

1. А. В. Зорич. ИРРАЦИОНАЛЬНЫЕ ОБМОТКИ ПЛОСКИХ ПОВЕРХНОСТЕЙ,
ТЕЙХМЮЛЛЕРОВ ГЕОДЕЗИЧЕСКИЙ ПОТОК, И «МАШИНА ВРЕМЕНИ».

Антон Зорич, 4 ноября 2004

Мою лекцию можно считать рекламой плоских поверхностей. На мой взгляд, они незаслуженно обделены вниманием. В последнее время про них, наконец, что-то доказано, но гораздо больше не доказано. Мне этот объект кажется очень интересным.

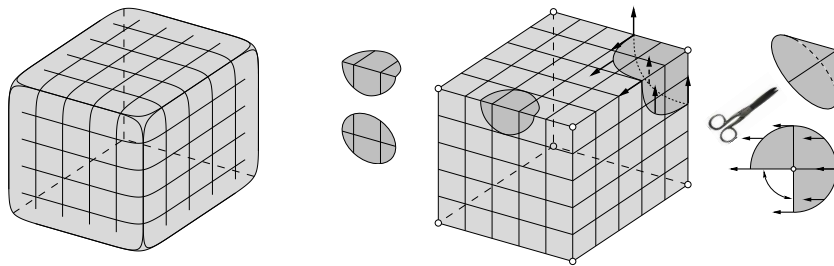


Рис. 1. Сфера с плоской метрикой

1.1. Плоские поверхности, бильярды. Начать я хочу с того, что, согласно распространенному предубеждению, плоским бывает только тор. Что поверхности рода выше 1 (т.е. 2, 3 и т.д.) — это поверхности, на которых можно выбрать метрику постоянной отрицательной кривизны; сфера — это поверхность постоянной положительной кривизны; а поверхности постоянной нулевой кривизны — это только торы. Конечно, это не так. Вот пример совершенно плоской сферы с чудесной плоской метрикой (рис. 1). Точно так же плоской можно сделать любую поверхность. Представьте себе, что наша поверхность сделана из пластилина. Ее можно со всех сторон прижать, и она станет сначала плоской на каких-то кусках, а кривизна останется на каких-то островках. Метрика станет плоской, а кривизна выживет только на островках. А потом эти островки можно сжать совсем, и метрика станет плоской всюду, кроме нескольких точек.

Конечно, у метрики на кубе есть особенности. И, конечно, в этом всё и дело. Я спрятал кривизну метрики, с которой я ничего не могу сделать (в данном случае избыток кривизны), в нескольких особых точках — вершинах куба. Я хочу вас убедить в том, что на ребрах куба у метрики особенностей нет. Убедить, собственно, очень просто: достаточно разогнуть лист бумаги, и сразу видно, что никаких особенностей, на самом деле, у метрики на ребре нет! Это особенности вложения в $\mathbb{R}^3$, которое мне не интересно; мне интересна внутренняя метрика на самой поверхности. Так что вот ребро куба, я ничего не делаю с бумагой, я ее не разрываю, не растягиваю, просто разгибаю, и объявляю, что карта в окрестности ребра куба — это и есть плоская карта. Так что все особенности метрики спрятаны только в вершинах куба. И, собственно, это я и хотел сказать: для поверхности любого рода можно спрятать всю кривизну (точнее, избыток или недостаток кривизны) в несколько особых точек. Такие

поверхности — поверхности с плоской метрикой и с несколькими особенностями, я и буду называть плоскими поверхностями. В нашем примере конические особенности расположены в вершинах куба. Если вырезать окрестность вершины куба, она будет действительно так устроена, как окрестность конуса. И если разрезать конус по образующей, развернуть и положить на стол, то так можно померить, какой угол у нашей конической особенности. В данном случае видно, что угол у конической особенности — это $3\pi/2$. Так что получилась совершенно плоская сфера с восемью коническими точками с углами $3\pi/2$.

Как всегда, когда есть какое-то многообразие и метрика на нем, можно рассматривать геодезические. Предлагается исследовать геодезический поток для таких плоских метрик. И для начала можно считать, что мы будем рассматривать только те геодезические, которые не попадают в конические точки. А потом мы обсудим, что делать с геодезическими, которые туда попадают. Вот два вопроса: как ведут себя типичные геодезические, и как ведут себя замкнутые геодезические? В частности, сколько их, когда они есть, с какой скоростью растет число замкнутых геодезических, если считать число замкнутых геодезических ограниченной длины, и т.д. Есть такие вопросы; беда в том, что на эти вопросы нет ответов. А именно, про общие плоские поверхности ровным счетом ничего не известно.

Забудем про поверхности высокого рода, рассмотрим сферу; и забудем про большое количество конических точек, возьмем всего три конических точки. Пространство сфер с тремя коническими точками не такое большое; все такие метрики легко параметризовать. Но даже для сфер с тремя коническими точками почти ничего не известно.

Обсудим, что такое голономия. Когда у нас есть метрика, мы можем взять касательный вектор, перенести его параллельно по замкнутому контуру и посмотреть, как он повернулся. На поверхностях, скажем, на кубе (на нашей плоской сфере), голономия метрики нетривиальна: чтобы в этом убедиться, достаточно обойти вокруг конической точки. Проще всего переносить параллельно вектор, разрезав и развернув окрестность конической точки и положив ее на стол; потому что там плоская метрика становится просто плоской метрикой на столе, и параллельный перенос — это обычный параллельный перенос. И если взять вектор и начать его параллельно переносить по замкнутому контуру, охватывающему коническую точку, то видно, что он повернется как раз на угол конической точки.

Геодезические, которые бегают по нашей сфере, будут сами себя пересекать и т.д. И в общей ситуации про «прямые линии» на плоской поверхности ровным счетом ничего не известно. В частности, даже для сферы неизвестно, есть ли для почти любой плоской метрики с тремя коническими особенностями хоть одна замкнутая геодезическая.

Второй вопрос: про эргодичность геодезического потока. Я напомним, что такое эргодичность. Когда у вас есть отображение, которое сохраняет меру, то оно называется эргодичным, если любое инвариантное множество либо имеет меру нуль, либо дополнение к нему имеет меру нуль. Эргодические отображения имеют массу замечательных свойств; в частности, если взять какое-нибудь подмножество промежуточной меры, то траектория отображения проводит в этом подмножестве время, пропорциональное мере этого подмножества, и т.д.

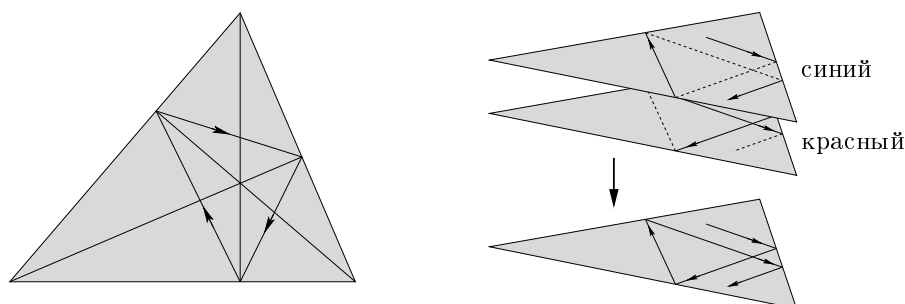


Рис. 2. Бильярд в треугольнике

Вернемся к сфере с тремя коническими точками. На самом деле это история про бильярды, про бильярды в многоугольниках. Возьмем многоугольник, в данном случае — треугольник. И будем играть в бильярд не на обычном бильярдном столе, а на треугольном. Луз у нас нет, и мы гоняем траектории. Я предлагаю сделать вот что: каждый раз, когда траектория будет ударяться о борт, мы будем ее продолжать, перекрасив в другой цвет, используя два цвета. Скажем, мы стартовали с синего цвета, ударились, цвет стал красным, ударились, цвет стал синим, потом снова красным, потом снова синим, и т.д. (рис. 2). И проще всего это сделать вот как: можно считать, что у нас есть две прозрачных копии одного и того же бильярда, и синие траектории я рисую на одной стороне, а красные — на другой.

А теперь давайте эти две копии склеим по границе. Я просто наложил один треугольник на другой и отождествил границы (см. рис. 2). И когда я отождествил границы, то топологически я получил сферу, потому что я взял два диска и склеил по границе. На нашей сфере есть плоская метрика, и точно так же, как и для куба, я могу разогнуть ребро и убедиться, что на ребре у нашей плоской метрики никаких особенностей нет. Так что то, что мы получили — это настоящая плоская сфера, та самая плоская сфера, как мы рассматривали, с тремя коническими точками. А бильярдная траектория превратилась в геодезическую. Потому что, когда я разгибаю по ребру, видно, что бильярдная траектория становится прямой линией. Если посмотреть, как бильярдная траектория переходит на второй лист, то видно, что она просто переходит по прямой. Так что задача, которая здесь сформулирована — это задача про бильярд. И это страшно обидно, но про бильярды в треугольниках мало что известно. Например, не известно, верно ли, что в каждом тупоугольном треугольнике есть хотя бы одна замкнутая траектория!

Раз уж я заговорил о бильярдах, давайте, я скажу хоть два слова про то, что известно. Мы уже отметили, что бильярды в многоугольниках и соответствующие плоские сферы, это почти одно и то же. Теперь про замкнутые бильярдные траектории: всё же в остроугольном треугольнике легко найти замкнутую бильярдную траекторию. Это задача по планиметрии, в качестве упражнения я предлагаю доказать, что если в любом остроугольном треугольнике соединить основания высот, получится бильярдная траектория (рис. 2).

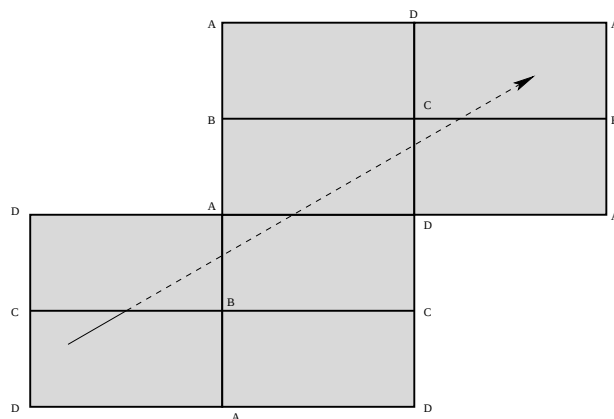


Рис. 3. Биллиард в прямоугольнике

А вот в тупоугольном треугольнике эта конструкция не работает, и про тупоугольные треугольники, если смотреть только на строгие теоремы, мало что известно.

