# ГОДОВОЙ ОТЧЕТ (2013)

## Лаборатория алгебраической геометрии и ее приложений

# РЕФЕРАТ

**Ключевые слова:** группа Галуа, функциональное поле, рациональная точка многообразия, K3 поверхность, рациональные кривые, конечное поле, кэлерово многообразие, гиперкэлерово многообразие, теорема Торелли, отображение периодов, специальное лагранжево подмногообразие, лагранжево слоение, калибрация, локально конформно кэлерово многообразие, вайсманово многообразие, кэлеров потенциал, плюрисубгармоническая функция, комплексное многообразие, гиперкомплексное многообразие, кватернионное многообразие некэлерово многообразие, накрытие, монодромия, биголоморфизм, теорема Торелли, пространство Тэйхмюллера, группа Тэйхмюллера, некоммутативная геометрия, вектора Витта, аддитивные категории, заставы Дринфельда, когомологии Горески-Макферсона, алгебра Вирасоро, модули Верма, алгебра Гельфанда-Цетлина, стабильные расслоения, компактификация Уленбек, компактификация Гизекера, дифференциальная теория Галуа, теория Пикара–Вессио, сизигии, комплекс Кошуля, квадратичные алгебры, алгебры Кошуля, резольвента Кошуля, таблицы Юнга, исчисление Шуберта, многогранники Ньютона, операторы Демазюра, мотивные структуры, когомологии Хохшильда, циклические когомологии, алгебры Хопфа, группа Кремоны, многообразия Фано, метрики Кэлера–Эйнштейна, исключительные фактор-особенности, гипотеза Ленга, K3-поверхность, рациональные эндоморфизмы, зеркальная симметрия, геометрическое квантование, когомологии Флоера, торы Чеканова, поверхность дель Пеццо, дивизор Вейля, обратная задача теории Галуа

**Краткая аннотация:** Приводятся результаты исследований в области алгебраической геометрии, комплексной геометрии, дифференциальной геометрии и геометрической теории представлений.

Основные темы исследования - теория производных категорий, циклические когомологии, геометрическая теория представлений, геометрия и арифметика гиперкэлеровых многообразий (в частности, K3-поверхности), геометрия комплексных многообразий (кэлеровых и локально конформно кэлеровых).

Результаты носят теоретический характер и являются существенно новыми. Возможны приложения к теоретической физике, дифференциальной геометрии, теории чисел и задачам классификации комплексных многообразий.

# Оглавление

# 1. Введение

За отчетный период (2013-й год) Лабораторией алгебраической геометрии и ее приложений было организовано совместно с Математическим институтом им.В.А.Стеклова РАН 5 международныкх конференции в г.Москве; третья летняя школа “Алгебра и геометрия” в г.Ярославле, где Лаборатория выступила главным организатором, а также летняя школы в г.Ярославле, где Лаборатория была со-организатором. Сотрудниками Лаборатории было опубликовано более 55 статей, и подготовлено к печати более 45 препринтов; по результатам этой работы сделано более 100 докладов на международных конференциях и семинарах. Всего сотрудники Лаборатории приняли участия более чем в 60 конференциях, семинарах и школах как в России, так и за рубежом.

Научная деятельность сотрудников Лаборатории была отмечена различными премиями и наградами. Так, сотрудники лаборатории А. Кузнецов (заведующий лаборатории) и М. Вербицкий (заместитель заведующего) были выбраны докладчиками на Международный Конгресс Математиков в Сеуле (2014), в числе 4 математиков из России (помимо Вербицкого и Кузнецова, докладчиком стал Г. Ольшанский из ИППИ, НМУ и ВШЭ, и А. Герасимов (ИТЭФ).

Также, за отчетный период сотрудник лаборатории Евгений Фейгин защитил докторскую диссертацию, Владлен Тиморин и стажер Андрей Солдатенков стали лауреатами премии фонда Династия, а стажер Дмитрий Кубрак получил стипендию Фонда Саймонса для студентов и аспирантов математиков 2013 года.

Сотрудниками лаборатории были прочитаны около 40 курсов лекций, многие курсы читались впервые.

Были получены значительные результаты по основным темам, заявленным на 2013-й год:

- Производные категории в алгебраической геометрии
- Геометрия производных категорий
- Когомологии Хохшильда и некоммутативная геометрия
- Производные категории, А-бесконечность алгебры и мотивы
- Гиперкэлерова и гиперкомплексная геометрия

- Теория калибраций и голоморфные лагранжевы расслоения
- Локально конформно кэлеровы многообразия
- Программа минимальных моделей, многообразия Фано и группа Кремоны
- Комплексная геометрия многообразий Фано
- Характеры полубесконечных многообразий флагов
- ПБВ вырождения в теории Ли
- Группы алгебраических преобразований аффинных и квазиаффинных многообразий
- Многогранники Гельфанда-Цетлина и исчисление Шуберта
- Изучение асимптотических свойств многообразий над глобальными полями и предельных дзета-функций

Результаты работ по этим темам составляют содержание настоящего отчета. Также в отчет вошли краткие обзоры работ постдоков лаборатории, которые проводились вне рамок вышеперечисленных тем.

В число приложений к отчету включены аннотации по выплатам студентам лаборатории, по курсам повышения квалификации, и первые страницы публикаций сотрудников.

# 2. Производные категории в алгебраической геометрии

Важность производных категорий в математике определяется тем, что эквивалентность производных категорий от абелевых категорий различной природы позволяет связать между собой различные отделы математики, изучающие на первый взгляд отдаленные по происхождению объекты.

## 2.1. $T$-структуры

Эквивалентность между производными категориями сохраняет абстрактную структуру, которая аксиоматизируется как триангулированная категория. Важным понятием теории триангулированных категорий является $t$-структура в такой категории. Эта базовая структура, которая имеется на триангулированной категории в случае, когда она является производной от какой-то абелевой категории, и позволяет выделить исходную абелеву категорию как сердцевину $t$-структуры.

Эквивалентность двух производных категорий можно представлять себе как одну категорию с двумя $t$-структурами. Поэтому изучение взаимоположения двух $t$-структур приобретает важное значение. Множество $t$-структур имеет естественный частичный порядок. Важно найти те пары $t$-структур, для которых имеются операции объединения и пересечения, заданные в соответствии с этим частичным порядком

В работе [2] А. Бондалом вводится понятие согласованных пар и согласованных цепей $t$-структур. Для таких пар операции объединения и пересечения имеют смысл. В работе доказано, что две согласованных цепи $t$-структур порождают дистрибутивную решетку. В случае модулярных решеток, т.е. когда заранее известно, что операции объединения и пересечения существуют, и выполнен модулярный закон, аналогичное утверждение — это знаменитая теорема Биркгофа.

Развитая техника применяется к случаю производных категорий когерентных пучков на алгебраических многообразиях. А именно, рассматривается пара цепей — одна получена из стандартной $t$-структуры на производной категории применением функтора сдвига когерентных пучков, другая — взятием $t$-структуры, двойственной к стандартной, и применением функторов сдвига. В результате теоремы о дистрибутивной решетке получается семейство $t$-структур, сердцевины которых известны как превратные когерентные пучки.

Изучение различного рода превратных $t$-структур более общего типа на производных категориях когерентных пучков имеет важное значение для категорной интерпретации, предложенной А. Бондалом и Д. Орловым, бирациональных преобразований в программе минимальных моделей бирациональной алгебраической геометрии, а также в теории двумерных суперсимметричных квантовых теорий поля типа сигма-моделей, где семейства $t$-структур определяют данные стабильности. Идейно прозрачная конструкция превратных $t$-структур, полученная в [2], дает возможность исследования этих вопросов с помощью операций объединения и пересечения, и снабжает такой подход соответствующей техникой.

## 2.2. Когерентность

Очень важный класс триангулированных категорий представляют производные категории модулей над алгеброй. Они снабжены стандартной $t$-структурой. Важный вопрос — когда ограничение этой $t$-структуры на подкатегорию, состоящую из комплексов с конечно-представленными когомологиями (эта категория может быть рассмотрена как некоммутативный аналог производной категории когерентных пучков на аффинном многообразии) само является $t$-структурой. Иначе говоря, когда конечно-представленные модули над алгеброй образуют абелеву категорию. Это свойство алгебры называется *когерентностью*. Таким образом, доказательство когерентности — поворотный момент в построении некоммутативной алгебраической геометрии, где теория представлений ассоциативной алгебры заменяет теорию когерентных пучков.

Несмотря на важность этого вопроса, когерентность это "терра инкогнита" для подавляющего класса алгебр. Имеется, однако, класс алгебр, для которых когерентность известна: это квази-свободные алгебры. Этот класс алгебр над полем был введен Кунцем и Квилленом в работе [1] как некоммутативный аналог гладких аффинных многообразий. Стоит отметить, что класс таких алгебр, хотя и интересен, является слишком узким для приложений в некоммутативной геометрии.

В работе А. Бондала и И. Ждановского [3] рассматривается класс так называемых относительно квази-свободных алгебр над коммутативным кольцом $\mathbb{K}$. По определению, алгебра $A$ называется относительно квази-свободной над $\mathbb{K}$, если $A$ центральна над $\mathbb{K}$ и $A$-бимодуль относительных некоммутативных дифференциальных форм $\Omega^1_{A/\mathbb{K}}$ проективен.

Основной результат работы [3] — левая и правая когерентность алгебры относительно квази-свободной над коммутативным нетеровым кольцом $\mathbb{K}$. Доказательство потребовало применения новой техники, принципиально отличающейся от случая когда $\mathbb{K}$ — поле. Существенно использовалась гомологическая техника, а также знаменитый критерий Чейза когерентности: алгебра $A$ лево-когерентна тогда и только тогда, когда произведение любого числа плоских правых модулей плоский модуль.

Результат о когерентности применяется А. Бондалом и И. Ждановским для изучения гомотопов. Напомним, что гомотоп $B$ алгебры $A$ с единицей, построенный по элементу $\Delta \in A$ это новая алгебра, элементы которой, как множество, это все то же $A$, а умножение определяется по формуле: $a \cdot_B b = a\Delta b$. Так как эта алгебра может оказаться без единицы, то единица добавляется внешним образом. В работе [3] показывается, что если $\Delta$ удовлетворяет определенным условиям хорошей темперированности, и алгебра $A$ — когерентна, то и гомотоп $B$, построенный по $\Delta$, также будет когерентной алгеброй.

## 2.3. Алгебры Темперли–Либа

В работе [4] А. Бондалом и И. Ждановским рассматривается редуцированная алгебра Темперли–Либа $B(\Gamma)$, построенная по графу $\Gamma$ без кратных ребер и петель, как алгебра с 1, порожденная идемпотентами $x_i$, индексированными вершинами $i$ графа $\Gamma$, и порождающими соотношениями:

- $x_i^2 = x_i$,
- $x_i x_j x_i = s_{ij} x_i$, если $ij$ ребро,
- $x_i x_j = x_j x_i = 0$, если $ij$ не ребро.

Изучение этих алгебр и их теории представлений связано со многими задачами математики и физики, о некоторых из которых речь пойдет ниже. Важным наблюдением в [4] было то, что алгебра $B(\Gamma)$ является гомотопом алгебры путей графа, причем в качестве элемента $\Delta$ выступает обобщенный дискретный оператор Лапласа на графе. Это позволило связать теорию представлений алгебры $B(\Gamma)$ с топологией графа и различных частичных компактификаций топологических пространств, гомотопически эквивалентных графу как одномерному комплексу.

Исходной мотивацией в изучении алгебр $B(\Gamma)$ являлась связь представлений алгебры $B(\Gamma_m(n))$ и проблемы классификации $m$ картановских подалгебр в $\mathfrak{sl}(n)$, попарно ортогональных относительно формы Киллинга. Граф $\Gamma_m(n)$ — полный $m$-дольный граф, где каждая "доля" состоит из $n$ вершин. В применении к ортогональным разложениям надо положить $s_{ij} = \frac{1}{n}$.

Еще одной причиной для изучения теории представлений $B(\Gamma_m(n))$ является связь унитарных представлений $B(\Gamma_m(n))$ и так называемых взаимно-несмещенных базисов в эрмитовом пространстве. Эти базисы имеют широкое применение в квантовой теории информации, квантовом кодировании и декодировании, а также квантовой томографии.

Знаменитая "гипотеза Винни-Пуха", предложенная А. И. Кострикиным (1994), утверждает что полное ортогональное разложение алгебры Ли $\mathfrak{sl}(n)$ над полем комплексных чисел возможно только когда $n$ является степенью простого числа. Проблема эта очень сложна, сотни работ посвящены ее унитарному аналогу в теории несмешанных базисов даже для первого $n$, которое не является степенью простого, т.е. $n = 6$. А. Бондал и И. Ждановский добились значительного успеха в решении этой проблемы, построив 4-х мерное семейство пар ортогональных картановских подалгебр в размерности 6. Можно надеяться, что 6-мерный случай будет полностью решен в ближайшем будущем.

Представления алгебры $B(\Gamma)$ тесно связаны с гармоническим анализом на графе, так как алгебра $B(\Gamma)$ является гомотопом алгебры путей графа $\Gamma$, построенным с помощью лапласиана $\Delta$ графа $\Gamma$. В этом контексте изучение теории представлений $B(\Gamma)$ дает строгий математический подход к дискретным вариантам некоторых квантовых теорий поля. В этой задаче в качестве графа берется решетка, которая аппроксимирует пространство-время. Характеристический многочлен оператора Лапласа, действующего в локальных системах на графе, определяет статистическую сумму.

В работе [4] изучены гомологические свойства алгебры $B(\Gamma)$ и вообще гомотопов. Вычеслены хохшильдова и глобальная размерность алгебры $B(\Gamma)$. Используя описание алгебры $B(\Gamma)$ как гомотопа алгебры путей графа, построены функторы и естественные преобразования между категориями модулей алгебры путей графа и $B(\Gamma)$.

В общей ситуации произвольной алгебры $A$ и хорошо темперированного элемента $\Delta$ построено полуортогональное разложение производной категории модулей над гомотопом $B$. Разложение состоит из пары категорий, одна из которых — это производная категория модулей над $A$, а другая — это производная категрия модулей над базовым кольцом $\mathbb{K}$. Абелева категория модулей над $B$ оказывается сердцевиной превратной $t$-структуры, склеенной из соответствующих абелевых категорий для компонентов полуортогонального разложения.

Этот результат инспирировал изучение ситуаций, в которых категории $B(\Gamma)$-модулей оказываются категориями превратных пучков на стратифицированных топологических пространствах. Первые результаты в этом направлении содержатся в [4], где в частности проверено, что категория $B(\Gamma)$-модулей в случае циклического графа и подходящего выбора обощенного оператора Лапласа эквивалентна категории превратных пучков на сфере со склеенными северным и южным полюсом и стратифицированной особой точкой и дополнением к ней. На категорном уровне это позволяет интерпретировать гармонический анализ, а значит и различные аспекты квантовых теорий поля как некоммутативную деформацию превратных пучков на стратифицированных топологических пространствах.

## 2.4. Триангулированная структура на категории орбит

А. Елагиным был исследован вопрос о линеаризации триангулированных категорий относительно действия группы. Была построена конструкция триангулированной линеаризованной категории при условии, что имеется действие группы на оснащении исходной триангулированной категории.

Гомологический подход в геометрии алгебраических многообразий подразумевает, что важным объектом изучения должна быть производная категория когерентных пучков $\mathcal{D}^b(X)$ на многоообразии $X$. Соответственно, желательно понимать, как различные геометрические понятия и конструкции выражаются на языке производных категорий. В частности, предположим, что конечная группа $G$ действует на алгебраическом многообразии $X$. В этом случае можно рассмотреть фактормногообразие $X/G$, а также факторстек $X/\!\!/G$, который совпадает с фактормногообразием в случае свободного действия. Полезно иметь способ построить категорию $\mathcal{D}^b(X/G)$ или $\mathcal{D}^b(X/\!\!/G)$, исходя из категории $\mathcal{D}^b(X)$. Для абелевой категории когерентных пучков решением аналогичной задачи служит конструкция $G$-эквивариантного когерентного пучка: когерентные пучки на $X/\!\!/G$ — это $G$-эквивариантные когерентные пучки на $X$. Для любой абелевой категории $\mathcal{C}$ с действием группы $G$ можно определить категорию $\mathcal{C}^G$ $G$-эквивариантных объектов в $\mathcal{C}$, она также будет абелевой. Если в качестве $\mathcal{C}$ взять $\mathrm{coh}(X)$, то $\mathcal{C}^G$ будет эквивалентна $\mathrm{coh}(X/\!\!/G)$.

С аналогичной конструкцией для триангулированных категорией имеются проблемы: а именно, в случае действия группы $G$ на триангулированной категории $\mathcal{T}$ категория $\mathcal{T}^G$, состоящая из $G$-эквивариантных объектов в $\mathcal{T}$, априори не обязана быть триангулированной. Это одно из проявлений недостаточной жёсткости триангулировнных категорий, приводящей и ко многим другим трудностям. Целью работы было построить “линеаризованную” триангулированную категорию, играющую роль $\mathcal{T}^G$.

Это удаётся сделать в следующих предположениях: существует DG-оснащение $\mathcal{A}$ данной триангулированной категории $\mathcal{T}$, на котором имеется действие $G$, индуцирующее данное действие на $\mathcal{T}$. В этих условиях, исходя из DG-категории $\mathcal{A}$ и действия группы $G$ на ней, была построена DG-категория $\mathcal{B}$, для которой $H^0(\mathcal{B})$ — искомая триангулированная категория. Данная конструкция — уточнение конструкции, предложенной П. Сосной. Категория $\mathcal{B}$ обладает разумными функториальными свойствами, в частности, замена оснащения $\mathcal{A}$ на квазиэквивалентное приводит к замене $\mathcal{B}$ на квазиэквивалентную категорию.

В действительности, имеем $H^0(\mathcal{B}) \cong \mathcal{T}^G$. Тем самым показано, что в случае существования DG-оснащения $\mathcal{T}$, совместимого с действием группы, категория эквивариантных объектов в $\mathcal{T}$ является триангулированной. Для случая действия конечной группы $G$ на алгебраическом многообразии $X$ и $\mathcal{T} = \mathcal{D}^b(X)$, условие существования такого оснащения выполнено. Построенная категория $H^0(\mathcal{B}) \cong \mathcal{T}^G$ в этом случае эквивалентна $\mathcal{D}^b(X/\!\!/G)$.

Другой пример применения полученного результата — этальные накрытия, связанные с линейными расслоениями конечного порядка в группе Пикара. Если $\mathcal{L}$ — такое расслоение на многообразии $X$ и $\mathcal{L}^n \cong \mathcal{O}_X$, то подкрутка на $\mathcal{L}$ определяет действие группы $G = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ на категории $\mathcal{T} = \mathcal{D}^b(X)$. Снова существует DG-оснащение $\mathcal{T}$, согласованное с действием группы, поэтому категория $\mathcal{T}^G$ триангулированна. В действительности, в этом случае категория $\mathcal{T}^G$ эквивалентна производной категории когерентных пучков на неразветвлённом накрытии $X$, связанном с $\mathcal{L}$.

## 2.5. Полярные комплексы

С. Горчинский и А. Рослый в работе [5] изучали определенные комплексы, дифференциал в которых определяется отображением вычета, действующем на дифференциальных формах с логарифмическими особенностями. Имеется классическое утверждение: дивизор $\sum a_i x_i$ на компактной римановой поверхности с комплексными коэффициентами является вычетом какой-то логарифмической 1-формы тогда и только тогда, когда $\sum_i a_i = 0$. Многомерное обобщение получается, если рассматривается $p$-мерное подмногообразие $Z$ комплексного алгебраического многообразия $X$ вместе с голоморфной дифференциальной формой старшей степени (то есть $p$-формой) $\alpha \in H^0(Z, \omega_Z)$. Спрашивается: когда найдётся $(p+1)$-мерное подмногообразие $Y$ в $X$, содержащее $Z$, и логарифмическая форма старшей степени $\beta \in H^0(Y, \omega_Y(Z))$, такая что $\operatorname{res}\beta = \alpha$.

Если $X$ — компактная риманова поверхность, сумму $\sum_i a_i$ можно рассматривать как элемент группы $H^1(X, \omega_X)$. В работе [6] показано, что в многомерном случае препятствие лежит в $H^{d-p}(X, \omega_X)$, где $X$ — гладкое проективное многообразие размерности $d = \dim X$. Целью нашего исследования было доказать аналогичное утверждение для гладких алгебраических многообразий над полем нулевой характеристики и дифференциальных форм со значениями в векторных расслоениях.

Пусть $X$ — гладкое многообразие, а $\mathcal{F}$ — локально свободный пучок на $X$. Тогда можно построить комплекс $\mathrm{Pol}_\bullet(X, \mathcal{F})$, называемый *полярным комплексом*, в котором $p$-цепи представляют собой конечные формальные суммы пар $(Z, \alpha)$, где $Z$ — это $p$-мерное неприводимое подмногообразие в $X$, а $\alpha$ — логарифмическая форма старшей степени на $Z$ с коэффициентами в $\mathcal{F}|_Z$. Отображение границы в полярном комплексе определяется с помощью морфизма вычета логарифмической формы. Наш основной результат состоит в том, что существует канонический изоморфизм

$$H^{d-p}(X, \omega_X \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{F}) \cong H_p(\mathrm{Pol}_\bullet(X, \mathcal{F}))\,, \tag{2.5.1}$$

где $\dim X = d$. Эта теорема дает ответ на вопрос о препятствии к тому, чтобы форма на подмногообразии была чьим-то вычетом. С другой стороны, она предлагает новую интерпретацию когомологий локально свободных пучков в терминах логарифмических форм на подмногообразиях. Указанный изоморфизм (2.5.1) допускает также следующую интерпретацию в случае проективного $X$ . Имеется каноническое спаривание между группами гомологий полярного комплекса $H_p(\mathrm{Pol}_\bullet(X, \mathcal{F}))$ и группами когомологий пучка двойственного $\mathcal{F}$, то есть $H^p(X, \mathcal{F}^\vee)$, определенное интегрированием по подмногообразиям. С этой точки зрения изоморфизм (2.5.1) означает, что это спаривание невырожденное.

Доказательство соотношения (2.5.1) основано на аналогии между группами когомологий локально свободных пучков на алгебраических многообразиях и сингулярными когомологиями локальных систем на многообразиях. Важным моментом доказательства является использование так называемого трюка Квиллена в алгебраической $K$-теории как алгебраического аналога трубчатой окрестности. Надо отметить, что методы, используемые в нашем доказательстве, принципиально отличаются от того, что потребовалось для доказательства утверждения в случае тривиальных коэффициентов в работе [6].

## Литература


[1] J.Cuntz, D.Quillen Algebra extensions and nonsingularity, J.of Amer.Math.Soc. 8(1995), no.2, 251–289

[2] А. И. Бондал, Операции с $t$-структурами и превратные когерентные пучки, Изв. РАН. Сер. матем., 77:4 (2013), 5–30.

[3] A. Bondal, I. Zhdanovskiy, Coherence of relatively quasi-free algebras, Preprint of IPMU, IPMU13-0053, Kashiwa, Japan, 2013, 6, http://db.ipmu/ipmu/sysimg/ipmu/1064.pdf

[4] A. Bondal, I. Zhdanovskiy, Representation theory for systems of projectors and discrete Laplace operators, IPMU13-0001, IPMU, Kashiwa, Japan, 2013, 48, http://db.ipmu.jp/ipmu/sysimg/ipmu/1012.pdf

[5] S. Gorchinsky, A. Rosly, A polar complex for locally free sheaves, accepted in International Mathematics Research Notices.

[6] B. Khesin, A. Rosly, R. Thomas, *A Polar de Rham Theorem,* Topology **43** (2004) 1231–1246 [math.AG/0305081]

# 3. Геометрия производных категорий

Исследование строения производных категорий алгебраических многообразий — одна из важнейших задач современной алгебраической геометрии. Наиболее исследованными здесь являются многообразия Фано малой размерности и однородные пространства.

## 3.1. Четырехмерные многообразия

Структура производных категорий кривых хорошо известна, а производные категории поверхностей дель Пеццо были всесторонне исследованы в работах Городенцева, Рудакова, Орлова, Кулешова, Карпова, Ногина и прочих. Многие трехмерные многообразия Фано были изучены А. Кузнецовым в [1]. В связи с этим интересно исследовать случай четырехмерных многообразий Фано. Особенно в этом плане интересны многообразия близкие по строению к четырехмерной кубичекой гиперповерхности, так как для них ожидается тесная связь между свойствами производных категорий и рациональностью многообразий. К таким многообразиям относятся четырехмерное многообразие $V_{10}$ (пересечение гиперплоскости и гиперквадрики с грассманианом $\mathrm{Gr}(2,5)$), а также три примера четырехмерных многообразий Фано индекса 1 построенных Кюхле [5].

Случай многообразия $V_{10}$ исследован А. Кузнецовым совместно с А. Перри. Было показано, что производная категория многообразий этого типа, содержащих поверхность дель Пеццо степени 5, допускает полуортогональное разложение, состоящее из 4 исключительных векторных расслоений и производной категории некоторой $K3$-поверхности. Это дает еще одно подтверждение связи структуры производных категорий с рациональностью (рациональность многообразий $V_{10}$ содержащих поверхность дель Пеццо степени 5 хорошо известна).

Два типа многообразий Кюхле были изучены А. Кузнецовым. Было доказано, что многообразие типа $(d3)$ изоморфно раздутию произведения $\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1$ в некоторой $K3$-поверхности (которая получается там пересечением двух дивизоров степени $(1,1,1,1)$). В частности, оно всегда рационально, а его производная категория имеет полуортогональное разложение на исключительный набор длины 16 и производную категорию $K3$-поверхности. Кроме того было доказано, что многообразие типа $(c7)$ изоморфно раздутию четырехмерной кубической гиперповерхности с центром в поверхности Веронезе, содержащейся в этой гиперповерхности. Таким образом, изучение этих многообразий является частным случаем изучения четырехмерных кубик.

Наиболее интересным является случай четырехмерных многообразий Кюхле типа ($c5$). А. Кузнецовым найдена их связь с грассманианами лиевских подалгебр в псевдолиевской структуре на фундаментальном 7-мерном представлении группы Ли типа $\mathrm{G}_2$. Кроме того, построен бирациональный изоморфизм между такими многообразиями и вырождениями многообразий Кюхле типа ($b5$). Однако, ни структура производной категории этих многообразий, ни их бирациональные свойства, до сих пор окончательно не понятны. Этот вопрос является естественным продолжением начатых здесь исследований.

## 3.2. Малообразия

Еще один важный класс многомерных многообразий составляют многообразия с минимальной производной категорией среди многообразий данной размерности, так называемые *малообразия*. Гладкое проективное многообразие $X$ размерности $d$ называется малобразием, если его производная категория когерентных пучков имеет полный исключительный набор из $d+1$ объекта. Исследование малообразий было начато в 90-х годах в работах Бондала, Бондала–Полищука и Посицельского. Бондал и Орлов выдвинули следующие гипотезы:

1) все малообразия являются многообразиями Фано,
2) все малообразия рациональны,
3) все четномерные малообразия изоморфны проективному пространству.

В работе [3] Галкин, Кацарков, Меллит и Шиндер доказывают эти гипотезы для размерностей $d \leq 4$ (последнюю в предположении, что $X$ является многообразием Фано): все малообразия размерности 2 и 3 рациональны и являются многообразиями Фано, все четырехмерные многообразия с полным исключительным набором из 5 когерентных пучков изоморфны проективному пространству.

