единственный пример не плоского однородного гиперкомплексного многообразия, для которого известна голономия Обаты.

9 Развитие теории выпуклых тел Ньютона-Окунькова для исследования геометрии многообразий с действием группы.

Валентина Кириченко, Евгений Смирнов и Владлен Тиморин, все трое члены Лаборатории алгебраической геометрии, разработали новый подход к исчислению Шуберта на многообразии полных флагов в $\mathbb{C}^n$, используя многочлен объема, связанный с многогранниками Гельфанда-Цетлина. Полная версия со всеми результатами и детальными доказательствами была недавно опубликована в "Schubert calculus and Gelfand-Zetlin polytopes," ([KST2] Valentina Kiritchenko, Evgeny Smirnov and Vladlen Timorin, Russian Math. Surveys, 2012, 67, no. 4, 89–128). Эти результаты похожи по духу на теорию многогранников Ньютона и тел Ньютона-Окунькова (Многогранники Гельфанда-Цетлина естественным образом соответствуют проективным вложениям многообразия флагов).

Выпукло-геометрические операторы Демазюра.

Операторы разделенных разностей (также известные как операторы Демазюра) играют ключевую роль в исчислении Шуберта и теории представлений. Кириченко построила выпуклые геометрические аналоги операторов Демазюра.

Геометрические операторы Демазюра действуют на многогранниках и переводят многогранник в многогранник размерности на один больше. Например, многогранники Гельфанда-Цетлина могут быть получены применением достаточного количества раз геометрического оператора Демазюра к точке. В противоположность классическим операторам Демазюра, выпукло-геометрические операторы Демазюра могут быть определены не только для системы корней редуктивной группы, но для более общих комбинаторных данных. Это может быть в дальнейшем развито в трех возможных направлениях. Во-первых, геометрические операторы Демазюра могут быть использованы, чтобы дать подходящее описание многогранников Ньютона-Окунькова для разрешения Ботта-Самельсона многообразий Шуберта (для GL_n, такое описание может быть выведено из итеративной конструкции этих многогранников, данной Андерсеном). В частности, может быть получено элементарное описание *струнных многогранников* (обобщений многогранников Гельфанда–Цетлина на произвольные редуктивные группы). Во вторых, результаты [KST2] (представление циклов Шуберта через грани многогранника Гельфанда–

Цетлина и формулы для характеров Демазюра в виде экспоненциальных сумм по целым точкам этих граней) могут быть обобщены на произвольную редуктивную группу. В частности, общая версия *митоза* (комбинаторная процедура для вычисления полиномов Шуберта в случае GL_n в терминах пайп-дримов, введенных Кнутсоном и Миллером) может быть получена таким путем. В-третьих, геометрические операторы Демазюра могут быть изучены в более общей постановке (не связанной с классическими системами корней). Например, многогранники Ньютона *башен Ботта* (торические многообразия полученные из точки последовательной проективизацией векторных расслоений ранга два) допускают простое описание через геометрические операторы Демазюра.

Эти результаты были представлены в тезисах доклада Валентины Кириченко, “Divided difference operators on convex polytopes” (Oberwolfach reports, 21/2012, 5–7).

10 Исследование конечных подгрупп в группе Кремоны

Группа Кремоны Cr_n есть группа бирациональных автоморфизмов проективного пространства $\mathbb{P}^n$ или, эквивалентно, группа автоморфизмов поля рациональных функций. Проблема описания конечных подгрупп в группе Кремоны Cr_n — классическая тема в алгебраической геометрии. Однако, большинство результатов касается двумерного случая (Dolgachev–Iskovskikh, 2009). Недавний прогресс в случае больших размерностей связан с современными методами программы Мори и результатами классификации многообразий Фано.

Юрий Прохоров, работающий в Лаборатории алгебраической геометрии, успешно применил эти новые инструменты для классификации простых конечных подгрупп в Cr_3. Его метод был развит в дальнейшем и применен к другим классам групп. В статье "p-elementary subgroups of the Cremona group of rank 3", Прохоров дает ответ на вопрос, поставленный Ж.П. Сером о p-элементарных подгруппах в $Cr_3(k)$.

Статья "Simple finite subgroups of the Cremona group of rank 3" (Yu. Prokhorov, J. Algebraic Geom., 21:563–600, 2012.) инициировала бурную деятельность в этой области, и появление статей Beauville, Cheltsov, Cheltsov–Shramov и Duncan. Более систематическое исследование конечных групп в $Cr_3(k)$ требует классификации (возможно сингулярных) G-Фано трехмерных многообразий. Два класса таких трехмерных многообразий были классифицированы Прохоровым в его статьях "G-Fano threefolds, I" и "G-Fano threefolds, II" (появятся в Advances in Geometry).

Прохоров и Шрамов доказали, что группа Кремоны $Cr_3(k)$ удовлетворяет так называемому условию Жордана, и то же самое верно для произвольной группы Кремоны при условии верности гипотезы Борисова–Алексеева(статья готовится к печати).

В статье "On birational involutions of P^3" (arXiv:1206.4985), Прохоров классифицирует инволюции в группе бирациональных автоморфизмов рационально связного трехмерного алгебраического многообразия, не имеющего неунилинейчатых компонент в локусе неподвижных точек.

И. Чельцов и К.Шрамов, также работающие в Лаборатории, изучали группу Кремоны этими методами со значительным успехом. В статье "Three embeddings of the Klein simple group into the Cremona group of rank three", (Transformation groups, 17 (2012), 303–350) Чельцов и Шрамов рассмотрели действие простой группы Клейна, состоящей из 168 элементов на двух рациональных трехмерных многообразиях: трехмерное проективное пространство и трехмерное гладкое многообразие Фано антиканонической степени 22 и индекса 1. Они показали, что группа Кремоны ранга 3 имеет по крайней мере три несопряженных подгруппы, изоморфные G. В качестве следствия, они доказали, что на X есть метрика Кэлера–Эйнштейна, и построили гладкую поляризованную $K3$ поверхность степени 22 с действием группы.

11 Бирациональная классификация алгебраических многообразий и проблемы рациональности.

Рациональность и бирациональная эквивалентность алгебраических многообразий являются одним из самых важных вопросов алгебраической геометрии. Это также одна из центральных тем для математиков, работающих в Лаборатории алгебраической геометрии. В 2010 году, научный руководитель Лаборатории Ф. А. Богомолов опубликовал книгу "Cohomological and geometric approaches to rationality problems. New perspectives." (Под ред. Fedor Bogomolov и Yuri Tschinkel. Progress in Mathematics, 282, Birkhäuser, Boston, Inc., Boston, MA, 2010. x+311 pp.), где поднимается, как, впрочем, и объясняется, множество вопросов на эту тему.