Тупоугольные треугольники параметризуются двумя параметрами, двумя углами. Сумма острых углов не превосходит $\pi/2$, они оба положительны, так что пространство параметров — это тоже треугольник, это симплекс. В этом симплексе Гриша Гальперин построил фрактал, который имеет площадь $1/3$, и для этого фрактала существование замкнутой траектории известно, а для дополнения — нет.

В последнее время замкнутые биллиардные траектории интенсивно пытаются строить с помощью компьютера. И если верить компьютерным экспериментам Патрика Хупера и Ричарда Шварца (P. Hooper, R. Schwartz), то для каждого треугольника (или, по крайней мере, для почти каждого треугольника) такие траектории есть, и более того, их много; но пока это только компьютерный эксперимент.

Для остроугольных треугольников есть компьютерное доказательство следующего: если забыть про специальную замкнутую биллиардную траекторию, которую я упомянул, и рассматривать только другие, то всё пространство параметров для остроугольного треугольника можно замостить областями, где в каждой области имеется устойчивая биллиардная траектория. Мы можем немножко деформировать наш треугольник, и некоторые траектории, грубо говоря, выживают при малой деформации. И, собственно, в этом и заключается метод: мы находим каким-нибудь способом устойчивую биллиардную траекторию, а дальше начинаем шевелиться в пространстве параметров, получаем некоторую область для которой выживает наша замкнутая траектория; так мы покрыли часть пространства параметров областью; потом для точки вне этой области находим новую замкнутую устойчивую биллиардную траекторию; потом для нее находим область выживания, и пытаемся замостить так всё пространство параметров. Для остроугольных треугольников это уже сделано; теперь Хупер и Шварц пытаются сделать то же самое для тупоугольных треугольников.

1.2. Очень плоские поверхности. Только что мы построили сферу по бильярду в многоугольнике. Мы взяли двойную развертку нашего бильярда, и бильярд в многоугольнике заменили на геодезический поток на сфере. Я предлагаю еще одну конструкцию, которая работает только для некоторых многоугольников, а именно, для многоугольников с рациональными углами. Начну я с прямоугольника, хотя и уверен, что все это слышали. Но на всякий случай я повторю. На рис. 3 изображен участок бильярдной траектории в прямоугольнике, и видно, что если мы выпустили в каком-то направлении траекторию, то в каждый момент времени она будет двигаться в одном из четырех направлений. Здесь есть черное, красное, синее и зеленое направления; и других не будет. На этот раз я предлагаю вместо двух копий взять четыре копии нашего многоугольника: по одной копии для каждого направления. Точно так же, как мы сделали раньше, я предлагаю продолжать нашу траекторию в следующую копию, зеркально отражая наш бильярд. Я предлагаю размножить наши бильярдные столы: взять четыре копии и устроить естественное отождествление между краями. Если посмотреть, как отождествляются края четверного прямоугольника, то это просто параллельные переносы. Так что, вместо того, чтобы рассматривать геодезический поток на сфере, как в предыдущей конструкции, мы рассматриваем геодезический поток на торе. А преимущество заключается в том, что теперь наша траектория идет всё время в одном направлении. На торе наша плоская метрика уже не имеет голономии, параллельный перенос вектора по замкнутому контуру переносит вектор в себя, и, в частности, мы можем на торе выбрать направление на север, и оно будет всюду определено. И если мы отправили траекторию, скажем, в северо-восточном направлении, то она всю жизнь будет идти в северо-восточном направлении.

Всё это было бы неинтересно, если бы ту же конструкцию нельзя было применить к другим многоугольникам. Но, к счастью, это сделать можно. И всё, что требуется, это чтобы у многоугольника углы были рациональными кратными π . Например, возьмем равнобедренный треугольник с углами $(\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{8}, \frac{3\pi}{8})$. Если выпустить бильярдную траекторию в этом треугольнике и посмотреть, сколько у нее будет разных направлений, то обычно их будет восемь. Нужно взять восемь копий этого треугольника, развернуть их, они развернутся в правильный восьмиугольник; и если проверить отождествления, то будет видно, что нужно просто отождествить противоположные стороны. Так что наша бильярдная траектория в таком треугольнике отвечает геодезической на поверхности, которая склеена из правильного восьмиугольника.

Поверхность склеена так: мы просто отождествляем противоположные стороны. Конструкция с разверткой рационального многоугольника называется конструкцией Катка–Землякова. (Я слышал, что идея такой развертки была известна также составителям и участникам ленинградских математических олимпиад 60х – 70х годов.)

Склеив противоположные стороны правильного восьмиугольника, мы получаем плоскую поверхность, как и раньше. У нее будут конические особенности; эти конические особенности приходят из вершин нашего многоугольника. Можно проверить, что в нашем примере все вершины отождествлены, они становятся одной-единственной точкой. Угол в этой конической особенности будет довольно большой; потому что, когда мы обойдем вокруг конической особенности полностью, мы заметём просто сумму углов нашего восьмиугольника, а она

равна 6π . Так что в данном случае у нас единственная коническая особенность с углом 6π как на рис. 5.

Голономия плоской метрики на построенной поверхности тривиальна. Заметьте, что если голономия метрики на поверхности тривиальна, то все конические особенности непременно должны быть целыми кратными 2π . Но я должен предупредить, что это не достаточное условие: бывают плоские поверхности, у которых все конические особенности (углы) кратны 2π , а голономия не тривиальна, такое бывает. Но в данном случае голономия действительно тривиальна, просто потому, что все наши отождествления — это параллельные переносы. Когда мы склеиваем стороны, мы ничего нигде не поворачиваем, просто параллельно переносим; поэтому голономия нашей поверхности тривиальна. То есть, для этой поверхности можно тоже выбрать направление на север, что мы отныне всегда будем делать; это направление на север повсюду корректно определено. Оно даже лучше определено, чем на Земле; потому что на Земле есть две точки, где направление на север очень плохо определено (северный и южный полюс). У нашей поверхности есть коническая особенность, и, казалось бы, в ней тоже проблемы. Но в конической особенности на нашей поверхности все же меньше проблем, чем в северном и южном полюсе, потому что здесь есть только три направления на север вместо бесконечного количества.

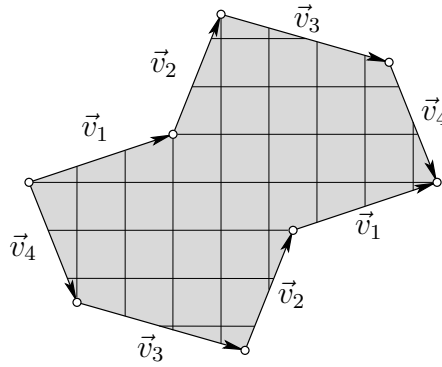


Рис. 4. Все стороны многоугольника — парные

С этого момента я предлагаю забыть про плоские поверхности общего положения (с нетривиальной голономией) и рассматривать только те плоские поверхности, у которых голономия тривиальная. И для простоты можно считать, что все эти очень плоские поверхности (с тривиальной голономией) приходят из многоугольников, у которых стороны разбиты на пары, и в каждой паре стороны имеют одинаковую длину и параллельны (рис. 4). Тогда, отождествив стороны в каждой паре подходящим параллельным переносом, мы получим поверхность с тривиальной голономией.

Я хочу воспользоваться картинкой на рис. 4 и убедить вас, что мы можем довольно просто деформировать плоскую метрику. Забудем на время, что у нас был многоугольник. Давайте считать, что у нас просто есть ломаная линия из четырех векторов. Выберем векторы более или менее случайным образом; в частности, любой из четырех векторов, которые здесь нарисованы, я могу пошевелить. Я предлагаю следующую конструкцию. Построим ломаную линию,

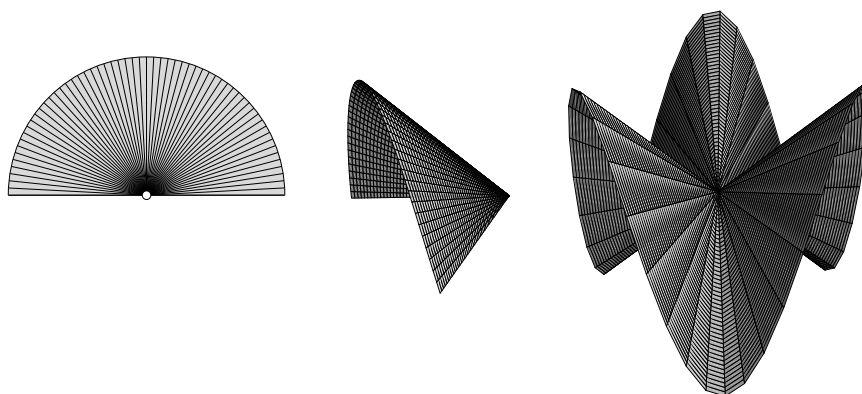


Рис. 5. Коническая точка с углом 6π

потом выберем какую-нибудь перестановку того числа элементов, сколько у нас векторов в нашей ломаной линии, и построим новую ломаную линию из тех же векторов согласно перестановке. На картинке представлена перестановка 4321; можно взять другую перестановку. Мы можем взять сто векторов и перестановку из ста элементов. Если нам повезет, то наши две ломаные линии не пересекутся. Они точно придут в одну и ту же точку (потому что мы использовали те же самые звенья). Давайте считать, что нам повезло, и ломаные не пересеклись; тогда мы получили многоугольник. Из этого многоугольника мы можем немедленно склеить очень плоскую поверхность. У этой плоской поверхности получатся какие-то углы. Так как по построению у нее тривиальная голономия, все углы будут целыми кратными 2π . Некоторые вершины могут дать точки, которые вообще не особые; это зависит от перестановки. Вся топология нашей поверхности спрятана в перестановке, которую мы использовали.

Мы договорились рассматривать только плоские поверхности с тривиальной голономией. Теперь мы в каждой точке можем указать направление на север; я предлагаю его выбрать. Давайте считать, что наши плоские поверхности поляризованы; я буду предполагать, что наша плоская поверхность всегда задана с направлением на север. Поверхность, повернутая на какой-то угол — это уже другой объект. Будем помнить направление на север. Если теперь на такой поверхности выпустить геодезическую в каком-то направлении, то точно так же, как на торе, она будет всегда наматываться в том же направлении. В частности, она себя никогда не пересечет. (Я выколол особые точки. Сегодня я не буду рассматривать геодезические, которые попадают в особые точки, только геодезические общего положения.) То есть, геодезический поток в фиксированном направлении задает слоение на нашей поверхности. Таким образом, эти поверхности, действительно, во многих отношениях имитируют тор. И из тривиальности голономии нашей метрики следует, что все конические углы — целые кратные 2π .