## 3.3. Ложные проективные плоскости

Помимо многообразий с минимальной производной категорией также естественно изучить многообразия с минимальными (для данной размерности) группами когомологий. Известно, что даже в размерности 2 есть множество нетривиальных многообразий такого типа — это ложные проективные плоскости, открытые Мамфордом. Ложная проективная плоскость — это гладкая проективная поверхность с обильным каноническим расслоением, такая что все ее числа Ходжа совпадают с аналогичными инвариантами проективной плоскости. Как было показано в [3] ложные проективные плоскости не являются малообразиями из-за наличия у них нетривиальных первых гомологий. Тем не менее, в [3] была выдвинута следующая гипотеза. Пусть $X$ — ложная проективная плоскость, такая что существует линейное расслоение $\mathcal{L}$, такое что $\omega_X = \mathcal{L}^{\otimes 3}$ (из 100 ложных проективных плоскостей 92 обладают этим свойстом). Тогда набор линейных расслоений $\mathcal{O}, \mathcal{L}^{-1}, \mathcal{L}^{-2}$ является исключительным набором (то есть, линейные расслоения $\mathcal{L}$ и $\mathcal{L}^2$ ацикличны), как замечено там же — обязательно неполным. Эта гипотеза была доказана в 12 из 92 случаев: 6 случаев разобраны в статье Фахруддина (те, когда у многообразия $X$ есть $\mathbb{Q}_2$-адическая модель), и еще 6 случаев были разобраны в обновленной заметке [5] Галкиным с соавторами (те случаи, когда группа автоморфизмов $G = \mathrm{Aut}X$ не абелева).

## 3.4. Фантомные и квазифантомные категории

Рассматривая $G$-эквивариантные категории ложных проективных плоскостей Галкин–Кацарков–Меллит–Шиндер в [3] строят новые, возможно, самые простые, примеры геометрических фантомных категорий (категория называется фантомной, если ее группа Гротендика и гомологии Хохшильда равны нулю): эти примеры получаются как допустимые подкатегории в категории $G$-эквивариантных объектов на ложной проективной плоскости, и скорее всего родственные примеры можно построить как допустимые подкатегории в производной категории когерентных пучков на поверхностях Долгачева. Кроме этого примера, известно всего две конструкции геометрических фантомных категорий: конструкция Бенингафон Ботмера-Кацаркова-Сосны, использующая сложные вычисления, а также конструкция Горчинского и Орлова, опирающаяся на построение квазифантомных категорий другими авторами.

Самый простой пример квази-фантомной категории (не считая описанного выше примера ложных проективных плоскостей с неабалевой группой автоморфизмов) был приведен Галкиным и Шиндером в работе [4]. Пусть $S$ поверхность Бовиля, фактор квадрата кривой Ферма $X^5 + Y^5 + Z^5 = 0$ по свободному действию группы $(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^2$. Тогда на $S$ есть исключительный набор из 4 линейных расслоений, а его ортогональное дополнение — ненулевая категория с нулевыми гомологиями Хохшильда и конечной группой Гротендика.

## 3.5. Свойство Жордана–Гельдера для полуортогональных разложений

К вопросу о фантомных категориях тесно примыкает вопрос о выполнении свойства Жордана–Гельдера для полуортогональных разложений триангулированных категорий. Простейший пример, показывающий что это свойство не выполняется для общих триангулированных категорий был предложен А. Бондалом. Однако, этот пример был чисто алгебраическим (это простой колчан с соотношениями) и до некоторого времени сохранялась надежда на то, что в геометрических категориях (то есть в производных категориях когерентных пучков на гладких проективных многообразиях) свойство Жордана–Гельдера выполняется.

Первый контрпример, показывающий что это все-таки не так, был построен Бенингом–фон Ботмером–Сосной [4]. Он тесно связан с их же конструкцией квазифантомной категории в производной категории классической поверхности Годо. При этом доказательство очень технически сложно и содержит множество вычислений.

В работе [3] А. Кузнецов построил новый простой геометрический контрпример к свойству Жордана–Гельдера. Для этого показано, что раздутие трехмерного проективного пространства в паре рациональных кривых имеет полный исключительный набор, содержащий поднабор, алгебра эндоморфизмов которого изоморфна алгебре путей колчана Бондала. Тем самым, свойство Жордана–Гельдера для этого раздутия не выполняется.

## 3.6. Лагранжевы грассманианы

В исследовании производных категорий однородных многообразий основания были заложены в работах Бейлинсона и Капранова, которые построили ставшие классическими исключительные наборы на проективных пространствах, квадриках и грассманианах. После их работ появилась гипотеза, согласно которой на всех рациональных однородных пространствах можно найти полный исключительный набор из эквивариантных векторных расслоений. В 2011 году в работе А. Кузнецова и А. Полищука [2] был предложен метод построения исключительных наборов с максимальным возможным количеством элементов для рациональных однородных пространств полупростых групп серии $BCD$ и высказана гипотеза о их полноте.

Как проверять полноту в общем случае неясно, поэтому естественно начать изучение этого общего вопроса с частного случая. А. Фонарев занимался изучением лагранжева грассманниана изотропных подпространств максимальной размерности в четномерном симплектическом пространстве. Оказалось, что объекты исключительного набора Кузнецова–Полищука можно задать, применив некоторые функторы обрезания к свободным модулям. В частности, в лагранжевом случае имеет смысл рассматривать некоторые обобщенные функторы Шура. Обобщенные функторы Шура устроены гораздо сложнее обычных, но, судя по всему, наследуют некоторое множество хороших свойств классических собратьев. Дальнейшие их исследования могут помочь в доказательстве соотношений полуортогональности для предложенных во время исследования двойственных и лефшецевых наборов, а также получить доказательство точности лагранжевых ступенчатых комплексов (ступенчатые комплексы для классических грассманианов были построены А. Фонаревым в работе [6]). Кроме того, ожидается, что ступенчатые комплексы, в свою очередь, дадут доказательство полноты.

## 3.7. Сизигии

Для вычислений связанных с однородными пространствами важно уметь вычислять сизигии их эквивариантных вложений в проективные пространства (иначе говоря, уметь выписывать локально свободные резольвенты их структурных пучков на объемлющих проективных пространствах) . Этим занимался И. Нетай. Оказалось, что при вычислении сизигий важную роль играет следующее свойство представления, в проективизации которого содержится однородное пространство. А именно, наиболее удачными с этой точки зрения являются представления, старший вес $\lambda$ которых обладает тем свойством, что

- все внешние степени представления $V_\lambda$ не имеют кратностей (т.е. раскладываются в сумму неприводимых без кратностей), и

- тензорные произведения представлений $V_{n\lambda}$ с любыми неприводимыми представлениями не имеют кратностей.

Для орбит старших векторов в проективизациях таких представлений выисление сизигий оказывается вполне решаемой задачей.

Два интересных примера таких весов $\lambda$ — это

1) вес $\omega_1 + \omega_1'$ группы $\mathrm{SL}(n) \times \mathrm{SL}(n')$,

2) вес $2\omega_1$ группы $\mathrm{SL}(n)$.

Соответствущие им орбиты старших векторов — это вложение Сегре $\mathbb{P}^{n-1} \times \mathbb{P}^{n'-1} \subset \mathbb{P}^{nn'-1}$ и вложение Веронезе $\mathbb{P}^{n-1} \subset \mathbb{P}^{(n-1)(n+2)/2}$. Для них в работе [7] И. Нетай получил не только явное комбинаторное описание сизигий, но и построил явные резольвенты для прямых образов линейных расслоений больших канонического класса.

Кроме того, И. Нетай классифицировал все доминантные веса полупростых односвязных алгебраических групп обладающих указанными выше свойствами. Они являются естественными кандидатами на дальнейшее применение развитой техники.

## 3.8. Модели Ландау–Гинзбурга, торические вырождения и экзотические лагранжевы торы

Особенно важны производные категории в связи с гипотезой зеркальной симметрии. Гипотезы зеркальной симметрии декларируют соответствие между многообразиями Фано $X$ (рассматриваемыми как монотонные симплектические многообразия $(X, \omega)$ с классом $[\omega] = c_1(X) \in H^2(X, \mathbb{R})$) и некоторыми многочленами Лорана $W$ с натуральными коэффициентами. На физическом языке это соответствие выражается в эквивалентности двух квантовых теорий поля: сигма-модели на многообразии $X$ и модели Гинзбурга–Ландау с потенциалом $W$. В 2002 году Хори, используя физическую интуицию, и собрав воедино картину зеркальной симметрии Заслова–Строминегера–Яу и гипотезу гомологической зеркальной симметрии Концевича, предложил достаточно обоснованный и конструктивный способ построенния многочлена Лорана $W$ по монотонному симплектическому многообразию Фано $(X, \omega)$: следует выбрать монотонный специальный лагранжев тор $L \subset X$, тогда $W = m_0(L)$, где $m_0(L)$ это препятствие О-Она-Ото-Фукаи, производящая функция для псевдоголоморфных дисков на $X$ с границей на $L$ и индексом Маслова 2, проходящим через общую точку на $L$:

$$m_0(L) = \sum_D y^{[\partial D]} \in \mathbb{Z}[\pi_1(L)] = \mathbb{Z}[y_1^{\pm}, \ldots, y_d^{\pm}],$$

здесь $[\partial D] \in \pi_1(L) \simeq \mathbb{Z}^d$ — класс отображения границы, то есть отображения окружности $\partial D \simeq S^1$ в вещественный тор $L \simeq (S^1)^d$, а $y^{[\partial D]} : (\mathbb{C}^*)^d \to \mathbb{C}$ соответствующий $[\partial D]$ характер, рассматриваемый как функция на $d$-мерном комплексном алгебраическом торе. Один из способов построения таких лагранжевых торов связан с вырождениями многообразия $X$ к торическому многообразию $X_0$: отображение моментов на $X_0$ задает расслоение открытого подмножества в $X_0$ на специальные лагранжевы торы, а симплектический параллельный перенос устанавливает симплектоморфизм между этим открытым подмножеством в $X_0$ и каким-то открытым подмножеством в $X$. Как было показано Нишиноу–Нохарой–Уедой, в том случае, когда многообразие Фано $X_0$ имеет малое разрешение, функцию $m_0(L)$ можно вычислить, и получается достаточно простой многочлен Лорана, фигурирующий в гипотезе Батырева 1997 года, предписывающей построение многочленов Лорана по малым торическим вырождениям.

Все эти рассмотрения привели ряд авторов к выводу, что получающееся соответствие между многообразиями Фано и многочленами Лорана многозначно: одному и тому же многообразию Фано $X$ могут соответствовать несколько разных многочленов Лорана $W$. Галкин в своей диссертации описал малые торические вырождения трехмерных многообразий Фано, и обнаружил, что у одного гладкого многообразия Фано может быть до четырех разных вырождений такого типа. Получающиеся многочлены Лорана отличаются друг от друга бирациональной (нерегулярной) заменой координат. К аналогичным выводам пришел Русинко, разбирая класс торических вырождений сферических многообразий, построенных Алексеевым и Брионом, их конструкция использует неоднозначный выбор, и многочлены Лорана соответствующие разным вырождениям тоже отличаются друг от друга бирациональной заменой координат. Все это имело внешнее сходство с кластерными преобразованиями Зелевинского–Фомина, но пока что к ним не сводилось, и количество различных многочленов Лорана в примерах выше конечно. В двумерном случае Галкин определил конструктивный алгоритм построения замен координат по заданному многочлену Лорана: мутация в направлении $(0,1)$ определяется как $\mu_{(0,1)} : (x,y) \to (x, \frac{y}{1+x})$, а мутации в направлениях остальных примитивных векторов (векторов в $\mathbb{Z}^2$ с взаимно-простыми координатами) получаются из нее сопряжением регулярным автоморфизмом тора. Будем говорить, что направление является допустимым (с кратностью $k \geq 1$) для многочлена Лорана $W$, если после мутации в этом направлении $k$ раз он остается многочленом Лорана. Оказывается, что если у многочлена Лорана $W$ было $N$ допустимых направлений (с учетом кратностей), то у промутированного многочлена Лорана тоже есть $N$ допустимых направлений, явно вычисляемых в терминах старых. Это было доказано в препринте Галкина и Уснича, используя бирациональную геометрию поверхностей. В работе [1] было дано новое, алгебраическое доказательство, работающее в большей общности, имеющее перспективы обобщения на некоммутативный случай, и сближающее зеркальную симметрию и теорию кластерных алгебр (авторы обобщают понятие верхнего предела кластерной алгебры, введенное Беренштейном–Зелевинским–Фоминым, на необходимый для зеркальной симметрии контекст). Как следствие, если у какого-то многочлена Лорана было хотя бы два неколлинеарных допустимых направления, то тогда существует бесконечно много различных многочленов Лорана отличающихся от исходного бирациональной заменой координат. Более того, в примерах, получающихся зеркальной симметрией из поверхностей дель Пеццо, таких направлений даже больше: многочлены Лорана зеркально симметричные к поверхностям дель Пеццо степени $1 \leq d \leq 9$ имеют по $12 - d \geq 3$ допустимых направлений мутации (с учетом кратностей). Например, если $X$ это проективная плоскость, а $L$ это слой отображения моментов (тор Клиффорда), тогда $W_{1,1,1} = m_0(L) = y_1 + y_2 + \frac{1}{y_1 y_2}$, и у многочлена $W_{1,1,1}$ три допустимых направления $(-1,-1), (-1,2), (2,-1)$, при мутации в любом из них получается многочлен Лорана эквивалентный $y_2 + \frac{(1+y_1)^2}{y_1 y_2^2}$ (как показал Ору, этот многочлен равен $m_0(L')$, где $L'$ - экзотический монотонный Лагранжев тор, построенный Чекановым). Галкин, Круз Моралес и Уснич выводят следствие: для каждой тройки натуральных чисел $(a,b,c)$, удовлетворяющей уравнению Маркова $a^2 + b^2 + c^2 = 3abc$ существует многочлен Лорана $W_{a,b,c}$, получающийся из $W_{1,1,1}$ бирациональной заменой координат, такой что многогранник Ньютона многочлена $W_{a,b,c}$ двойственнен к многограннику моментов взвешенного проективного пространства $\mathbb{P}(a^2, b^2, c^2)$. Как показали Прохоров–Хакинг, взвешенные проективные плоскости с такими весами это в точности все $\mathbb{Q}$-горенштейновы торические вырождения проективной плоскости. Галкин, Круз Моралес и Уснич выдвинули гипотезу, что для каждой тройки Маркова $(a, b, c)$ существует монотонный специальный лагранжев тор $L_{a,b,c} \subset \mathbb{CP}^2$, такой что $W_{a,b,c} = m_0(L_{a,b,c})$, то есть коэффициенты $W_{a,b,c}$ равны количеству псевдоголоморфных дисков ограничивающихся на $L_{a,b,c}$; ожидается что $L_{a,b,c}$ получаются симплектическим переносом из торов Клиффорда на $\mathbb{P}(a^2, b^2, c^2)$. Эта гипотеза, в частности, имеет такое следствие: на $\mathbb{CP}^2$ есть бесконечно много гамильтоново неизотопных монотонных лагранжевых торов. Пока что она известна в трех случаях: диски на торе Клиффорда были посчитаны О-Чо в 2003 (исходный многочлен $W_{1,1,1}$), диски на торе Чеканова были найдены Ору в 2007 (многочлен $W_{1,1,2}$), и совсем недавно Вианна подтвердил гипотезы в случае $W_{1,2,5}$, построив новый экзотический лагранжев тор.

## 3.9. Инварианты Громова–Виттена трехмерных многообразий Фано

В работе [2] для каждого деформационного класса трехмерных многообразий Фано $X$ предъявлено представление общего многообразия в классе в виде нулей сечения фиксированного векторного расслоения $E$ на фиксированном “ключевом пространстве” $K$ (как правило, $K$ это произведение торического многообразия $K_t$ и Грассманиана $K_g = Gr(3, 7)$, а $E$ получается применением полиномиальных функторов (симметрической и внешней степени, тензорных произведения и суммы, двойственности) к линейным расслоениям на $K_t$ и универсальному расслоению на $K_g$). Такое представление крайне удобно для практических вычислений связанных с многообразиями $X$. Доминантный морфизм из проективного пространства $\mathbb{P}(\Gamma(K, E)^*)$ в многообразие модулей $M_X$ влечет, что все многообразия модулей $M_X$ всех трехмерных многообразий Фано $X$ унирациональны. Физически это позволяет свести вычисления для сигма-модели на пространстве $X$ к вычислениям на откалиброванной линейной сигма-модели с данными $(Tot_K E^*, \langle\cdot, s_X\rangle)$ (здесь $Tot_K E^*$ — тотальное пространство векторного расслоения $E^*$ над $K$, а $\langle\cdot, s_X\rangle : Tot_K E^* \to \mathbb{C}$ линейная по слоям функция спаривания с сечением $s_X \in \Gamma(K, E)$, соответствующим многообразию $X$). Математически, представление выше позволяет вычислить инварианты Громова–Виттена рода ноль на $X$, используя квантовую теорему Лефшеца (Коатса–Гивенталя) и теорему “абелева/неабелева соответствия” Бертрама–Чиокан-Фонтанина–Кима–Сабба. Эти вычисления были проделаны, как следствие, были вычислены “квантовые периоды” трехмерных многообразий Фано — производящие функции для одноточечных инвариантов Громова–Виттена с потомками $\langle \tau^{d-2}[pt] \rangle_{0,d}$, считающих ожидаемые количества рациональных кривых антиканонической степени $d$ проходящих через общую точку $X$ с “кратностью” $(d-2)$ (ожидаемая размерность пространства таких кривых равна нулю). Было установлено взаимно-однозначное соответствие между деформационными классами трехмерных многообразий Фано и мутационными классами специальных многочленов Лорана, построенных ранее Галкиным–Голышевым–Каспчиком–Коатсом–Корти и исследованных Ахтаром–Галкиным–Каспчиком–Коатсом. Было доказано, что при этом соответствии квантовые периоды многообразий Фано $X$ равны обыкновенным периодам семейств линий уровня функций $W$, производящим рядам свободных членов у степеней $W^d$.

## Литература

[1] A. Kuznetsov, *Derived categories of Fano threefolds*, Proc. V.A.Steklov Inst. Math, V. 264 (2009), p. 110–122.

[2] A. Kuznetsov, A. Polishchuk, *Exceptional collections on isotropic Grassmannians*, preprint math.AG/1110.5607, to appear in JEMS.

[3] A. Kuznetsov, *A simple counterexample to the Jordan–Hölder property for derived categories*, preprint math.AG/1304.0903.

[4] C. Böhning, H.-Ch. Graf von Bothmer, P. Sosna, *On the Jordan–Hölder property for geometric derived categories*, arXiv preprint arXiv:1211.1229 (2012).

[5] O. Küchle, *On Fano* 4*-folds of index* 1 *and homogeneous vector bundles over Grassmannians*, Mathematische Zeitschrift 218, no. 1 (1995): 563–575.

[6] А. Фонарёв, *Минимальные лефшецевы разложения производных категорий грассманианов*, Изв. РАН. Сер. матем., 77:5 (2013), 203–224.

[7] И. Нетай, *Алгебры сизигий вложений Сегре*, Функц. анализ и его прил., 47:3 (2013), 54–74.

[8] John Alexander Cruz Morales, Sergey Galkin: *Upper Bounds for Mutations of Potentials*, SIGMA 9 (2013), 005, 13 pages

[9] Tom Coates, Alessio Corti, Sergey Galkin, Alexander Kasprzyk: *Quantum Periods for 3-Dimensional Fano Manifolds*, arxiv1303.3288

[10] Sergey Galkin, Ludmil Katzarkov, Anton Mellit, Evgeny Shinder: *Minifolds and Phantoms*, arxiv1305.4549v1 (May 20)

[11] Sergey Galkin, Evgeny Shinder: *Exceptional collections of line bundles on the Beauville surface*, Advances in Mathematics 244 (2013), pages 1033-1050

[12] Sergey Galkin, Ludmil Katzarkov, Anton Mellit, Evgeny Shinder: *Minifolds and Phantoms*, arxiv1305.4549v2 (Oct 17)

# 4. Когомологии Хохшильда и некоммутативная геометрия

Некоммутативная геометрия, в ее современной алгебраической версии, предложенной М. Концевичем – это необычайно бурно развивающаяся область современной математики. Уже примерно 15 лет она занимает в мировой математике одно из центральных мест, и значение ее только усиливается. По-видимому, это одна из наиболее перспективных областей математического исследования на ближайшее будущее.

Предмет алгебраической некоммутитативной геометрии – это некомутативные алгебраические многообразия, понимаемые как триангулированные категории с некоторым удобным оснащением. На практике, используются DG или $A_\infty$ оснащения – они эквивалентны – или спектральные оснащения для категорий, происходящих из алгебраической топологии. Примеров некоммутативных многообразий довольно много, причем происходят они из самых разных областей. Наиболее важные классы примеров таковы:

1) Производные категории когерентных пучков на обычных алгебраических многообразиях.

2) Разнообразные категории модулей, происходящие из теории представлений, например, представления колчанов.

3) Категории Фукая, возникающие в симплектической геометрии.

4) Категории, возникающие в математической физике в рамках топологической теории поля.

Удивительным открытием Концевича и других является то, что все эти примеры можно рассматривать униформно, одними и теми же методами, и ожидать в них наличия похожих структур. Например, на удивление многие инварианты алгебраических многообразий, как оказывается, зависят только от производной категории – на современном языке, "производно Морита-инвариантны". Таковы, например, алгебраическая K-теория, и разнообразные теории когомологий "де рамовского типа". Даже и в классических вопросах алгебраической геометрии, таких как программа Мори, категорный подход уже принес немалые плоды.

Кроме того, категории, происходящие из совершенно разных областей математики, могут оказаться эквивалентны. Наиболее яркий пример такой эквивалентности – гипотеза о гомологической зеркальной симметрии, предложенная Концевичем на основании анализа понятия зеркальной симметрии в теории струн. Гипотеза эта отождествляет категории Фукая и категории, происходящие из алгебраической геометрии – производные категории когерентных пучков на многообразиях Калаби-Яу, а также их обобщения, так называемые категории матричных факторизаций.

Следует отметить, что собственно геометрии, в школьном ее понимании, в некоммутативной геометрии нет – у некоммутативных многообразий нет точек, на них нельзя проводить прямые, рассматривать дивизоры и подмногообразия. Изучение некоммутативных мгоообразий поэтому происходит с применением гомологической техники, и главным объектом изучения становятся аддитивные инварианты. Один из таких инвариантов, в каком-то смысле универсальный – алгебраическая K-теория. К сожалению, он плохо поддается вычислению, и про него известно очень мало общих результатов. Другой инвариант, гораздо более близкий к повседневной жизни – это так называемые гомологии Хохшильда, и разнообразные их уточнения (например, цилические гомологии). С одной стороны, гомологии Хохшильда легко вычислять во многих конкретных примерах, с другой стороны, на них есть масса дополнительных структур, что позволяет многое сказать об изучаемом некоммутативном многообразии. Поэтому именно гомологии Хохшильда стали одним из основных технических средств в некоммутативной геометрии, и именно через них, в силу знаменитой теоремы Хохшильда-Костанта-Розенберга, восстанавливаются когомологические инварианты алгебраический многообразий де рамовского типа.

Опишем теперь, что сделано сотрудниками лаборатории по этой теме в 2013 году.

Во-первых, изучались гомологии Хохшильда и циклические гомологии для некоммутативных многообразий над полями конечной характеристики и над кольцами p-адических чисел. Это важно и само по себе, и в приложении к многообразиям в характеристике 0 – например, используя сведение в конечную характеристику, аналогичное методу Делиня-Иллюзи, Д. Каледин еше в 2009 году доказал, при некоторых предположениях, гипотезу Концевича о вырождении некоммутативной версии спектральной последовательности Ходжа-де Рама.

Важнейшее техническое средство в методе Делиня-Иллюзи – это так называмый изоморфизм Картье, возникающий из действия морфизма Фробениуса на когомологиях де Рама гладких алгебраических многообразий. Калединым был найден его некоммутативных аналог.

Известно, что для многообразий, определенных нам кольцом p-адических чисел, изоморфизм Картье допускает усиление и уточнение – на их когомологиях де Рама возникает структура так называемого "фильтрованного модуля Дьедонне", введенная Фонтенем. Некоммутативный аналог этой структуры до настоящего момента было неизвестен, однако можно было предположить, где его искать. А именно, в алгебраической топологии с начала 90х годов известна построенная Бокстедом, Сяном и Мадсеном теория циклотомического следа, основанная на понятии циклотомического спектра, и именно структура циклотомического спектра возникает на топологических гомологиях Хохшильда, некоем топологическом аналоге обычных гомологий Хохшильда.

До недавнего времени все это были всего лишь аналогии. Теперь вопрос был исследован Д. Калединым и в значительной степени закрыт. А именно, было введено понятие "циклотомического комплекса", точного гомологического аналога циклотомических спектров Бокстеда-Сяна-Мадсена. Затем было доказано, что производная категория циклотомических комплексов эквивалентна 2-периодической производной категории фильтрованных модулей Дьедонне в смысле Фонтеня. Структура циклотомического комплекса на гомологиях Хохшильда некоммутативных многообразий над p-адическими числами пока не построена, но это дело ближайшего будущего.

Поиски гомологических аналогов теории Бокстеда-Сяна-Мадсена активно продолжаются. В частности, основываясь на аналогиях с этой теорией, для любой некоммутативной ассоциативной алгебры над конечным полем Калединым был построен функториальный "комплекс Хохшильда-Витта", который уточняет обычный комплекс Хохшильда в том же смысле, в котором комплекс де Рама-Витта, введенный в конце 70х годов Делинем и Иллюзи, уточняет обычный комплекс де Рама. Тем самым, открывается возможность полного некоммутативного обобщения понятия кристальных когомологий алгебраического многообразия над конечным полем. Эти результаты в настоящее время готовятся к публикации.

Тем временем, был также изучен вопрос о том, как продолжать новые версии гомологий Хохшильда с алгебр на DG алгебры и DG категории – т.е. собственно на некоммутативные многообразия. С этой целью, Калединым был разработан и изучен формализм "следовых функторов", в том числе неаддитивных. Этот формализм позволяет получать "скрученные" версии гомологий Хохшильда и доказывать для них фундаментальные теоремы, такие как теорема о Морита-инвариантности и теорема Келлера о локализации. Последнее особенно важно, т.к. дает возможность сравнивать новые теории с уже известными теориями для неаффинных алгебраических многообразий.

Также, были выполнены важные работы в характеристике ноль. В частности, Калединым был получен некоммутативный аналог – вернее, некоммутативное обобщение – знаменитых гипотез А. Бейлинсона об отображении регулятора для алгебраических многообразий над числовым полем. Гипотезы эти – одни из центральных и для современной алгебаической геометрии, и для арифметики (например, они включают в себя уточненную версии еще более знаменитой гипотезы Ходжа, одной из Задач Тысячелетия по версии Института Клея). Однако гипотезы чрезвычайной трудны, и никакого серьезного продвижения в их доказательстве в ближайшее время не ожидается.

Некоммутативая версия гипотеза так же весьма трудна – что неудивительно, т.к. она включает в себя коммутативную – но одновременно, она может оказаться и более доступной, т.к. исключает из рассмотрения многие аспекты проблемы, которые по-видимому несущественны. По крайней мере, в простом частном случае конечномерных некоммутативных алгебр гипотезы удается полностью доказать – что и было проделано. Для доказательства полной версии надо обобщить результат с алгебр на DG алгебры; как это сделать, пока неясно.