В статье Федора Богомолова, Каринэ Куюмжиян (оба сотрудники Лаборатории) и Ильи Каржеманова, рассматривается проблема существования бесконечно транзитивной модели для унирационального поля. Авторы формулируют общую гипотезу, которая утверждает существование такой модели после стабилизации, то есть добавления нескольких независимых переменных к полю функций. Гипотеза доказана в случае, если поле имеет n алгебраически независимых сокращений, где n — его степень трансцендентности. Для нескольких семейств унирациональных многообразий показано, что они также удовлетворяют этому свойству. Статья уже появилась на архиве ("Unirationality and existence of infinitely transitive models," Fedor Bogomolov, Ilya Karzhemanov, Karine Kuyumzhiyan, arXiv:1204.0862), и скоро появится в Simons Symposium Publications in 2012.

Рациональность факторов по действию конечных групп - это очень интересная и сложная задача алгебраической геометрии. В "Fields of invariants of finite linear groups", Юрий Прохоров (математик, работающий в Лаборатории алгебраической геометрии) дает обзор первого нетривиального случая: вопроса о рациональности $\mathbb{C}^3/G$. Рациональность факторов $(\mathbb{C}^*)^3$ по конечной 2-группе была доказана Прохоровым и Кангом в том же году.

Иван Чельцов, также работающий в Лаборатории, сейчас активно занимается изучением этого предмета в связи с 3-х мерными многообразиями. В 1979 году Рид нашел 95 семейств $K3$ поверхностей в трёхмерных взвешенных проективных пространствах. После этого, Яно-Флетчер, аспирант М. Рида, описал 95 семейств взвешенных 3-х мерных гиперповерхностей Фано в своей диссертации в 1988. Это квазигладкие хорошие гиперповерхности во взвешенных проективных пространствах с только терминальными особенностями. Оказывается, что 95 семейств $K3$ поверхностей являются антиканоническими сечениями трехмерных Фано, найденных Яно-Флетчером. Отметим также, что все семейства среди этих 95 определяются неубывающими четверками положительных чисел. То, что список, предъявленный Ридом и Яно-Флетчером, полный, было доказано намного позже Джонсоном и Колларом.

В конце 90-х, эти 95 семейств оживили поле деятельности бирациональной геометрии. Изучение их свойств, таких как бирациональная жесткость, группы бирациональных автоморфизмов, структуры эллиптического расслоения, и так далее стало важным предметом алгебраической геометрии. Чельцов занимался этими семействами трёхмерных Фано на протяжении всего 2012 года. В 2000, Корти, Пухликов, и Рид доказали, что общая гиперповерхность в каждом из 95 семейств трёхмерных гиперповерхностей Фано является бирационально жесткой. Они также предположили, но не доказали, что любая квази-гладкая гиперповерхность в каждом из этих 95 семейств бирационально жесткая. Чельцов и Пак работают над доказательством этой гипотезы на протяжении последних двух лет: I. Cheltsov, J. Park, “Fano threefold hypersurfaces revisited”.

Трехмерные Фано с терминальными особенностями естественным образом появляются в трёхмерной теории Мори, более точно, в её “отрицательной” части. Список всех возможных численных кандидатов конечен, но очень длинный (более 44 000). Он может быть получен при помощи теоремы Римана-Роха для орбифолдов, неравенства Богомолова–Мияоки и использования компьютера. Новый метод, основанный на элементарных бирациональных перестройках (так называемых линках Саркисова), был разработан Юрием Прохоровым, математиком Лаборатории алгебраической геометрии. Он позволяет исключить из списка тех кандидатов, которые не соответствуют трехмерным Фано и прекрасно работает с многообразиями Фано большой степени.

В изучении терминальных многообразий Фано с числом Пикара 1 есть два главных подхода: бирегулярный и бирациональный. Бирегулярные методы работают в терминах проективных вложений при помощи кратностей прождающей A группы классов дивизоров Вейля, или, более точно, с помощью изучения Горенштейновых колец $R(X, A)$. Это эффективно, когда модель имеет маленькую коразмерность, особенно когда $R(X, A)$ является гиперповерхностью, полным пересечением коразмерности 2 и т.д. С другой стороны, бирациональные методы эффективны, когда линейная система $|A|$ велика, поскольку тогда канонический порог очень низок, что делает возможным рассмотрение неканонических особенностей на $|A|$, а также бирациональное изучение X в терминах получающихся линков Саркисова, давая либо бирациональную конструкцию, либо теорему о не существовании.

Основной интерес работы Майлза Рида и Юрия Прохорова "On Q-Fano threefolds of Fano index 2" (arXiv:1203.0852) состоит в том, что это то место, где оба метода могут быть применены вместе. Более точно, используя технику, разработанную ранее Ю. Прохоровым, Рид и Прохоров показали что, для терминального трехмерного Фано X с индексом Фано 2, неравенство $\dim|-\frac{1}{2}K_X| \leq 4$ выполняется только для уже хорошо изученного семейства многообразий с $\dim|-\frac{1}{2}K_X| = 4$.

12 Развитие гомологической теории слабо искривленных дифференциально-градуированных и гомотопически ассоциативных алгебр над топологическими локальными кольцами.

Слабо искривленные A-бесконечность алгебры являются одним из направлений деятельности Леонида Посицельского, работающего в Лаборатории алгебраической геометрии. Исследования Посицельским производных категорий второго типа, их применений, а также близких вопросов, включают в себя монографию о полубесконечной гомологической алгебре, статью о производной Кошулевой двойственности, журнальную статью о полубесконечных когомологиях конечномерных градуированных алгебр (вместе с Романом Безрукавниковым), журнальную статью о когомологиях Хохшильда второго типа (вместе с Александром Полищуком), препринт о матрично факторизуемых категориях, длинный препринт о слабо искривленных A-бесконечность алгебрах, и препринт о контрагерентных копучках. В течении 2012 года были опубликованы следующие работы: A. Polishchuk, L. Positselski. "Hochschild (co)homology of the second kind I". Transactions of the American Mathematical Society 364, 10, p. 5311-5368, 2012. В этой статье определяются и изучаются (ко)гомологии Хохшильда второго типа (также известные как гомологии Хохшильда Бореля-Мура и когомологии Хохшильда с компактным носителем) для искривленных DG-категорий. Строится изоморфизм между (ко)гомологиями Хохшильда второго типа CDG-категории B и DG-категории C правых CDG-модулей над B, проективных и конечнопорожденных как градуированные B-модули. Формулируются необходимые условия для изоморфизма двух типов (ко)гомологий Хохшильда DG-категории, в терминах двух типов производных категорий DG-модулей над ней. В частности, аналог условия "резольвенты диагонали" для диагонального CDG-бимодуля B над CDG-категорией B гарантирует изоморфизм двух типов (ко)гомологий Хохшильда соответствующей DG-категории C. Рассматривается несколько примеров. В частности, показано, что два типа Хохшильдовых (ко)гомологий изоморфны для DG-категории матричных факторизаций регулярной функции на гладком аффинном многообразии над совершенным полем, при условии что функция не имеет никаких критических значений кроме нуля.