Теперь, чтобы как-то примирить вас с коническими углами, которые больше 2π , на рисунке 5 я изобразил коническую точку с углом 6π . Я взял шесть полудисков, немножко согнул их и склеил из них обезьянье седло. Это метрически коническая точка с углом 6π ; она склеена из шести полудисков с углом π каждый. Так что такое бывает, это не абстракция.

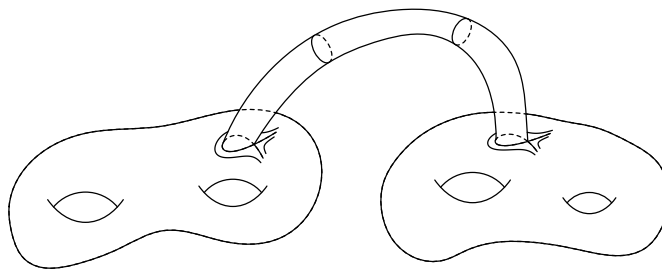


Рис. 6. Опасная поверхность

И вот теперь, так как я ничего не могу сказать про плоские поверхности общего положения, я начну пропаганду очень плоских поверхностей. Зачем они нужны, и где они возникают? Я хотел бы показать несколько примеров того, как они появляются, а потом сформулировать про них несколько теорем. Один пример мы уже видели: это бильярды на рациональных многоугольниках.

Теперь второй пример. Он выглядит так: рассмотрим поверхность и замкнутую 1-форму на этой поверхности. Замкнутая 1-форма локально является дифференциалом функции и у нее есть линии уровня. А глобально замкнутая 1-форма задает слоение; у функции на компактной поверхности эти линии уровня замыкаются, а у замкнутой 1-формы, вообще говоря, нет. Типичный пример: $dx + \sqrt{2}dy$ на торе, заданном стандартным квадратом.

Существует теорема — критерий того, когда слоение, заданное замкнутой 1-формой, можно выпрямить. А именно, когда можно подобрать по нашей замкнутой 1-форме такую очень плоскую метрику, в которой слоение становится просто слоением прямых линий (как на торе). Для тора, кажется, это теорема Колмогорова, но я могу ошибаться. А для поверхностей общего рода это теорема, которая в разных формулировках была доказана разными авторами (например, Калаби (E. Calabi) и Катком) и в разных предположениях на формы. Я предполагаю, что форма локально примерно такая же, как дифференциал морсовской функции; чуть шире, на самом деле: я допускаю изолированные вырожденные критические точки. Так вот, оказывается, что заданное такой формой слоение часто можно выпрямить. Единственное, что может этому помешать — существование замкнутых слоев, гомологичных нулю.

На рис. 6 изображена как раз опасная поверхность: на такой поверхности слоение, заданное нашей 1-формой, выпрямить нельзя. Подразумевается, что на ручке слоение выглядит как слоение окружностей; на каждом краю ручки есть особый слой и есть критическая точка. И если взять линию, которая обхватывает ручку, то она как раз гомологична нулю, она разделяет нашу поверхность на два куска.

Это всегда слоение с особенностями. Но тем не менее я хочу сказать, что даже в этом случае можно вырезать эту ручку, на которой слоение тривиально (просто окружности), вырезать ее, выбросить; получатся две компоненты; и на каждой из этих компонент — по дырке. Допустим что нас интересуют топологические свойства слоев, не тонкие свойства, скажем, как в гамильтоновой системе (где очень важна скорость, с которой мы идем вдоль слоев в соответствующей параметризации), а просто топология: как слои обматываются вокруг поверхности. Когда у нас есть слой, который обходит дырку с одной

стороны, и слой, который обходит с другой стороны от дырки, они, если мы заклеим эту дырку диском, становятся гомотопны друг другу, мы можем этот диск стянуть в точку.

Я хочу сказать, что в некотором смысле, если мы интересуемся только тем, как слои слоений, заданных замкнутыми 1-формами, выются вокруг поверхности, то всё сводится к случаю, когда их можно выпрямить. Потому что, если у нас есть слои, гомологичные нулю, мы просто разрежем по ним нашу поверхность и сведём всё к случаю, когда их нет, мы их истребили. Так что в этом смысле все интересные с топологической точки зрения слоения выпрямляются и становятся просто слоениями фиксированного направления на очень плоской поверхности. Нужно выкинуть все слои, гомологичные нулю; они образуют цилиндры, заполненные окружностями. Нужно забыть о них и стянуть дырки. И после этого на том, что останется, всё выпрямляется, согласно этой теореме.

Я предпочел ограничиться совсем плоскими поверхностями. Близкие родственницы таких очень плоских поверхностей — это поверхности, у которых разрешается нетривиальная голономия, но только такая, которая переворачивает вектор в противоположный: мы переносим вектор по контуру, и он либо вернулся сам в себя, либо перевернулся на 180° . Для таких метрик можно сделать почти всё то же самое. Но для простоты я решил говорить только о совсем плоских поверхностях.

А теперь я должен сказать еще несколько слов об интерпретации того же самого объекта в других терминах. До сих пор я использовал исключительно геометрическую интерпретацию (плоская метрика, тривиальная голономия и т.д.). А есть еще одна интерпретация — комплексно-аналитическая. Раз уж мы стартовали с геометрической интерпретации, давайте считать, что наша поверхность задана многоугольником. Первое утверждение: когда у нас есть очень плоская структура, на поверхности немедленно возникает комплексная структура и возникает выделенная замкнутая голоморфная 1-форма (в этой комплексной структуре). Эта комплексная структура получается очень просто. Я напоминаю, что мы договорились выбирать направление на север на нашей поверхности, и наша поверхность задана многоугольником. Положим многоугольник на комплексную плоскость так, чтобы направление на север шло на север; в какое место в комплексной плоскости — не важно. Тогда с комплексной плоскости на поверхность индуцируется комплексная координата. Точнее говоря, эта координата задана на многоугольнике, но когда мы отождествляем противоположные стороны многоугольника, то наша функция склейки $z' = z + \text{const}$ — голоморфная функция; поэтому уже на самой поверхности возникает комплексная структура. Если быть честным, я должен выколоть сначала конические точки, а дальше проверить, что комплексная структура продолжается на замкнутую поверхность. Это упражнение, которое легко продолжать; действительно продолжается!

Еще я должен сказать, откуда берется замкнутая 1-форма. Замкнутая 1-форма — это просто dz . Опять же, из-за того, что наши склейки — это $z' = z + \text{const}$. Для формы dz это не важно: она не видит, что мы добавили константу, она глобально определена, если выколоть особые точки. А дальше нужно проверить, что она продолжается в особые точки. Действительно продолжается: продолжается она нулем. И в конической точке с углом $2\pi(d+1)$ у нее нуль порядка d .

Все свойства, которые я формулировал в геометрических терминах, можно сформулировать в комплексно-аналитических терминах. В частности, аргумент с ломаной линией показывает, что мы можем шевелить векторы, с помощью которых построили многоугольник, и они нам дадут параметры в семействе очень плоских поверхностей. Не так очевидно, что это — полный список параметров, что это действительно локальные координаты в соответствующем семействе плоских поверхностей. Тем не менее, это так: если мы фиксируем род, фиксируем конические углы и т.д., то эти векторы локально составят полный набор независимых параметров.

При шевелении поверхность останется очень плоской (то есть голономия плоской метрики останется тривиальной), потому что мы договорились шевелить наши параметры так, чтобы у многоугольника стороны продолжали оставаться разбитыми на пары, где в каждой паре стороны параллельны и имеют одинаковую длину. Мы можем взять сто векторов, взять какую-то хитрую перестановку из ста элементов и получить огромное количество разных конических особенностей; всё зависит от комбинаторики нашего многоугольника. В комплексно-аналитической терминологии это соответствует тому, что мы можем выбрать голоморфную 1-форму на поверхности высокого рода с большим количеством разных нулей. Единственное условие, которое должно быть соблюдено: сумма порядков нулей равна $2g$. Семейство наших плоских поверхностей, когда мы фиксировали род и фиксировали типы конических особенностей, — это семейство пар «комплексная структура и голоморфная 1-форма в этой комплексной структуре». Так что семейство таких очень плоских поверхностей — это то же самое, что страт в пространстве модулей голоморфных 1-форм.

В качестве параметров многоугольника мы использовали наши векторы: стороны $\vec{v}_i$, с помощью которых мы построили многоугольник. Это были свободные параметры, на них нет никаких ограничений (локальных, для малых деформаций). Как их интерпретировать в терминах голоморфной 1-формы? Наша форма в плоских координатах — это dz ; и вектор $\vec{v}_i$ — это интеграл от dz по соответствующему пути на нашей поверхности $\int_{p_k}^{p_l} \omega = \int_{\vec{v}_i} dz$, если мы договоримся отождествлять комплексные числа и двумерные векторы. А интеграл по соответствующему пути (если этот путь замкнут) — это просто период нашей формы (интеграл замкнутой 1-формы по замкнутому пути). Если путь не замкнут, а идет из одной конической точки в другую, то интеграл дает относительный период. Выберем базис замкнутых путей, а еще базис путей, соединяющих конические точки. И тогда такой относительный период — это одна из наших координат. Тем самым, координаты в нашем семействе, если интерпретировать наши объекты как плоские поверхности, — это наши двумерные векторы, которые задают развертку. А если использовать комплексно-аналитический язык, то это относительные периоды соответствующей замкнутой формы. Это одно и то же.