Кроме того, изучались конкретные примеры некоммутативных алгебраических многообразий, в особенности связанные с категорией Фукая и гомологической зеркальной симметрией. Здесь удалось сделать важное продвижение – А. Ефимов изучил категория Фукая комплексной проективной прямой без нескольких точек, и доказал в этом случае гипотезу у гомологической зеркальной симметрии – а именно, предъявил категорию матричных факторизаций на некотором торической многообразии, и доказал, что она эквивалентна рассматриваемой категории Фукая. В процесс исследования используется крайне нетривиальная техника вычисления и применения когомологий Хохшильда категорий матричных факторизаций, которая представляет интерес и сама по себе. Вкупе с более ранними работами Ефимова по зеркальной симметрии для компактных римановых поверхностей старшего рода, можно сказать, что гипотеза гомологической зеркальной симметрии для алгебраических кривых им успешно доказана.

На более теоретическом уровне, Ефимовым была также изучена и продумана недавняя работа А. Кузнецова и В. Лунца о так называемом "категорном разрешении особенностей" в алгебраической геометрии. Сама по себе работа весьма важна для применений некоммутативной алгебраической геометрии к коммутативной, но собственно некоммутативного содержания, казалось бы, не имеет. Однако Ефимовым основные аргумент были значительно усилены и переработаны, и в результат, был доказан совершенно новый и сильный результат – а именно, что производная категория совершенных комплексов когерентных пучков на алгебраическом многообразии, возможно негладком, тем не менее всегда имеет гомотопически конечный тип.

Кроме того, исследовались и хохшильдовские гомологии per se, с точки зрения наличия на них высших структур. Здесь Н. Маркаряном, совместно с С. Шадриным и А. Хорошкиным, был наконец-то строго доказан совершенно основополагающий результат: алгебра Баталина-Вылковиского, снабженная затягивающей гомотопией для дифференциала, это в точности то же самое, что алгебра на гиперкоммутативной операдой. Надо пояснить, что структура алгебры Баталина-Вылковиского автоматически есть, например, на гомологиях Хохшильда некоммутативных многообразий Калаби-Яу, а наличие затягивающей гомотопии сводится к вырождению спектральной последовательности Ходжа-де Рама – которое, при некоторых технических предположениях, уже доказано Калединым для гладких и компактных некоммутативных многообразий. С другой стороны, алгебры над гиперкоммутативной операдой, известные также как формальные фробениусовы многообразия, возникают в топологической теории поля и связанных с ней областях математики – например, в весьма популярной теории Громова-Виттена. В случае обычных коммутативных многообразий, то, что на гомологиях Хохшильда гладких компактных многообразий Калаби-Яу возникает такая же структура, известно давно – это было установлено в работах Концевича-Баранникова, Лосева-Шадрина, и других еще в конце 90х годов (это дает "сторону B" зеркальной симметрии, в то время как инварианты Громова-Виттена возникают на "стороне A"). Ожидалось, что это утверждение в каком-то смысле верно и в общем некоммутативном случае, однако и точная формулировка, и доказательство отсутствовали. Теперь, благодаря статье Маркаряна, они есть.

## Литература

[1] Д. Каледин, *Циклотомические комплексы*, Изв. РАН сер. мат., 77:5 (2013), 3-70.

[2] D. Kaledin, *Trace theories and localization*, arXiv:1308.3743.

[3] D. Kaledin, *Beilinson conjecture for finite-dimensional associative algebras*, в архив на днях положу, to appear in Contemp. Math.

[4] M. Abouzaid, D. Auroux, A. Efimov, L. Katzarkov, D. Orlov, *Homological mirror symmetry for punctured spheres*, J. Amer. Math. Soc., 26:4 (2013), 1051-1083.

[5] A. Efimov, *Homotopy finiteness of some DG categories from algebraic geometry*, arXiv:1308.0135.

[6] A. Khoroshkin, N. Markarian, S. Shadrin, *Hypercommutative operad as a homotopy quotient of $BV$*, Comm. Math. Phys. 322:3 (2013), 697-729.

# 5. Производные категории, A-бесконечность алгебры и мотивы

Группа сотрудников лаборатории, занимающихся алгебраическими аспектами производных категорий, а также A-бесконечность алгебрами и мотивами, включает Леонида Посицельского, Марата Ровинского, Сергея Рыбакова, и стажера лаборатории Ярослава Абрамова.

## 5.1. Фундаментальные аспекты теории категорий и их приложения к двойственности когерентных и контракогерентных пучков

Л. Посицельский в 2013 году выпустил новые, более полные версии двух своих электронных препринтов. Препринт [Po1] ("Coherent analogues of matrix factorizations and relative singularity categories", arXiv:1102.0261 [math.CT]), предыдущие версии которого выходили в 2011 году, вырос с 68 страниц в декабрьской версии 2011 года до 110 страниц в августовской версии 2013 года. Препринт [Po2] ("Contraherent cosheaves", arXiv:1209.2995 [math.CT]) вырос со 105 страниц в сентябрьской версии 2012 года до 215 страниц в мартовской версии 2013 года.

В основной части препринта "Contraherent cosheaves" [Po2] появились следующие новые результаты:

- показано, что в точной категории локально контрагерентных копучков локально кокручения на локально нетеровой схеме имеется достаточно много проективных объектов; получено явное описание проективных локально контрагерентных копучков локально кокручения на такой схеме; показано, что этот класс копучков совпадает с классом локально плоских локально контрагерентных копучков локально кокручения, принадлежность копучка к этому классу является локальным свойством, и все копучки из этого класса глобально контрагерентны и ковялы (двойственный аналог теории Хартсхорна инъективных квазикогерентных пучков на локально нетеровых схемах);

- исследованы локально плоские локально контрагерентные копучки на локально нетеровой схеме конечной размерности Крулля: показано, что все такие копучки глобально плоски, глобально контрагерентны и ковялы; показано, что на нетеровой схеме конечной размерности Крулля все плоские контрагерентные копучки колокально плоски (в то время, как на полуотделимой нетеровой схеме имеет место обратное включение); показано, что в точной категории локально контрагерентных копучков на нетеровой схеме конечной размерности Крулля имеется достаточно много проективных объектов, и получено их описание;

- построено производное комодульно-контрамодульное соответствие на неполуотделимой нетеровой схеме в двух вариантах: эквивалентность обыкновенных производных категорий квазикогерентных пучков и контрагерентных копучков на нетеровой схеме конечной размерности Крулля, и эквивалентность между копроизводной категорией квазикогерентных пучков и контрапроизводной категорией контрагерентных копучков на нетеровой схеме с дуализирующим комплексом;

- показано, что обыкновенная производная категория и контрапроизводная категория контрагерентных копучков на нетеровой схеме конечной размерности Крулля допускают произвольные бесконечные прямые суммы объектов и компактно порождены, что в гомотопических категориях локально контрагерентных копучков и локально контрагерентных копучков локально кокручения на такой схеме имеется достаточно много гомотопически проективных и гомотопически плоских комплексов;

- построены левые производные функторы прямого образа, действующие между обыкновенными производными категориями или контрапроизводными категориями (локально) контрагерентных копучков локально кокручения для любого квазикомпактного морфизма локально нетеровых схем, и между обыкновенными производными категориями, контрапроизводными категориями, абсолютными производными категориями (локально) контрагерентных копучков или их ограниченными версиями для любого морфизма нетеровых схем конечной размерности Крулля;

- для морфизма нетеровых схем конечной размерности Крулля, определен функтор экстраординарного обратного образа контрагерентных копучков, действующий между обыкновенными производными или контрапроизводными категориями, как левый сопряженный функтор к производному функтору прямого образа; в случае конечного морфизма, этот функтор построен в явном виде как левый производный функтор специального обратного образа контрагерентных копучков локально кокручения, а в случае замкнутого вложения схем – также и как левый производный функтор специального обратного образа (произвольных) контрагерентных копучков;

- для морфизма полуотделимых нетеровых схем конечной размерности Крулля показано, что эквивалентности между копроизводными категориями квазикогерентных пучков и абсолютными производными категориями локально инъективных контрагерентных копучков на каждой из отображаемых схем преобразуют функтор экстраординарного обратного образа Неемана квазикогерентных пучков в обычный обратный образ локально инъективных контрагерентных копучков, а эквивалентности между абсолютными производными категориями плоских квазикогерентных пучков и контрапроизводными категориями контрагерентных копучков на каждой из схем преобразуют обычный функтор обратного образа квазикогерентных пучков в экстраординарный обратный образ контрагерентных копучков;

- для плоского морфизма неполуотделимых нетеровых схем показано, что эквивалентости обыкновенных производных категорий квазикогерентных пучков и контрагерентных копучков на каждой из схем преобразуют правый производный функтор прямого образа квазикогерентных пучков в левый производный функтор прямого образа контрагерентных копучков;

- для гладкого морфизма нетеровых схем показано, что эквивалентности между копроизводной категорией квазикогерентных пучков и контрапроизводной категорией контрагерентных копучков на каждой из схем, связанные с согласованным выбором дуализирующих комплексов на них, преобразуют правый производный функтор прямого образа квазикогерентных пучков в левый производный функтор прямого образа контрагерентных копучков;

- для конечного морфизма нетеровых схем или собственного морфизма полуотделимых нетеровых схем показано, что эквивалентности между копроизводной категорией квазикогерентных пучков и контрапроизводной категорией контрагерентных копучков на каждой из схем, связанные с согласованным выбором дуализирующих комплексов на них, преобразуют функтор экстраординарного обратного образа квазикогерентных пучков в функтор экстраординарного обратного образа контрагерентных копучков;

- теорема Хартсхорна-Делиня об экстраординарном обратном образе ограниченных снизу комплексов квазикогерентных пучков распространена на копроизводные категории неограниченных комплексов квазикогерентных пучков (следуя методу Делиня);

- для разложимого (в том или ином смысле) морфизма нетеровых схем (иногда с условиями отделимости) показано, что эквивалентности между копроизводной категорией квазикогерентных пучков и контрапроизводной категорией контрагерентных копучков на каждой из схем, связанные с согласованным выбором дуализирующих комплексов на них, преобразуют функтор экстраординарного обратного образа Делиня квазикогерентных пучков в функтор, сопряженный слева к левому производному функтору прямого образа контрагерентных копучков;

- таким образом, получена конструкция функтора экстраординарного обратного образа Делиня для морфизма конечного типа между нетеровыми схемами с дуализирующими комплексами, не требующая разложения этого морфизма в композицию каких-либо морфизмов более специального вида.

Кроме того, в препринте "Contraherent cosheaves" [Po2] появились новые приложения B и C (Appendices B and C). В приложении B "Co-contra correspondence over a flat coring" содержатся следующие результаты, обобщающие некоторые результаты основной части препринта со случая нетеровых схем на случай полуотделимых нетеровых стэков:

- для любого кокольца $C$, плоского слева и справа над кольцом $A$ конечной слабой гомологической размерности, счетные прямые суммы инъективных левых модулей над которым имеют конечные инъективные размерности, построена эквивалентность между копроизводной категорией левых $C$-комодулей и контрапроизводной категории левых $C$-контрамодулей $A$-кокручения;

- для любого кокольца $C$, плоского слева и справа над горенштейновым слева кольцом $A$ (т.е., таким кольцом $A$, над которым классы левых $A$-модулей конечной инъективной размерности и конечной плоской размерности совпадают), построена эквивалентность между копроизводной категорией левых $C$-комодулей и контрапроизводной категории левых $C$-контрамодулей $A$-кокручения;
- определено понятие дуализирующего комплекса для пары колец над ассоциативными кольцами; для любого кокольца $C$, плоского справа над нетеровым слева кольцом $A$, кокольца $E$, плоского слева над когерентным справа кольцом $B$, и дуализирующего комплекса $\mathcal{D}$ для коколец $C$ и $E$, определенного над дуализирующим комплексом $D$ для колец $A$ и $B$, построена эквивалентность между копроизводной категорией левых $C$-комодулей и контрапроизводной категории левых $E$-контрамодулей $B$-кокручения;
- для любого кокольца $C$, плоского слева над кольцом $A$, и морфизма колец $A \to B$, превращающего $B$ в строго плоский левый $A$-модуль, показано, что функтор расширения скаляров с $A$ до $B$ индуцирует эквивалентность контрапроизводных категорий $C$-контрамодулей $A$-кокручения и $B \otimes_A C \otimes_A B$-контрамодулей $B$-кокручения.

В приложении C "Affine Noetherian formal schemes" содержатся следующие результаты, которые предполагается положить в основу будущей теории контрагерентных копучков контрамодулей над нетеровыми формальными схемами:

- для любого нетерова коммутативного кольца $R$ с фиксированным идеалом $I$ и дуализирующим комплексом $D$ построена эквивалентность между копроизводной категорией $R$-модулей $I$-кручения и контрапроизводной категорией $(R, I)$-контрамодулей;
- показано, что всякий $(R, I)$-контрамодуль можно вложить в $(R, I)$-контрамодуль $R$-кокручения, таким образом, чтобы факторконтрамодуль был $R$-плоским, и на всякий $(R, I)$-контрамодуль имеется

сюръективный гомоморфизм из $R$-плоского $(R, I)$-контрамодуля с ядром, являющимся $(R, I)$-контрамодулем $R$-кокручения;

- показано, что функтор Hom из некоторого $(R, I)$-контрамодуля $F$ сохраняет точность троек $R$-контраприспособленных $(R, I)$-контрамодулей тогда и только тогда, когда $R/I^n$-контрамодули $F/I^nF$ очень плоски для всех $n$ (такие $(R, I)$-контрамодули $F$ называются очень плоскими);
- показано, что всякий $(R, I)$-контрамодуль можно вложить в $R$-контраприспособленный $(R, I)$-контрамодуль так, чтобы факторконтрамодуль был очень плоским, и на всякий $(R, I)$-контрамодуль имеется сюръективный гомоморфизм из очень плоского $(R, I)$-контрамодуля с $R$-контраприспособленным ядром.

В основной части препринта "Coherent analogues of matrix factorizations and relative singularity categories" появились следующие новые результаты:

- доказана эквивалентность нескольких определений стабильной категории относительных особенностей замкнутой подсхемы конечной плоской размерности в нетеровой схеме конечной размерности Крулля, обобщающих определение Краузе стабильной категории особенностей нетеровой схемы; в случае дивизора Картье, построена эквивалентность стабильной категории относительных особенностей в смысле Краузе, "большой" категории относительных особенностей в смысле Орлова, и копроизводной категории квазикогерентных матричных факторизаций;
- показано, что принадлежность когерентной матричной факторизации толстой оболочке полной подкатегории локально свободных матричных факторизаций в абсолютной производной категории когерентных матричных факторизаций невырожденного потенциала на отделимой нетеровой схеме с дуализирующим комплексом и достаточным количеством векторных расслоений является локальным (по схеме) свойством;
- для собственного морфизма отделимых нетеровых схем, согласованным образом снабженных дуализирующими комплексами и по-

тенциалами, показано, что эквивалентности между копроизводными категориями произвольных и плоских квазикогерентных матричных факторизаций на каждой из схем преобразуют обычный функтор обратного образа плоских матричных факторизаций в экстраординарный функтор обратного образа квазикогерентных матричных факторизаций;

- в качестве следствия, выведен аналог теоремы Хартсхорна-Делиня об экстраординарном обратном образе квазикогерентных пучков для матричных факторизаций;
- дополнительно в препринт включен в виде замечания набросок нового, более прозрачного доказательства основной теоремы об эквивалентности абсолютной производной категории когерентных матричных факторизаций и относительной категории особенностей нулевого локуса, принадлежащего А.И. Ефимову и основанного на технике, развитой в его недавнем препринте.

Кроме того, в последней версии препринта [Po1] ("Coherent analogues of matrix factorizations and relative singularity categories") появилось новое приложение B (Appendix B) "Hochschild (co)homology of matrix factorizations", написанное Посицельским в соавторстве с А.И. Ефимовым. Это приложение содержит следующие результаты:

- результаты работы [PP] (A. Polishchuk, L. Positselski, Hochschild (co)homology of the second kind I, Transactions of the Amer. Math. Soc. 364, 2012) о дифференциальных производных функторах второго рода для искривленных DG-модулей и их сравнении с аналогичными функторами первого рода распространены на случай, когда вместо условий конечности гомологической размерности на подлежащее градуированное кольцо CDG- или DG-кольца наложены условия нетеровости или когерентности;
- показано, что если потенциал $w$ на аффинном, но не обязательно гладком алгебраическом многообразии $X$ обладает тем свойством, что диагональная матричная факторизация $\Delta_*\mathcal{O}_X$ потенциала $w_2 - w_1$ на $X \times X$ принадлежит минимальной толстой подкатегории абсолютной производной категории когерентных матричных факторизаций, содержащей внешние тензорные произведения локально

свободных матричных факторизаций потенциалов $-w$ и $w$ на $X$, то гомологии и когомологии Хохшильда первого рода DG-категории локально свободных матричных факторизаций потенциала $w$ на $X$ естественно изоморфны соответствующим (ко)гомологиям Хохшильда второго рода CDG-алгебры $B = (\mathcal{O}(X), 0, -w)$;

- в частности, такие изоморфизмы имеют место, если многообразие $X$ гладко, а локус нулей потенциала $w$ на $X$ содержит замкнутую подсхему, содержащую все его особые точки и допускающую гладкую стратификацию.
- дано определение понятия регулярной функции без критических точек на алгебраическом многообразии с особенностями в терминах абсолютных производных категорий когерентных матричных факторизаций; показано, что регулярная функция на алгебраическом многообразии над полем характеристики нуль имеет конечное множество критических значений;
- определено понятие производного котензорного произведения комплексов квазикогерентных пучков и квазикогерентных матричных факторизаций над схеме, вычисляемого над фиксированным дуализирующим комплексом на этой схеме (как триангулированного функтора двух аргументов, действующего между копроизводными категориями);
- для абсолютной производной категории матричных факторизаций потенциала $w$ на схеме конечного типа $X$ над совершенным полем $k$, задающего плоский морфизм $w\colon X \to \mathbb{A}^1_k$ и не имеющего ненулевых критических значений, построен изоморфизм между алгеброй когомологий Хохшильда соответствующей DG-категории и Ext-алгеброй диагональной матричной факторизации $\Delta_*\mathcal{D}_X$ как объекта абсолютной производной категории когерентных матричных факторизаций потенциала $w_2 - w_1$ на $X \times_k X$, а также между модулем гомологий Хохшильда той же DG-категории и модулем Ext между диагональными матричными факторизациями $\Delta_*\mathcal{O}_X$ и $\Delta_*\mathcal{D}_X$ в той же абсолютной производной категории (где $\mathcal{D}_X$ обозначает дуализирующий комплекс на $X$, полученный как экстраординарный обратный образ структурного пучка спектра поля $k$ при структурном отображении в него из схемы $X$);

- для абсолютной производной категории матричных факторизаций потенциала $w$ на схеме конечного типа $X$ над алгебраически замкнутым полем $k$, задающего плоский морфизм $w\colon X \to \mathbb{A}^1_k$ и имеющего лишь конечное число критических значений, получены формулы, выражающие прямые суммы (ко)гомологий Хохшильда DG-категорий, связанных с абсолютными производными категориями матричных факторизаций потенциалов $w - c$ на $X$, где $c \in k$ пробегает критические значения, в виде алгебры и модуля Ext в абсолютной производной категории когерентных матричных факторизаций потенциала $w_2 - w_1$.

Работы Сергея Рыбакова относятся к приложениям алгебраического формализма, разработанного Л. Посицельским. Пусть $X$ гладкое алгебраическое многообразие над полем $k$ характеристики нуль. Его комплекс де Рама $\Omega_X = \Omega^{\bullet}_{X/k}$ — это пучок DG-алгебр, и квазикогерентные пучки DG-модулей над $\Omega_X$ (будем называть их $\Omega_X$-модулями) образуют DG-категорию, но ее производная категория не очень интересна. Л.Посицельский в 2009 году определил копроизводную категорию категории $\Omega_X$-модулей и доказал, что она эквивалентна неограниченной производной категории квази-когерентных $\mathcal{D}_X$-модулей. При этом абсолютная производная категория когерентных $\Omega_X$-модулей соответствует производной категории когерентных $\mathcal{D}_X$-модулей. Этот результат — глубокое обобщение кошулевой двойственности между алгеброй многочленов и внешней алгеброй. В своем препринте 2013 года arXiv:1311.7503 [math.AG] ([R]), С. Рыбаков построил функторы прямого образа, экстраординарного обратного образа и тензорного произведения на копроизводной категории $\Omega_X$-модулей и доказал, что эти функторы соответствуют аналогичным функторам для $\mathcal{D}_X$-модулей относительно эквивалентности Посицельского. На абсолютной производной категории когерентных $\Omega_X$-модулях он определил функтор двойственности, который согласован с двойственностью для $\mathcal{D}_X$-модулей. Некоторые из этих конструкций для DG-категории $\Omega_X$-модулей появились в работах Капранова, Бейлинсона и Дринфельда.

## 5.2. Мотивные аспекты зеркальной симметрии и теория производных категорий

В работах Сергея Галкина обсуждаются мотивные аспекты зеркальной симметрии, в применении к многообразиям Фано.

Исследования [1] и [2] мотивированы вопросами зеркальной симметрии для многообразий Фано, но их результаты представляют и независимый от нее интерес.

Гипотезы зеркальной симметрии декларируют соответствие между многообразиями Фано $X$ (рассматриваемыми как монотонные симплектические многообразия $(X, \omega)$ с классом $[\omega] = c_1(X) \in H^2(X, \mathbb{R})$) и некоторыми многочленами Лорана $W$ с натуральными коэффициентами. На физическом языке это соответствие выражается в эквивалентности двух квантовых теорий поля: сигма-модели на многообразии $X$ и модели Гинзбурга–Ландау с потенциалом $W$. В 2002 году Хори, используя физическую интуицию, и собрав воедино картину зеркальной симметрии Заслова–Стромингера–Яу и гипотезу гомологической зеркальной симметрии Концевича, предложил достаточно обоснованный и конструктивный способ построенния многочлена Лорана $W$ по монотонному симплектическому многообразию Фано $(X, \omega)$: следует выбрать монотонный специальный лагранжев тор $L \subset X$, тогда $W = m_0(L)$, где $m_0(L)$ это препятствие О-Она-Ото-Фукаи, производящая функция для псевдоголоморфных дисков на $X$ с границей на $L$ и индексом Маслова 2, проходящим через общую точку на $L$: $m_0(L) = \sum_D y^{[\partial D]} \in \mathbb{Z}[\pi_1(L)] = \mathbb{Z}[y_1^{\pm}, \ldots, y_d^{\pm}]$, здесь $[\partial D] \in \pi_1(L) \simeq \mathbb{Z}^d$ — класс отображения границы, то есть отображения окружности $\partial D \simeq S^1$ в вещественный тор $L \simeq (S^1)^d$, а $y^{[\partial D]} : (\mathbb{C}^*)^d \to \mathbb{C}$ соответствующий $[\partial D]$ характер, рассматриваемый как функция на $d$-мерном комплексном алгебраическом торе. Один из способов построения таких лагранжевых торов связан с вырождениями многообразия $X$ к торическому многообразию $X_0$: отображение моментов на $X_0$ задает расслоение открытого подмножества в $X_0$ на специальные лагранжевы торы, а симплектический параллельный перенос устанавливает симплектоморфизм между этим открытым подмножеством в $X_0$ и каким-то открытым подмножеством в $X$. Как было показано Нишиноу–Нохарой–Уедой, в том случае, когда многообразие Фано $X_0$ имеет малое разрешение, функцию $m_0(L)$ можно вычислить, и получается достаточно простой многочлен Лорана, фигурирующий в гипотезе Батырева 1997 года, предписывающей построение многочленов Лорана по малым торическим вырождениям.

Все эти рассмотрения привели ряд авторов к выводу, что получающееся соответствие между многообразиями Фано и многочленами Лорана многозначно: одному и тому же многообразию Фано $X$ могут соответствовать несколько разных многочленов Лорана $W$. Галкин в своей диссертации описал малые торические вырождения трехмерных многообразий Фано, и обнаружил, что у одного гладкого многообразия Фано может быть до четырех разных вырождений такого типа. Получающиеся многочлены Лорана отличаются друг от друга бирациональной (нерегулярной) заменой координат. К аналогичным выводам пришел Русинко, разбирая класс торических вырождений сферических многообразий, построенных Алексеевым и Брионом, их конструкция использует неоднозначный выбор, и многочлены Лорана соответствующие разным вырождениям тоже отличаются друг от друга бирациональной заменой координат. Все это имело внешнее сходство с кластерными преобразованиями Зелевинского–Фомина, но пока что к ним не сводилось, и количество различных многочленов Лорана в примерах выше конечно. В двумерном случае Галкин определил конструктивный алгоритм построения замен координат по заданному многочлену Лорана: мутация в направлении $(0,1)$ определяется как $\mu_{(0,1)} : (x,y) \to (x, \frac{y}{1+x})$, а мутации в направлениях остальных примитивных векторов (векторов в $\mathbb{Z}^2$ с взаимнопростыми координатами) получаются из нее сопряжением регулярным автоморфизмом тора. Будем говорить, что направление является допустимым (с кратностью $k \geq 1$) для многочлена Лорана $W$, если после мутации в этом направлении $k$ раз он $W$ остается многочленом Лорана. Оказывается, что если у многочлена Лорана $W$ было $N$ допустимых направлений (с учетом кратностей), то у промутированного многочлена Лорана тоже есть $N$ допустимых направлений, явно вычисляемых в терминах старых. Это было доказано в препринте Галкина и Уснича, используя бирациональную геометрию поверхностей. В работе [1] было дано новое, алгебраическое доказательство, работающее в большей общности, имеющее перспективы обобщения на некоммутативный случай, и сближающее зеркальную симметрию и теорию кластерных алгебр (авторы обобщают понятие верхнего предела кластерной алгебры, введенное Беренштейном–Зелевинским–Фоминым, на необходимый для зеркальной симметрии контекст). Как следствие, если у какого-то многочлена Лорана было хотя бы два неколлинеарных допустимых направления, то тогда существует бесконечно много различных многочленов Лорана отличающихся от исходного бирациональной заменой координат. Более того, в примерах, получающихся зеркальной симметрией из поверхностей дель Пеццо, таких направлений даже больше: многочлены Лорана зеркально симметричные к поверхностям дель Пеццо степени $1 \leq d \leq 9$ имеют по $12-d \geq 3$ допустимых направлений мутации (с учетом кратностей). Например, если $X$ это проективная плоскость, а $L$ это слой отображения моментов (тор Клиффорда), тогда $W_{1,1,1} = m_0(L) = y_1 + y_2 + \frac{1}{y_1 y_2}$, и у многочлена $W_{1,1,1}$ три допустимых направления $(-1,-1), (-1,2), (2,-1)$, при мутации в любом из них получается многочлен Лорана эквивалентный $y_2 + \frac{(1+y_1)^2}{y_1 y_2^2}$ (как показал Ору, этот многочлен равен $m_0(L')$, где $L'$ - экзотический монотонный Лагранжев тор, построенный Чекановым). Галкин, Круза Моралес и Уснич выводят следствие: для каждой тройки натуральных чисел $(a,b,c)$, удовлетворяющей уравнению Маркова $a^2+b^2+c^2 = 3abc$ существует многочлен Лорана $W_{a,b,c}$, получающийся из $W_{1,1,1}$ бирациональной заменой координат, такой что многогранник Ньютона многочлена $W_{a,b,c}$ двойственнен к многограннику моментов взвешенного проективного пространства $\mathbb{P}(a^2,b^2,c^2)$. Как показали Прохоров–Хакинг, взвешенные проективные плоскости с такими весами это в точности все $\mathbb{Q}$-горенштейновы торические вырождения проективной плоскости. Галкин, Круз Моралес и Уснич выдвинули гипотезу, что для каждой тройки Маркова $(a,b,c)$ существует монотонный специальный лагранжев тор $L_{a,b,c} \subset \mathbb{CP}^2$, такой что $W_{a,b,c} = m_0(L_{a,b,c})$, то есть коэффициенты $W_{a,b,c}$ равны количеству псевдоголоморфных дисков ограничивающихся на $L_{a,b,c}$; ожидается что $L_{a,b,c}$ получаются симплектическим переносом из торов Клифборда на $\mathbb{P}(a^2,b^2,c^2)$. Эта гипотеза, в частности, имеет такое следствие: на $\mathbb{CP}^2$ есть бесконечно много гамильтоново неизотопных монотонных лагранжевых торов. Пока что она известна в трех случаях: диски на торе Клиффорда были посчитаны О-Чо в 2003 (исходный многочлен $W_{1,1,1}$), диски на торе Чеканова были найдены Ору в 2007 (многочлен $W_{1,1,2}$), и совсем недавно Вианна подтвердил гипотезы в случае $W_{1,2,5}$, построив новый экзотический лагранжев тор.