L. Positselski. "Weakly curved A-infinity algebras over a topological local ring." Препринт arXiv:1202.2697 [math.CT], 165 pp., 2012. В статье определяются и изучаются производные категории первого типа для искривленных DG и A-бесконечность алгебр, полных над про-Артиновым локальным кольцом с элементами кривизны, делящимися на максимальный идеал локально кольца. Разрабатывается теорию Кошулевой двойственности в этом контексте и доказываем обобщения стандартных результатов о A-бесконечность модулях на слабо искривленный случай. Формализм контрамодулей и комодулей над про-Артиновыми топологическими кольцами используется на протяжении всей статьи. Мотивация приходит из теории Флоера–Фукаи (алгебраическую базу для которой эта статья должна дать). Проективные пределы Артиновых модулей и контрамодулей над адическими пополнениями нетеровых колец обсуждаются в приложении.

L. Positselski. "Contraherent cosheaves." Препринт arXiv:1209.2995 [math.CT], 105 pp., 2012. Контрагерентные копучки являются глобализациями модулей кокручения над коммутативным кольцом, полученными их совместным склеиванием над схемой. Категория контрагерентных копучков над схемой является Квилленовской точной категорией с точными функторами бесконечного произведения; над квазикомпактной полуотделимой схемой она также имеет достаточно много проективных объектов. Строится производное ко-контра соответствие, а именно эквивалентность между соответствующими производными категориями квазикогерентных пучков и контрагерентных копучков, на квазикомпактной полуотделимой схемой и, в другой форме, над полуотделимой Нётеровой схемой с дуализирующим комплексом. Прежняя точка зрения позволяет получить новую конструкцию экстраординарного функтора обратного образа $f^!$ для морфизма квазикомпактных полуотделимых схем f. Последний подход даёт расширенную версию ковариантной теории двойственности Серра–Гротендика.

13 Сингулярные значения модулярных форм и специальные значения L-функций.

Точный анализ взаимосвязей теории чисел и теории модулярных форм показывает, что естественное обобщение понятия периода модулярной формы имеет существенное отношение к описанию сингулярных значений L-функций. Сочетание гипотез Бейлинсона и теории смешанных полилогарифмов Шимуры позволяет выразить значения частичных дзета-функций вещественного квадратичного поля в единице в терминах периодов модулярной поверхности Гильберта. Это утверждение является вещественным аналогом известной предельной формулы Кронекера для мнимых квадратичных полей. Это может привести к явной конструкции абсолютного поля классов вещественных квадратичных полей.

В подобном подходе оказывается необходимым изучение дифференциальной геометрии поверхностей Гильберта, что и осуществлялось в рамках исследований. С другой стороны, поскольку существование категории мотивов является гипотетическим, нам требуется доказать алгебраичность соответствующих комплексных чисел напрямую. Для этого мы используем трюк Загира, построившего гладкого представителя класса соответствия Гекке. Мы двигаемся в противоположном направлении планируем представить класс дзета-функции Эпштейна с помощью сингулярного потока. В данном направлении мы определили область суммирования для аналога Гильберта рядов Загира.

14 Изучение асимптотических свойств семейств многообразий над конечными и числовыми полями.

Отправной точкой для развития асимптотической теории многообразий над глобальными полями послужила следующая задача: по заданному целому числу g и степени простого числа q найти максимальное число точек на кривой рода g над конечным полем $\mathbb{F}_q$. Проблема оказалась сложной, и полный ответ сейчас получен для $g = 1$ и $g = 2$. Также существуют частные ответы для $g = 3$, полученные изучением якобианов среди абелевых многообразий размерности 3, найдены K. Lauter, G. Lachaud, C. Ritzenthaler и А. Зыкиным (зав. Лабораторией алгебраической геометрии).

В. Дринфельд, С. Влэдуц и далее М. Цфасман получили интересные результаты, рассматривая эту проблему с другой точки зрения. А именно, они доказали асимптотические границы на число точек при $g \to \infty$ и фиксированном q. Такие границы могут быть естественно получены рассмотрением более общей проблемы описания асимптотических свойств дзета-функций кривых в семействах. На самом деле подход с использованием дзета-функций оказывается полезным во многих других ситуациях, включая изучение асимптотического количества точек на гладком проективном многообразии над конечным полем, изучение группы Пикара кривых над конечными полями (аналог теоремы Брауэра–Зигеля) и во многих других случаях.

А. Зыкин обобщил многие предыдущие результаты об асимптотических свойствах многообразий над конечным полем. Он определил аксиоматически подходящий класс L-функций и дзета-функций, которые могут быть рассмотрены как аналог в случае функционального поля класса Сельберга L-функций в характеристике нуль. В частности, этот класс включает все мотивные L-функции. Он сформулировал базовые понятия асимптотической теории, такие как понятие асимптотически точного и асимптотически очень точного семейства.

Асимптотическая теория состоит из трёх основных частей. Во-первых, основные неравенства, являющиеся обобщениями неравенств Дринфельда–Влэдуца на асимптотическое количество точек на кривой над конечным полем. Во-вторых, результаты типа теоремы Брауэра–Зигеля, описывающие предельное поведение специальных значений дзета-функций и L-функций. В-третьих, результаты о распределении нулей на критической прямой. Конечно же, все три темы взаимосвязаны. Например, основные неравенства используются в доказательстве результатов, аналогичных теореме Брауэра–Зигеля. Настоящее понимание основных неравенств можно получить только при помощи их интерпретации в смысле положительности некоторой плотности распределения нулей дзета-функций.

Все три темы были развиты А. Зыкиным в общем контексте. Это имело некоторые конкретные приложения. Были обобщены результаты Ихары о константах Эйлера–Кронекера на случай произвольного асимптотически точного семейства многообразий над конечным полем. Были доказаны некоторые оценки в направлении гипотез Кунявского, Цфасмана и Hindry о предельном поведении произведения порядка групп Тэйта–Шафаревича и регулятора эллиптической поверхности над конечным полем. Также были получены некоторые результаты о распределении нулей, влекущие нетривиальные оценки на рост аналитического ранга в семействах эллиптических поверхностей над конечным полем.