У нас собрался уже целый геометро-аналитический словарь:

Геометрический язык	Комплексно-аналитический язык
плоская поверхность (включая выбор вертикального направления)	комплексная структура, наделенная голоморфной 1-формой ω
Площадь поверхности	$\frac{i}{2} \int \omega \wedge \bar{\omega} = \frac{i}{2} \sum_{j=1}^g (A_j \bar{B}_j - \bar{A}_j B_j)$
коническая точка с коническим углом $2\pi(d+1)$	нуль порядка d голоморфной 1-формы ω (в локальной координате $\omega = w^d dw$)
сторона $\vec{v}_j$ многоугольника	относительный период 1-формы ω $\int_{P_j}^{P_{j+1}} \omega = \int_{\vec{v}_j} dz$
семейство очень плоских поверхностей с заданными коническими углами $2\pi(d_1+1), \dots, 2\pi(d_n+1)$	страт $\mathcal{H}(d_1, \dots, d_n)$ в пространстве модулей голоморфных 1-форм
локальные координаты в этом семействе: векторы $\vec{v}_i$, задающие многоугольник	локальные координаты в страте $\mathcal{H}(d_1, \dots, d_n)$: относительные периоды ω в $H^1(S, \{P_1, \dots, P_n\}; \mathbb{C})$

1.3. Плоские торы. Давайте рассмотрим самое простое семейство плоских поверхностей, которое, тем не менее, уже достаточно интересно: семейство плоских торов. Плоский тор можно склеить из прямоугольника или параллелограмма; выбирая разные параллелограммы, мы получим разные плоские метрики на торе. Посмотрим, как можно параметризовать эти плоские метрики. Чтобы проще было рисовать картинки, чтобы у нас было самое маломерное пространство, которое можно получить, давайте рассматривать торы с точностью до гомотетии. Это то же самое, что, скажем, нормировать площадь тора на единицу при помощи гомотетии. Или можно отнормировать что-нибудь другое; например, можно отнормировать длину самой короткой замкнутой геодезической на нашем плоском торе.

Это всё равно, что рассматривать голоморфные 1-формы с точностью до умножения на число, даже с точностью до умножения на комплексное число. Когда я умножаю форму на вещественное число, я меняю площадь поверхности. Умножение формы на комплексное число по модулю равно единице отвечает повороту направления «на север».

Договоримся о временном соглашении: до сих пор мы работали с парами «плоская поверхность плюс направление на север»; это то же самое, что комплексная структура плюс выбор 1-формы. Если мы теперь захотим работать с самими метриками, забыв направление на север, то мы должны отождествлять формы, полученные одна из другой умножением на $e^{i\phi}$. Я предлагаю временно рассматривать только метрику саму по себе. И еще я предлагаю нормировать длину самой короткой замкнутой геодезической на торе на единицу.

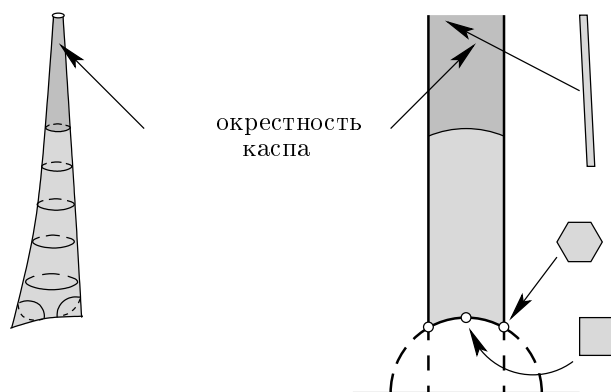


Рис. 7. Пространство плоских торов

Тогда, отнормировав нашу самую короткую геодезическую на единицу, мы можем повернуть нашу поверхность так, чтобы наша геодезическая стала горизонтальной. После этого мы можем найти следующую по длине замкнутую геодезическую и разрезать наш тор по этим двум геодезическим. Он разрежется в параллелограмм. Самая короткая геодезическая нормирована на единицу, мы ее положили горизонтально так, чтобы она выходила из начала координат. Вторую геодезическую мы контролировать не можем. Правильно выбрав ориентацию второй замкнутой геодезической, мы отправим концевую точку соответствующего ей вектора (вершину параллелограмма) в верхнюю полуплоскость. Эту точку мы и выберем в качестве параметра нашей поверхности. По построению она должна быть вне единичного круга, и, опять же, по построению она должна быть внутри полосы $-\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2}$, потому что, если мы возьмем параллелограмм слишком наклоненный, то на соответствующем торе можно будет найти более короткую геодезическую; так что я всегда могу загнать вектор, представляющий вторую геодезическую, внутрь этой полосы.

В этой полосе я должен отождествить две стороны и отождествить две дуги (рис. 7), и после этого на соответствующей поверхности появятся три особые точки. Одна особая точка — это касп. Касп уходит на бесконечность, там будет дырка. Касп отвечает тора, которые пытаются вырождаться: они очень-очень длинные, у них самая короткая геодезическая короткая, а следующие уже страшно длинные. Две оставшиеся особые точки отвечают правильному шестиугольнику и квадрату; у соответствующих двух торов есть дополнительные симметрии. Так что мы получили модулярную кривую.

И конечно, это то же самое, что пространство решеток. Плоские торы — это то же самое, что решетки в $\mathbb{R}^2$. Так что полученная модулярная поверхность — это $SO(2, \mathbb{R}) \backslash SL(2, \mathbb{R}) / SL(2, \mathbb{Z})$.

1.4. Действие $SL(2, \mathbb{R})$. Самые последние структуры, о которых я должен рассказать — это действие $SL(2, \mathbb{R})$ на плоских поверхностях и мера в пространстве плоских поверхностей, инвариантная относительно действия.

Действие это совершенно наивное. Если у нас есть плоская поверхность, то мы можем разрезать ее, сделав несколько прямолинейных разрезов, развернуть ее в многоугольник и «положить на стол». Мы теперь снова помним, где направление на север, так что мы знаем, как положить этот многоугольник на

стол с точностью до параллельного переноса. А потом мы просто подействуем на наш стол линейным преобразованием и получим новый многоугольник. У нового многоугольника стороны тоже будут разбиты на пары параллельных сторон одинаковой длины, см. рис. 8. Мы их снова склеим и получим новую поверхность. То же самое действие можно задавать локально: можно выбрать атлас, покрыть нашу поверхность картами, на каждую карту подействовать линейным преобразованием локально — получится то же самое. Итак, у нас возникло действие группы $SL(2, \mathbb{R})$ на пространстве поверхностей.

Теперь я должен сказать, что такое инвариантная мера μ_1 . Я предлагаю рассмотреть гиперпространство в нашем семействе плоских поверхностей, фиксируя площадь наших поверхностей (например, выбрав единичную площадь). Действие группы $SL(2, \mathbb{R})$ по построению сохраняет площадь поверхности, тем самым, сохраняет и наше гиперпространство.

В терминах координат $v_1, v_2, \dots$ (периодов), с помощью которых мы построили многоугольник, мера в полном пространстве (до того, как мы сели на гиперповерхности) — это просто лебегова мера, отвечающая форме объема $dv_1 \wedge dv_2 \wedge \dots$.

Или, если угодно, воспользовавшись альтернативным описанием координат, мы локально отождествили каждое семейство плоских поверхностей с областью в когомологиях. В когомологиях можно взять линейный элемент объема (когомологии — это линейное пространство). Единственное, что нужно сказать: как его отнормировать. Но в когомологиях есть решетка: мы можем рассмотреть когомологии с коэффициентами не в $\mathbb{C}$, как мы делали, а когомологии с коэффициентами в $\mathbb{Z} \oplus i\mathbb{Z}$, и в нашем векторном пространстве возникнет решетка. А дальше можно объявить, что мы знаем, как теперь нормировать объем в векторном пространстве: достаточно отнормировать элемент объема так, чтобы ячейка нашей решетки имела единичный объем.

Индукционная мера на гиперпространстве плоских поверхностей единичной площади определяется так же, как индуцированная мера на единичной сфере в евклидовом пространстве.

Теорема 1 (H. Masur, W. A. Veech). *Для любого семейства плоских поверхностей, у которых мы фиксировали типы конических особенностей (и, как следствие, род), полная мера гиперпространства плоских поверхностей единичной площади конечна.*

Оба действия (и $SL(2, \mathbb{R})$, и ее диагональной подгруппы) эргодичны на каждой связной компоненте каждого такого гиперпространства плоских поверхностей.

Я должен прокомментировать эту теорему. Рассмотрим пару плоских поверхностей, живущих в одном пространстве. Например, и восьмиугольник, как на левой стороне рисунка 8, и правильный восьмиугольник задают плоские поверхности рода два с одной конической точкой. Теорема Мэйзура и Вича утверждает, что действие диагональной подгруппы эргодично. А как действует диагональная подгруппа? Она сжимает наш многоугольник в вертикальном направлении и растягивает в горизонтальном (или наоборот). Рассмотрим многоугольник как на левой стороне рисунка 8. Спрашивается, как же это так? Что же это, получается, что сжимая его в вертикальном направлении и растягивая в горизонтальном, мы можем сколь угодно близко приблизить его к правильному восьмиугольнику? Звучит абсурдно. К счастью, теорема была

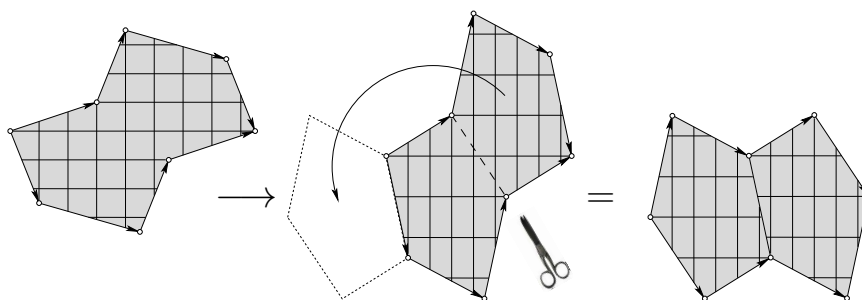


Рис. 8. Деформация плоской поверхности под действием потока

сформулирована не для многоугольников, а для поверхностей. А поверхность можно разрезать в многоугольник бесчисленным количеством способов. И теперь утверждение теоремы уже перестает быть таким неправдоподобным: я не только сжимаю и растягиваю, а я еще беру ножницы и регулярно что-то режу, клею, режу, клею. (Заметим: при переклейке я использую только параллельные переносы!) И так я могу перегнуть почти любой многоугольник сколь угодно близко к любому другому (при условии, что соответствующие поверхности живут в одном семействе).

1.5. Замыкания орбит. После всей этой длительной подготовки я наконец могу сформулировать общий принцип, к которому я так обстоятельно подбирался. Представьте себе, что вас интересует конкретная плоская поверхность и геодезический поток на этой плоской поверхности. Вы хотите узнать всё про прямолинейный поток в заданном направлении на заданной поверхности. Предлагается сделать вот что: вместо того, чтобы работать с этой индивидуальной плоской поверхностью, рассмотрим соответствующую точку в пространстве плоских поверхностей, то есть точку в пространстве модулей. И дальше напустим на эту точку группу $GL(2, \mathbb{R})$ (на этот раз площадь не фиксирована); получим какую-то орбиту. Возьмем замыкание этой орбиты. Общий принцип заключается в том, что уже много раз знание о том, как устроено замыкание, дало исключительно продвинутую информацию о свойствах индивидуальной плоской поверхности, с которой мы стартовали. А гипотеза заключается в том, что замыкание любой орбиты группы $GL(2, \mathbb{R})$ — это почти что комплексное подмногообразие. Ну, чуть хуже, потому что всё же мы видели, что здесь встречаются вместо многообразий орбиолды; но только за счет этого. Если эта гипотеза верна, то дальше начинает работать следующая теорема Концевича: любое комплексное $GL(2, \mathbb{R})$ -инвариантное подмногообразие в коомологических координатах (в координатах из периодов) выглядит как аффинное подпространство.