В работе [2] для каждого деформационного класса трехмерных многообразий Фано $X$ предъявлено представление общего многообразия в классе в виде нулей сечения фиксированного векторного расслоения $E$ на фиксированном "ключевом пространстве" $K$ (как правило, $K$ это произведение торического многообразия $K_t$ и Грассманиана $K_g = Gr(3,7)$, а $E$ получается применением полиномиальных функторов (симметрической и внешней степени, тензорных произведения и суммы, двойственности) к линейным расслоениям на $K_t$ и универсальному расслоению на $K_g$). Такое представление крайне удобно для практических вычислений связанных с многообразиями $X$. Доминантный морфизм из проективного пространства $\mathbb{P}(\Gamma(K,E)^*)$ в многообразие модулей $M_X$ влечет, что все многообразия модулей $M_X$ всех трехмерных многообразий Фано $X$ унирациональны. Физически это позволяет свести вычисления для сигма-модели на пространстве $X$ к вычислениям на откалиброванной линейной сигма-модели с данными $(Tot_K E^*, \langle\cdot, s_X\rangle)$ (здесь $Tot_K E^*$ — тотальное пространство векторного расслоения $E^*$ над $K$, а $\langle\cdot, s_X\rangle : Tot_K E^* \to \mathbb{C}$ линейная по слоям функция спаривания с сечением $s_X \in \Gamma(K,E)$, соответствующим многообразию $X$). Математически, представление выше позволяет вычислить инварианты Громова–Виттена рода ноль на $X$, используя квантовую теорему Лефшеца (Коатса–Гивенталя) и теорему "абелева/неабелева соответствия" Бертрама–Чиокан-Фонтанина–Кима–Сабба. Эти вычисления были проделаны, как следствие, были вычислены "квантовые периоды" трехмерных многообразий Фано — производящие функции для одноточечных инвариантов Громова–Виттена с потомками $\langle\tau^{d-2}[pt]\rangle_{0,d}$, считающих ожидаемые количества рациональных кривых антиканонической степени $d$ проходящих через общую точку $X$ с "кратностью" $(d-2)$ (ожидаемая размерность пространства таких кривых равна нулю). Было установлено взаимно-однозначное соответствие между деформационными классами трехмерных многообразий Фано и мутационными классами специальных многочленов Лорана, построенных ранее Галкиным–Голышевым–Каспчиком–Коатсом–Корти и исследованных Ахтаром–Галкиным–Каспчиком–Коатсом. Было доказано, что при этом соответствии квантовые периоды многообразий Фано $X$ равны обыкновенным периодам семейств линий уровня функций $W$, производящим рядам свободных членов у степеней $W^d$.

Особенный интерес представляют два класса многообразий, близких к проективным пространствам: малообразия и ложные проективные пространства.

**Малообразия.**

Гладкое проективное многообразие $X$ размерности $d$ называется маллобразием, если его ограниченная производная категория когерентных пучков имеет полный исключительный набор из $d$ объектов. Исследование малообразий было начато в 90-х в работах Бондала, Бондала-

Полищука и Посицельского. Бондал и Орлов выдвинули следующие гипотезы:

1) все малообразия являются многообразиями Фано,

2) все малообразия рациональны,

3) все четномерные малообразия изоморфны проективному пространству.

В работе [3] Галкин, Кацарков, Меллит и Шиндер доказывают эти гипотезы для размерностей $d \leq 4$ (последнюю в предположении, что $X$ является многообразием Фано): все малообразия размерности 2 и 3 рациональны и являются многообразиями Фано, все четырехмерные многообразия с полным исключительным набором из 5 когерентных пучков изоморфны проективному пространству.

**Ложные проективные пространства. Фантомы.**

Отдельной темой выделяются ложные проективные пространства: гладкие проективные многообразия с обильным каноническим расслоением, такие что все их числа Ходжа и многочлен Гильберта $(\chi(X, \omega_X^{\otimes n}))$ совпадают с аналогичными инвариантами проективного пространства. Как было показано в [3] ложные проективные плоскости не являются малообразиями из-за наличия у них нетривиальных первых гомологий. Тем не менее, в [3] была выдвинута гипотеза: пусть $X$ – ложное проективное пространство, для линейного расслоения $\mathcal{L}$ такого что $\omega_X = \mathcal{L}^{\otimes(d+1)}$ набор линейных расслоений $\mathcal{O}, \mathcal{L}^{-1}, \ldots, \mathcal{L}^{-d}$ является исключительным набором (то есть, линейные расслоения $\mathcal{L}, \mathcal{L}^{\otimes 2}, \ldots, \mathcal{L}^{\otimes d}$ ацикличны), как замечено там же — обязательно неполным. Эта гипотеза была доказана в 6 из 46 случаев: три случая разобраны в статье Фахруддина (те, когда у многообразия $X$ есть $\mathbb{Q}_2$-адическая модель), и еще три случая были разобраны в обновленной заметке [5] Галкиным и другими (те случаи, когда группа автоморфизмов $G = \operatorname{Aut} X$ не абелева). Более того, рассматривая $G$-эквивариантные категории Галкин и соавторы строят новый, возможно, самый простой, пример геометрических фантомных категорий (категория называется фантомной, если ее группа Гротендика и гомологии Хохшильда равны нулю): их примеры получаются как допустимые подкатегории в категории $G$-эквивариантных объектов на ложной проективной плоскости, и скорее всего родственные примеры можно построить как допустимые подкатегории в производной категории когерентных пучков на поверхностях Долгачева. Кроме этого примера, известно всего две конструкции геометрических фантомных категорий: конструкция Бенинга-фон Ботмера-Кацаркова-Сосны, использующая сложные вычисления, а также конструкция Горчинского и Орлова, опирающаяся на построение квазифантомных категорий другими авторами.

Самый простой пример квази-фантомной категории (не считая описанного выше примера ложных проективных плоскостей с неабалевой группой автоморфизмов) был приведен Галкиным и Шиндером в работе [4]. Пусть $S$ поверхность Бовиля, фактор квадрата кривой Ферма $X^5 + Y^5 + Z^5 = 0$ по свободному действию группы $(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^2$. Тогда на $S$ есть исключительный набор из 4 линейных расслоений, а его ортогональное дополнение — ненулевая категория с нулевыми гомологиями Хохшильда и конечной группой Гротендика.

## 5.3. Линейные и полулинейные представления вполне несвязных групп

В работах Марата Ровинского обсуждаются линейные и полулинейные представления некоторых вполне несвязных групп, и их приложения к мотивной геометрии.

Как известно, существенная часть информации о чистых мотивах с рациональными коэффициентами описывается в терминах гладких представлений групп автоморфизмов универсальных областей. При этом само это описание сводится, до некоторой степени, к прояснению связи между неприводимыми допустимыми (в более сильном варианте – «гомотопически инвариантными») представлениями и неприводимыми полулинейными представлениями.

Более точно, ожидается, что среди неприводимых полулинейных представлений «интересны» только дифференциальные формы.

Изучается задача сравнения гладких линейных и полулинейных представлений для некоторых других вполне несвязных групп, таких как группа перестановок счётного множества, группа автоморфизмов счётномерного проективного пространства над конечным полем и т.п. Мотивацией можно считать тривиальность полулинейных представлений конечных групп (теорема 90 Гильберта), существование разложения Ходжа–

Тейта $p$-адических когомологий некоторых многообразий над $p$-адическими полями (а так же усиления этого результата – варианты «гипотез сравнения» – де Рама, кристаллический и полустабильный).

Для рассматриваемых групп $G$ удаётся описать категорию гладких линейных представлений. В частности, показана локальная нётеровость и локальная артиновость этой категории, описаны её неприводимые объекты, построены неразложимые инъективные образующие (например, тривиальное представление инъективно).

В отличие от случая конечных групп, для групп $G$ категория гладких полулинейных представлений оказывается довольно сложно устроенной. Показана, однако, локальная нётеровость этой категории. Более того, составлена гипотетическая картина строения категория гладких полулинейных представлений групп $G$, из которой, в частности, следует тривиальность неприводимых гладких полулинейных представлений.

Результаты изложены в готовящемся препринте "On the semilinear representations of the infinite symmetric group."

## 5.4. Классификация подгрупп ноттингэмской группы

За 2013-й год Я.В. Абрамовым были опубликованы работы [A1], [A2].

Обозначим множество формальных степенных рядов без свободного члена с коэффициентами в коммутативном ассоциативном кольце $R$ через $xR[[x]]$. Рассмотрим на множестве $xR[[x]]$ бинарную операцию композиции, сопоставляющую рядам $f(x) = \sum_{i>0} a_i x^i$, $g(x) = \sum_{i>0} b_i x^i$ ряд

$$f(g(x)) = \sum_{i>0} c_i(a,b)x^i,$$

в котором

$$c_i(a,b) = a_1 b_i + a_i b_1^i + H_i(a_1, \ldots, a_{i-1}, b_1, \ldots, b_{i-1}),$$

$$c_i(a,b) \in \mathbb{Z}[a_1, \ldots, a_i, b_1, \ldots, b_i].$$

Эта операция задает структуру ассоциативного моноида на $xR[[x]]$.

Обозначим множество формальных степенных рядов с коэффициентами в $R$ без свободного члена, в которых коэффициент при $x$ обратим как элемент кольца $R$, через $J(R)$. На $J(R)$ операция композиции задает структуру группы. Эту группу мы будем называть **группой струй**.

**Проалгебраической группой со счетной базой** ([Ser2]) называется групповая схема, являющаяся проективным пределом проективной системы, состоящей из счетного числа алгебраических групп. На проалгебраической группе имеется естественная топология, получаемая как проективный предел топологий Зарисского на каждой из групп, входящих в проективную систему, по которой строится сама группа. В дальнейшем все алгебраические и проалгебраические группы будут рассматриваться с такой топологией. **Регулярным гомоморфизмом** проалгебраических групп называется морфизм их как групповых схем. В случае, когда $R = \mathbf{k}$ — поле, группа струй является группой $\mathbf{k}$-точек проалгебраической групповой схемы $J$, которая является проективным пределом последовательности групп

$$J_1 \leftarrow J_2 \leftarrow J_3 \leftarrow \dots,$$

где

$$J_n(\mathbf{k}) = Aut(\mathbf{k}[x]/(x^{n+1})\colon \mathbf{k})$$

и

$$J_{n+l} \to J_n$$

— естественные гомоморфизмы факторизации. Группа $J(\mathbf{k})$ может быть получена таким образом:

$$J(\mathbf{k}) = Aut_{cont}(\mathbf{k}[[x]]\colon \mathbf{k}) = Aut_{cont}(\mathbf{k}((x))\colon \mathbf{k}),$$

где под $Aut_{cont}$ понимается группа автоморфизмов, непрерывных в $x$-адической топологии на $\mathbf{k}[[x]]$ и $\mathbf{k}((x))$.

В группе струй имеется нормальная подгруппа

$$N(\mathbf{k}) = \{x + \sum_{i>1} a_i x^i\},$$

называемая **Ноттингемской группой** (по названию Ноттингемского университета, в котором она интенсивно изучалась).

Всюду далее поле $\mathbf{k}$ считается алгебраически замкнутым и $char\mathbf{k} = p > 0$. В $N(\mathbf{k})$ замкнутым образом вкладывается группа $N(\mathbb{F}_p)$ с проконечной топологией на ней. Известно, что в $N(\mathbb{F}_p)$ замкнутым образом вкладывается любая про-р-группа со счетной базой ([C]). Задача о том, какие коммутативные подгруппы могут в ней содержаться, интенсивно изучалась в последние годы ([K], [Pa], [E1], [E2], [F], [Win]).

В работе [A1] была доказана следующая теорема:

Теорема 4.1
Пусть $\mathbf{k}$ — алгебраически замкнутое поле положительной характеристики $p$. Тогда в Ноттингемской группе $N(\mathbf{k})$ любая замкнутая конечномерная коммутативная связная подгруппа может быть изоморфна только $(\mathbf{k},+)^m$.

## Литература

[A1] Я.В. Абрамов, "Экспоненциальное отображение Артина-Хассе, алгебраические группы в положительной характеристике и Ноттингемская группа", Математические Заметки, готовится к печати.

[A2] Я.В. Абрамов, "Система результантов как коэффициенты одного результанта", Функц. Анал. и его Прил., том 47 (2013), вып. 3, стр 82-87

[BK] Y. Barnea, B. Klopsch, "Index-subgroups of the Nottingham group", Adv. Math. 180 (2003), 187-221

[C] R. Camina, "Subgroups of Nottingham group", Journal of Algebra, 196, 101-113 (1997)

[1] John Alexander Cruz Morales, Sergey Galkin: *Upper Bounds for Mutations of Potentials*, SIGMA 9 (2013), 005, 13 pages

[2] Tom Coates, Alessio Corti, Sergey Galkin, Alexander Kasprzyk: *Quantum Periods for 3-Dimensional Fano Manifolds*, arxiv:1303.3288

[E1] M. Ershov, "New just-infinite pro-p groups of finite width and subgroups of the Nottingham group", Journal of Algebra, Volume 275, Issue 1, 1 May 2004, Pages 419-449

[E2] M. Ershov, "On Subgroups of the Nottingham Group of Positive Hausdorff Dimension", Communications in Algebra, 01/2007; 35:193-206. DOI:10.1080/00927870601041532

[F] I. Fesenko, "On just infinite pro-p-groups and arithmetically pro-finite extensions of local felds", J. Reine Angew. Math. 517 (1999), 61-80.

[3] Sergey Galkin, Ludmil Katzarkov, Anton Mellit, Evgeny Shinder: *Minifolds and Phantoms*, arxiv:1305.4549.

[4] Sergey Galkin, Evgeny Shinder: *Exceptional collections of line bundles on the Beauville surface*, Advances in Mathematics 244 (2013), pages 1033-1050

[5] Sergey Galkin, Ludmil Katzarkov, Anton Mellit, Evgeny Shinder: *Minifolds and Phantoms*, arxiv:1305.4549.

[K] B. Klopsch, "Automorphisms of the Nottingham Group", Journal of Algebra Volume 223, Issue 1, 1 January 2000, Pages 37-56

[Pa] P. P. Palfy, "The number of conjugacy classes in some quotients of the Nottingham group", Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society (Series 2), Volume 41 , Issue 02 , June 1998, pp 369-384

[Po1] L. Positselski, *Coherent analogues of matrix factorizations and relative singularity categories*, arXiv:1102.0261.

[Po2] Leonid Positselski *Contraherent cosheaves,* arXiv:1209.2995, 105 pages.

[PP] Positselski, L., Polishchuk A., *Hochschild (co)homology of the second kind I*, Transactions of the American Mathematical Society, 364 (2012).

[R] Sergey Rybakov *DG-modules over de Rham DG-algebra*

[Ser2] J. P. Serre, "Groupes Pro-agebraiques", IHES, Publications Math., No. 7, 1990

[Win] J.- P. Wintenberger, *Extensions abeliennes et groupes d'automorphismes de corps locaux*, C. R. Acad. Sci. Paris Sr. A-B 290 (1980), no. 5, A201-A203.

# 6. Гиперкэлерова и гиперкомплексная геометрия

## 6.1. Теорема Торелли: история вопроса

Руджеро Торелли доказал свою знаменитую теорему в 1913-м году ([To]). Теорема Торелли позволяет восстановить кривую по ее якобиану, то есть по пространству первых когомологий с заданной на нем структурой Ходжа.

Теоремы типа Торелли ([W]) хорошо известны в алгебраической геометрии, и лежат в основе большинства явных конструкций пространства модулей. Говоря современным языком, теорема Торелли осуществляет биекцию между множеством деформаций комплексного многообразия и множеством классов изоморфизма структур Ходжа. Теорема Торелли, в самой сильной форме, доказана для тора и для К3 поверхностей, но в более общей ситуации (в частности, для гиперкэлеровых многообразий) имел место, в лучшем случае, локальный аналог этого утверждения.

Локальная теорема Торелли была доказана для К3 поверхности Г. Тюриной, Шафаревичем и Пятецким-Шапиро, ([Tj]), для общего гиперкэлерового многообразия руководителем ЛАГ Богомоловым ([B1]), а для многообразий Калаби-Яу – Богомоловым, Тианом и Тодоровым ([B2, Ti, Td2]). Этот результат лежит в основе зеркальной симметрии – плодотворного направления науки на стыке математики и струнной физики.

Не считая комплексных торов (для которых этот результат довольно прост, и известен со времен Зигеля), глобальная теорема Торелли была доказана только для К3 поверхностей и это считалось колоссальным достижением. Первооткрывателем глобальной теоремы Торелли для К3 является сотрудник ЛАГ Вик. С. Куликов, [K], доказавший ее в 1977-м году (частичные результаты были получены Бернсом и Раппопортом в 1975; [BR]) Впрочем, интенсивная работа над улучшением доказательства теоремы Торелли шла и после доказательства Куликова; доказательство теоремы Торелли для К3 превратилось в своего рода новый раздел математики ([Td1, Be, L, Si, M, F]).

До работы М. Вербицкого [V2], опубликованной в 2013 году, доказательство глобальной теоремы Торелли казалось невозможным, ибо для установления биекции между гиперкэлеровыми многообразиями и классами эквивалентности структур Ходжа было два препятствия. Во-первых, бимероморфно эквивалентные многообразия могут быть неизоморфны ([De]), но они всегда имеют одинаковые периоды, а пространство модулей бирациональных классов многообразий, вообще говоря, не существует. Во-вторых, существовали гиперкэлеровы многообразия, заведомо не бимероморфно эквивалентные, но имеющие одинаковые периоды и один и тот же деформационный класс ([Na, Ma2]).

В работе [V2], эти проблемы разрешаются следующим образом. Используя классические методы общей топологии, Вербицкий строит пространство Тейхмюллера бимероморфно эквивалентных деформаций гиперкэлерова многообразия, таким образом, что бимероморфное пространство модулей получается как его фактор по дискретной группе. Эта дискретная группа ("группа монодромии" в работах Э. Маркмана, [Ma1, Ma2]) посчитана явно с точностью до подгруппы конечного индекса. Для определения группы монодромии Вербицкий использовал теорему о группе автоморфизмов когомологий, полученную в [V1], фундаментальные результаты Д. Салливана, [Su].

Работа Вербицкого нашла широкое международное признание; на семинаре Бурбаки (июнь 2011, Париж) был представлен доклад Д. Хойбрехтса, "A Global Torelli theorem for hyperkähler manifolds [after M. Verbitsky]".

В 2013 работа Вербицкого была опубликована (Duke Math. J. Volume 162, Number 15 (2013), 2929-2986); в базе Google Scholar ссылки на эту статью встречаются 35 раз.

## 6.2. Теорема Торелли и ее применения

В работе сотрудника лаборатории М. Вербицкого "Ergodic complex structures on hyperkahler manifolds" [V3], развивающей разработанный подход к теоремам типа Торелли, был обнаружен качественно новый феномен теории пространств модулей. Оказалось, что группа классов диффеоморфизмов действует эргодично на пространстве Тейхмюллера комплексных структур для гиперкэлерова многообразия и тора. Этот факт позволил решить несколько важных гипотез о комплексной геометрии поверхностей K3 и гиперкэлеровых многообразий ([V3], [KLV]). Было доказано, что метрика Кобаяши на любой K3 поверхности равна нулю, и все гиперкэлеровы многообразия не гиперболичны по Кобаяши.

Сотрудники лаборатории Е. Америк и М. Вербицкий изучали деформации рациональных кривых на голоморфно симплектических многообразиях, и получили ряд результатов, с помощью которых доказали несколько важных фактов о кэлеровом конусе такого многообразия, в частности, обобщив известную ранее бирациональную версию гипотезы Каваматы-Моррисона на непроективный случай и получили доказательство гипотезы Каваматы-Моррисона для многообразий, являющихся деформациями схем Гильберта поверхностей типа K3. В настоящий момент их статья "Rational curves on hyperkaehler manifolds" находится на последней стадии редактирования.

## Литература

[Be] Beauville, Arnaud *Le theoreme de Torelli pour les surfaces $K3$: fin de la demonstration* Geometry of $K3$ surfaces: moduli and periods (Palaiseau, 1981/1982). Asterisque No. 126 (1985), 111-121.

[B1] Bogomolov, F. A. *Hamiltonian Kählerian manifolds.* Dokl. Akad. Nauk SSSR 243 (1978), no. 5, 1101-1104.

[B2] Bogomolov, F. A., *Kähler manifolds with trivial canonical class,* Preprint, Institut des Hautes Etudes Scientifiques (1981), 1-32.

[BR] Burns, Dan; Rapoport, Michael (1975), *On the Torelli problem for kählerian K-3 surfaces*, Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure. Quatrime Série 8 (2): 235-273.

[De] Debarre, O., *Un contre-exemple au théorème de Torelli pour les variétés symplectiques irréductibles,* C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 299 (1984), no. 14, 681–684.

[F] Friedman, Robert, *A new proof of the global Torelli theorem for $K3$ surfaces*, Ann. of Math. (2) 120 (1984), no. 2, 237-269.

[KLV] Ljudmila Kamenova, Steven Lu, Misha Verbitsky, *Kobayashi pseudometric on hyperkahler manifolds*, arXiv:1308.5667, 21 pages.

[K] V. Kulikov, *Degenerations of K3 surfaces and Enriques'surfaces,* Math. USSR Izvestiya, (1977), 957-989.

[L] E. Loojenga, *A Torelli theorem for Kähler-Einstein K3 surfaces*, Lecture Notes in Mathematics, 1981, Volume 894/1981, 107-112.

[Ma1] Markman, E., *On the monodromy of moduli spaces of sheaves on $K3$ surfaces*, J. Algebraic Geom. 17 (2008), no. 1, 29–99, arXiv:math/0305042.

[Ma2] Markman, E. *Integral constraints on the monodromy group of the hyperkahler resolution of a symmetric product of a K3 surface,* International Journal of Mathematics Vol. 21, No. 2 (2010) 169-223, arXiv:math/0601304.

[M] Morrison, David R. *Semistable degenerations of Enriques' and hyperelliptic surfaces*, Duke Math. J. 48 (1981), no. 1, 197-249.

[Na] Namikawa, Y., *Counter-example to global Torelli problem for irreducible symplectic manifolds*, Math. Ann. 324 (2002), no. 4, 841–845, arXiv:math/0110114.

[Si] Siu, Y.-T., *Every K3 surface is Kähler*, Invent. Math. 73 (1983), 139-150.

[Su] Sullivan, D., *Infinitesimal computations in topology*, Publications Mathématiques de l'IHÉS, 47 (1977), p. 269-331

[Ti] G. Tian, *Smoothness of the universal deformation space of compact Calabi-Yau manifolds and its Petersson-Weil metric*, in *Math. Aspects of String Theory*, S.-T. Yau, ed., Worlds Scientific, 1987, 629–646.

[Tj] Tjurina, G. N., *The space of moduli of a complex surface with $q = 0$ and $K = 0$.* In: "Algebraic Surfaces", Seminar Shafarevich, Proc. Steklov Inst. 75 (1965).

[Td1] Todorov, A. N. *Applications of the Kähler-Einstein-Calabi-Yau metric to moduli of K3 surfaces*, Inventiones Math. 6-1, 251-265 (1980).

[Td2] A. Todorov, *The Weil-Petersson geometry of the moduli space of $SU(n \geq 3)$ (Calabi-Yau) manifolds*, Comm., Math. Phys. **126** (1989), 325–346.

[To] Ruggiero Torelli, *Sulle varietà di Jacobi*, Rend. della R. Acc. Nazionale dei Lincei , (5), 22, 1913, 98-103.

[V1] Verbitsky, M., *Cohomology of compact hyperkähler manifolds and its applications,* GAFA vol. 6 (4) pp. 601-612 (1996).

[V2] M. Verbitsky, *A global Torelli theorem for hyperkahler manifolds*, Duke Math. J. Volume 162, Number 15 (2013), 2929-2986.

[V3] Misha Verbitsky, *Ergodic complex structures on hyperkahler manifolds*, arXiv:1306.1498, 22 pages.

[W] A. Weil (1957). *Zum Beweis des Torellischen Satzes,* Nachr. Akad. Wiss. Göttingen, Math.-Phys. Kl. IIa: 32-53.

# 7. Теория калибраций и голоморфные лагранжевы расслоения

## 7.1. Многообразия со специальной голономией

Последние 20 лет в алгебраической геометрии прошли под знаком все усиливающегося взаимодействия с теоретической физикой. Методы, пришедшие из физики (такие, как инварианты Сайберга-Уиттена и Зеркальная Симметрия) революционизировали наш способ думать о дифференциальной и алгебраической геометрии, и необратимо изменили подход математиков к их науке. Когда-то люди пользовались математикой для развития физики; сейчас, физика стала источником наиболее радикальных достижений.

Новая парадигма геометрии, возникшая в сотрудничестве с физиками на протяжении 1980-х и 1990-х, имеет дело двумя геометрическими объектами - расслоением спиноров и группой голономий.

Структура группы голономий и ее влияние на геометрию многообразия есть один из главных предметов римановой геометрии последних 50 лет. Ограниченная группа голономий, будучи подгруппой Ли ортогональной группы, очевидно компактна, а значит редуктивна, и действует, естественным образом, на касательмом пространстве многообразия. Де Рам доказал, либо эта группа неприводима, либо многообразие является симметрическим, либо универсальное накрытие многообразия является произведением римановых многообразий меньшей размерности. Неприводимые голономии были классифицированы Марселем Берже, который выписал список всех групп, которые могут быть быть группой голономий симметрического многообразия с неприводимой голономией. Этот список довольно короткий.

| Holonomy | Geometry |
|---|---|
| $SO(n)$ acting on $\mathbb{R}^n$ | Riemannian manifolds |
| $U(n)$ acting on $\mathbb{R}^{2n}$ | Kähler manifolds |
| $SU(n)$ acting on $\mathbb{R}^{2n}$, $n > 2$ | Calabi-Yau manifolds |
| $Sp(n)$ acting on $\mathbb{R}^{4n}$ | hyperkähler manifolds |
| $Sp(n) \times Sp(1)/\{\pm 1\}$ acting on $\mathbb{R}^{4n}$, $n > 1$ | quaternionic-Kähler manifolds |
| $G_2$ acting on $\mathbb{R}^7$ | $G_2$-manifolds |
| $Spin(7)$ acting on $\mathbb{R}^8$ | $Spin(7)$-manifolds |

В этом списке, два пункта (многообразия Калаби-Яу и гиперкэлеровы многообразия) возникают из алгебраической геометрии применением теоремы Калаби-Яу. В физике, ограничения голономии переводятся в дополнительные суперсимметрии струнных теорий; это один из источников появления гиперкэлеровых многообразий (и вообще алгебро-геометрических конструкций) в теории струн.