15 Инварианты неприводимых компонент пространства Гурвица и пространства модулей алгебраических поверхностей.

Работа была выполнена В.С. Куликовым, работающим в Лаборатории алгебраической геометрии. В работе "Covering semigroups" (Харламов, Куликов, arXiv:1205.4892, будет опубликовано в Изв.Мат.) Харламов и Куликов вводят и изучают структуру полугруппы на множестве неприводимых компонент пространства Гурвица отмеченных накрытий комплексной проективной кривой с заданной группой Галуа накрытия и с фиксированным типом ветвления. Как приложение, они получили новые условия на тип ветвления, достаточные для неприводимости пространства Гурвица, предположили некоторые оценки на количество неприводимых компонент при некоторых более общих условиях, показали, что количество неприводимых компонент совпадает с количеством топологических классов накрытий, если точек ветвления достаточно много. Следующие две работы написаны Куликовым вместе с Богомоловым, научным руководителем Лаборатории. В статье "О диффеоморфном типе дополнения системы кривых на проективной плоскости" (Ф. Богомолов, В.С. Куликов, Cent. Eur. J. Math., 2012, 10(2), 521-529) Богомолов и Куликов показали, что диффеоморфный тип дополнения к системе кривых в комплексной проективной плоскости зависит только от графа пересечений кривых, если ни одна кривая в системе не содержит более двух точек, где пересекается более двух кривых.

В статье "О неприводимости схемы Гильберта поверхностей минимальной степени" (Ф. Богомолов, В.С. Куликов, Cent. Eur. J. Math., 2013, 11(2), 254-263) Богомолов и Куликов получили новое доказательство того, что схема Гильберта неприводимой поверхности степени m в $\mathbb{P}^{m+1}$ неприводима, кроме случая $m = 4$. В случае $m = 4$ схема Гильберта состоит из двух точно описанных неприводимых компонент. Главная идея подхода состоит в использовании доказательства гипотезы Чизини для накрытий проективной плоскости, разветвленных в специальном классе рациональных кривых.

16 Лагранжевы расслоения на гиперкэлеровых многообразиях.

После того как Михаил Вербицкий (заместитель заведующего Лаборатории) доказал глобальную теорему Торелли для гиперкэлеровых многообразий, многие вопросы гиперкэлеровой геометрии существенно упростились. В совместной работе с Александром Ананьиным (гостем Лаборатории) "Any component of moduli of polarized hyperkaehler manifolds is dense in its deformation space" (Sasha Anan'in, Misha Verbitsky, arXiv:1008.2480) авторы доказали, что любой дивизор на пространстве Торелли, полученный фиксацией поляризации, плотен в соответствующем пространстве модулей. Фактически, доказанное ими утверждение сильнее: они доказали плотность дивизора, заданного любым целым Ходжевым условием коразмерности 1.

В 2012 году условие плотности было применено для изучения семейств Лагранжевых расслоений на гиперкэлеровых многообразиях (Ljudmila Kamenova, Misha Verbitsky, "Families of Lagrangian fibrations on hyperkaehler manifolds", arXiv:1208.4626). Голоморфное лагранжево расслоение на голоморфно симплектическом многообразии — это голоморфное отображение с Лагранжевыми слоями. Известно, что компактное многообразие допускает конечное число голоморфных симплектических структур с точностью до деформации. Каменова и Вербицкий доказали, что компактное многообразие с $b_2 \geq 7$ допускает конечное число структур голоморфного Лагранжева расслоения с точностью до деформации.

Этот результат использовался для доказательства того, что любое гиперкэлерово многообразие, принадлежащее к любому из известных классов ($K3^{[n]}$, обобщенное Куммерово, два примера О'Грейди) негиперболичекое.

Совместно с Андреем Солдатенковым (также работающим в Лаборатории) Вербицкий изучил голоморфные Лагранжевы подмногообразия гиперкомплексных многообразий, голономия которых лежит в $SL(n, H)$. Это понятие было дано Гранчаровым и Вербицким в статье "Calibrations in hyperkaehler geometry" (Gueo Grantcharov, Misha Verbitsky, принято к публикации в Commun. Contemp. Math.) На таких многообразиях нет симплектических форм, но хорошо определены голоморфные Лагранжевы калибровки (такие же, как в гиперкэлеровом случае). Можно обобщить понятие голоморфного Лагранжева подмногообразия на этот случай, рассматривая многообразия, калиброванные при помощи голоморфной Лагранжевой калибровки. В статье "Holomorphic Lagrangian fibrations on hypercomplex manifolds" (2012) Солдатенков и Вербицкий построили примеры Лагранжевых расслоений и доказали, что для любого гиперкэлерова гиперкомплексного многообразия с кручением база гладкого Лагранжева расслоения всегда является Кэлеровой.

17 Линейные и полулинейные гладкие представления "больших" групп.

Эта часть мотивирован фундаментальными гипотезами алгебраической геометрия (Гротендик, Бейлинсон, Блох, Делинь) о структуре определенных гомотопических инвариантов алгебраических многообразий. В статье М. Ровинского [Motives and admissible representations of automorphism groups of fields. Math.Zeit., 249 (2005), no. 1, 163-221] показано, что некоторые из этих инвариантов описываются в терминах представлений групп автоморфизмов над алгебраически замкнутыми полями. Такие группы наделены естественной вполне несвязной топологией. Для категории с семейством объектов S и "инвариантом" (функтором) F представления вполне несвязных групп естественно сводятся к изучения поведения F и S. Теория Ивасавы даёт наиболее изученный пример, для которого группа проконечная. Такие методы изучения алгебраической геометрии используются в работах [T.Church, J.S. Ellenberg, B.Farb, FI-modules: a new approach to stability for S_n-representations, arXiv:1204.4533; T.Church, B.Farb, Representation theory and homological stability, arXiv:1008.1368], где описанная задача связывается с представлениями симметрических групп.

Как результат развития этих методов Ф.А.Богомолов и М.Ровинский (оба сотрудники Лаборатории) опубликовали статью "Collineation group as a subgroup of the symmetric group" (Cent. Eur. J. Math. 11 (1) 2013, 17-26). В этой статье авторы рассматривают подгруппы группы перестановок точек проективного пространства. Показано, что при добавлении одного теоретико-множественного преобразования проективного пространства к рассматриваемой группе получается бесконечно транзитивная группа, то есть группа, транзитивно действующая на m-точечных подмножествах проективного пространства, где число m — произвольное целое.

18 Исследование гомологических и гомотопических свойств алгебр сизигий проективных вложений орбит классических групп в приложениях к геометрии и математической физике.