Тут я должен объяснить, насколько у нас волшебная динамическая система. Рассмотрим какую-нибудь произвольную динамическую систему, хотя бы тот же геодезический поток на поверхности постоянной отрицательной кривизны, но, скажем, с каспами. И возьмем какую-нибудь геодезическую; посмотрим, как она вьется. В пространстве единичных элементов возьмем замыкание выбранной гиперболической геодезической. Оно может оказаться сколь угодно

страшным множеством: промежуточной хаусдорфовой размерности и т.д.; в общем, отдельные орбиты ведут себя сколь угодно сложно, и описать зоопарк соответствующих замыканий совершенно невозможно. Так что, в некотором смысле, наша динамическая система — чудо; в обычных динамических системах такого не бывает: чтобы взяли замыкание любой орбиты, не почти любой, а любой орбиты, и оно оказалось исключительно симпатичным. Пожалуй, я знаю только один класс примеров: это однородные пространства и действие унипотентных подгрупп на однородных пространствах; вот там замыкание всех орбит можно перечислить (это теоремы Ратнер и Маргулиса). Гипотеза заключается в том, что здесь жизнь устроена точно так же; хотя известно, что пространства модулей не являются однородными пространствами.

Гипотеза о том, что замыкание любой орбиты — это комплексное подмногообразие, совсем недавно доказана Мак Малленом (С. McMullen) в роде два, и все орбиты классифицированы. В некотором смысле известен список орбит; у них у всех есть имена, их можно различить, они все поименно известны. Ситуация совершенно уникальная в динамических системах: все орбиты известны.

Я приведу два примера того, как работает предложенный общий принцип. Для иллюстрации я выдернул (более или менее случайно) две теоремы, которые свидетельствуют в пользу этой общей философии. На самом деле таких свидетельств гораздо больше.

Первый пример я хочу сначала прокомментировать. На торе, если мы выпустим обмотку, либо это будет иррациональная обмотка, и тогда поток в выбранном направлении замечательным образом эргодичен, либо обмотка будет рациональной, и тогда весь наш тор разобьется на огромное количество замкнутых траекторий, и всё максимально не эргодично. Уже на поверхности рода два жизнь бывает гораздо более сложной. А именно, хоть и редко, но бывает так, что все неособые траектории, идущие в одном направлении, плотны на поверхности, и, тем не менее, поверхность рода два можно разбить, скажем, на два тора, склеенных по дырке, так что одни траектории предпочитают жить на одном торе, а другие траектории предпочитают жить на другом. То, что каждая обмотка всюду плотна, теперь уже не означает, что обмотки равномерно накручиваются на нашу поверхность: поток может оказаться не эргодичным относительно обычной меры Лебега на поверхности. (Там есть две разные эргодические меры, которые не видят друг друга).

Мы договорились, что на нашей плоской поверхности выбрано вертикальное направление. Если нужно, мы всегда можем повернуть поверхность так, чтобы нужное направление стало вертикальным. Предположим, что для некоторой плоской поверхности поток в вертикальном направлении не строго эргодичен, то есть находится в только что описанной патологической ситуации. Первая теорема, которую я выбрал, чтобы проиллюстрировать общий принцип, утверждает, что тогда и соответствующая орбита диагональной подгруппы ведет себя следующим очень специальным образом.

Рассмотрим соответствующую точку в пространстве модулей и выпустим орбиту диагональной подгруппы. Мэйзур (Н. Masur) доказал, что какое бы мы ни выбрали компактное множество, орбита, выпущенная из такой специальной точки, рано или поздно из этого компактного множества уйдет и никогда не

вернется. Заметим, что обычно орбиты возвращаются: так как действие диагональной подгруппы эргодично, то орбиты, выпущенные из почти всех точек, бесконечное число раз возвращаются в любое подмножество ненулевой меры.

Пространства модулей всегда некомпактны, у них есть что-то вроде каспов, как для пространства модулей торов. Теорема Мэйзура на самом деле сильнее, чем я сформулировал. А именно, даже проекция такой специальной орбиты на пространство модулей кривых уходит на бесконечность и не возвращается: не только плоская, но даже и подлежащая гиперболическая метрика становится все более и более вырожденной: на поверхности возникают короткие замкнутые геодезические.

Отметим, что уход на бесконечность для таких орбит происходит довольно небанально. Простой способ ухода в касп такой: если на плоской поверхности есть вертикальная замкнутая траектория, и мы к такой поверхности применим наш поток, то он начнет укорачивать нашу замкнутую траекторию. Конечно, она сожмется, и плоская поверхность при этом выродится. Это самый простой способ ухода на бесконечность: так же, как это происходит на модулярной поверхности, орбита может угодить прямым ходом в касп. Оказывается, описанные выше орбиты диагональной подгруппы уходят на бесконечность более изощренным способом. Он выглядит так: на поверхности возникает короткая геодезическая, которая через некоторое время начинает расширяться, но в этот момент появляется другая короткая геодезическая; и когда та начинает расширяться, появляется третья и т.д.; в каждый момент времени на поверхности есть всё более и более короткая геодезическая.

Теперь вторая теорема, иллюстрирующая общий принцип. Представьте себе, что орбита $GL(2, \mathbb{R})$ уже замкнута; не нужно переходить к замыканию, она уже замкнута. Я не говорю, что она компактна (у нас некомпактное пространство), но она замкнута в этом пространстве. Так вот, если орбита у плоской поверхности замкнута, то эта плоская поверхность в некотором смысле полностью имитирует тор. А именно, Вич и Смайли (W. Veech, J. Smillie) доказали, что если отправить поток в любом заданном направлении, то либо весь поток разобьется на замкнутые траектории, либо он будет строго эргодичным, как на торе.

Если мы взяли соответствующую точку пространства модулей, подействовали на нее группой $GL(2, \mathbb{R})$, и орбита оказалась замкнутой, то это в некотором смысле экстремально нетипичный случай, потому что обычно орбита всюду плотна в этом пространстве, у нас есть эргодичность. А здесь наоборот: она замкнулась. Так вот, тогда наша плоская поверхность тоже очень специальная в таком смысле: любой прямолинейный поток на этой плоской поверхности (прямолинейный поток в любом направлении) устроен, в некотором смысле, так же, как на торе.

1.6. Асимптотический цикл. Я обещал рассказать о геодезических на очень плоских поверхностях. Можно изучать геодезические общего положения, можно исследовать замкнутые геодезические; сейчас я предлагаю рассмотреть геодезические общего положения. Они напоминают иррациональные обмотки тора. Если начать, скажем, с нашего модельного примера тора и иррациональной обмотки на нем, то можно взять конечный кусок геодезической, замкнуть концы и получить цикл в гомологиях. Запомним, какой цикл мы получили и

продолжим построение: возьмем кусок геодезической длиннее первого — получим следующий цикл. Один из способов замыкать концы выглядит так: достаточно выбрать трансверсаль к потоку в нашем направлении и каждый раз, когда траектория возвращается на эту трансверсаль, замыкать концы вдоль трансверсали. В данном случае я отождествляю гомологии тора с двумерной плоскостью — универсальным накрытием тора. Получится последовательность целочисленных векторов $c(n)$ в этой плоскости. И эти целочисленные векторы вытягиваются вдоль одного и того же направления. Более того, существует предел

$$c = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} c(n) \in H_1(T^2; \mathbb{R}),$$

который называется *асимптотическим циклом*.

Оказывается, что для очень плоских поверхностей более высокого рода такой предел тоже есть. Это следствие теоремы Керкхоффа–Мэйзура–Смайли (S. Kerckhoff, H. Masur, J. Smillie). Для каждой очень плоской поверхности и для почти любого направления на ней существует этот самый асимптотический цикл. Пространство гомологий у нас теперь многомерное. Для тора оно было двумерным, а для поверхности рода g гомологии образуют $2g$ -мерное пространство. В этом $2g$ -мерном пространстве возникает последовательность векторов, и они вытягиваются в одном и том же направлении. Отметим однако, что то, что векторы вытягиваются в одном и том же направлении, не означает, что концы этих векторов должны быть на ограниченном расстоянии от соответствующей прямой; нет, они могут быть довольно далеко, но если замерить угол, то он стремится к нулю.

Давайте посмотрим, как наши векторы могут отклоняться от асимптотического направления. Чтобы посмотреть, как последовательность векторов отклоняется от асимптотического направления, достаточно поставить в нашем многомерном пространстве экран, ортогональный этому асимптотическому направлению, и всё спроектировать на этот экран. Я предполагаю, что мы находимся в типичной, то есть, в эргодичной ситуации. Тогда асимптотическое направление существует. И вообще, я считаю, что я взял всё случайным образом.

Так вот, если поставить экран, ортогональный асимптотическому направлению, и спроектировать всё на этот экран, то вместо того, чтобы увидеть некое шаровое облако, которое распространяется более или менее равномерно во всех направлениях, мы увидим образование, которое садится, по существу, на прямую: все точки на экране как на рис. 9 сядут, по существу, на одну прямую.

Дальше мы можем померить уклонение от этой асимптотической плоскости и т.д. В результате мы последовательно обнаружим целое семейство подпространств, которое отвечает за уклонение. И если длина вектора равна l , то уклонение в двумерном подпространстве ограничено l в некоторой степени ν_2 , меньшей 1, уклонение от двумерного подпространства в трехмерном ограничено l в еще меньшей степени ν_3 и т.д. И так будет идти до половинной размерности. А дальше появится некое подпространство размерности g в нашем $2g$ -мерном пространстве, которое будет лагранжевым в смысле формы пересечения в гомологиях; и уклонение от этого g -мерного пространства уже равномерно ограничено. Равномерно по выбору начальной точки и равномерно относительно выбора геодезической (рис. 9).