В 2013 году в журнале "Communications in Mathematical Physics " была опубликована статья М. Вербицкого (заместителя заведующего ЛАГ) "Pseudoholomorphic curves on nearly Kahler manifolds" [V7], где теорема Громова о компактности пространства модулей псевдоголоморфных кривых в симплектических многообразиях была обобщена на приблизительно кэлеровы многообразия (эйнштейновы многообразия, риманов конус которых имеет голономию $G_2$). Этот результат можно понимать как компактность пространства модулей однородных ассоциативных подмногообразий в соответствующем римановом конусе.

## 7.2. Калибрации на многообразиях

Теория калибраций была развита Харви и Лоусоном в работе [HL] в 1982-м году, и ныне занимает центральное место в дифференциальной геометрии и ее взаимодействии с теорией струн. Калибрация есть замкнутая форма на римановом многообразии, которая, если ее вычислить на поливекторе, будет меньше или равна, чем риманов объем этого поливектора. Подмногообразие является калиброванным, если калибрация, вычисленная на этом подмногообразии, всюду равна форме объема.

Легко видеть, что калиброванное многообразие всегда минимально. Впоследствии у теории калибраций нашлось еще одно приложение: с каждой калибрацией коразмерности 4 связана теория инстантонов, то есть расслоений, минимизирующих $L^2$-норму кривизны. Такие инстантоны играли важную роль в работах Дональдсона, Томаса, Тиана и Тао [DT], [T], [TT].

Теория калибраций играет важную роль в дифференциальной геометрии и ее приложениях к физике. За отчетный период, сотрудниками лаборатории была проведена работа по классификации калибраций на гиперкэлеровых многообразиях ([GV]), найдены существенно новые примеры калибраций и исследована геометрия калиброванных многообразий, которые оказались трианалитическими для одной серии калибраций, изотропными и коизотропными для другой. Эта конструкция также работает в применении к многообразиям с гиперкомплексной структурой, HKT-метрикой и тривиальным каноническим классом; это дает нетривиальные примеры калибраций на некэлеровых комплексных многообразиях. В этой ситуации новые классы калибраций особенно интересны, потому что они не параллельны относительно любой связности без кручения, а большинство известных калибраций параллельны относительно связности Леви-Чивита.

Новые калибрации, построенные Гранчаровым и Вербицким в работе [GV], интерпретируются там же в терминах кватернионной версии гипотезы Калаби-Яу. Эта гипотеза была предметом работы Алескера и Вербицкого [AV2], где изучалась кватернионная версия уравнения Монжа-Ампера и были доказаны $C^0$-оценки Яу и единственность решений.

Теория кватернионных уравнений Монжа-Ампера основывается на понятии кватернионной плюрисубгармонической функции, введенной в работе Алескера и Вербицкого [AV1] 2006-го года. Это понятие оказалось весьма полезным для решения задач комплексной алгебраической геометрии; так, в статье [V3], опубликованной за отчетный период, теория потенциала на гиперкэлеровых многообразиях применялась для изучения структуры прямого образа когерентных пучков. Результаты этой работы базировались на результатах по теории потенциала на комплексных многообразиях, полученных в статье [V4].

Важным примером калибрации является специальная лагранжева калибрация, исследованная в работе Харви и Лоусона. Эта калибрация, которая получается как вещественная часть единичной голоморфной формы объема на многообразии Калаби-Яу. Подмногообразия, которые калиброваны такой формой, всегда лагранжевы по отношению к симплектической форме, минимизируют объем и имеют нулевой вектор средней кривизны.

## 7.3. Геометрия специальных лагранжевых многообразий

В работе Томаса и Яу [TY] доказано, что специальные лагранжевы многообразия составляют нулевой слой отображения моментов для группы гамильтоновых диффеоморфизмов, действующих на бесконечном многообразии всех лагранжевых подмногообразий. Исходя из общей парадигмы симплектической редукции (в бесконечномерном случае эта парадигма не основана на теоремах, но может служить эвристическим обоснованием гипотез) это значит, что в общей (стабильной) орбите действия гамильтоновой группы всегда есть специальное лагбранжево подмногообразие. По контрасту, явных способов построения (и даже неявных доказательств существования) специальных лагранжевых подмногообразий практически не существует.

Единственный способ строить примеры специальных лагранжевых многообразий в замкнутых многообразиях происходит из гиперкэлеровой геометрии. Гиперкэлерово многообразие есть риманово многообразие с действием кватернионов, которое параллельно относительно связности Леви-Чивита. Из этого следует, что на гиперкэлеровом многообразии заданы комплексные структуры $I, J, K$, соответствующие образующим алгебры кватернинов. Как доказано еще Харви и Лоусоном, голоморфное лагранжево подмногообразие относительно $I$ является специальным лагранжевым относительно $J$.

Результатом такой конструкции является построение довольно узкого класса специально лагранжевых многообразий: общее специально лагранжево подмногообразие на гиперкэлеровом многообразии комплексной размерности больше 2, а приори, может оказаться не голоморфным относительно другой комплексной структуры.

В работе [GV] была построена новая калибрация на гиперкэлеровом многообразии, калиброванные многообразия которой - в точности голоморфные лагранжевы многообразия. Эта конструкция позволяет эффективно отличать голоморфные лагранжевы и специальные лагранжевы многообразия, интегрируя подходящие классы когомологий. Другими словами, задача различения широкого класса специальных лагранжевых многообразий и (вероятно) более узкого голоморфных лагранжевых сведена к топологической.

Интересно, что такая калибрация не нуждается в условии кэлеровости или голоморфной симплектичности, а может быть определена на любом гиперкомплексном многообразии.

Эта калибрация была использована в работе сотрудников лаборатории Солдатенкова и Вербицкого ([SV]), опубликованной в 2013 году. В этой работе из существования голоморфных лагранжевых расслоений на гиперкомплексном многообразии были выведены существенные ограничения на геометрию такого многообразия. В частности, доказано, что существование HKT-метрики на многообразии влечет существование кэлеровой метрики на базе лагранжевого слоения. Используя этот результат, Вербицкий и Солдатенков доказали несуществование HKT-структур на новом классе плоских гиперкомплексных многообразий, допускающих лагранжевы слоения. Это второй (после работы [BDV]) широкий класс гиперкомплексных многообразий, не допускающих HKT-метрики. Впервые такие многообразия были найдены в работе [FG], где был построен пример гиперкомплексного нильмногообразия, не допускающего HKT-метрики.

Другой подход к проблеме существования лагранжевых расслоений предоставлен новейшими исследованиями в бирациональной геометрии (Ю. Кавамата, Д. Мацушита, Ф. Кампана, Ж.-П. Демайи, Т. Петернелл). Как доказал Мацушита, каждое нетривиальное голоморфное отображение из гиперкэлерова многообразия либо конечно в общей точке, либо задано лагранжевым расслоением. Поэтому для построения лагранжевых расслоений достаточно найти полуобильное линейное расслоение, численная размерность которого не максимальна.

Гипотеза Кавамaты (abundance conjecture) есть утверждение о равенстве численной размерности численно эффективного линейного расслоения и его размерности Кодаиры. Эта гипотеза играет важную роль в бирациональной геометрии и теории минимальных моделей. В гиперкэлеровой ситуации, численно эффективные расслоения имеют численную размерность 0, $n$ и $2n$, что следует из результатов работы [V2]. В случае размерности 0, гипотеза Кавамaты тривиальна, для размерности $2n$ следует из голоморфных неравенств Морса, доказанных Демайи в середине 1980-х ([D1]). Соответственно, единственным нетривиальным случаем является случай численной размерности $n$.

Основным вопросом бирациональной геометрии гиперкэлеровых многообразий является следующая гипотеза, которая называется abundance conjecture или же SYZ-conjecture.

**Гипотеза:** Пусть $M$ – гиперкэлерово многообразие комплексной размерности $2n$,, а $L$ – численно эффективное расслоение численной размерности $n$ (такое расслоение называется *параболическим*). Тогда $L$ полуобильно.

Как видно из изложенного в следующем разделе, эта гипотеза имеет много приложений к физике и математике.

## 7.4. Гипотеза Стромингера-Яу-Заслова и связь с теорией струн

В работе [SYZ], Стромингер, Яу и Заслов предложили механизм возникновения зеркальной симметрии, связанный с теорией калибраций. Согласно их гипотезе, зеркально-симметричные многообразия Калаби-Яу снабжены двойственными лагранжевыми слоениями с одной и той же базой и слоями, состоящими (в гладких точках) из специальных лагранжевых торов. Эта гипотеза была развита Концевичем и Сойбельманом, которые описали широкий спектр применений гипотезы Стромингера-Яу-Заслова в физике и математике в работе [KZ]. Для гиперкэлеровых многообразий, постулируется гипотеза о существовании специальных лагранжевых расслоений, с базой в комплексном проективном пространстве половинной размерности. Такое расслоение позволяет реконструировать гиперкэлерово многообразие по набору комбинаторных и теоретико-представленческих данных, существенно облегчая решение трудной задачи классификации гиперкэлеровых многообразий.

Гипотеза Стромингера-Яу-Заслова в настоящий момент является одним из основных вопросов гиперкэлеровой геометрии. В работе [V5] в решении этой задачи сделан серьезный прогресс: была доказана эффективность параболического линейного расслоения, в том случае, когда это расслоение допускает гладкую метрику с неотрицательной кривизной.

В статье [V6], разбирается общий случай. В общей ситуации, параболическое расслоение всегда допускает метрику с неотрицательной кривизной, но такая метрика может быть особой. С применением полученных Демайи результатов об особенностях потоков на комплексных многообразиях (оценок на числа Лелонга и полученных из них результатов теории пересечения, см. [D2]) доказано, что гиперкэлерово многообразие, допускающее параболическое расслоение, обязательно содержит коизотропное подмногообразие.

В 2013 году эти методы нашли свое приложение в статье [CDV], написанной Ф. Кампаной и Ж.-П. Демайи совместно с заместителем руководителя ЛАГ М. Вербицким, где было доказано, что трехмерное компактное кэлерово многообразие, не содержащее нетривиальных кривых и дивизоров - это тор.

Геометрия лагранжевых расслоений до сих пор не вполне изучена. Так, в работе [V8] сотрудником ЛАГ М. Вербицким была построена нетривиальная деформация лагранжева расслоения над той же самом базой и с теми же самыми слоями. В теории эллиптических поверхностей такие семейства известны как семейства Тэйта-Шафаревича, но даже для эллиптических поверхностей К3 конструкция, приведенная Вербицким, является новой и неожиданной (в специальных случаях, "кривые Тэйта-Шафаревича" были построены Э. Маркманом в [Mar]).

В работе [AC], сотрудник ЛАГ Е. Америк совместно с Ф. Кампаной решает старую проблему А. Бовилля о расслоениях, ассоциированных с лагранжевыми торами. Бовилль предположил, что каждый лагранжев тор в гиперкэлеровом многообразии является слоем почти голоморфного лагранжева расслоения. Эта гипотеза была доказана Хуонгом и Вейсом в общей ситуации, но доказательство оказалось слишком техническим, и работа над поиском более концептуального аргумента все еще ведется. Америк и Кампана доказывают гипотезу Бовилля для неалгебраических гиперкэлеровых многообразий (как часто случается, геометрия неалгебраических многообразий здесь устроена проще, чем у алгебраических).

## Литература

[AV1] Semyon Alesker, Misha Verbitsky, *Plurisubharmonic functions on hypercomplex manifolds and HKT-geometry,* arXiv:math/0510140, J. Geom. Anal. 16 (2006), no. 3, 375–399.

[AV2] S. Alesker, M. Verbitsky, *Quaternionic Monge-Ampere equation and Calabi problem for HKT-manifolds*, Israel J. Math. 176 (2010), 109-138.

[AC] Ekaterina Amerik, Frédéric Campana, *On families of lagrangian tori on hyperkaehler manifolds*, arXiv:1303.0613

[BDV] Maria L. Barberis, Isabel G. Dotti, Misha Verbitsky, *Canonical bundles of complex nilmanifolds, with applications to hypercomplex geometry*, arXiv:0712.3863, Math. Res. Lett. 16 (2009), no. 2, 331-347.

[CDV] Frédéric Campana, Jean-Pierre Demailly, Misha Verbitsky, *Compact Kähler 3-manifolds without non-trivial subvarieties*, arXiv:1304.7891.

[D1] J.-P. Demailly, *Holomorphic Morse inequalities*, Several complex variables and complex geometry, Part 2 (Santa Cruz, CA, 1989), 93–114, Proc. Sympos. Pure Math., 52, Part 2, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1991.

[D2] Demailly, Jean-Pierre, *Regularization of closed positive currents and Intersection Theory,* J. Alg. Geom. **1** (1992) 361-409

[DT] S. K. Donaldson and R. P. Thomas, *Gauge theory in higher dimensions*, in The Geometric Universe (Oxford, 1996), Oxford Univ. Press, Oxford, 1998, 31-47.

[FG] Fino, A., Grantcharov, G., *On some properties of the manifolds with skew-symmetric torsion and holonomy SU(n) and Sp(n)*, math.DG/0302358, Adv. Math. 189 (2004), no. 2, 439–450.

[GHR] Gates, S. J., Jr.; Hull, C. M.; Roček, M., *Twisted multiplets and new supersymmetric nonlinear $\sigma$-models*, Nuclear Phys. B 248 (1984), no. 1, 157–186.

[GV] Gueo Grantcharov, Misha Verbitsky, *Calibrations in hyperkahler geometry*, arXiv:1009.1178, 31 pages.

[Gu] Gualtieri, M., *Generalized complex geometry*, Oxford University Ph. D. thesis, 107 pages, math.DG/0401221

[HL] R. Harvey, B. Lawson, *Calibrated geometries*, Acta Math. **148** (1982), 47-157.

[KZ] Maxim Kontsevich, Yan Soibelman, *Homological mirror symmetry and torus fibrations*, arXiv:math/0011041, Symplectic geometry and mirror symmetry (Seoul, 2000), World Sci. Publishing, River Edge, NJ, 2001, pp. 203-263.

[Mar] Eyal Markman, *Lagrangian fibrations of holomorphic-symplectic varieties of $K3^{[n]}$-type*, arXiv:1301.6584, 34 pages.

[SV] Andrey Soldatenkov, Misha Verbitsky, *Holomorphic Lagrangian Fibrations on Hypercomplex Manifolds*, Int Math Res Notices (2013), doi: 10.1093/imrn/rnt218 (October 31, 2013).

[SYZ] A. Strominger, S.-T. Yau, and E. Zaslow, *Mirror Symmetry is T -duality,* Nucl. Phys. B479, (1996) 243-259.

[TT] Tao, T., Tian, G., *A singularity removal theorem for Yang-Mills fields in higher dimensions*, J. Amer. Math. Soc. 17 (2004), no. 3, 557–593, math.DG/0209352

[T] Tian, G., *Gauge theory and calibrated geometry, I*, math.DG/0010015, 76 pages, Ann. of Math., (2) 151 (2000), no. 1, 193-268.

[TY] R. P. Thomas and S.-T. Yau, *Special Lagrangians, stable bundles and mean curvature flow*, Comm. Anal. Geom. 10 (2002), no. 5, 1075-1113.

[V1] Verbitsky, M., *Hyperholomorphic bundles over a hyperkähler manifold*, Journ. of Alg. Geom., **5** no. 4 (1996) pp. 633-669.

[V2] Verbitsky, M., *Cohomology of compact hyperkähler manifolds and its applications,* GAFA vol. 6 (4) pp. 601-612 (1996).

[V3] Verbitsky, M., *Positive forms on hyperkahler manifolds*, arXiv:0801.1899, Osaka J. Math. Volume 47, Number 2 (2010), 353-384.

[V4] Verbitsky, M., *Plurisubharmonic functions in calibrated geometry and q-convexity*, arXiv:0712.4036, Math. Z., Vol. 264, No. 4, pp. 939-957 (2010)

[V5] Verbitsky, M., *Hyperkahler SYZ conjecture and semipositive line bundles*, arXiv:0811.0639, GAFA 19, No. 5, 1481-1493 (2010)

[V6] Verbitsky, M., *Parabolic nef currents on hyperkaehler manifolds*, arXiv:0907.4217

[V7] Misha Verbitsky, *Pseudoholomorphic curves on nearly Kahler manifolds*, Communications in Mathematical Physics November 2013, Volume 324, Issue 1, pp 173-177.

[V8] Misha Verbitsky, *Degenerate twistor spaces for hyperkahler manifolds*, 20 pages, arXiv:1311.5073

# 8. Локально конформно кэлеровы многообразия

Локально конформно кэлеровы (LCK) многообразия были известны начиная с 1950-х годов, но систематическое изучение LCK-структур было начато Изу Вайсманом в конце 1970-х. В первой из его работ на эту тему ([Va]), Вайсман отмечает, что хорошо известные многообразия Хопфа являются локально конформно кэлеровыми. Впоследствии (как следует из результатов Ф. Бельгуна, см. [OV2], [Be]) было доказано, что любая некэлерова поверхность, кроме одной из трех поверхностей Инуэ и (возможно) некоторых поверхностей класса VII, является локально конформно кэлеровой.

Наконец, в работе М. Брунелла [Br] LCK-метрики были построены на поверхностях класса VII, допускающих глобальную сферическую оболочку. Согласно знаменитой гипотезе Като (доказанной в большом числе случаев), все поверхности класса VII допускают глобальную сферическую оболочку, кроме поверхностей Инуэ. Если гипотеза Като верна, то все некэлеровы поверхности, кроме одной из трех поверхностей Инуэ, являются локально конформно кэлеровыми.

В размерности больше 2, классификация LCK-многообразий отсутствует, но эта область бурно развивается, ибо имеет много приложений к физике, дифференциальной геометрии, теории инстантонов, обобщенной кэлеровой геометрии и классификации комплексных многообразий.

## 8.1. Вайсмановы многообразия и многообразия с потенциалом

Изу Вайсман в работах по комплексной дифференциальной геометрии многообразий Хопфа определил новый класс локально конформно кэлеровых мнгообразий, как ему казалось, более широкий, назвав их обобщенными многообразиями Хопфа. Впоследствии оказалось, что не все многообразия Хопфа принадлежат к этому классу, и сейчас "обобщенные многообразия Хопфа" называются **вайсмановыми**.

Вайсмановы многообразия проще всего охарактеризовать, используя теорему Орнеа и Камишимы из статьи [KO]: это локально конформно кэлерово многообразие, снабженные голоморфным действием группы $\mathbb{C}$, которая действует нетривиальными гомотетиями на кэлеровом накрытии многообразия.

В работе [OV1] был построен более широкий класс локально конформно кэлеровых многообразий (“LCK-многообразия с автоморфным потенциалом”), включающий в себя все многообразия Хопфа и все многообразия Вайсмана. Для каждого LCK-многообразия $M$ с автоморфным потенциалом, было построено комплексное вложение в многообразие Хопфа, которое будет вайсмановым тогда и только тогда, когда $M$ вайсманово. Также было доказано, что комплексное подмногообразие LCK-многообразия с автоморфным потенциалом это LCK-многообразие с автоморфным потенциалом, и этот класс многообразий замкнут относительно небольших деформаций.

В работе Ливиу Орнеа и сотрудника ЛАГ М. Вербицкого [OV3], опубликованной в 2013 году, была получена новая характеризация LCK-многообразий с потенциалом, аналогичная характеризации вайсмановых многообразий через действие голоморфных гомотетий. Оказывается, что LCK-многообразие, на котором $\mathbb{R}$ действует голоморфными конформными преобразованиями, которые поднимаются до неизометричных гомотетий накрытия, всегда допускают автоморфный потенциал. Это дает обобщение работы Камишимы-Орнеа, и новое концептуальное доказательство весьма трудной теоремы, полученной этими авторами.

## 8.2. Алгебраическая геометрия некэлеровых комплексных многообразий

Автоморфный потенциал на LCK-многообразиях легко использовать для изучения алгебраической геометрии таких многообразий. В работе [Ve], где впервые был выписан LCK-потенциал на вайсмановом многообразии, его существование использовалось для доказательство того, что любое подмногообразие вайсманова многообразия – снова вайсманово.

Оказывается, что существование потенциала на вайсмановом многообразии влечет существование точной псевдо-эрмитовой формы, все собственные значения которой, кроме одного, положительны, а одно зануляется.

Согласно общей философии, восходящей к Харви и Лоусону, ([HL]), некэлеровость комплексных многообразий всегда можно охарактеризовать в терминах положительности точных форм или потоков. То есть в существовании положительной, точной формы на вайсмановом многообразии нет ничего удивительного.

В работе [PUV], написанной в 2013 году Пановым, Устиновским и сотрудником ЛАГ Вербицким, эта логика была применена к классу комплексных многообразий, которые называются "многообразия угла-момента". Эти многообразия являются обобщениями многообразий Хопфа, и, как и у вайсмановых многообразий Хопфа, у многообразий угла-момента есть положительная, точная 2-форма. Из этого Пановым, Устиновским и Вербицким было выведено, что все комплексные подмногообразия общих многообразий угла-момента – снова многообразия угла-момента.

Алгебраическая геометрия LCK-многообразий исследована весьма мало. В работе [OVV], опубликованной в 2013-м году Орнеа, Вулетеску и сотрудником ЛАГ Вербицким, исследуется бирациональная геометрия LCK-многообразий. Было доказано, что если раздутие LCK-многообразия – снова LCK-многообразие, то центр раздутия кэлеров. Из этого следует, среди прочего, что раздутие вайсманова многообразия может быть локально конформно кэлеровым, только если центр раздутия - конечное множество.

## Литература


[Be] F.A. Belgun, *On the metric structure of non-Kähler complex surfaces*, Math. Ann. **317** (2000), 1–40.

[Br] Marco Brunella, *Locally conformally Kaehler metrics on Kato surfaces*, arXiv:1001.0530

[HL] R. Harvey and H. B. Lawson, *"An intrinsic characterisation of Kähler manifolds,"* Invent. Math 74 (1983) 169-198.

[KO] Y. Kamishima and L. Ornea, *Geometric flow on compact locally conformally Kahler manifolds*, Tohoku Math. J. **57** (2005), 201–221, arxiv:math/0105040.

[OV1] Ornea, Liviu; Verbitsky, Misha, *Locally conformal Kähler manifolds with potential,* Math. Ann. 348 (2010), no. 1, 25-33.

[OV2] Liviu Ornea, Misha Verbitsky, *A report on locally conformally Kähler manifolds*, arXiv:1002.3473, 14 pages.

[OV3] Liviu Ornea, Misha Verbitsky *Locally conformally Kahler manifolds admitting a holomorphic conformal flow* Mathematische Zeitschrift, Volume 273, Issue 3 (2013), Page 605-611.

[OVV] Liviu Ornea, Misha Verbitsky, Victor Vuletescu. *Blow-ups of locally conformally Kahler manifolds*, Int. Math. Res. Not. IMRN 2013, no. 12, 2809-2821

[PUV] Taras Panov, Yuri Ustinovsky, Misha Verbitsky, *Complex geometry of moment-angle manifolds*, 24 pages, arXiv:1308.2818

[Va] Vaisman, Izu, *On locally conformal almost Kähler manifolds,* Israel J. Math. 24 (1976), no. 3-4, 338-351.

[Ve] Verbitsky, M., *Vanishing theorems for locally conformal hyperkaehler manifolds*, Proc. Steklov Inst. Math. **246** (2004) 54–78

# 9. Программа минимальных моделей, многообразия Фано и группа Кремоны

## 9.1. Подгруппы в группе Кремоны

После появления фундаментальной работы [DI09], где была завершена классификация конечных подгрупп в двумерной группе Кремоны, возник естественный вопрос о многомерных обобщениях. Многомерный этап начался с работы [Pro12]. Эта работа пробудила интерес к исследованиям в этой области (в связи с классификационными вопросами [CSar], [CS12], проблемами рациональности [Bea12], [Bea12], и с вычислениями существенной размерности групп [Dun10], [Bea11]).

Говорят, что группа $\Gamma$ обладает свойством Жордана, если существует такая константа $J$, зависящая только от группы $\Gamma$, что во всякой конечной подгруппе $G$ группы $\Gamma$ найдется нормальная абелева подгруппа $A$ индекса $[G : A]$, не превосходящего $J$ (неформально говоря, все конечные подгруппы группы $\Gamma$ "почти абелевы"). Наименьшая константа $J$ с таким свойством называется константой Жордана группы $\Gamma$. Свойство Жордана изучалось в классических теоретико-групповых работах для групп $GL_n(\mathbb{C})$ и других алгебраических групп. Недавно Ж.-П. Серр предположил, что оно также выполняется для многих групп бирациональных автоморфизмов. Также он доказал это свойство для группы Кремоны ранга 2, то есть для группы бирациональных автоморфизмов проективной плоскости [Ser09]. После этого Ю.Г. Зархин [Zar10] привел пример поверхности с нежордановой группой бирациональных автоморфизмов, а В.Л. Попов [Pop11] классифицировал все поверхности, группы бирациональных автоморфизмов которых обладают свойством Жордана. Отвечая на вопрос Ж.-П.Серра, Ю.Г.Прохоров и К.А.Шрамов [PS12a] доказали свойство Жордана для группы бирациональных автоморфизмов трехмерного проективного пространства, и, более общо, проверили это свойство для группы бирациональных автоморфизмов проективного пространства произвольной размерности по модулю стандартной гипотезы об ограниченности многообразий Фано с терминальными особенностями. Они также получили оценку на константу Жордана для группы бирациональных автоморфизмов трехмерного проективного пространства. Точное значение этой константы, а также значение ее мультипликативного аналога, остается неизвестным. Наконец, они доказали [PS12b] (по модулю той же стандартной гипотезы), что для многообразия $X$ произвольной размерности группа бирациональных автоморфизмов $\mathrm{Bir}(X)$ является жордановой за возможным исключением тех случаев, когда многообразие $X$ одновременно является унилинейчатым и имеет ненулевую иррегулярность. Точные геометрические условия, позволяющие по многообразию $X$ установить жордановость группы $\mathrm{Bir}(X)$, остаются неизвестными. В той же работе [PS12b] Ю.Г.Прохоров и К.А.Шрамов дали ответ на другой вопрос Ж.П. Серра об ограниченности конечных подгрупп в группах автоморфизмов конечно порожденных полей.

В совместной работе Ю. Прохорова и Ф. Богомолова найден инвариант $H^1(G, \mathrm{Pic}(X)$, отличающий стабильную сопряженность конечных подгрупп в группах Кремоны [4]. Вычислено значение этого инварианта в двумерном случае. В частности, доказано, что "почти все" подгруппы в группе Кремоны плоскости не являются стабильно линеаризуемыми [Pro13b].

Получена (грубая) классификация элементов порядка 2 [Про13а] и точная оценка для ранга элементарных абелевых 2-подгрупп в пространственной группе Кремоны [Pro13a] (Ю. Прохоров).

## 9.2. Автоморфизмы аффинных многообразий

Автоморфизмы аффинных многообразий – очень сложный объект, они изучались многими математиками, но до настоящего времени не сформировано хорошей техники работы с ними. Одним из простейших примеров аффинного многообразия является конус над неособым проективным многообразием $Y \subset \mathbb{P}^n$. В этом случае группа автоморфизмов конуса бесконечномерна тогда и только тогда, когда на нем имеется эффективное действие одномерной унипотентной группы $\mathbb{C}^+$. За отчетный период сотрудником лаборатории опубликована работа [KPZ13] (в соавторстве с М. Зайденбергом и Т. Кишимото), где получен геометрический критерий существования эффективного действия группы $\mathbb{C}^+$ на обобщенных конусах в терминах базисного многообразия $Y \subset \mathbb{P}^n$: многообразие $Y$ должно содержать цилиндрическое аффинное подмножество, для которого дивизор поляризации распределен на границе.