Были полностью подсчитаны все алгебры сизигий вложений Сегре произведений двух проективных пространств произвольной размерности. Умножение в этих алгебрах полностью описано в терминах диаграмм Юнга.

В ходе исследований, связанных с вышеупомянутыми, строятся и изучаются тау-формулировки теории Янга–Милса в размерности 10, где используется алгебра сизигий вложения Плюккера комплексного изотропного грассманиана для $SO(10)$. Также было начато изучение аналогичной тау-версии квантовой гравитации в размерности 11.

19 Исследование изомонодромных дифференциальных уравнений методами дифференциальных категорий.

Классическая дифференциальная теория Галуа изучает группы симметрий решений линейных дифференциальных уравнений, или, что то же самое, группы автоморфизмов соответствующих расширений дифференциальных полей; возникающие при этом группы являются линейными алгебраическими группами над полем констант. Эта теория, основанная в 19-м веке Пикаром и Вессио, приобрела современный вид в работах Колчина (1948). Развитие параметрической теории Пикара-Вессио было начато Кассиди и Зингером в 2007. В этой теории изучаются группы симметрий решений линейных дифференциальных уравнений с коэффициентами, содержащими параметры. Для этой цели строится дифференциальное поле, содержащее решения и все их производные по параметрам (называемое параметрическим расширением Пикара-Вессио, или ППВ расширением), и изучается его группа дифференциальных симметрий, называемая параметризованной дифференциальной группой Галуа. Возникающие при этом группы Галуа являются линейными дифференциальными алгебраическими группами, определёнными посредством полиномиальных дифференциальных уравнений с параметрами.

Традиционно в классической дифференциальной теории Галуа предполагается, что поле констант алгебраически замкнуто. Кассиди и Зингер, следуя духу этой традиции, предполагают, что поле функций от параметров является дифференциально замкнутым. Напомним, что дифференциальное поле дифференциально замкнуто, если оно содержит все решения любой совместной системы полиномиальных дифференциальных уравнений с коэффициентами в поле. Однако это требование существенно ограничивает практическую применимость методов параметрической теории, поскольку поля, встречающиеся в в реальных дифференциально-геометрических задачах, чаще всего не являются дифференциально замкнутыми.

Похожее явление возникает в классической дифференциальной теории Галуа: если поле констант не алгебраически замкнуто, расширение Пикара-Вессио может не существовать (см. знаменитый контрпример А. Зайденберга, 1956); а следовательно в этом случае нет ни дифференциальной группы Галуа, ни соответствия Галуа. Начиная с работ Колчина, одной из главных проблем теории было исследовать, до какой степени можно ослабить требование алгебраической замкнутости поля констант.

В работе “Parameterized Picard–Vessiot extensions and Atiyah extensions” (arXiv:1110.3526), С. Горчинскому (Лаборатория алгебраической геометрии), вместе с А.Овчинниковым и А.Жилле удалось избежать предположения об алгебраической замкнутости поля констант, и тем самым установить соответствие Галуа в параметрическом случае. С этой целью разработана теория дифференциальных категорий над дифференциальными полями, а также соответствующая теория дифференциальных категорий Таннаки. Эта теория позволяет доказать, что расширение ППВ существует при гораздо более слабом предположении на поле констант: оно должно быть относительно дифференциально замкнутым. Это предположение выполняется во многих дифференциальных полях, встречающихся на практике. Как следствие, мы получаем параметризованное соответствие Галуа для широкого ряда примеров.

Ещё один вопрос, при исследовании которого была существенно использована теория дифференциальных категорий, — вопрос изомонодромности, изучавшийся в работе С. Горчинского и А.Овчинникова “Isomonodromic differential equations and differential categories” (arXiv:1202.0927). Напомним, что система параметризованных линейных дифференциальных уравнений является изомонодромной, если она может быть расширена до системы линейных дифференциальных уравнений, содержащей также производные по параметрам. Иначе говоря, требуется, чтобы расширенная система удовлетворяла условиям интегрируемости как относительно главных переменных, так и относительно параметров. Таким образом, чтобы явно проверить изомонодромность системы параметрических линейных дифференциальных уравнений, скажем, от одной главной переменной x и n параметров $t_1, \ldots, t_n$, нужно найти n дополнительных матриц, удовлетворяющих $\binom{n+1}{2}$ условиям интегрируемости. Горчинский и Овчинников усовершенствовали этот метод, показав, что достаточно найти матрицы, удовлетворяющие только n условиям интегрируемости для пар производных $(\partial_x, \partial_{t_i})$ при предположении фильтрованной линейной замкнутости на поле функций от параметров. Этот результат нетривиален не только из-за методов доказательства (использующих дифференциальные категории и CDG-алгебры), но также из-за своей неожиданности.

20 DG-модули над алгеброй де Рама.

Леонид Посицельский, работающий в Лаборатории Алгебраической Геометрии, доказал, что неограниченная производная категория квазикогерентных D-модулей на гладком алгебраическом многообразии X эквивалентна так называемой ко-производной категории квази-когерентных DG-модулей над DG-алгеброй де Рама многообразия X.

Этот результат является обобщением двойственности Кошуля для симметрических и внешних алгебр. Нами были построены производные функторы тензорного произведения, прямого образа и экстраординарного обратного образа на копроизводных категориях и доказано, что эти функторы соответствуют (относительно эквивалентности Посицельского) аналогичным функторам для D-модулей. Некоторые из этих конструкций были известны ранее. А именно, Капранов определял функторы прямого образа и экстраординарного обратного образа для DG-категорий DG-модулей над DG-алгеброй де Рама для гладких алгебраических многообразий. Бейлинсон и Дринфельд перенесли это же определение экстраординарного обратного образа на гладкие алгебраические стеки.

21 Исследование связи унирациональности алгебраического многообразия с существованием бесконечно транзитивной модели у его стабилизации.

Определение. Действие группы G на множестве A называется m-транзитивным, если для любых двух подмножеств мощности m в A существует элемент $g \in G$ переводящий одно подмножество в другое. Если действие m-транзитивно для любых m, будем называть его бесконечно транзитивным.

Многообразия с несколькими транзитивными действиями встречаются довольно редко, что объясняется, к примеру, соображениями размерности. Для групп Ли и алгебраических групп не существует многообразия с бесконечно транзитивным действием. Поэтому будем рассматривать действие всей группы автоморфизмов многообразия. Бесконечная транзитивность группы всех алгебраических автоморфизмов известна для аффинных пространств $\mathbb{A}^n$ над любым бесконечным полем $\mathbf{k}$, где $n \geq 2$. *Специальной группой автоморфизмов* $\mathrm{SAut}(X)$, мы называем подгруппу в $\mathrm{Aut}(X)$, порождённую всеми однопараметрическими унипотентными подгруппами.