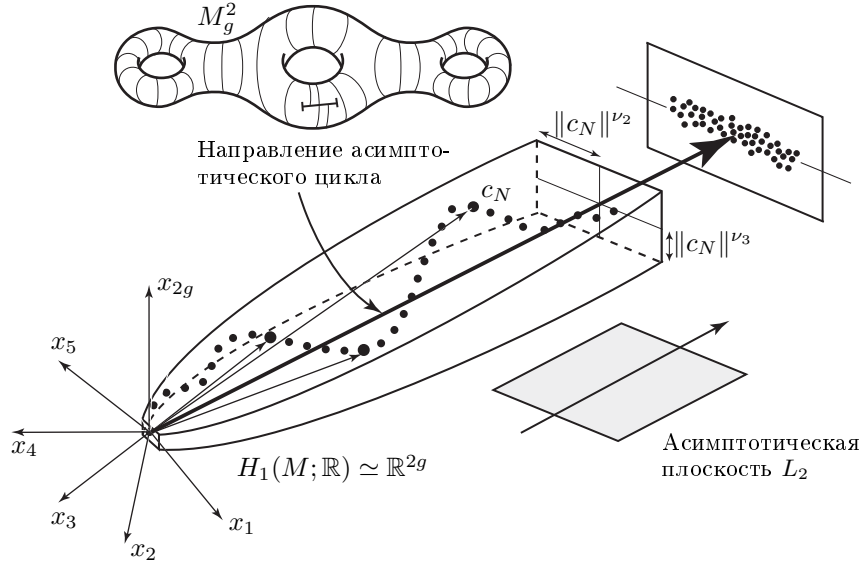


Рис. 9. Асимптотический флаг

Точная теорема выглядит вот как. Имеется такой флаг подпространств $L^1 \subset L^2 \subset \dots \subset L^g \subset H_1(S; \mathbb{R})$, что уклонение от пространства L_j выглядит как длина n -го вектора в некоторой степени, меньшей 1. И эти степени, на самом деле, одни и те же для почти всех плоских поверхностей в нашем фиксированном семействе. Более того, эти степени ν_j отвечают показателям Ляпунова тейхмюллера геодезического потока на соответствующем страте. Тейхмюллеров геодезический поток — это поток, заданный диагональной подгруппой в $SL(2, \mathbb{R})$. Я не хочу упоминать тейхмюллерову метрику, можно просто считать, что этот поток задан диагональной подгруппой. (Вспомним, что диагональная подгруппа сжимает плоскую поверхность в вертикальном направлении и растягивает в горизонтальном.)

Эта теорема приобрела максимально сильную форму совсем недавно. Исходно я доказал ее в предположениях, что показатели Ляпунова все разные, и что самый маленький показатель Ляпунова ν_g строго больше 0. То, что самый маленький показатель Ляпунова ν_g строго больше нуля, было доказано Форни (G. Forni) несколько лет назад. А то, что они все разные, было анонсировано Авиллой и Вианой (A. Avila, M. Viana) несколько недель назад: $\nu_2 > \nu_3 > \dots > \nu_g > 0$.

1.7. Отображение первого возвращения, перекладывание отрезков.

Мы замыкали куски траектории, чтобы получить циклы, используя некоторую трансверсаль на поверхности. Давайте посмотрим более внимательно на то, как поток возвращается на трансверсаль. Для начала возьмем снова модельный пример тора и в качестве трансверсали возьмем меридиан. Посмотрим, как поток в каком-то направлении, обычный иррациональный поток, возвращается на меридиан. Это просто поворот окружности (рис. 10).

Возьмем теперь вместо меридиана, который мы использовали в качестве трансверсали, какой-то незамкнутый отрезок. Развернем тор в плоскость. Тор

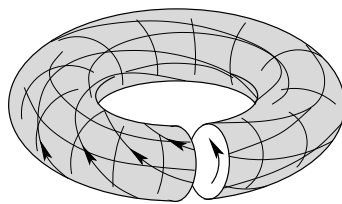


Рис. 10. Отображение первого возвращения на меридиан — это поворот окружности

— это одна клеточка, один квадратик; трансверсаль — это отрезок, который приходится размножить, потому что у нас всё периодически (мы взяли универсальное накрытие). Поток — это поток в этом направлении, он ортогонален нашему отрезку. И отображение первого возвращения устроено так: вся левая сторона отрезочка перейдет направо, вся правая сторона отрезочка перейдет налево; а серединка перейдет куда-то в серединку, но сдвинется немножко.

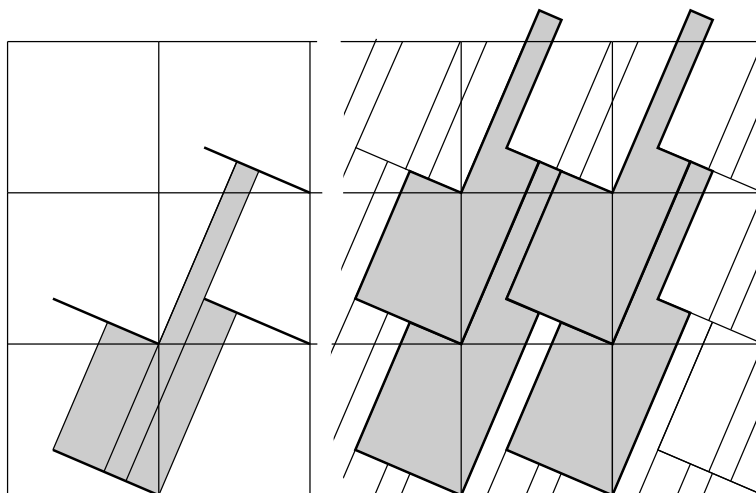


Рис. 11. Отображение первого возвращения на трансверсаль общего вида — перекладывание трех отрезков

Наше отображение представлено на рис. 11. Более того: заштрихованная область — это новая фундаментальная область для тора; т.е. наш тор разрезался на прямоугольники. Этот способ разрезать тор очень удобен для того, чтобы следить за тем, как деформируется наш тор под действием геодезического потока в пространстве торов: достаточно пропорционально сжать-растянуть все прямоугольники.

Трансверсаль теперь не замкнута, это просто какой-то отрезок. Это та самая трансверсаль, которую я использовал, чтобы строить циклы. Когда мы выпускаем иррациональный поток из нашего отрезка, поток заметет весь тор, и все траектории возвращаются на отрезок.

Если взять поверхность более сложную, чем тор, то всё будет очень похоже, только число отрезков увеличится. Картинка на рис. 12 нарисована для

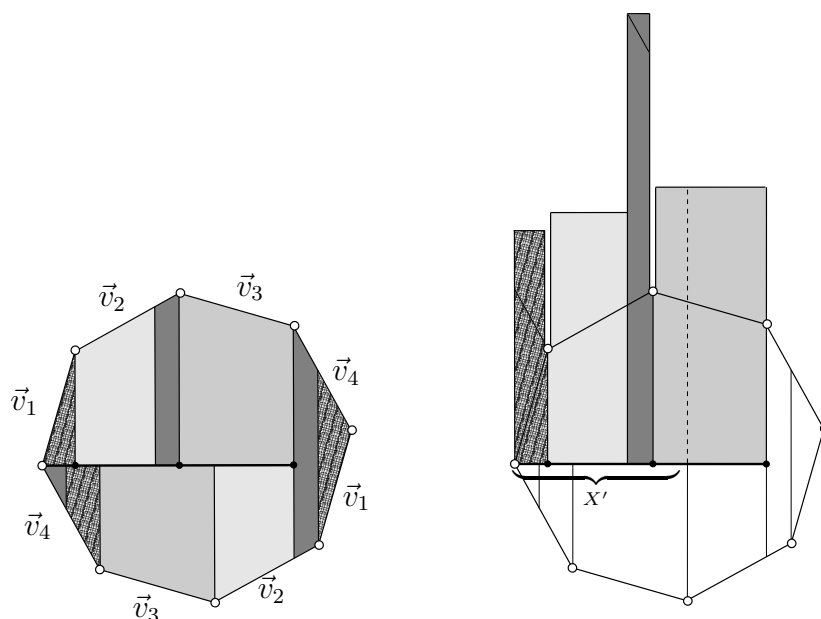


Рис. 12. Отображение первого возвращения на плоской поверхности задает перекалывание отрезков трансверсали

(повернутого) правильного восьмиугольника. Хорошо видно, как наш отрезок разбился на куски. Отображение первого возвращения задано вертикальным потоком. Оно устроено так: мы берем наш отрезок, разрезаем его на четыре части, а дальше переставляем кусочки в другом порядке, сохраняя их ориентацию. Мы можем выбрать такой отрезок, какой нам нравится: любой отрезок, трансверсальный потоку, будет годиться.

Давайте обсудим, сколько у нас будет точек разрыва. Откуда берутся точки разрыва? На рис. 12 это хорошо видно: траектория потока, выпущенная из точки разрыва, либо утыкается в особенность, либо попадает в концевую точку трансверсали. Если проследить за траекториями потока, которые идут справа и слева от траектории, уткнувшейся в особенность, то мы увидим, что особенность как гребенка расчешет поток: траектории, оказавшиеся слева и справа от особенности, разделившись, дальше пойдут как независимые пряди. Так что наши особенности работают гребенкой, порождая и переплетая пряди потока. Возвращаясь к точкам разрыва: еще траектории, попавшие в конечные точки трансверсали, могут дать точки разрыва для отображения первого возвращения.

Заметим, что для любого сколь угодно маленького отрезка любая траектория вернется на него. Поэтому мы с помощью любого отрезка, перпендикулярного потоку, можем разбить многоугольник в новую фундаментальную область, составленную из прямоугольников. Вич (W. Veech) назвал такие фундаментальные области *прямоугольниками на молниях*.

В ситуации, представленной на рис. 12, у нас будет три особых траектории, которые утыкаются в коническую точку; это нам даст три точки разрыва. Еще две точки разрыва дадут концы отрезка; итого — пять точек. Пять точек

разрыва разобьют отрезок на шесть кусочков. Так что если случайным образом выбирать трансверсаль, она разрежется на шесть кусочков.

Трансверсаль, представленная на рис. 12, разбилась всего на четыре подотрезка, потому что я очень специальным образом выбрал трансверсаль: я загнал левый конец трансверсали в особую точку, а правый конец трансверсали я выбрал так, чтобы вертикальная траектория, выпущенная из концевой точки, попадала прямым ходом в особенность. Так я свел к минимуму число разрывов.

Итак, возникло отображение, называемое *перекладыванием отрезков*: мы режем отрезок на несколько кусочков, а потом перекладываем их в другом порядке один за другим, без наложений, сохраняя ориентацию. Перекладывание отрезка задается перестановкой и длинами отрезков разбиения.