Наиболее интересен случай, когда $Y$ – многообразие Фано (или поверхность дель Пеццо) с антиканонической поляризацией. Известно, что поверхности дель Пеццо обладают таким цилиндром. В работах [KPZ14], [CPW13], [Che13][1] доказывается, что, наоборот, поверхности дель Пеццо степени $\leq 3$ не могут содержать антиканонически поляризованного цилиндра.

## 9.3. Многообразия Фано с особенностями

Классифицированы особые трехмерные многообразия Фано большого индекса и степени (Ю. Прохоров [Про13b]). Опубликованы результаты, анонсированные в предыдущем отчете, о классификации трехмерных особых G-многообразий Фано (многообразий Фано с "большим числом симметрий") двух типов: с числом Пикара $\geq 2$ и индекса Фано $\geq 2$ (Ю. Прохоров [Pro13c], [Pro13d]).

## 9.4. Особенности трехмерных экстремальных окрестностей рациональных кривых

Трехмерная экстремальная окрестность рациональной кривой – это росток $(X, C)$ трехмерного комплексного пространства вдоль неособой рациональной кривой такой, что многообразие $X$ имеет лишь терминальные особенности, антиканонический дивизор $-K_X$ обилен и имеется морфизм-стягивание $f : X \to Z$, для которого кривая $C$ – является слоем. Изучение (и классификация) экстремальных окрестностей очень важны для эффективного применения теории минимальных моделей (например, в программе Саркисова). Она была начата в работе С. Мори [Mor88], за которую он получил филдсовскую медаль, и продолжена в серии работ. В течение отчетного периода сотрудником Лаборатории Ю. Прохоровым совместно с С. Мори было продолжено изучение экстремальных окрестностей типа (IIA). Готовится публикация.

## 9.5. Рациональность полей инвариантов

Классическая проблема Э. Нётер (связанная с обратной задачей теории Галуа) спрашивает рационально ли фактормногообразие $V/G$ аффинного (или проективного) пространства по конечной линей ной группе $G$. Во многих случаях ответ положителен (см., напр., [Pro10]). С другой стороны, бирациональный инвариант, открытый Богомоловым в конце 1980-х

[1] Пересечение с группой Вани

– так называемая неразветвленная группа Брауэра, позволяет доказать нерациональность $V/G$ во многих случаях [Бог89]. В настоящее время проблема Э. Нётер далека от своего полного решения. Поэтому наиболее интересными являются случаи малой размерности. Проблема также связана с другой фундаментальной проблемой бирациональной геометрии – найти инварианты, отличающие унирациональные многообразия от рациональных.

А. Трепалиным исследован вопрос рациональности факторов поверхностей дель Пеццо по конечным группам автоморфизмов над алгебраически незамкнутыми полями характеристики 0. Выявлены все случаи, когда фактор может не быть рациональным над основным полем. В случае нерациональности выявлены условия, при которых она достигается, и построены гладкие минимальные модели фактора. Исследована бирациональная классификация факторов расслоения на коники. Показано, что всякий такой фактор бирационально эквивалентен фактору некоторого расслоения на коники по одной из явно заданного перечня групп. Построена бесконечномерная серия нерациональных факторов рациональных расслоений на коники. Полученные результаты позволяют классифицировать конечные подгруппы двумерной группы Кремоны над алгебраически незамкнутыми полями характеристики 0. Опубликована работа [Tre14], где доказывается, что фактор проективной плоскости по конечной подгруппе автоморфизмов всегда рационален над произвольным полем характеристики 0.

## Курсы лекций

За отчетный период сотрудником Ю. Прохоровым лаборатории были подготовлены записки лекций “Рациональные поверхности”, читавшихся в НОЦ МИАН. Электронная версия курса будет размешена на сайте МИАН.

## Данные о всех научных конференциях, симпозиумах и т.д.

1) Workshop on Algebraic Geometry, 22-24 May, 2013, Imperial College, London

   Доклад: “On threefold extremal contractions” https://sites.google.com/site/londonag2013/home

2) Symposium on Projective Algebraic Varieties and Moduli, February 18 - 21, 2013, Yeosu, Korea

   Приглашенный доклад: “Cylindricity of Fano varieties”

   http://www.math.snu.ac.kr/~kiem/2013algebraic

3) Workshop on Algebra Combinatorics Dynamics and Applications, September 2-5, 2013, Belfast, UK

   Доклад: “Jordan property for groups of birational selfmaps”

   http://sites.google.com/site/algebrabelfast2010/algebrabelfast2013

4) “Birational geometry and Galois groups”, June 10-14, 2013, University of Edinburgh, UK

   Доклад: “On stable conjugacy of finite subgroups of the plane Cremona group”

   http://www.maths.ed.ac.uk/cheltsov/fedya

5) Edge Days, June 7-9, 2013, University of Edinburgh, UK

   Доклад: “$G$-Fano threefolds and Cremona groups”

   http://www.maths.ed.ac.uk/cheltsov/edge2013/index.html

6) Ежегодная мемориальная конференция памяти Андрея Николаевича Тюрина, 28 октября 2013 г., МИАН, г. Москва

   Доклад: “Свойство цилиндричности для многообразий Фано”

   http://www.mathnet.ru/php/presentation.phtml?presentid=7818

7) Workshop “Quantum and motivic cohomology, Fano varieties and mirror symmetry”, Euler Institute, St. Petersburg, 26-28 September, 2013

   Доклад: “Automorphisms of Fano varieties and Cremona groups”

   http://www.lektorium.tv/lecture/?id=14673

8) Международная конференция, посвященная 90-летию академика Игоря Ростиславовича Шафаревича, 3-5 июня 2013 г., МИАН, г. Москва

   Доклад: "О стабильной эквивалентности подгрупп группы Кремоны"

   `http://www.mathnet.ru/php/presentation.phtml?presentid=6882`

9) "Special Program in Algebraic Geometry and Representation Theory", National Taiwan University, Taipei

   Серия лекций: "Minicourse on G-varieties", May 1-8, 3 lectures, 6 hours.

   `http://www.math.ntu.edu.tw/~ctsdev/download/activity/minicourse%20yuri.pdf`

10) Международная конференция «Геометрия алгебраических многообразий», посвященная памяти В. А. Исковских (22-25 октября 2013 г., МИАН, г. Москва)

    Организатор.

    `http://iskovskikh2013.mi.ras.ru`

## Литература

[Bea11] A. Beauville. On finite simple groups of essential dimension 3. *ArXiv e-prints*, 1101.1372, 2011.

[Bea12] Arnaud Beauville. Non-rationality of the symmetric sextic Fano threefold. In *Geometry and arithmetic*, EMS Ser. Congr. Rep., pages 57–60. Eur. Math. Soc., Zürich, 2012.

[BP13] F. Bogomolov and Yu. Prokhorov. On stable conjugacy of finite subgroups of the plane Cremona group, I. *Cent. European J. Math.*, 11(12):2099–2105, 2013.

[Che13] Ivan Cheltsov. Del pezzo surfaces and local inequalities. *arXiv*, 1311.5260, 2013.

[CPW13] I. Cheltsov, J. Park, and J. Won. Affine cones over smooth cubic surfaces. *ArXiv e-print*, 1303.2648, 2013.

[CS12] Ivan Cheltsov and Constantin Shramov. Three embeddings of the Klein simple group into the Cremona group of rank three. *Transform. Groups*, 17(2):303–350, 2012.

[CSar] Ivan Cheltsov and Constantin Shramov. Five embeddings of one simple group. *Trans. Amer. Math. Soc.*, to appear. ArXiv e-print 0910.1783.

[DI09] Igor V. Dolgachev and Vasily A. Iskovskikh. Finite subgroups of the plane Cremona group. In *Algebra, arithmetic, and geometry: in honor of Yu. I. Manin. Vol. I*, volume 269 of *Progr. Math.*, pages 443–548. Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 2009.

[Dun10] Alexander Duncan. Essential dimensions of $A_7$ and $S_7$. *Math. Res. Lett.*, 17(2):263–266, 2010.

[KPZ13] T. Kishimoto, Yu. Prokhorov, and M. Zaidenberg. $\mathbf{G}_a$-actions on affine cones. *Transformation Groups*, 18(4):1137–1153, 2013. ArXiv e-print 1212.4249.

[KPZ14] T. Kishimoto, Yu. Prokhorov, and M. Zaidenberg. Unipotent group actions on del Pezzo cones. *Algebraic Geometry*, 1(1):46–56, 2014.

[Mor88] Shigefumi Mori. Flip theorem and the existence of minimal models for 3-folds. *J. Amer. Math. Soc.*, 1(1):117–253, 1988.

[Pop11] Vladimir L. Popov. On the Makar-Limanov, Derksen invariants, and finite automorphism groups of algebraic varieties. In *Peter Russell's Festschrift, Proceedings of the conference on Affine Algebraic Geometry held in Professor Russell's honour, 1–5 June 2009, McGill Univ., Montreal.*, volume 54 of *Centre de Recherches Mathématiques CRM Proc. and Lect. Notes*, pages 289–311, 2011.

[Pro10] Yuri Prokhorov. Fields of invariants of finite linear groups. In *Cohomological and geometric approaches to rationality problems*, volume 282 of *Progr. Math.*, pages 245–273. Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 2010.

[Pro12] Yu. Prokhorov. Simple finite subgroups of the Cremona group of rank 3. *J. Algebraic Geom.*, 21(3):563–600, 2012.

[Pro13a] Yu. Prokhorov. 2-elementary subgroups of the space Cremona group. *ArXiv e-print*, 1308.5628, 2013. to appear in "Groups of Automorphisms in Birational and Affine Geometry", Springer Proceedings in Mathematics and Statistics.

[Pro13b] Yu. Prokhorov. On stable conjugacy of finite subgroups of the plane Cremona group, II. *ArXiv e-print*, 1308.5698, 2013.

[Pro13c] Yuri Prokhorov. G-Fano threefolds, I. *Adv. Geom.*, 13(3):389–418, 2013.

[Pro13d] Yuri Prokhorov. G-Fano threefolds, II. *Adv. Geom.*, 13(3):419–434, 2013.

[PS12a] Yuri Prokhorov and Constantin Shramov. Jordan property for Cremona groups. *ArXiv e-print*, 1211.3563, 2012.

[PS12b] Yuri Prokhorov and Constantin Shramov. Jordan property for groups of birational selfmaps. *ArXiv e-print*, 1307.1784, 2012.

[Ser09] Jean-Pierre Serre. A Minkowski-style bound for the orders of the finite subgroups of the Cremona group of rank 2 over an arbitrary field. *Mosc. Math. J.*, 9(1):193–208, 2009.

[Tre14] A. S. Trepalin. Rationality of the quotient of $\mathbf{P}^2$ by finite group of automorphisms over arbitrary field of characteristic zero. *Cent. European J. Math.*, 12(2):229–239, 2014.

[Zar10] Yuri G. Zarhin. Theta groups and products of abelian and rational varieties. *arXiv:math*, 1006.1112, 2010.

[Бог89] Ф. А. Богомолов. Группы Брауэра полей инвариантов алгебраических групп. *Матем. сб.*, 180(2):279–293, 1989.

[Про13a] Ю. Г. Прохоров. О бирациональных инволюциях $\mathbf{P}^3$. *Изв. РАН. Сер. матем.*, 77(3):199–222, 2013.

[Про13b] Ю. Г. Прохоров. Трехмерные многообразия Фано большого индекса Фано и большой степени. *Матем. сб.*, 204(3):43–78, 2013.

# 10. Комплексная геометрия многообразий Фано

Построены пространства модулей моделей Ландау–Гинзбурга для гладких трехмерных многообразий Фано (см.[30] и [33]) и начато их описание и изучение связи их геометрии и арифметики с геометрией исходных многообразий ([10], В.В. Пржиялковский совместно с Ч. Дораном, Л. Кацарковым, Дж. Льюисом и А. Хардером).

Построен пример дерева проекций, связывающих гладкие трехмерные многообразия Фано ([26]). Построен граф проекций (базовых линков) и кластерных преобразований, связывающий гладкие трехмерные многообразия Фано. Начато построение графа взвешенных раздутий и кластерных преобразований, связывающий такие многообразия. На основе этих построений выдвинут ряд гипотез о связи зеркальной симметрии и бирациональной геометрии (В.В. Пржиялковский совместно с А. Каспрчиком, Л. Кацарковым и Д. Саковичем).

В [32] построены компактификации моделей Ландау–Гинзбурга для полных пересечений, предложенных Хори и Вафой (см. [31]). Показано, что число компонент центрального слоя на еденицу больше крайнего центрального числа Ходжа (В.В. Пржиялковский совместно с К.А. Шрамовым).

Закончена работа [1] о динамическом принципе Хассе и динамическом препятствии Брауэра-Манина (Е. Америк совместно с П. Курлберг, Х. Нгуен, А. Таусли, Б. Вирай и Ф. Волох). А именно, сделаны эвристические оценки, предсказывающие, что динамический принцип Хассе не выполнен, зато его невыполнение полностью объясняется препятствием Брауэра-Манина, кроме некоторых очень специальных случаев (где размер орбит при редукции в конечную характеристику ненормально велик, как при сдвиге на единицу на проективной прямой). Также при помощи -адической униформизации орбит получены некоторые результаты в случае неразветвленных отображений (например, автоморфизмов).

Доказано что гладкие неособые кубические поверхности не содержат антиканонически поляризованных цилиндров (см. [5]). Как сделствие было получено отсутствие действия аддитивной группы на естественных аффиных конусах над этими поверхностями (И.А.Чельцов совместно Дж. Парком и Дж. Воном), что дало отрицательный ответ на вопрос Зайденберга и Фленнера в [18]. Позднее Чельцов получил более простое доказательства этого утверждения в работе [3].

Полностью решена задача о антиканонически поляризованных цилиндрах на поверхностях дель Пеццо с дювалевскими особенносями (И. Чельцов совместно Дж. Парком и Дж. Воном). А именно, в работе [6] показано что все поверхности дель Пеццо с такими особенностями имеют антиканонически поляризованные цилиндры только в следующих случаях: антиканоническая степень поверхности больше 4, антиканоническая степень поверхности равна 3 и поверхность особа, антиканоническая степень поверхности равна 2 и поверхность имеет особую точку хуже чем обыкновенная двойная точка, антиканоническая степень поверхности равна 1 и поверхность имеет особую точку отличную от особых точек типа $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{A}_2$, $\mathbf{A}_3$ и $\mathbf{D}_4$. В гладком случае это было доказано ранее Зайденбергом, Кишимото и Прохоровым в работе [21] для всех гладких поверхностей дель Пеццо степени не равной 3, и Парком, Воном и Чельцовым в работе [5] для кубических поверхностей.

Доказана бирациональная жесткость всех квазигладких трехмерных поверхностей Фано с терминальными и $\mathbf{Q}$-факториальными особенностями, чье антиканоническое кольцо является гиперповерхностью (И. Чельцовым совместно с Дж. Парком). В работах [34] и [19] были найдены ровно 95 семейств трехмерных многообразий Фано с такими свойствами (теперь они называются “гиперповерхности Рида-Флетчера”). Позднее Корти, Пухликов и Рид исследовали бирациональную геометрию этих гиперповерхностей в работе [15]. Они показали, что в общем случае (когда гиперповерхность предполагается общей в своем семействе) все такие гиперповерхности бирационально жесткие. Этот результат обобщал классическую теорему Исковских и Манина о нерациональности трехмерных квартик (см. [25]). Еще для одного семейства из этих 95, бирациональная жесткость была показана ранее Исковских в работе [24] (для неособых гиперповерхностей в $\mathbf{P}(1,1,1,1,3)$ степени 6). Результаты Исковских и Манина верны без предположения общности. В работе [15], Корти, Пухликов и Рид высказали гипотезу что все квазигладкие гиперповерхности в этих 95 семействах также являются бирационально жесткими. Без условия квазигладскости это утверждение неверно (существует много контр-примеров, построенных в [15]). Чельцов и Парк доказали их гипотезу в работе [4].

Чельцовым и Шрамовым были исследованы классы сопряженности икосаэдральной подгруппы в круппе Кремоны ранга 3. Аналогичный вопрос для группы Кремоны ранга 2 полностью решен Долгачевым и Исковских в работе [16] (для группа Кремоны ранга 1 вопрос тривиален, а ответ на него следует из теории представлений). Чельцов и Шрамов показали, что трехмерное гладкое многообразие Фано степени 5 и индекса два (см. свойства этого многообразия в [20]) является $G$-бирационально жествим, где $G$ это группа икосаэдра. Как следствие, соответствующее вложение икосаэдральной группы в группу кремоны ранга три не сопряжено никакому другому вложению, которое индуцированно действием группы икосаэдра на любом расслоении Мори отличном от трехмерного гладкого многообразия Фано степени 5 и индекса 2. Этот результат продолжает исследования классов сопряженности конечных простых подгрупп группы Кремоны ранга 3, начатой Чельцовым и Шрамовым в работах [7] и [8], где аналогичная задача была рассмотрена для простых групп $\mathrm{A}_6$ и $\mathrm{PSL}_2(\mathbf{C})$. Для неабелевых конечных простых групп большего порядка вопрос о классах сопряженности полностью решен Прохоровым в работе [28], а для абелевых простых груп им получены частичные результаты в работа [29].

В работе [9] была получена классификация лог-поверхностей дель Пеццо $(S,\Delta)$ удовлетворяющих следующим естественным условиям: поверхность $S$ неособа, граница $\Delta$ имеет обыкновенные нормальные пересечения, а коэффициенты границы $\Delta$ могут быть выбраны сколь угодно близкими к 1 (при этом должна сохранятся обильность дивизора $-(K_S+\Delta)$). Такие поверхности принято называть *асимтотическими лог поверхностями дель Пеццо* (в высших разверностях естественно определаются *асимптотические лог многообразия Фано*). Условие на коэффициенты границы естественно приходит из Кэлеровой геометрии, где это условие соответствует возможности выбора сколь угодно малых углов конических особенностей Кэлеровой метрики вдоль компонент границы (см. [17]). Недавно такие многообразия были использованы Дональдсоном, Суном и Ченом в решении проблемы Калаби для неособых многообразиях Фано (см. работы [11], [12], [13], [14]). В качестве границы, Дональдсон, Сун и Чен выбирали антиканонический дивизор. В работе [9], И. Чельцов совместно с Я. Рубинштейном получили классификацию асипмтоических лог поверхностей дель Пеццо и изучили вопрос о наличие на них лог-метрих Кэлера-Эйнштейна при малых углах. Последняя задаче была пракически полностью решена (при углах равных 180 градусам, эта задача решена Тианом в [35]). А именно, классифицированные поверхности естественным образом разбиваются на три класса в зависимости от предела кривизны метрики при стремлении граничных углов к нулю градусам. В одном из таких классов, Чельцов и Рубинштейн показали что метрик Кэлера-Эйнштейна с коническими особенностями вдоль дивизоров границы никогда нет при сколь угодно малых углах. Во-втором из этих трех классов, особые метрики Кэлера-Эйнштейна есть всегда при любых граничных углах. Последнее следует из элементарных свойств метрик Кэлера-Эйнштейна (см. [22]) и [27, Следствие 5.5] (см. также [9, Следствие 6.6] и аналогичный результат в [2]). В оставшемся третьем классе, были построены примеры поверхностей с метриками Кэлера-Эйнштейна в каждом семействе. Последнее показывает, что скорее всего все поверхости в этом классе обладают особыми метриками Кэлера-Эйнштейна при малых углах. Вопрос о существовании метрик Кэлера-Эйнштейна с коническими особенностями при больших углах (но отличных от 180 градусов) в последних двух классах пока не поддается изучению (единственные два результата в этом направлении получены в работе [23] для $S = \mathbf{P}^2$ и $\Delta = (1-\beta)C$, где $C$ — прямая или гладая коника).

Была построена серия контр-примеров к известной гипотезе Тиана о поведении альфа-инварианта поляризованного гладкого многообразия. Эта гипотеза была сформулирована Тианом недавно в работе [36]. Чельцов совместно с Х. Ахмадинежадом и И. Шико проверили эту гипотезу для гладких поверхностей в трехмерном пространсве. В случае когда поверхость имеет степень три, гипотеза верна. Гипотеза верна также если степень поверхности равноа 4. Если степень поверхности больше или равна 6, то гипотеза не верна. Если степень равна 5 то гипотеза скорее всего тоже не верна: Чельцов, Ахмадинежад и Шико построили поверхность степени 5, которая должна давать контр-пример, но чтобы подтвердить требуемые вычисления (выполнимость некоторых численных условий) потребовалось огромные компьютерные вычисления, которые пока не подвластны современной техники.

## Литература

[1] E. Amerik, P. Kurlberg, K. Nguyen, A. Towsley, B. Viray, J. F. Voloch, *Evidence for the dynamical Brauer-Manin criterion*, preprint, arxiv:1305:4398.

[2] R. Berman, *A thermodynamical formalism for Monge–Ampère equations, Moser–Trudinger inequalities and Kähler–Einstein metrics*,

preprint, arxiv:1011.3976.

[3] I. Cheltsov, *Del Pezzo surfaces and local inequalities*, to appear in Proceedings of the Trento conference “Groups of Automorphisms in Birational and Affine Geometry”, November 2012, Springer.

[4] I. Cheltsov, J. Park, *Birationally rigid Fano threefold hypersurfaces*, preprint, arXiv:1309.0903 (2013).

[5] I. Cheltsov, J. Park, J. Won, *Affine cones over smooth cubic surfaces*, preprint, arXiv:1303.2648 (2013).

[6] I. Cheltsov, J. Park, J. Won, *Cylinders in singular del Pezzo surfaces*, preprint, arXiv:1311.5257 (2013).

[7] I. Cheltsov, C. Shramov, *Five embeddings of one simple group*, to appear in Transactions of the American Mathematical Society.

[8] I. Cheltsov, C. Shramov, *Three embeddings of the Klein simple group into the Cremona group of rank three*, Transformation Groups, **17** (2012), 303–35.

[9] I. Cheltsov, Y. Rubinstein, *Asymptotically log Fano varieties*, preprint, arXiv:1308.2503 (2013).

[10] C. Doran, A. Harder, L. Katzarkov, J. Lewis, V. Przyjalkowski, *Modularity of Fano threefolds,* in preparation.

[11] X.-X. Chen, S. Donaldson, S. Sun, *Kähler–Einstein metrics and stability*, preprint, arXiv:1210.7494 (2012).

[12] X.-X. Chen, S. Donaldson, S. Sun, *Kähler–Einstein metrics on Fano manifolds, I: approximation of metrics with cone singularities*, preprint, arXiv:1211.4566 (2012).

[13] X.-X. Chen, S. Donaldson, S. Sun, *Kähler–Einstein metrics on Fano manifolds, II: limits with cone angle less than* $2\pi$, preprint, arXiv:1212.4714 (2012).

[14] X.-X. Chen, S. Donaldson, S. Sun, *Kähler–Einstein metrics on Fano manifolds, III: limits as cone angle approaches* $2\pi$ *and completion of the main proof*, preprint, arXiv:1302.0282 (2013).

[15] A. Corti, A. Pukhlikov, M. Reid, *Fano 3-fold hypersurfaces*, L.M.S. Lecture Note Series **281** (2000), 175–258.

[16] I. Dolgachev, V. Iskovskikh, *Finite subgroups of the plane Cremona group*, Birkhauser Boston, Progress in Mathematics **269** (2009), 443–548.

[17] S. Donaldson, *Kähler metrics with cone singularities along a divisor*, in: Essays on Mathematics and its applications (P. Pardalos et al., Eds.), Springer (2012), 49–79.

[18] H. Flenner, M. Zaidenberg, *Rational curves and rational singularities*, Math. Z. **244** (2003), 549–575.

[19] A. Fletcher, *Working with weighted complete intersections*, L.M.S. Lecture Note Series **281** (2000), 101–173.

[20] V. Iskovskikh, Yu. Prokhorov, *Fano varieties*, Encyclopaedia of Mathematical Sciences **47** (1999) Springer, Berlin.

[21] T. Kishimoto, Yu. Prokhorov, M. Zaidenberg, $\mathbf{G}_a$*-actions on affine cones*, to appear in Transformation Groups.

[22] T. Jeffres, R. Mazzeo, Y. A. Rubinstein, *Kähler–Einstein metrics with edge singularities*, with an appendix by C. Li and Y. A. Rubinstein, to appear in Annals of Math.

[23] C. Li, S. Sun, *Conical Kähler–Einstein metric revisited*, preprint, arxiv:1207.5011 (2012).

[24] V. Iskovskikh, *Birational automorphisms of three-dimensional algebraic varieties*, Current problems in mathematics **12**, 159–236, VINITI, Moscow, 1979.

[25] V.A. Iskovskikh, Ju. I. Manin, *Three-dimensional quartics and counterexamples to the Lr̈oth problem*, Mat. Sb. **86** (1971), 140–166.

[26] A. Kasprzyck, L. Katzarkov, V. Przyjalkowski, D. Sekovich, *Projecting Fanos in the mirror*, in preparation.

[27] Y. Odaka, S. Sun, *Testing log $K$-stability by blowing up formalism*, preprint, arxiv:1112.1353 (2011).

[28] Yu. Prokhorov, *Simple finite subgroups of the Cremona group of rank* 3, Journal of Algebraic Geometry **21** (2012), 563нь-600.

[29] Yu. Prokhorov, *On stable conjugacy of finite subgroups of the plane Cremona group, II*, to appear in Cent. Eur. J. Math.

[30] V. Przyjalkowski, *On Landau–Ginzburg models for Fano varieties*, Comm. Num. Th. Phys., Vol. 1, No. 4, 713–728 (2008).

[31] V. Przyjalkowski, *Hori–Vafa mirror models for complete intersections in weighted projective spaces and weak Landau–Ginzburg models*, Cent. Eur. J. Math. 9, No. 5, 972–977 (2011).

[32] V. Przyjalkowski, K. Shramov, *On Hodge numbers of complete intersections and Landau–Ginzburg models*, arXiv:1305.4377.

[33] V. Przyjalkowski. *Weak Landau–Ginzburg models for smooth Fano threefolds*, Izv. Math. Vol., 77 No. 4 (2013), 135–160.

[34] M. Reid, *Canonical* 3*-folds*, Journées de Géometrie Algébrique d'Angers, Juillet 1979/Algebraic Geometry, Angers, 1979, pp. 273–310, Sijthoff & Noordhoff, Alphen aan den Rijn–Germantown, Md., 1980.

[35] G. Tian, *On Calabi's conjecture for complex surfaces with positive first Chern class*, Invent. Math. **101** (1990), 101–172.

[36] G. Tian, *Kähler–Einstein metrics on algebraic manifolds*, Metric and Differential Geometry Progress in Mathematics **297** (2012), 119–159.