Определение. Пусть Y — алгебраическое многообразие над полем $\mathbf{k}$. Мы называем точку *гибкой* если касательное пространство порождается касательными векторами к орбитам $H \cdot y$ однопараметрических подгрупп $H \subseteq \mathrm{SAut}(Y)$, $H \cong (\mathbf{k}, +)$. Многообразие Y называется гибким, если любая гладкая точка $y \in Y_{\mathrm{reg}}$ гибкая.

Кроме того рассматривается вопрос о бесконечно транзитивных многообразиях над алгебраически замкнутыми полями. Заметим, что в полученных нами результатах все многообразия унирациональны. Последние результаты (Arzhantsev, Flenner, Kaliman, Kutzschebauch и Zaidenberg , 2010) показывают, что всякое бесконечно транзитивное аффинное многообразие X размерности $\dim X \geqslant 2$ унирационально.

В работе Федора Богомолова, Карине Куюмжиян (сотрудники Лаборатории) и Ильи Каржеманова рассматривается проблема существования бесконечно транзитивной модели для унирационального поля. Авторы сформулировали общую гипотезу, утверждающую существование такой модели после стабилизации многообразия, то есть после добавления к полю нескольких независимых переменных. Было доказано, что гипотеза верна в случае, когда поле имеет n алгебраически независимых "сокращений", где n — степень трансцендентности поля. Было показано, что некоторые унирациональные многообразия удовлетворяют этому свойству.

Статья опубликована на архиве ("Unirationality and existence of infinitely transitive models", Fedor Bogomolov, Ilya Karzhemanov, Karine Kuyumzhiyan, arXiv:1204.0862) и появится в Simons Symposium Publications в 2012 году.

22 Публикации Лаборатории

Список литературы

[1] E.Amerik, *A remark on a question of Beauville about Lagrangian fibrations*, Moscow Mathematical Journal Volume 12, Number 4, October-December 2012, Pages 701-704.

[2] Fedor Bogomolov, Ilya Karzhemanov, Karine Kuyumzhiyan, *Unirationality and existence of infinitely transitive models*, 12 pages, arXiv:1204.0862, Birational geometry, rational curves, and arithmetic - Simons symposium 2012 Fedor Bogomolov, Brendan Hassett, Yuri Tschinkel (editors) Progress in Mathematics, Burkhauser Boston.

[3] Bogomolov, Fedor; Rovinsky, Marat; *Collineation group as a subgroup of the symmetric group*, Cent. Eur. J. Math. 11 (2013), no. 1, 17-26.

[4] Bogomolov, Fedor; Tschinkel, Yuri, *Introduction to birational anabelian geometry*, Current developments in algebraic geometry, 17-63, Math. Sci. Res. Inst. Publ., 59, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2012.

[5] Bogomolov, Fedor; Kulikov, Viktor S, *On the diffeomorphic type of the complement to a line arrangement in a projective plane*, Cent. Eur. J. Math. 10 (2012), no. 2, 521-529.

[6] Bogomolov, Fedor; Böhning, Christian; Graf von Bothmer, Hans-Christian, *Linear bounds for levels of stable rationality*, Cent. Eur. J. Math. 10 (2012), no. 2, 466-520.

[7] А. Бондал, *Операции над т-структурами и превратные когерентные пучки*, принята к печати в “Известия РАН”.

[8] Cheltsov, Ivan; Shramov, Constantin, *Three embeddings of the Klein simple group into the Cremona group of rank three*, Transform. Groups 17 (2012), no. 2, 303-350.

[9] Gorchinskiy, Sergey; Guletskii, Vladimir, *Transcendence degree of zero-cycles and the structure of Chow motives*, Cent. Eur. J. Math. 10 (2012), no. 2, 559-568.

[10] Gorchinskiy, Sergey; Guletskii, Vladimir, *Motives and representability of algebraic cycles on threefolds over a field*, J. Algebraic Geom. 21 (2012), no. 2, 347-373.

[11] Efimov, Alexander I, *Homological mirror symmetry for curves of higher genus*, Adv. Math. 230 (2012), no. 2, 493-530.

[12] Elagin A. D., *Descent Theory for Semiorthogonal Decompositions*, Mathematical Digest, 2012, vol. 203 (5), pp. 645-676.

[13] Б.Л.Фейгин, Г.С.Мутафян, *Квантовая тороидальная $gl(1)$: вычисление характеров некоторых представлений как производящих функций плоских разбиений*, Функциональный анализ, первый номер 2013 (принято к печати).

[14] Feigin, Evgeny, G_a^M *degeneration of flag varieties*, Selecta Math. (N.S.) 18 (2012), no. 3, 513-537.

[15] Feigin, Evgeny, *The median Genocchi numbers, q-analogues and continued fractions*, European J. Combin. 33 (2012), no. 8, 1913-1918.

[16] Feigin, E. B. *Systems of correlation functions, co-invariants, and the Verlinde algebra*, (Russian) Funktsional. Anal. i Prilozhen. 46 (2012), no. 1, 49-64; translation in Funct. Anal. Appl. 46 (2012), no. 1, 41-52

[17] Giovanni Cerulli Irelli, Evgeny Feigin, Markus Reineke, *Degenerate flag varieties: moment graphs and Schröder numbers*, Journal of Algebraic Combinatorics, p. 1-31, 2012.

[18] Feigin E., Cerulli Irelli G., Reineke M. *Quiver Grassmannians and degenerate flag varieties*, Algebra and Number Theory, 2012. V.6. 1. P. 165-194.

[19] Braverman, Alexander; Finkelberg, Michael; Kazhdan, David, *Affine Gindikin–Karpelevich Formula via Uhlenbeck Spaces*, Springer Proceedings in Mathematics vol. 9 (2012), 17-29.

[20] M.Finkelberg, L.Rybnikov, *Quantization of Drinfeld zastava of type A*, Journal of European Mathematical Society (2013).

[21] Bezrukavnikov, Roman; Finkelberg, Michael; Ostrik, Victor, *Character D-modules via Drinfeld center of Harish-Chandra bimodules*, Invent. Math. 188 (2012), no. 3, 589-620.

[22] Braverman, Alexander; Finkelberg, Michael, *Pursuing the double affine Grassmannian II: Convolution*, Adv. Math. 230 (2012), no. 1, 414-432.

[23] D. Kaledin, *Universal Witt Vectors and the Japanese Cocycle*, Moscow Mathematical Journal, vol. 12 (3), pages 593-604.