Выбрав для поверхности как на рис. 12 другую трансверсаль, можно получить перекладывание отрезков с перестановкой 4321. Квадрат этой перестановки — это уже тождественная перестановка. Я хочу вас предостеречь: вторая итерация перекладывания отрезков с такой перестановкой — вовсе не тождественное отображение, если только длины отрезков не выбраны очень симметричным способом!

Теперь давайте посмотрим на циклы первого возвращения вертикального потока на трансверсаль. Меня интересуют куски вертикальных геодезических между двумя последовательными возвращениями на трансверсаль. Вместо того, чтобы просто соединять концевые точки куска геодезической вдоль трансверсали, я предпочитаю соединять эти концевые точки с левым концом трансверсали, как на рис. 13. Это не меняет соответствующий элемент в гомологиях и даже в гомотопиях: наши замкнутые кривые свободно гомотопны. Я утверждаю, что для всех точек каждого подотрезка перекладывания построенный «цикл первого возвращения» будет одним и тем же. Цикл такой: из левого конца трансверсали я двигаюсь вдоль трансверсали до определенной точки x , потом иду вдоль траектории до точки $T(x)$ первого возвращения на трансверсаль и потом соединяю точку $T(x)$ снова с левым концом трансверсали, как на рис. 13. Если я пройду из какой-нибудь другой точки того же подотрезка, то, как видно из рис. 13, я получу тот же самый цикл. Так что в ситуациях, представленных на рис. 12 и 13, мы получим четыре разных цикла. У нас возникает функция, заданная на нашей трансверсали, со значением в гомологиях. Функция кусочно постоянна; у нее в данном случае всего четыре значения.

Теперь давайте посмотрим, как вычислять цикл $c(x, n)$, который отвечает n -му возвращению. Цикл, который отвечает второму возвращению, посчитать просто: мы должны для точки $T(x)$, которая есть образ нашего перекладывания отрезков T , тоже посчитать цикл первого возвращения и сложить два получившихся цикла; результатом будет цикл $c(x, 2)$, см. рис. 13, и т.д. Так что всё, что мы должны сделать — это найти орбиту нашего перекладывания отрезков $x, Tx, \dots, T^{n-1}x$ (здесь T — перекладывание отрезков) и сложить циклы $c(T^j x)$. Тем самым, цикл $c(x, n)$, отвечающий n -му возвращению, получается суммированием значений кусочно-постоянной функции c вдоль траектории перекладывания.

А дальше я могу применить эргодическую теорему (если мой поток эргодичен) и сказать, что эта сумма (сумма вдоль траектории перекладывания отрезков) — это то же самое, что интеграл функции по отрезку. А это то же

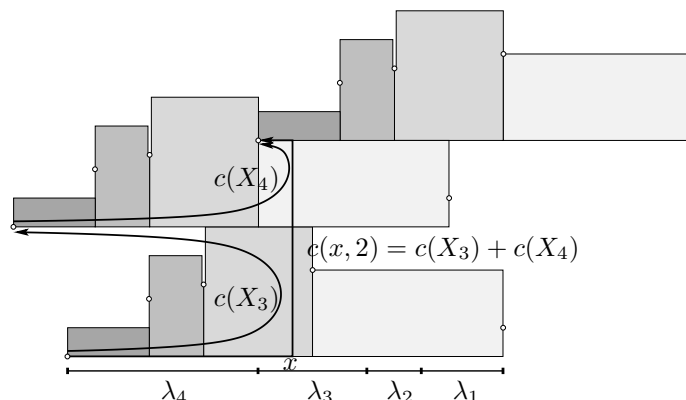


Рис. 13. «Циклы первого возвращения» и разложение цикла $c(x, n)$ в сумму циклов вдоль траектории переключивания

самое, что сумма базисных циклов с коэффициентами, которые суть просто длины отрезков. В результате я вам предъявил асимптотический цикл, я его просто посчитал:

$$c(x, n) = c(x) + c(T(x)) + \dots + c(T^{n-1}(x)) \approx \\ \approx \frac{n}{|X|} \int_X c(x) dx = \frac{n}{|X|} (\lambda_1 c_1 + \dots + \lambda_m c_m).$$

Здесь $\lambda_1 + \dots + \lambda_m = |X|$ — длины отрезков переключивания, на которые разбилась трансверсаль X .

Так можно посчитать сам асимптотический цикл. А как посчитать уклонение, увидеть флаг асимптотических подпространств и понять, откуда берутся показатели Ляпунова? В эргодической сумме всё спрятано, она должна всё об этом знать. Мы должны взять достаточно длинные траектории нашего переключивания отрезка и внимательно посмотреть на эти суммы, на то, как они устроены. Вот здесь я и предлагаю запустить машину времени. Слишком уж долго ждать очень длинных траекторий моего переключивания отрезка, они нарастают слишком медленно. Как бы их запустить побыстрее?

Я предлагаю сделать вот что. Давайте я вернусь к предыдущей картинке. Вместо трансверсали X выберем трансверсаль покороче $X' \subset X$, например, как на рис. 12. Или еще короче: я посмотрю в микроскоп, скажем, на кусочек моей трансверсали у ее левого конца и посмотрю на отображение первого возвращения на короткую трансверсаль X' . Мы снова получим переключивание отрезков, причем примерно того же количества отрезков, что и раньше. Как мы уже видели, в худшем случае отрезков будет шесть. Впрочем, в данном случае шести отрезков получиться не может, потому что левый конец трансверсали загнан в особую точку, так что мы получим переключивание не больше пяти отрезков. А если умно выбрать длину нового отрезка X' , то он снова разобьется на четыре подотрезка. Так что, когда мы посмотрим в микроскоп на маленький кусочек нашей трансверсали и посмотрим на новое отображение

первого возвращения, теперь уже на очень коротеньком кусочке X' трансверсали, мы снова увидим перекладывание отрезков, и новое перекладывание не будет сложнее, чем предыдущее. Это первое замечание.

Второе замечание. У нас теперь есть укороченная трансверсаль X' , которая вложена в исходную трансверсаль X , а еще у нас есть перекладывание отрезков исходной трансверсали $T: X \rightarrow X$ и новое перекладывание отрезков на укороченной трансверсали $T': X' \rightarrow X'$. Предположим, что на укороченной трансверсали X' у нас снова перекладывается четыре отрезка. Давайте возьмем какую-нибудь точку $x' \in X'_j$ укороченной трансверсали, выпустим ее траекторию до первого возвращения на этот раз до X' и посчитаем, сколько раз она посетит фиксированный подинтервал X_k из старого разбиения. Я утверждаю, что число посещений будет одним и тем же для любой точки из нового маленького подотрезка X'_j , т.е. число посещений исходного подотрезка X_k траекторией точки из маленького подотрезочка X'_j зависит только от индексов j и k . Я беру j -й подотрезок в новом перекладывании и k -й подотрезок в старом перекладывании и смотрю, сколько раз моя траектория (траектория точки, выпущенной из X'_j до первого возвращения на трансверсаль X') попала в этот k -й подотрезок. И я утверждаю, что если стартовать с другой точки того же j -го подотрезка X'_j , мы получим то же самое число посещений. Это верно просто потому, что участки орбит всех точек из одного подотрезка X'_j до их первого возвращения на X' устроены одинаково. Левая картинка на рис. 14 служит иллюстрацией к моему утверждению.

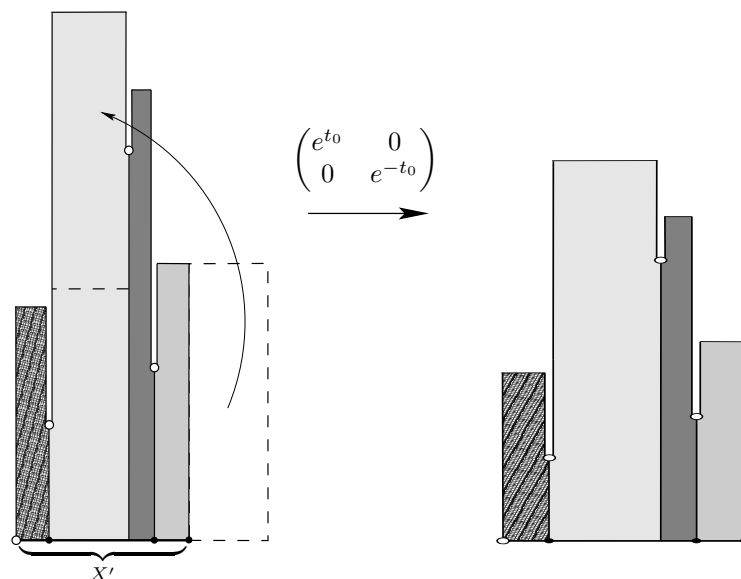


Рис. 14. Машина времени: мы укоротили трансверсаль, затем перенормировали плоскую поверхность сжатием-растяжением

Эти два нехитрых замечания дают нам настоящую машину времени, потому что теперь, вместо того, чтобы гонять исходное перекладывание отрезков, мы можем посчитать матрицу посещений A и после этого запустить перекладывание отрезков T' . Так мы здорово выиграем во времени! Действительно, то, что

нас интересует — это эргодическая сумма $c(x, n)$, отвечающая траектории старого медленного перекладывания отрезков. Я предлагаю идти по траектории более быстрого перекладывания отрезков T' . На самом деле мы будем следовать исходной траектории, но только теперь мы будем перепрыгивать сразу через несколько точек, так что мы будем продвигаться с другим временем — гораздо быстрее. А новые циклы первого возвращения выразятся через циклы первого возвращения для исходного перекладывания отрезков T линейным преобразованием с помощью матрицы посещений A , которую мы только что обсуждали:

$$\begin{pmatrix} c'_1 \\ \vdots \\ c'_m \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_m \end{pmatrix}.$$

А дальше я перенормирую мой новый коротенький интервал. Теперь я могу забыть про исходную задачу, потому что всё, что я должен был запомнить — это исходные циклы $c_1, \dots, c_m$. А дальше я работаю с перекладываниями отрезков, я забыл про исходную поверхность. Я могу последовательно повторить процедуру укорачивания трансверсали много раз: каждый раз я буду смотреть в микроскоп на маленький кусочек моей трансверсали, находить новое перекладывание отрезков, находить матрицу посещений и затем для удобства нормировать мою фундаментальную область сжатием-растяжением, как на рис. 14, чтобы длина трансверсали в конце процедуры снова стала единичной. Заметьте, что когда я заменяю перекладывание отрезков на гомотетичное, динамика не меняется. Разумеется, и перекладывание отрезков, и матрица посещений после каждой итерации процедуры укорачивания будут новыми.