# 11. Характеры полубесконечных многообразий флагов

## 11.1. О 5-мерной суперсимметричной $N = 2$ калибровочной теории с поверхностными операторами

В 2011-2012 годах группа сотрудников Лаборатории Алгебраической Геометрии под руководством М. Финкельберга занималась гипотезой Алдая-Гайотто-Тачикавы, связывающей 4-мерную суперсимметричную $N = 2$ калибровочную теорию с некоторой двумерной конформной теорией поля. В 2013 году эти исследования были сконцентрированы вокруг 5-мерной суперсимметричной $N = 2$ калибровочной теории с поверхностными операторами. На математическом языке речь идёт о вычислении эквивариантной эйлеровой характеристики естественных линейных расслоений на пространстве застав (локальный вариант) и квазиотображений из прямой в пространство флагов полупростой группы Ли (глобальный вариант). Производящая функция (по степени квазиотображений) этих эйлеровых характеристик является решением интегрируемой системы — квантовой разностной цепочки Тоды в локальном случае; а в глобальном — так называемой $q$-функцией Уиттэкера. В случае, когда группа Ли является специальной линейной (тип $A$), пространства застав и квазиотображений снабжены малым разрешением особенностей (так называемым разрешением Ломона), и вышеуказанные эйлеровы характеристики можно вычислят и на этом разрешении. Более того, на пространстве Ломона можно вычислять и эйлерову характеристику комплекса ДеРама, подкрученного на линейное расслоение. Ответом будут знаменитые многочлены Макдональда. Доказательству этих утверждений посвящена следующая серия работ.

Braverman, Alexander; Finkelberg, Michael *Semi-infinite Schubert varieties and quantum K-theory of flag manifolds*, Journal of the American Mathematical Society (2014), to appear.

Пусть $\mathfrak{g}$ — полупростая комплексная алгебра Ли, а $\mathbf{F}_\mathfrak{g}$ — её пространство флагов. Авторы изучают пространства $Z^\alpha_\mathbf{F}$ базированных квазиотображений $\mathbf{P}^1 \to \mathbf{F}_\mathfrak{g}$ и их аффинные варианты (отвечающие случаю, когда $\mathfrak{g}$ — нескрученная аффинная алгебра Ли). Цель их двояка. Во-первых, авторы изучают особенности этих пространств (как известно, они моделируют особенности "полубесконечных многообразий Шуберта", которые корректно не определены). Авторы доказывают, что $Z^{\alpha}_{\mathbf{F}}$ нормальны, а если $\mathfrak{g}$ типа $ADE$, то $Z^{\alpha}_{\mathbf{F}}$ горенштейновы с рациональными особенностями. Некоторые более слабые результаты доказываются и в аффинном случае. Во-вторых, авторы изучают характер кольца функций на $Z^{\alpha}_{\mathbf{F}}$. Когда $\mathfrak{g}$ конечномерна типа $ADE$, они доказывают, что производящая функция этих характеров удовлетворяет фермионной рекурсии (вариант квантовой разностной цепочки Тоды), тем самым обобщая предыдущие результаты для типа $A$. Учитывая вышеприведённый анализ особенностей $Z^{\alpha}_{\mathbf{F}}$, отсюда выводится гипотеза Гивенталя-Ли, описывающая квантовую $K$-теорию $\mathbf{F}_{\mathfrak{g}}$ в терминах Ленглендс-двойственной квантовой группы $U_q(\check{\mathfrak{g}})$ (для типов $BCFG$ эта гипотеза требует некоторого уточнения).

Braverman, Alexander; Finkelberg, Michael *Weyl modules and q-Whittaker functions*, Mathematische Annalen (2014), to appear.

Пусть $G$ полупростая односвязная комплексная группа Ли. Следуя работам Герасимова-Лебедева-Облезина, авторы используют квантовую разностную цепочку Тоды (получаемую квантовым вариантом редукции Костанта-Уиттэкера), чтобы определить понятие $q$-функции Уиттэкера $\Psi_\lambda(q,z)$. Это семейство инвариантных многочленов на максимальном торе $T \subset G$ (здесь $z \in T$), зависящее от доминантного веса $\lambda$ группы $G$, коэффициенты которых являются рациональными функциями переменной $q \in \mathbf{C}^*$. Богдан Ион и Иван Чередник изучали другое определение квантовой разностной цепочки Тоды (в терминах двойной аффинной алгебры Гекке; авторы обозначают соответствующие $q$-функции Уиттэкера через $\Psi'_\lambda(q,z)$), но гипотетически эти определения эквивалентны. В типе $A$ $q$-функции Уиттэкера были всесторонне изучены в работах Герасимова-Лебедева-Облезина. Авторы доказывают, что в типе $ADE$ функция $\widehat{\Psi}_\lambda(q,z) := \Psi_\lambda(q,z)\cdot\prod_{i\in I}\prod_{r=1}^{\langle\alpha_i,\lambda\rangle}(1-q^r)$ (где $I$ обозначает множество вершин диаграммы Дынкина группы $G$) равняется характеру модуля Демазюра $D(\lambda)$ над $G[[t]] \times \mathbf{C}^*$. Когда группа $G$ имеет тип $BCFG$, аналогичное утверждение верно для скрученных модулей. Этот результат известен для $\Psi'_\lambda(q,z)$ вместо $\Psi'_\lambda(q,z)$, но доказательство авторов является алгебро-геометрическим, и из него вытекает равенство $\Psi'_\lambda(q,z) = \Psi_\lambda(q,z)$, а также новая алгебро-геометрическая интерпретация модулей Демазюра $D(\lambda)$ в духе теоремы Бореля-Вейля-Ботта для полубесконечных флагов.

Braverman, Alexander; Finkelberg, Michael; Shiraishi, Jun'ichi *Macdonald* *polynomials, Laumon spaces, and perverse coherent sheaves*, Contemporary Mathematics (2014), to appear.

Пусть $G$ — почти простая односвязная комплексная группа Ли, а $G/U_-$ — её основное аффинное пространство. Авторы формулируют гипотезу, которая доставляет новую геометрическую интерпретацию многочленов Макдональда, связанных с группой $G$, в терминах извращённых когерентных пучков на схеме формальных токов в аффинизацию $G/U_-$. Авторы доказывают свою гипотезу для $G = SL(N)$, используя так называемое разрешение Ломона пространства квазиотображений (пользуясь этим разрешением, можно переформулировать гипотезу без упоминания извращённых когерентных пучков). В процесе доказательства этой гипотезы авторы доказывают $K$-теорный аналог знаменитой теоремы Андрея Негуца.

## 11.2. Пространства модулей Ломона и АГТ-гипотеза

Два года назад Алдай, Гайотто и Тачикава предложили гипотезу, связывающую 4-мерную суперсимметричную $N = 2$ калибровочную теорию с калибровочной группой $G$ с некоторой двумерной конформной теорией поля. Одним из математических следствий этой гипотезы является выражение статсуммы вышеуказанной калибровочной теории (для $G = SL_2$) через скалярный квадрат вектора Уиттэкера в универсальном модуле Верма над алгеброй Вирасоро. Если же $G = SL_n$, то алгебра Вирасоро заменяется соответствующей $W$-алгеброй. Вышеуказанная статсумма была математически строго определена Н. Некрасовым около 10 лет назад как интеграл единичного класса в эквивариантных когомологиях компактификации Гизекера пространства модулей векторных расслоений на проективной плоскости. Если $G$ не обязательно имеет тип $A$, то вместо компактификации Гизекера надо рассматривать компактификацию Уленбек, а вместо когомологий — когомологии Горески-Макферсона. Компактификация Уленбек является частным случаем компактификации Дринфельда — так называемого пространства застав — пространства отображений из проективной прямой в параболическое пространство флагов простой конечномерной или аффинной группы Ли. Этот частный случай отвечает аффинной группе Ли и максимальной компактной парахорической подгруппе. Если же рассмотреть конечномерную простую группу Ли и её параболическую подгруппу, то по аналогии с (вышеприведённым следствием из) АГТ гипотезой, соответствующая статсумма должна выражаться в терминах соответствующей конечной $W$-алгебры. Доказательству этого утверждения для $G = SL_n$ посвящена следующая серия работ.

Feigin, Boris; Finkelberg, Michael; Frenkel, Igor; Rybnikov, Leonid Gelfand-Tsetlin algebras and cohomology rings of Laumon spaces. Selecta Math. (N.S.) 17 (2011), no. 2, 337–361.

Пространства модулей Ломона — это гладкие пополнения пространств модулей отображений проективной прямой в пространства флагов полных линейных групп (конечномерный аналог компактификации Гизекера). Мы вычисляем эквивариантные кольца когомологий ломоновских пространств в терминах подалгебры Гельфанда-Цетлина универсальной обёртывающей алгебры и формулируем гипотетический ответ для малого кольца квантовых когомологий в терминах коммутативной подалгебры сдвига аргумента.

Feigin, Boris; Finkelberg, Michael; Negut, Andrei; Rybnikov, Leonid, Yangians and cohomology rings of Laumon spaces, Selecta Mathematica New Series vol. 17 (2011), no. 3, 573–607.

Мы строим действие янгиана типа $A$ в эквивариантных когомологиях ломоновских пространств через естественные соответствия. Мы строим действие аффинного янгиана в когомологиях аффинного варианта пространств Ломона. Мы вычисляем матричные коэффициенты образующих аффинного янгиана в базисе неподвижных точек. Этот базис является аффинным аналогом базиса Гельфанда-Цетлина. Аффинный аналог алгебры Гельфанда-Цетлина сюръективно отображается на эквивариантные кольца когомологий аффинных пространств Ломона. Кольцо когомологий пространства модулей пучков без кручения на проективной плоскости, тривиализованных на бесконечной прямой (пространства Гизекера), естественно вкладывается в кольцо когомологий определённых пространств Ломона. Его образом служит образ центра янгиана полной линейной алгебры, естественно вложенного в аффинный янгиан. В частности, первый класс Черна детерминантного расслоения на пространстве Гизекера является образом некоммутативной степенной симметрической функции в центре.

Braverman, Alexander; Feigin, Boris; Finkelberg, Michael; Rybnikov, Leonid A Finite Analog of the AGT Relation I: Finite W-Algebras and Quasimaps' Spaces, Communications in Mathematical Physics vol. 308, no. 2 (2011), 457–478.

Мы выдвигаем гипотезу, что эквивариантные когомологии Горески-Макферсона пространства параболических застав Дринфельда снабжены действием конечной $W$-алгебры, связанной с главным нильпотентом подалгебры Леви соответствующей параболической. Это действие должно обладать несколькими естественными свойствами. Эта гипотеза обобщает известные результаты для случая полных флагов. Мы доказываем гипотезу для групп типа $A$, пользуясь работами Брандэна и Клещёва о связи $W$-алгебр и сдвинутых янгианов.

Braverman, Alexander; Finkelberg, Michael Dynamical Weyl groups and equivariant cohomology of transversal slices on affine Grassmannians, Mathematical Research Letters vol. 18 (2011), no. 3, 505–512.

Пусть $G$ — редуктивная группа, а $\check{G}$ — её двойственная по Ленглендсу. Мы интерпретируем динамическую группу Вейля $\check{G}$ в терминах геометрии аффинного грассманниана группы $G$. В этой интерпретации динамические параметры соответствуют эквивариантным параметрам тора, естественно действующего на аффинном грассманниане $G$. Мы предлагаем гипотетическое обобщение этих результатов на аффинные группы Каца-Муди (в терминах геометрии двойного аффинного грассманниана).

# 12. ПБВ вырождения в теории Ли

Теория Ли является важным алгебраическим инструментом при изучении различных классов алгебраических многообразий, снабжённых естественным действием алгебраических групп. В качестве примеров приведём классические многообразия флагов и многообразия Грассмана, а также их разнообразные обобщения, в частности для ортогонального и симплектического случаев. Одним из ключевых обстоятельств, позволяющих использховать мощный аппарат теории представлений групп и алгебр Ли, является наличие открытой плотной орбиты действия группы на алгебраическом многообразии. Яркими примерами такой ситуации служат сферические и торические многообразия. В первом случае борелевская группа действует с открытой плотной орбитой, а во втором основной алгебраической группой является многомерный тор. В обоих случаях имеется глубокая и хорошо разработанная наука.

Кроме алгебраических торов имеется другой класс абелевых алгебраических групп – произведения нескольких копий аддитивных групп поля $\mathbf{G}_a$. Однако для таких групп теория $\mathbf{G}_a^N$-многообразий разработана очень слабо [1], [10]. Сотрудники лаборатории предложили конструкцию, позволяющую строить $\mathbf{G}_a^N$-многообразия с помощью теории представлений простых алгебр Ли [7]. Основным ингредиентом конструкции является присоединённое градуированное пространство относительно фильтрации Пуанкаре-Биркгофа-Витта на представлениях со старшим весом. Соответствующее представления и многообразия флагов называется ПБВ вырожденными.

В 2013 году сотрудники лаборатории продолжили изучение вырожденных по Пуанкаре-Биркгофу-Витту представлений простых алгебр Ли и соответствующих им многообразий флагов. Основная отличительная черта рассматриваемых представлений заключается в том, что они являются циклическими модулями для абелевой алгебры Ли и, значит, могут быть отождествлены с факторами кольца полиномов по идеалу соотношений. Один из результатов, полученных Е.Фейгиным в этом году (совместно с П.Литтелманном и Д.Фурье), заключается в описании идеалов соотношений и мономиальных базисов для вырожденных представлений простых алгебр типов A и C над полями произвольной характеристики [8]. Кроме того в совместной работе с И.Чередником [2] была изучена экстремальная часть вырожденных представлений и установлена связь с несимметрическими полиномами Макдональда. Точнее, были получены явные формулы для ПБВ градуировки экстремальных векторов, соответствующих элементам группы Вейля, в представлениях простых алгебр Ли. Была доказана аддитивность градуировки как функции старшего веса.

Обобщённые многообразия флагов играют очень важную роль в классической теории представлений. Это широкий класс проективных алгебраических многообразий, включающий в себя классические многообразия, такие как грассманианы и классические многообразия флагов. Обобщённые многообразия флагов могут быть реализованы внутри проективизаций неприводимых представлений простых групп как орбиты старших прямых. В ПБВ вырожденной теории также оказалось возможным и продуктивным рассмотрение аналогов обобщённых многообразий флагов – замыкания орбит старших прямых в проективизациях вырожденных представлений. Это позволило определить новый класс многообразий и изучать их с помощью аппарата теории Ли и алгебраической геометрии. В частности, сотрудники лабортаории Е.Фейгин и М.Финкельберг доказали аналог теоремы Бореля-Вейля для вырожденных многообразий флагов для групп Ли типа А. При этом приведена явная конструкция разрешения особенностей [9]. Оказалось, что эта конструкция имеет важные обобщения в теории колчанных грассманианов. Эти многообразия описывают все подпредставления некоторого представления колчана заданной размерности. Доказано, что вырожденные многообразия флагов типа А являются колчанными грассманианами для представления $M$ однонаправленного колчана Дынкина типа А [3]. При этом $M$ изоморфен прямой сумме всех неразложимых проективных и инъективных представлений, а вектор размерностей является размерностью проективной части. В серии работ [4],[5],[6] (совместно с Д.Черулли Ирелли и М.Райнеке) сотрудник лаборатории Е.Фейгин построил разрешение особенностей для произвольных колчанных грассманианов для колчанов Дынкина и использовал эту конструкцию для изучения алгебр Леклерка-Эрнандеса .

## Литература

[1] I. Arzhantsev, *Flag varieties as equivariant compactifications of* $\mathbf{G}_a^n$, arXiv:1003.2358.

[2] I. Cherednik, E.Feigin, *Extremal part of the PBW-filtration and E-polynomials*, arXiv:1306.3146.

[3] G. Cerulli Irelli, E. Feigin, M. Reineke, *Quiver Grassmannians and degenerate flag varieties*, Algebra & Number Theory, 6-1 (2012), 165–194.

[4] G. Cerulli Irelli, E. Feigin, M. Reineke, *Homological approach to the Hernandez-Leclerc construction and quiver varieties*, arXiv:1302.5297.

[5] G. Cerulli Irelli, E. Feigin, M. Reineke, *Desingularization of quiver Grassmannians for Dynkin quivers*, Advances in Mathematics (2013), no. 245, pp. 182–207.

[6] G. Cerulli Irelli, E. Feigin, M. Reineke, *Degenerate flag varieties: moment graphs and Schröder numbers*, Journal of Algebraic Combinatorics, Volume 38, Issue 1 (2013), pp. 159–189.

[7] E. Feigin, $\mathbf{G}_a^M$ *degeneration of flag varieties*, Selecta Mathematica: Volume 18, Issue 3 (2012), pp. 513–537.

[8] E. Feigin, G. Fourier, P. Littelmann, *PBW–filtration over* $\mathbf{Z}$ *and compatible bases for* $V_{\mathbf{Z}}(\lambda)$ *in type* $\mathtt{A}_n$ *and* $\mathtt{C}_n$, Symmetries, Integrable Systems and Representations, vol. 40, Springer, 2013, pp. 35–63.

[9] E.Feigin and M.Finkelberg, *Degenerate flag varieties of type A: Frobenius splitting and BW theorem*, Mathematische Zeitschrift (2013), vol. 275, no. 1-2, pp. 55–77.

[10] B. Hassett, Yu. Tschinkel, *Geometry of equivariant compactifications of* $\mathbf{G}_a^n$, Int. Math. Res. Notices **20** (1999), 1211–1230.

# 13. Группы алгебраических преобразований аффинных и квазиаффинных многообразий

## 13.1. Стабильная бирациональная бесконечная транзитивность

Аффинное алгебраическое многообразие $X$ называется бесконечно транзитивным, если группа его алгебраических автоморфизмов богата в следующем смысле: подгруппа в группе автоморфизмов, порождённая всеми подгруппами, изоморфными $G_a$, действует транзитивно на $m$-ках гладких точек многообразия $X$. Выбор подгруппы диктуется тем соображением, что $G_a$-действия тесно связаны с локально нильпотентными дифференцированиями алгебры регулярных функций многообразия $X$. Это соображение впервые было применено к изучению бесконечно транзитивных многообразий в работе Калимана-Зайденберга [11]. В последние годы было много исследований, посвящённых бесконечно транзитивным многообразиям: в работе Аржанцева-Куюмжиян-Зайденберга [18] были построены новые примеры бесконечно транзитивных многообразий, при этом все построенные многообразия были рациональными, а далее в работе Аржанцева-Фленнера-Калимана-Кутчебауха-Зайденберга [1] было указано, что бывают унирациональные не рациональные бесконечно транзитивные многообразия. В этой же работе было доказано, что все бесконечно транзитивные многообразия являются унирациональными, и это явилось первым результатом, связывающим бирациональную геометрию и бесконечную транзитивность на аффинных многообразиях. Однако несложно проверить, что классы унирациональных многообразий и бесконечно транзитивных с точностью до выбора модели многообразий не совпадают, так как если бы для гладкой кубики в $\mathbf{P}^4$ существовало бы хотя бы одно $\mathbf{C}_+$-действие, то она была бы рациональна, а, как известно, она унирациональна, но не рациональна.

Следующим шагом является рассмотрение стабильной бирациональной бесконечной транзитивности. Будем говорить, что многообразие $X$ стабильно бирационально бесконечно транзитивно, если для подходящего $m$ у многообразия $X \times \mathbf{A}^m$ есть бесконечно транзитивная аффинная модель. Из результата статьи [1] несложно вывести, что любое стабильно бирационально бесконечно транзитивное многообразие является унирациональным. Пока неясно, верно ли обратное включение. Научным руководителем Лаборатории Ф. Богомоловым, И. Каржемановым и сотрудником Лаборатории К. Куюмжиян в работе [2] обратная стрелка доказана при следующих предположениях: пусть для проективного многообразия $X$ существует много "хороших" расслоений с общим слоем $\mathbf{P}^1$ над некоторыми проективными многообразиями и такими, что в общей точке касательное пространство к многообразию $X$ порождается касательными векторами к этим $\mathbf{P}^1$. Тогда можно построить бесконечно транзитивную стабильно бирациональную модель $X$.

Данная теорема может быть применена в тех случаях, когда многообразие $X$ имеет структуру $\mathbf{P}^1$-расслоения или расслоения на коники над каким-то другим многообразием. Это позволяет по-новому доказать, что гладкая кубика унирациональна. Также в работе [2] показывается, что квартика с прямой двойных особенностей и полное пересечение $X_{2\cdot 2\cdot 2} \subset \mathbf{P}^6$ стабильно бирационально бесконечно транзитивны, а, следовательно, унирациональны.

## 13.2. Стабильная сопряжённость подгрупп

Группой Кремоны называется группа бирациональных автоморфизмов пространства $\mathbf{P}^n$. Конечные подгруппы в группе Кремоны изучались многими учёными в России и за рубежом, их классификация для $\mathbf{P}^2$ была дана Долгачевым и Исковских в работе [10]. Важным вопросом является следующий: сопряжена ли данная конечная подгруппа в группе Кремоны какой-то линейной подгруппе? В препринте научного руководителя Лаборатории Ф. Богомолова и сотрудника Лаборатории Ю. Прохорова [4] показано, что для действия конечной циклической группы $G$ простого порядка на гладкой рациональной поверхности $X$ следующие свойства эквивалентны:

- многообразие $X$ с действием группы $G$ сопряжено линейному действию на $\mathbf{P}^2$;
- многообразие $X$ с действием группы $G$ стабильно сопряжено линейному действию на $\mathbf{P}^n$ для какого-то $n$;
- $G$ не фиксирует поточечно никакой прямой положительного рода.

## 13.3. Теорема о локальной структуре и эквивариантная геометрия кокасательных расслоений

Сотрудником Лаборатории В. С. Жгуном была исследована геометрия кокасательных расслоений для квазипроективных многообразий. В частности, в работе [17] была получена новая теорема о локальной структуре, обобщающая результаты Д.А.Тимашева, которая описывает действие параболической подгруппы, естественно связанной с многообразием, на некотором открытом инвариантном подмножестве данного многообразия. Получены результаты, обобщающие результаты Ф.Кнопа, Э. Б. Винберга и Д.А.Тимашева о геометрии кокасательных расслоений для квазипроективных многообразий, в том числе построены семейства так называемых вырожденных орисфер. С помощью кокасательного расслоение к вырожденным орисферам дано новое определение малой группы Вейля. Для действий редуктивной группы $G$ на алгебраическом многообразии $X$ над алгебраически замкнутым полем были исследованы $G$-инвариантные лагранжевы подмногообразия в кокасательном расслоении. В работе [20] В.С. Жгуном и Д.А. Тимашевым была обобщена теорема Д.И.Панюшева, которая утверждает, что для $G$-многообразия $X$ и его $G$-инвариантного подмногообразия $Y$ сложность и ранг конормального расслоения к $Y$ в $X$ равны соответственно сложности и рангу $X$. Напомним, что для многообразия $X$ сложность – это коразмерность типичной орбиты в $X$ борелевской подгруппы $B$ в $G$, а ранг – это ранг решетки характеров $B$-полуинвариантных функций на $X$. Для конормальных расслоений был описан стабилизатор общего положения в нормализаторе общей $B$-орбиты в $Y$. Также было показано, что важные инварианты гамильтоновых симплектических многообразий с инвариантными лагранжевыми подмногообразиями выражаются через инварианты кокасательных расслоений к этим лагранжевым многообразиям.

В своей работе В.С. Жгун использовал методы алгебраических групп и алгебр Ли, алгебраической геометрии и теории инвариантов. Основными инструментами были теорема о Локальной структуре, разложение Бялиницкого-Бируля, деформация к орисферическим многообразиям, а также деформация симплектической структуры к симплектической структуре на нормальном конусе.

## 13.4. Циклические накрытия

В.С. Куликовым совместно с В.М. Харламовым в работе [13] были исследованы свойства циклических накрытий комплексной поверхности $X$ общего типа, разветвленных вдоль гладких кривых, численно эквивалентных кратному каноническому классу поверхности $X$. Основные результаты относятся к накрытиям поверхностей с $p_g = 0$ и поверхностей Мияоки–Яу; в частности, эти накрытия дают новые примеры многокомпонентных пространств модулей поверхностей с фиксированными числами Черна и новые примеры поверхностей, не являющихся деформационно эквивалентными поверхностям, полученным из них при замене комплексной структуры на сопряженную.

## 13.5. Разложение на множители в конечных группах

В. С. Куликовым в работе [22] дано необходимое условие для однозначности разложений на множители элементов конечной группы $G$ с множителями, принадлежащими объединению некоторых классов сопряженности элементов группы $G$. Это условие является достаточным, если число множителей, принадлежащих каждому классу сопряженности, является достаточно большим. Этот результат затем применяется к проблеме о числе неприводимых компонент пространства Гурвица отмеченных накрытий степени $d$ проективной прямой с заданной группой Галуа $G$ накрытий и фиксированным набором локальных монодромий. Далее в работе [23] В.С. Куликов совместно с В.М. Харламовым распространяет эти результаты на пространства Гурвица отмеченных накрытий проективных кривых произвольного рода.

## 13.6. Неприводимость схемы Гильберта поверхностей минимальной степени

В. С. Куликов и Ф. Богомолов [3] дали новое, основанное на доказательстве гипотезы Кизини для общих проекций поверхностей, доказательство того, что схема Гильберта гладких поверхностей степени $m$ в $(m+1)$-мерном проективном пространстве является неприводимой, за исключением случая $m = 4$. В последнем случае Схема Гильберта состоит из двух неприводимых компонент, одна из которых - это образ проективной плоскости при отображении Веронезе-2.

## 13.7. Поверхности с тривиальными исчезающими циклами

В 1973 году Ф.Л.Зак [21] получил классификацию гладких проективных поверхностей над $\mathbf{C}$, для которых группа монодромии первых когомологий гиперплоского сечения тривиальна (равносильное условие: все исчезающие циклы тривиальны; в терминологии SGA7 это называется «нарушение условия (A)»). Доказательство Зака существенно опирается на результаты Г.Н.Тюриной, вошедщие в последствии в «теорию особенностей» Арнольда, и тем самым существенно зависят от предположения нулевой характеристики. В 1981 году результат Зака переоткрыли Лантери и Паллески [15], но и их доказательство существенно опирается на условие характеристики нуль. В работе сотрудника лаборатории С.М.Львовского «On surfaces with zero vanishing cycles» [16] найдено простое доказательство указанного результата Зака, работающее в произвольной характеристике. Тем самым, как пишет про эту работу рецензент, «it gives a clear explanation for a special case of a situation left open in SGA7».

Метод, примененный в работе [16], работает и в некоторых других ситуациях. Именно, пусть $C \subset \mathbf{P}^2$ — нодальная кривая степени $d$ (на сей раз — над полем комплексных чисел), и пусть $\nu\colon \hat{C} \to C$ — ее нормализация. Если $p \in \mathbf{P}^2 \setminus C$, то композицию $\mathrm{pr}_p \circ \nu\colon \hat{C} \to \mathbf{P}^1$ будем называть обобщенной проекцией. Предположим, что $C$ не имеет ни тройных касательных, ни кратных точек ветвления (так оно и будет для общей нодальной кривой данной степени и рода) и что обобщенная проекция $\mathrm{pr}_p \circ \nu$ имеет только простейшее ветвление. Пусть теперь $\varphi\colon C' \to \mathbf{P}^1$ — отображение из гладкой кривой в $\mathbf{P}^1 = p^\perp$, также имеющее только простейшее ветвление; поставим вопрос, при каких условиях отображение $\varphi$ эквивалентно обобщенной проекции $\mathrm{pr}_p \circ \nu$. Почти исчерпывающий отвеn на этот вопрос получен в совместной работе сотрудника лаборатории С.М.Львовского и доцента факультета математики НИУ ВШЭ Ю.М.Бурмана «On projections of smooth and nodal plane curves»[9]. Легко устанавливается необходимое условие: если $B \subset p^\perp$ — множество точек ветвления, то для такой эквивалентности необходимо, чтобы гомоморфизм монодромии слоев $\pi_1(p^\perp \setminus B) \to$ пропускался через $\pi_1(\mathbf{P}^2)^* \setminus C^*$, где $C^*$ — двойственная кривая. Это необходимое условие равносильно тому, что обображение $C' \setminus \varphi^{-1}(B) \to p^\perp \setminus B$, являющееся ограничением отображения $\varphi$, продолжается до неразветвленного накрытия $\Phi\colon X \to \mathbf{P}^2 \setminus C^*$

(это продолжение единственно). Необходимое и достаточное условие состоит в том, что, наряду с существованием продолжения Φ, продолжение гомоморфизма монодромии слоев удовлетворяло следующему топологическому условию: вблизи каждой точки самопересечения или точки возврата кривой $C^*$ обходы вокруг обеих ветвей соответствуют *разным* транспозициям в слое.