[24] В. А. Кириченко, Е. Ю. Смирнов, В. А. Тиморин, *Исчисление Шуберта и многогранники Гельфанда–Цетлина*, УМН, 67:4(406) (2012), 89-128.

[25] V. A. Kirichenko, E. Yu. Smirnov, V. A. Timorin, *Schubert calculus and Gelfand–Zetlin polytopes*, Russian Mathematical Surveys, 2012, 67:4, 685-719.

[26] Kulikov V. S., *Semigroups of decomposition into factors and irreducible components of Hurwitz spaces II*, Notices of the Russian Academy of Sciences, Mathemtaics series, 2012, 76:2, pp. 151-160.

[27] Вик. С. Куликов, *Разложения на множители в конечных группах*, Математический сборник., 2013 (в печати).

[28] Вик. С. Куликов, В. М. Харламов, *Полугруппы накрытий*, Известия РАН, серия математическая. 2013 (в печати).

[29] Вик. С. Куликов, *Дополнение к статье: Ю. Г. Зархин, "Многочлены от одной переменной и ранги некоторых касательных отображений"*, Математические заметки, 91:4 (2012), 547-550.

[30] Kuznetsov, Alexander, *Instanton bundles on Fano threefolds*, Cent. Eur. J. Math. 10 (2012), no. 4, 1198-1231.

[31] Bogdanov I.I., Kuyumzhiyan K.G., *Simple modules of exceptional groups with normal closures of maximal torus orbits*, Mathematical Notes, 92 (3-4), September 2012, p. 445-457.

[32] Kuyumzhian K. G. *Simple modules of exceptional groups with normal closures of maximal torus orbits*, Siberian Mathematical Journal, Vol. 53, No. 6, pp. 1089-1104, 2012.

[33] Arzhantsev I. V., Zaidenberg M. G., Kuyumzhian K. G., *Flag varieties, toric varieties, and suspensions: three instances of infinite transitivity*, Mathematical Digest, 203:7 (2012), pp. 3-30.

[34] Kuyumzhiyan, Karine; Mangolte, Frédéric, *Infinitely transitive actions on real affine suspensions*, J. Pure Appl. Algebra 216 (2012), no. 10, 2106-2112.

[35] Levin, A.; Olshanetsky, M.; Smirnov, A.; Zotov, A.; *Characteristic Classes and Hitchin Systems. General Construction*, Comm. Math. Phys. 316 (2012), no. 1, 1-44.

[36] Levin, A.; Olshanetsky, M.; Smirnov, A.; Zotov, A. *Calogero-Moser systems for simple Lie groups and characteristic classes of bundles*, J. Geom. Phys. 62 (2012), no. 8, 1810-1850.

[37] Orlov, Dmitri, *Matrix factorizations for nonaffine LG-models*, Math. Ann. 353 (2012), no. 1, 95-108.

[38] Polishchuk, Alexander; Positselski, Leonid, *Hochschild (co)homology of the second kind I*, Trans. Amer. Math. Soc. 364 (2012), no. 10, 5311-5368.

[39] L.E. Positselski, *Closed form algebra on a disk is Koszul*, Functional Analysis and its Applications 46 (3), p. 218-224, 2012.

[40] Prokhorov, Yuri, *Simple finite subgroups of the Cremona group of rank 3*, J. Algebraic Geom. 21 (2012), no. 3, 563-600.

[41] L. Katzarkov and V. Przyjalkowski, *Landau-Ginzburg models — old and new*, Proceedings of the 18th Gökova geometry-topology conference, Gökova, Turkey. Cambridge, MA: International Press. 97-124 (2012).

[42] V.Przhiyalkovsy, L.Katzarkov, I.Cheltsov, *Birational geometry via moduli spaces*, в "Birational geometry, rational curves, and arithmetic — Simons symposium 2012".

[43] V.Przhiyalkovsky, N.Ilten, J.Liuis, *Toric Degenerations of Fano Threefolds Giving Weak Landau-Ginzburg Models*, Journal of Algebra 374 (2013), 104-121, arXiv:1102.4664.

[44] V.Przhiyalkovsky, A.Iliev, L.Katzarkov, *Double solids, categories and non-rationality*, Proceedings of EMS, 2013, arXiv:1102.2130.

[45] V.Przhiyalkovsky, *Weak Landau-Ginzburg models for smooth Fano threefolds*, Izv. Math. 77 (4), 2013.

[46] Sergey Rybakov, *The groups of points on abelian surfaces over finite fields*, в Arithmetic, Geometry, Cryptography and Coding Theory, Contemporary Mathematics, vol. 574, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2012, pp. 151-158.

[47] Misha Feigin, Constantin Shramov, *On Unitary Submodules in the Polynomial Representations of Rational Cherednik Algebras*, International Mathematics Research Notes (ISSN 1073-7928), Vol.2012, No.15, pp.3375-3414.

[48] Andrey Soldatenkov, Misha Verbitsky, *Subvarieties of hypercomplex manifolds with holonomy in* $SL(n, H)$, Journal of Geometry and Physics, Volume 62, Issue 11, November 2012, Pages 2234-2240.

[49] E. Ghys, S. Tabachnikov, V. Timorin, *Osculating curves: around the Tait—Kneser Theorem*, The Mathematical Intelligencer, 2012. No. 12.

[50] V.A. Timorin, *Planarizations and maps taking lines to linear webs of conics*, Mathematical Research Letters, 2012. T. 19. No. 4. C. 1-9.

[51] Inna Mashanova, Vladlen Timorin, *Captures, matings and regluing*, Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse Vol. XXI, no 5, 2012 pp. 877-906.

[52] Blokh A., Oversteegen L., Ptacek R., V.A. Timorin, *Dynamical cores of topological polynomials*, Proceedings of the International Conference “Frontiers in Complex Dynamics” celebrating J. Milnor’s 80th Birthday, Princeton University Press.

[53] Н.А. Тюрин, *Нестандартные лагранжевы торы и псевдоторические структуры*, Теоретическая и математическая физика, том 171 (2012) номер 2, стр. 321-325.

[54] С.А. Белев, Н.А. Тюрин, Подъемы лагранжевых торов Математические заметки, том 91 (2012), номер 5, стр. 784-786

[55] С.А. Белев, Н.А. Тюрин, *Псевдоторические структуры на торических многообразиях*, Теоретическая и математическая физика, принято в печать.

[56] Ornea, Liviu; Verbitsky, Misha, *Automorphisms of locally conformally Kähler manifolds*, Int. Math. Res. Not. IMRN 2012, no. 4, 894-903.

[57] Markushevich, Dimitri; Tikhomirov, Alexander S.; Verbitsky, Misha, *Editors' preface for the topical issue "Instantons, coherent sheaves and their moduli spaces"*, Cent. Eur. J. Math. 10 (2012), no. 4, 1185-1187.