Машина времени заключается вот в чем: я заменил динамику одного перекладывания отрезков на динамику на пространстве всех перекладываний отрезков. Я предлагаю вместо того, чтобы гонять траекторию одного перекладывания отрезков, гонять эту динамику ренормализаций: смотреть в микроскоп, находить новое перекладывание отрезков, перенормировать его, смотреть в микроскоп, находить новое перекладывание отрезков и т.д. Эта конструкция дает вот что: если характерный размер элемента моей матрицы посещений равен, скажем, 1000, то каждый раз, когда я перехожу к новому перекладыванию отрезков, я ускоряю время в 1000 раз. И я утверждаю, что если мы научимся описывать произведение матриц посещений, то тогда мы решили нашу задачу.

Теперь давайте формализуем то, что было сказано. Вслед за Рози (G. Rauzy) мы построили отображение пространства перекладывания отрезков в себя. Можно проверить, что это отображение эргодично. Отметим, что это — глубокая теорема Вича (W. Veech). Тем самым, у нас возникло еще одно пространство — пространство перекладываний, и для каждой точки этого пространства у нас задана матрица посещений A . И мы теперь строим траекторию отображения на пространстве перекладываний и вдоль этой траектории перемножаем матрицы. А дальше, раз мы можем доказать, что наше отображение эргодично, мы (опуская некоторые подробности) применяем теорему Оселедца и получаем исчерпывающую информацию о произведении матриц.

И теперь самое последнее, что я должен был сказать: при чем здесь тейхмюллеров геодезический поток, который никак не проявлялся? Чтобы объяснить, откуда берется тейхмюллеров геодезический поток, я должен уточнить процедуру укорачивания нашего отрезка — я ведь не сказал, как именно мы

выбираем более короткий отрезок. Давайте его выбирать следующим образом. Рассмотрим «башню прямоугольников на молниях», как на рис. 14; в основании у меня отрезок, представленный нашей трансверсалью. Мы уже несколько раз видели, как наша плоская поверхность разобьется в такую башню прямоугольников. Я предлагаю модифицировать эту башню прямоугольников следующим образом. Я сравниваю прямоугольник, который стоит с правого края, с тем, который приклеится к правому краю. Вспомним, что рис. 14 возник из рис. 12, где хорошо видно, как подклеиваются прямоугольники. Я предлагаю отрезать от правого прямоугольника ту часть, которая находится справа от укороченной трансверсали X' (см. рис. 14), и надставить его над прямоугольником, живущим над X'_2 . Это то же самое, что сказать, что мы рассмотрим фундаментальную область, отвечающую отображению первого возвращения на более короткую трансверсаль X' .

Имеется второй сценарий, когда самый правый прямоугольник сверху оказался более узким, чем тот, который клеится снизу к правой стороне трансверсали. Он задет вторую возможную модификацию фундаментальной области. Две возможные модификации фундаментальной области и задают алгоритм укорачивания наших отрезков.

По техническим причинам удобнее за один раз укорачивать трансверсаль чуть сильнее; а именно, я предлагаю за одну итерацию применять алгоритм до тех пор, пока мы укорачиваем один и тот же отрезок. В нашем примере мы укоротили самый правый, четвертый отрезок; если после первого укорачивания он всё ещё длиннее, то нужно будет повторить эту процедуру. Если применить описанный алгоритм к перекладыванию двух отрезков, то мы получим в точности алгоритм Евклида.

Вспомним теперь, что я предлагал для удобства каждый раз нормировать длину базового отрезка на единицу: мы рассматриваем отображение первого возвращения на более короткий отрезок X' и потом нормируем его длину на единицу. Будем смотреть на нашу операцию с укорачиванием трансверсали на уровне поверхностей. При исходной манипуляции мы не изменили поверхность, мы просто изменили развертку (фундаментальную область). А вот чтобы отнормировать длину нашего нового отрезка X' на единицу, мы можем сделать вот что: новое здание, которое стало более коротким и более высоким, мы можем сжать по вертикали и растянуть по горизонтали до тех пор, пока отрезок в основании не растянется до единичной длины. А это уже в точности тейхмюллеров геодезический поток!

Тем самым, сверху, на пространстве поверхностей, у нас происходит вот что. Мы выбрали некоторое специальное гиперпространство в нашем пространстве плоских поверхностей. Для поверхностей из этого гиперпространства, которое будет служить сечением для тейхмюллерова геодезического потока, длина отрезка в основании индуцированного здания равна единице. Дальше мы смотрим отображение первого возвращения тейхмюллерова геодезического потока на выбранное сечение; это уже дискретное отображение. Каждый раз, когда мы получаем новое здание, у нас возникает новое перекладывание отрезков. По построению, наше отображение прекрасно проектируется на пространство перекладывания отрезков, и мы получим отображение на пространстве перекладывания отрезков, которое имитирует алгоритм Евклида. И дальше мы

применяем мультипликативную эргодическую теорему и получаем показатели Ляпунова, связанные с геодезическим потоком.

Давайте я попробую показать, как всё это работает в роде один. В роде один, как я уже говорил, если рассмотреть нашу процедуру для двух отрезков, мы получим привычный алгоритм Евклида. Мы уже видели, что если случайным образом выбрать трансверсаль на торе, она разобьётся на три отрезка, а если умно — то на два. Как мы можем параметризовать пространство перекладываний двух отрезков? Для перекладывания двух отрезков перестановка всегда одна и та же: $(2,1)$, других перестановок нет. Так как мы можем пропорционально растягивать и сжимать перекладывание отрезков (гомотетиями), мы, например, можем отнормировать более длинный отрезок на 1, тогда длина более короткого будет каким-то числом x между 0 и 1. Тем самым, пространство перекладываний двух отрезков параметризуется просто одним числом x между 0 и 1, то есть пространство перекладываний — это отрезок. Отображение на пространстве перекладывания отрезков, которое было предъявлено, если его записать в координатах, имеет вид: $x \mapsto \{\frac{1}{x}\}$. Как и было обещано, это — отображение Гаусса; оно отвечает алгоритму Евклида.

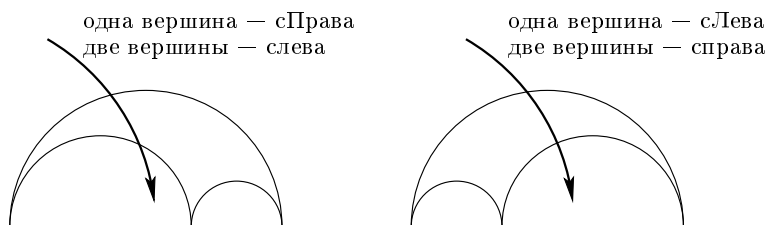


Рис. 15. Правило кодирования геодезической

Мы уже видели, что геодезический поток на пространстве плоских торов — это геодезический поток на модулярной поверхности. Связь между геодезическим потоком на модулярной поверхности, отображением Гаусса и алгоритмом Евклида (то есть, связью тейхмюллера потока и ренормализации перекладываний применительно к роду один) хорошо известна. Разложение числа в непрерывную дробь описывается тем, как геодезическая пересекает границу утроенной фундаментальной области для модулярной поверхности.

А именно, допустим, что мы хотим разложить какое-то число x , зажатое между нулем и единицей, в непрерывную дробь. Возьмем и выпустим из этого числа геодезическую (см. рис. 16), дождемся, пока она пересечет вертикальную ось в какой-то точке iy . Можно выпустить любую геодезическую, единственное ограничение такое: давайте выпустим из x такую геодезическую, которая хоть где-нибудь пересечет вертикальную ось. Это не очень жесткое ограничение: достаточно выпустить геодезическую с минимальным левым уклоном. Теперь стартуем в точке iy и пойдем по геодезической в сторону x . Верхняя полуплоскость (я рассматриваю уже не модулярную поверхность: я всё разматываю в верхнюю полуплоскость) замощена идеальными треугольниками с нулевыми углами, как на рис. 16. Каждый раз, когда мы пересекаем границу очередного треугольника, давайте приписывать нашему пересечению букву «Л» или «П». Мы пишем букву «Л», если у нас слева от геодезической — одна вершина и

справа — две, а «П» мы пишем, если у нас сПрава — одна вершина, а слева — две, см. рис. 15.

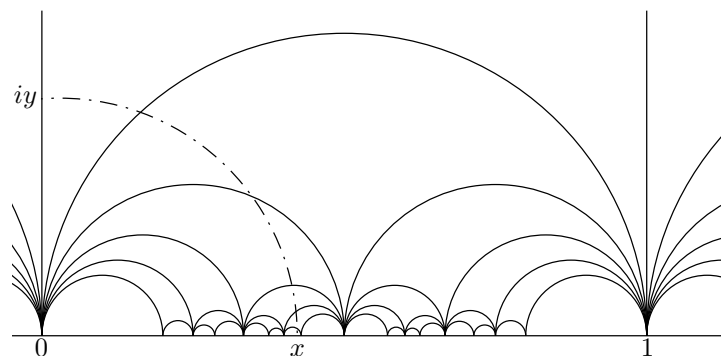


Рис. 16.

Двигаясь вдоль нашей геодезической от iy в сторону x , мы будем пересекать треугольники, которыми замощена верхняя полуплоскость, и каждый раз мы будем добавлять соответствующую букву «Л» или «П». В примере на рис. 16 мы начнем с последовательности «ППЛЛП...». Для краткости удобно кодировать повторяющиеся одинаковые буквы степенью, так что у нас возникнет слово $\Pi^{n_1} \text{Л}^{n_2} \Pi^{n_3} \dots$. Сириз (C. Series) показала, что получившиеся степени $n_1, n_2, n_3, \dots$ — это в точности элементы нашей цепной дроби для x :

$$x = \frac{1}{n_1 + \frac{1}{n_2 + \frac{1}{n_3 + \frac{1}{\dots}}}}.$$

И это на самом деле, в общем, то же самое, что я рассказывал в общей ситуации, но применительно к роду один. Мы рассматриваем тейхмюллеров геодезический поток, мы рассматриваем его отображение первого возвращения на некоторое специальным образом выбранное сечение, и если всё это дело спроектировать вниз, на пространство перекладываний отрезков, то наше дискретное отображение будет проектироваться в отображение Гаусса, которое отвечает алгоритму Евклида. Всё то же самое!