[58] Misha Verbitsky, *A formally Kahler structure on a knot space of a $G2$-manifold*, Sel. Math. New. Ser. (2012) 18:539-555.

[59] Misha Verbitsky, *Pseudoholomorphic curves on nearly Kahler manifolds*, принято в Comm. in Math. Phys.

[60] В.С.Жгун, Д.А.Тимашев, *Симплектические многообразия с инвариантными лагранжевыми подмногообразиями*, Доклады Российской Академии Наук, Т.443. No. 4, (2012) 418-421.

[61] V.S.Zhgoon, *On the Local Structure Theorem and equivariant geometry of cotangent bundles*, Journal of Lie theory, Volume 23 (2013) 607-638.

23 Препринты Лаборатории

Список литературы

[1] Fedor Bogomolov, Christian Böhning, *Isoclinism and stable cohomology of wreath products*, arXiv:1204.4747.

[2] Fedor Bogomolov, Ilya Karzhemanov, Karine Kuyumzhiyan, *Unirationality and existence of infinitely transitive models*, 12 pages, arXiv:1204.0862.

[3] Ivan Cheltsov, Constantin Shramov, *Sporadic simple groups and quotient singularities*, arXiv:1207.2227.

[4] Efimov Alexander, *Cyclic homology of categories of matrix factorizations*, arXiv 1212:2859.

[5] Sergey Gorchinskiy, *Generation of modules and transcendence degree of zero-cycles*, arXiv:1210.0233, 5 pages.

[6] Sergey Gorchinskiy, Dmitri Orlov, *Geometric Phantom Categories*, arXiv:1209.6183, 15 pages.

[7] Sergey Gorchinskiy, Alexey Ovchinnikov, *Isomonodromic differential equations and differential categories*, arXiv:1202.0927.

[8] Alexey Elagin, *Descent theory for semiorthogonal decompositions*, arXiv:1206.2881, 33 pages.

[9] Giovanni Cerulli Irelli, Evgeny Feigin, Markus Reineke, *Desingularization of quiver Grassmannians for Dynkin quivers*, arXiv:1209.3960, 22 pages.

[10] Evgeny Feigin, Ghislain Fourier, Peter Littelmann, *PBW-filtration over Z and compatible bases for $V_Z(A)$ in type A_n and C_n*, arXiv:1204.1854.

[11] Evgeny Feigin, *Degenerate SL_n: representations and flag varieties*, arXiv:1202.5848, 17 pages.

[12] M.Finkelberg, D.Kubrak, *Vanishing cycles on Poisson varieties*, arXiv:1212.3051.

[13] Roman Bezrukavnikov, Michael Finkelberg, with Appendices by Ivan Losev, Vadim Vologodsky, *Wreath Macdonald polynomials and categorical McKay correspondence*, arXiv:1208.3696, 16 pages.

[14] Alexander Braverman, Michael Finkelberg, Junichi Shiraishi, *Macdonald polynomials, Laumon spaces and perverse coherent sheaves*, arXiv:1206.3131, 20 pages.

[15] Alexander Braverman, Michael Finkelberg, *Weyl modules and q-Whittaker functions*, arXiv:1203.1583.

[16] Klaus Altmann, Valentina Kiritchenko, Lars Petersen, *Merging divisorial with colored fans*, arXiv:1210.4523, 29 pages, 6 figures.

[17] V. Kharlamov, Vik. Kulikov, *Covering semigroups*, arXiv:1205.4892.

[18] A. Levin, M. Olshanetsky, A. Smirnov, A. Zotov, *Hecke Transformations of Conformal Blocks in WZW Theory. I. KZB Equations for Non-trivial Bundles*, arXiv:1207.4386, 32 pages.

[19] A. Levin, M. Olshanetsky, A. Smirnov, A. Zotov, *Characteristic Classes of $SL(N)$-Bundles and Quantum Dynamical Elliptic R-Matrices*, arXiv:1208.5750.

[20] Anton Khoroshkin, Nikita Markarian, Sergey Shadrin, *Hypercommutative operad as a homotopy quotient of BV*, arXiv:1206.3749, 24 pages.

[21] Valery Alexeev, Dmitri Orlov, *Derived categories of Burniat surfaces and exceptional collections*, arXiv:1208.4348, 15 pages, 1 figure.

[22] Leonid Positselski, *Contraherent cosheaves*, arXiv:1209.2995, 105 pages.

[23] Leonid Positselski, *Weakly curved A-infinity algebras over a topological local ring*, arXiv:1202.2697, 165 pages.

[24] Yuri Prokhorov, Constantin Shramov, *Jordan property for Cremona groups*, arXiv:1211.3563, 13 pages.

[25] Yuri Prokhorov, *On birational involutions of P^3*, arXiv:1206.4985, 24 pages.

[26] Yuri Prokhorov, Miles Reid, *On Q-Fano threefolds of Fano index 2*, arXiv:1203.0852, 22 pages.

[27] Takashi Kishimoto, Yuri Prokhorov, Mikhail Zaidenberg, *Unipotent Group Actions On Del Pezzo Cones*, arXiv:1212.4479.

[28] Takashi Kishimoto, Yuri Prokhorov, Mikhail Zaidenberg, *Ga-actions on affine cones*, arXiv:1212.4249.

[29] Pavel Gusev, Valentina Kiritchenko, Vladlen Timorin, *Number of vertices in Gelfand–Zetlin polytopes*, arXiv:1205.6336, 11 pages, 3 figures.

[30] Misha Verbitsky, *Rational curves and special metrics on twistor spaces*, arXiv:1210.6725, 12 pages.

[31] Liviu Ornea, Misha Verbitsky, *Locally conformally Kahler metrics obtained from pseudoconvex shells*, arXiv:1210.2080, 12 pages.

[32] Misha Verbitsky, *Pseudoholomorphic curves on nearly Kahler manifolds*, arXiv:1208.6321, 6 pages.

[33] Ljudmila Kamenova, Misha Verbitsky, *Families of Lagrangian fibrations on hyperkaehler manifolds*, arXiv:1208.4626.

[34] Misha Verbitsky, *Holography principle for twistor spaces*, 26 pages, with appendix by Dmitry Kaledin, arXiv:1211.5765.

24 Приложения

Приложение 1. Аннотации курсов лекций, прочитанных в рамках повышения квалификации сотрудников Лаборатории.

Приложение 2. Аннотации докладов по проведенным научным исследованиям сотрудников, привлекаемых Лабораторией на основании договоров гражданско-правового характера.

Приложение 3. Публикации (представляются на электронном носителе).