В указанном результе не предполагается (за исключением случая $\deg C = 4$), что степень отображения $\varphi$ совпадает со степенью обобщенной проекции. Тем самым получаются и некоторые топологические ограничения на отображения $C' \to p^\perp$ степени, отличной от $\deg C$. В работе аткже показано, что, по крайней мере при $\deg C = 3$ или 4, указанное необходимое условие на отображение $\varphi$ не является достаточным.

## 13.8. Бесконечная транзитивность некоторых групп рациональных преобразований

Пусть $\Psi$ – проективное пространство размерности $\geqslant 2$ над полем. Пусть $H$ – замкнутая подгруппа (в топологии поточечной сходимости) группы всех перестановок $\mathfrak{S}_\Psi$ множества $\Psi$. Предположим, что $H$ содержит проективную группу и произвольную биекцию $\Psi$ на себя, преобразующую некоторую тройку коллинеарных точек в неколлинеарную тройку. Как известно из работы Кантора и мак Дона [12], если множество $\Psi$ конечно, то $H$ содержит знакопеременную подгруппу $\mathfrak{A}_\Psi$ группы $\mathfrak{S}_\Psi$.

Ф. Богомолов и М. Ровинский показывают в работе [5], что $H = \mathfrak{S}_\Psi$, если множество $\Psi$ бесконечно.

## 13.9. «Минималистский» вариант гипотезы Гротендика о сечениях и её целочисленная версия

Доминантный морфизм схем $f : X \to Y$ индуцирует, если зафиксировать геометрическую точку $\eta \to X$, гомоморфизм их фундаментальных групп $f_* : \pi_1^{\text{ét}}(X, \eta) \to \pi_1^{\text{ét}}(Y, f_*\eta)$.

При некоторых «анабелевых» предположениях, гипотеза Гротендика о сечениях описывает классы сопряжённости сечений гомоморфизма $f_*$ как сечения морфизма $f$.

Если ограничиться рациональным вариантом, имеющий дело с общими точками $X$ и $Y$, то, согласно идеологии Ф.А.Богомолова, во многих случаях информация о поле содержится в универсальном центральном про-$\ell$-расширении $\mathcal{G}^c$ его абелевой про-$\ell$-группы Галуа. На двойственном языке гомоморфизмы между группами $\mathcal{G}^c$ интерпретируются как гомоморфизмы между про-$\ell$-пополнениями мультипликативных групп полей, сохраняющие ортогональность относительно $\cup$-произведения. Целочисленная версия такой интерпретации являются гомоморфизмы между мультипликативными группами полей, сохраняющие алгебраическую зависимость.

В работе Ф.А.Богомолова с участием М.Ровинского [6] сделан переход от «геометрических» полей (т.е. функциональных полей над алгебраически замкнутым полем), изучавшихся, например, в работах Богомолова и Чинкеля [7, 8, 19], к произвольным полям.

А именно, при достаточно общих предположениях доказано, если $K|k$ и $L|l$ – пара расширений полей и гомоморфизм $\psi : K^\times/k^\times \to L^\times/l^\times$ сохраняет алгебраическую зависимость, то найдётся такое нормирование $v$ поля $K$, что ограничение $\psi$ на $\mathcal{O}_{K,v}^\times/\mathcal{O}_{k,v}^\times$ является композицией отображения редукции $\mathcal{O}_{K,v}^\times/\mathcal{O}_{k,v}^\times \to K(v)^\times/k(v)^\times$ с некоторым вложением $K(v)^\times/k(v)^\times \to L^\times/l^\times$. Здесь $\mathcal{O}_{K,v}$ обозначает кольцо нормирования, а $K(v)$ – его поле вычетов.

## Литература

[1] I. V. Arzhantsev, H. Flenner, Sh. Kaliman, F. Kutzschebauch, and M. Zaidenberg, *Flexible varieties and automorphism groups*, Duke Math. J., Volume 162, Number 4 (2013), 767-823

[2] Fedor Bogomolov, Ilya Karzhemanov, Karine Kuyumzhiyan, *Unirationality and existence of infinitely transitive models*, in: Birational geometry, rational curves, and arithmetic. Boston : Birkhauser, 2013. No. 4. P. 77-92

[3] Fedor Bogomolov, Vik. S. Kulikov, *On the irreducibility of Hilbert scheme of surfaces of minimal degree*, Cent. Eur. J. Math., 11:2 (2013), 254њ263

[4] Fedor Bogomolov, Yuri Prokhorov, *On stable conjugacy of finite subgroups of the plane Cremona group, I*, Central European Journal of Mathematics, 2013, Vol. 11, No. 12

[5] Fedor Bogomolov, Marat Rovinsky, *Collineation group as a subgroup of the symmetric group*, Cent. Eur. J. Math., 11(1) (2013), 17–26

[6] F. Bogomolov, M. Rovinsky, ıMultiplicative homomorphisms respecting algebraic dependence, work in progress

[7] Fedor Bogomolov, Yuri Tschinkel, *Commuting elements of Galois groups of function fields*, Motives, polylogarithms and Hodge theory, Part I (Irvine, CA, 1998), 75њ120, Int. Press Lect. Ser., 3, I, Int. Press, Somerville, MA, 2002

[8] Fedor Bogomolov, Yuri Tschinkel, *Galois theory and projective geometry*, Comm. on Pure and Appl. Math., **66**, no. 9, (2013), 1335–1359, arXiv:1112.4634

[9] Yu. Burman, Serge Lvovski, *On projections of smooth and nodal plane curves*, preprint http://arxiv.org/abs/1311.1904arXiv:1311.1904 [math.AG]

[10] I. V. Dolgachev and V. A. Iskovskikh, *Finite subgroups of the plane Cremona group*, In “Algebra, arithmetic, and geometry: in honor of Yu. I. Manin. Vol. I, Progr. Math., v. 269, 443њ548. Birkhauser Boston Inc., Boston, MA, 2009

[11] Sh. Kaliman and M. Zaidenberg, *Affine modifications and affine hypersurfaces with a very transitive automorphism group*, Transform. Groups **4** (1999), no. 1, 53 – 95.

[12] W.M. Kantor, T.P. McDonough, *On the maximality of PSL*$(d+1,q)$*,* $d \geq 2$, J. London Math. Soc., 1974, 8(3), 426

[13] V. Kharlamov, Vik. Kulikov, *On numerically pluricanonical cyclic coverings*, arXiv:1308.0516 (представлено в Известия РАН, сер. матем.)

[14] Vik. S. Kulikov, *Covering semigroups*, Oberwolfach Reports, 2013, preliminary_OWR_2013_27.pdf (preliminary version): Complex Algebraic Geometry, 26 May - 1 June 2013, pp. 33 - 36

[15] A. Lanteri, M. Palleschi (1981), *A characteristic condition for an algebraic variety to be a scroll*, Istit Lombardo Accad Sci Lett Rend A 115:113–122 (1984)

[16] Serge Lvovski, *On surfaces with zero vanishing cycles*, accepted by *Manuscripta Math.*; a preprint version is available at `http://arxiv.org/abs/1305.2205`arXiv:1305.2205 [math.AG]

[17] V.S.Zhgoon, *On the Local Structure Theorem and equivariant geometry of cotangent bundles*, Journal of Lie Theory, Volume 23 (2013), 607-638

[18] И.В. Аржанцев, К. Куюмжиян, М. Зайденберг, *Многообразия флагов, торические многообразия и надстройки: три примера бесконечной транзитивности*, Мат. Сборник: 2012 **203** 7, 3 – 30

[19] Ф. А. Богомолов, *Абелевы подгруппы групп Галуа,* Изв. АН СССР. Сер. матем., 1991, 55:1, 32–67

[20] В.С.Жгун, Д.А.Тимашёв, *Симплектические многообразия с инвариантными лагранжевыми подмногообразиями*, Доклады Российской Академии Наук, том 443, § 4, Апрель 2012, С. 418-421

[21] Ф. Л. Зак, *Поверхности с нулевыми циклами Лефшеца*, Мат. заметки **13** (1973), 869–880; английский перевод: Math. Notes 13 (1973), 520–525

[22] Вик. С. Куликов, *Разложения на множители в конечных группах*, Матем. сб., 204:2 (2013), 87-116

[23] Вик. С. Куликов, В. М. Харламов, *Полугруппы накрытий*, Изв. РАН. Сер. матем., 77:3 (2013), 163-198

# 14. Многогранники Гельфанда-Цетлина и исчисление Шуберта

Этот раздел посвящен работам группы сотрудников лаборатории, включающей В. Кириченко, Е. Смирнова и В. Тиморина, которые занимаются многогранниками Гельфанда-Цетлина и их приложениями к теории представлений, теории торических многообразий и различным аспектам алгебраической геометрии.

## 14.1. Операторы разделённых разностей и многогранники Ньютона-Окунькова

В статье [K] полностью разработана конструкция выпукло-геометрических операторов разделённых разностей. Эти операторы переносят в выпукло-геометрический контекст операторы Демазюра из теории представлений редуктивных групп и действуют на выпуклых цепях (определяемых по Пухликову-Хованскому) в вещественном пространстве с дополнительной комбинаторно-геометрической структурой (разложением в прямую сумму и набором линейных функций). Пространство с такой дополнительной структурой называется струнным. В подходящем струнном пространстве, применяя композицию выпукло-геометрических операторов Демазюра к точке, можно получить выпуклые цепи с заданными экспоненциальными суммами по целым точкам. В частности, при специальном построении струнного пространства (по матрице Картана редуктивной группы) можно получить выпуклые цепи, кодирующие характеры Демазюра неприводимых представлений группы. Во многих случаях эти выпуклые цепи оказываются многогранниками, в частности, в случае группы $GL_n$ так можно получить многогранники Гельфанда-Цетлина. Для симплектической группы получаются многогранники, отличные от ранее известных в теории представлений. В статье также сформулирована гипотеза о явной конструкции многогранников Ньютона–Окунькова разрешений Ботта–Самельсона многообразий Шуберта через выпукло-геометрические операторы разделённых разностей. Кроме того, эти операторы позволяют получить и многогранники Гроссберга–Каршон, которые являются многогранниками Ньютона гладких торических вырождений многообразий Ботта–Самельсона (вырождений, которые строятся путём деформации комплескной структуры).

Основное приложение выпукло-геометрических операторов разделённых разностей состоит в эффективном описании многогранников Ньютона-Окунькова разрешений Ботта-Самельсона многообразий Шуберта. Интересно также изучить взаимосвязь многогранников, полученных с помощью выпукло-геометрических операторов Демазюра (1) и многогранников, возникающих в теории представлений, таких как струнные многогранники Беренштейна-Зелевинского-Литтельманна (2) и многогранники Винберга, построенные в недавних работах Литтельманна–Фейгина–Фурье (3). Например, для $GL_n$ при подходящих выборах и (1), и (2) совпадают с многогранниками Гельфанда-Цетлина, но не совпадают с (3). Для $Sp(4)$ имеющиеся примеры (1) не совпадают ни с (2), ни с (3). В настоящий момент изучаются остальные примеры (1) для $Sp(4)$ и проясняется их связь с симплектическими многогранниками Гельфанда–Цетлина.

## 14.2. Сферические многообразия и дивизориальные вееры

Выложена новая версия работы [АКР] (совместно с К.Альтманном и Л. Петерсеном), в которой существенно уточнены основные результаты. По крашеному вееру сферического многообразиы явно построен дивизориальный веер для действия некоторого тора, естественным образом связанного с каждым сферическим однородным пространством. Дивизориальный веер даёт исходное сферическое многообразие для всех сферических многообразий минимального ранга. Сферические многообразия минимального ранга включают в себя такие интересные подклассы сферических многообразий, как орисферические многообразия и компактификации редуктивных групп. Также приведён пример с нетривиальным действием тора, показывающий, что условие минимального ранга существенно, и для сферических многообразий не минимального ранга полное описание их дивизориального веера требует дополнительных комбинаторных данных.

Методы, развитые для описания дивизориальных вееров сферических многообразий минимального ранга, можно применять и для других сферических многообразий. Для этого нужно получить явное комбинаторное описание инвариантного относительно действия тора аффинного покрытия сферического многообразия. В случае многообразий минимального ранга такое описание существует (аффинные карты кодируются максимальными конусами крашеного веера и элементами группы Вейля), в общем случае нужны дополнительные комбинаторные ингредиенты.

## 14.3. Плоские кривые и лагранжевы пространства

Совместная работа В. А. Клепцына и Е. Ю. Смирнова посвящена исследованию многокомпонентных плоских кривых с особенностями типа «самокасание». Каждой такой кривой сопоставляется инвариант, называемый $L$-пространством, и являющийся лагранжевым подпространством в четномерном векторном пространстве над полем $\mathbf{F}_2$ со стандартной симплектической формой. Этот инвариант обобщает понятие матрицы пересечений для оснащенной хордовой диаграммы обычной (однокомпонентной) плоской кривой. Описывается поведение этого инварианта при действии на многокомпонентных кривых морсовских перестроек и движений Васильева первого и второго рода. Кроме того, на множестве $L$-пространств может быть определена структура биалгебры; имеется вложение биалгебры графов, определенной в работе С. К. Ландо (S. K. Lando, *On a Hopf algebra in graph theory*, J. Combin. Theory Ser. B, 80 (2000), 104–121.), в биалгебру $L$-пространств.

## 14.4. Мультифлаговые многочлены Шура

Многочлены Шура — это семейство симметрических многочленов, введенных Якоби в XIX веке. Они играют важную роль в теории представлений (как характеры представлений полной линейной группы) и в комбинаторике, в особенности в задачах, связанных с таблицами Юнга. Они могут быть выражены через элементарные и полные симметрические многочлены при помощи детерминантных формул, известных как формулы Якоби–Труди. Флаговые многочлены Шура являются обобщениями классических многочленов Шура. Они были определены в 1982 году в работе А. Ласку и М.-П. Шютценберже (A. Lascoux, M.-P. Schützenberger, *Polynômes de Schubert*, C.R. Acad. Sc. Paris 294 (1982), 447-450.). Флаговый многочлен Шура $s_\lambda(b)$ определяется по разбиению $\lambda$ и последовательности возрастающих натуральных чисел $b = (b_1, \ldots, b_n)$. Для флаговых многочленов Шура также имеются детерминантные формулы, полученные И. Гесселем (I. Gessel, *Determinants and plane partitions*, preprint), выражающие их через обычные многочлены Шура.

В совместной работе Г. А. Мерзона и Е. Ю. Смирнова рассматриваются флаговые многочлены Шура для флага вида $b = (h+1, h+2, \ldots, h+n)$; они называются *$h$-флаговыми многочленами Шура*. Получены новые детерминантные формулы, выражающие $h$-флаговые многочлены Шура через 1-флаговые. Как следствие из этого получаются детерминантные формулы, выражающие многочлены Шуберта некоторых вексилярных перестановок через многочлены Шуберта перестановок более простого вида. Главные специализации и специализации в единице некоторых из этих формул имеют интересные приложения к теории плоских разбиений; так, в частности, из них получаются формулы Краттенталера и Кириллова–Фомина для числа плоских разбиений внутри треугольной призмы.

## 14.5. Теория ковыпуклых тел

В совместной работе [KhT] с А.Г. Хованским построена теория ковыпуклых тел, содержащая аналоги известных результатов про выпуклые тела. Ковыпуклым телом называется ограниченное множество, являющееся дополнением до замкнутого выпуклого подмножества замкнутого выпуклого конуса без вершины. Основным результатом является представление ковыпуклого тела в виде виртуального выпуклого тела (взятого со знаком минус). Это представление позволяет переносить многие результаты теории выпуклых тел на ковыпуклые тела почти автоматически. Например, таким образом получаются ковыпуклые аналоги классических неравенств Александрова–Фенхеля, мотивированные коммутативной алгеброй и теорией особенностей. Частный случай этого результата был ранее опубликован Ф. Филластром, при этом мотивировки автора были совсем другими — а именно, он рассматривал геометрию дискретных групп изометрий классических гиперболических пространств. Мы перенесли на ковыпуклые тела утверждения про полиномиальность числа целых точек, выражение для значения многочлена Эрхарта в $-1$ и проч.

## 14.6. Кубические ламинации

В совместной работе с А. Блохом, Л. Оверстигеном и Р. Птачеком (продолжающей указанные ниже препринты [BOPT1], [BOPT2], [BOPT3]) изучается комбинаторная структура пространства кубических инвариантных ламинаций. Инвариантные ламинации в диске были введены Терстоном для описания топологической динамики многочленов с локально связными множествами Жюлиа (*ламинация* — это просто замкнутое семейство хорд единичного диска, не пересекающихся внутри диска; эти хорды называются *листами ламинации*; свойства инвариантности связано с отображением $\sigma_d : z \to z^d$ на единичной окружности). В случае степени 2, инвариантные ламинации позволяют описать комбинаторную модель множества Мандельброта (знаменитая гипотеза MLC эквивалентно утверждению про гомеоморфность множества Мандельброта и его комбинаторной модели). Важное утверждение, позволяющее описать комбинаторную структуру пространства квадратичных инвариантных ламинаций и построить комбинаторную модель множества Мандельброта, состоит в следующем: критические четырехугольники различных квадратичных инвариантных ламинаций не могут быть сторого зацеплены (четырехугольник *критический*, если его 4 вершины имеют только два разных образа относительно $\sigma_2$; два четырехугольника *строго зацеплены*, если их вершины перемежаются на единичной окружности). В случае кубической ламинации, вместо критического четырехугольника следует рассматривать пару, состоящую из двух критических четырехугольников или одного критического четырехугольника и одного листа. Мы доказали результат про незацепленность таких пар. Впрочем, имеется важный (хотя и очень узкий) класс кубических ламинаций, которые являются зацепленными. Трудность изучения комбинаторной структуры кубических ламинаций во многом связана именно с этим классом.

## 14.7. Группы кватернионных решёток

В совместной работе с А. Пахаревым (студент бакалавриата факультета математики НИУ ВШЭ, 3 курс) мы рассматриваем произведение четырехмерных решеток в теле кватернионов, нацеливаясь на построение и изучение некоммутативных аналогов группы классов идеалов. Мы пришли к следующему определению групп кватернионных решеток, которое кажется нам правильным: пусть $H$ — алгебра Гурвица, т.е. ассоциативная композиционная алгебра с единицей, над полем $\mathbf{R}$, например, алгебра кватернионов, а $E \subset H$ — решетка полной размерности в $H$, такая, что $EE = E$ (то есть $E$ является подкольцом) и $\overline{E} = E$. Мы определяем группу решеток $Lat(E)$ как множество решеток $L$ полной размерности в $H$, таких, что $EL = LE = L$ (т.е. $L$ является двусторонним $E$-модулем) и $L\overline{L} = \overline{L}L = E$. Произведение решеток $L$ и $M$ определяется как аддитивная подгруппа в $H$, порожденная всеми попарными произведениями $xy$, где $x \in L$ и $y \in M$. То, что $Lat(E)$ является группой относительно произведения решеток, практически очевидно. Например, если $E$ — кольцо целых квадратичного поля $K \subset \mathbf{C}$, то группа $Lat(E)$ изоморфна прямому произведению группы классов кольца $E$ и окружности $SU(1)$. В случае кватернионных решеток многие группы $Lat(E)$ оказываются конечными. Интересные конечные группы, например, $PGL_2(\mathbf{F}_p)$, могут быть реализованы как подгруппы в группах кватернионных решеток.

## Литература

[K] Valentina Kiritchenko, *Divided difference operators on polytopes*, preprint arXiv:1307.7234 [math.AG], 20 pages

[AKP] Klaus Altmann, Valentina Kiritchenko, Lars Petersen, *Merging divisorial with colored fans*, preprint arXiv:1210.4523v2 [math.AG], 31 pages

[KhT] Askold Khovanskii, Vladlen Timorin, *On the theory of coconvex bodies*, preprint arXiv:1308.1781, 17 pages

[BOPT1] Alexander Blokh, Lex Oversteegen, Ross Ptacek, Vladlen Timorin, *Quadratic-like dynamics of cubic polynomials*, preprint arXiv:1305.5799, 34 pages

[BOPT2] Alexander Blokh, Lex Oversteegen, Ross Ptacek, Vladlen Timorin, *The Main Cubioid*, preprint arXiv:1305.5798, 25 pages

[BOPT3] Alexander Blokh, Lex Oversteegen, Ross Ptacek, Vladlen Timorin, *Laminations from the Main Cubioid*, preprint arXiv:1305.5788, 41 pages

[T] Vladlen Timorin, *Disquisitiones 235*, preprint arXiv:1309.4879, 12 pages

[KK] Valentina Kiritchenko, Amalendu Krishna, *Equivariant cobordism of flag varieties and of wonderful symmetric varieties*, Transformation Groups, **18** (2013), No. 2, pp 391–413

[GKT] Pavel Gusev, Valentina Kiritchenko, Vladlen Timorin, *Counting vertices in Gelfand–Zetlin polytopes*, Journal of Combinatorial Theory, Series A, **120** (2013), pp 960–969

[GTT] Ghys E., Tabachnikov S., Timorin V., *Osculating Curves: Around the Tait-Kneser Theorem*, The Mathematical Intelligencer, **35** (2013), No. 1, pp 61–66

[BOPT0] Blokh A., Oversteegen L., Ptacek R., Timorin V.A., *Dynamical cores of topological polynomials*, Proceedings of the International Conference “Frontiers in Complex Dynamics” celebrating J. Milnor’s 80th Birthday. Princeton : Princeton University Press, 2013

# 15. Изучение асимптотических свойств многообразий над глобальными полями и предельных дзета-функций

Отправной точкой для развития асимптотической теории многообразий над глобальными полями послужила следующая задача: по заданному целому числу $g$ и степени простого числа $q$ найти максимальное число точек на кривой рода $g$ над конечным полем $\mathbf{F}_q$. Проблема оказалась сложной, и полный ответ сейчас получен для $g = 1$ и $g = 2$. Также существуют частные ответы для $g = 3$, полученные изучением якобианов среди абелевых многообразий размерности 3, найдены K. Lauter, G. Lachaud, C. Ritzenthaler и А. Зыкиным (зам. зав. Лабораторией алгебраической геометрии).

В. Дринфельд, С. Влэдуц и далее М. Цфасман получили интересные результаты, рассматривая эту проблему с другой точки зрения. А именно, они доказали асимптотические границы на число точек при $g \to \infty$ и фиксированном $q$. Такие границы могут быть естественно получены рассмотрением более общей проблемы описания асимптотических свойств дзета-функций кривых в семействах. На самом деле подход с использованием дзета-функций оказывается полезным во многих других ситуациях, включая изучение асимптотического количества точек на гладком проективном многообразии над конечным полем, изучение группы Пикара кривых над конечными полями (аналог теоремы Брауэра–Зигеля) и во многих других случаях.

А. Зыкин обобщил многие предыдущие результаты об асимптотических свойствах многообразий над конечным полем. Он определил аксиоматически подходящий класс $L$-функций и дзета-функций, которые могут быть рассмотрены как аналог в случае функционального поля класса Сельберга $L$-функций в характеристике нуль. В частности, этот класс включает все мотивные $L$-функции. Он сформулировал базовые понятия асимптотической теории, такие как понятие асимптотически точного и асимптотически очень точного семейства.

Асимптотическая теория состоит из трёх основных частей. Во-первых, основные неравенства, являющиеся обобщениями неравенств Дринфельда–Влэдуца на асимптотическое количество точек на кривой над конечным полем. Во-вторых, результаты типа теоремы Брауэра–Зигеля, описывающие предельное поведение специальных значений дзета-функций и

$L$-функций. В-третьих, результаты о распределении нулей на критической прямой. Конечно же, все три темы взаимосвязаны. Например, основные неравенства используются в доказательстве результатов, аналогичных теореме Брауэра–Зигеля. Настоящее понимание основных неравенств можно получить только при помощи их интерпретации в смысле положительности некоторой плотности распределения нулей дзета-функций.

Все три темы были развиты А. Зыкиным в общем контексте. Это имело некоторые конкретные приложения. Были обобщены результаты Ихары о константах Эйлера–Кронекера на случай произвольного асимптотически точного семейства многообразий над конечным полем. Были доказаны некоторые оценки в направлении гипотез Кунявского, Цфасмана и Hindry о предельном поведении произведения порядка групп Тэйта–Шафаревича и регулятора эллиптической поверхности над конечным полем. Также были получены некоторые результаты о распределении нулей, влекущие нетривиальные оценки на рост аналитического ранга в семействах эллиптических поверхностей над конечным полем.

## 15.1. Асимптотика средних значений $L$-функций модулярных форм, подкрученных на характеры Дирихле

Известно, что в стандартной асимптотике (деление на логарифм корня из дискриминанта) семейства абелевых расширений являются асимптотически плохими (то есть предельная дзета-функция тождественно равна нулю). Y. Ihara [8] предпринял изучение более тонкой асимптотики для циклотомических расширений $\mathbf{Q}$. Более общо, он изучал средние значения для $L$-функций характеров Дирихле (Гекке) в случае $\mathbf{Q}, \mathbf{F}_q(t)$, а также квадратичных расширений этих полей.

Сотрудником лаборатории А. И. Зыкиным были предприняты исследования более тонких асимптотических свойств $L$-функций в семействах, которые не удаётся извлечь из стандартной асимптотики (рост порядка логарифма аналитического кондуктора). Совместно с P. Lebacque они занимались следующей задачей. Пусть фиксирована примитивная форма $f \in S_k(\Gamma_0(N))$. Исследуется рост средних значений

$$\lim_{N\to\infty} \mathrm{Avg}_\chi |\overline{L(s,f,\chi)}^{iz_1/2} L(s,f,\chi)^{iz_2/2}|^2$$

для $L$-функции модулярной формы $f$, скрученной на характер $\chi$, когда $\chi$ пробегает нетривиальные характеры $\mod N$, а $N$— простое число. Для подобных средних, аналогично случаю $L$-функций характеров Дирихле (без модулярной формы), исследованному в работах Y. Ihara, при $\Re s > \frac{3}{4}$ получено выражение в терминах некоторой “$M$-функции.” Получающиеся $M$-функции имеют эйлеровское произведение и другие замечательные аналитические свойства. Кроме того, было получено описание поведения средних $\lim\limits_{N\to\infty} \mathrm{Avg}_\chi \Phi(L(s,f,\chi))$ для непрерывных и ограниченных тестовых функций $\Phi$. Ответ, как и у Ихары, описывается в терминах преобразования Фурье $M$-функций.

## 15.2. Построение асимптотической теории для $L$-функций в характеристике ноль

А. И. Зыкиным было начато построение асимптотической теории семейств $L$-функций в характеристике ноль по аналогии со случаем $L$-функций над конечными полями. Были рассмотрены примеры семейств $L$-функций растущей степени, естественно возникающие в теории чисел: тензорные степени и симметрические степени $L$-функций, ассоциированных с модулярными формами. В предположении обобщённой гипотезы Римана были получены результаты о равномерной распределённости нулей таких $L$-функций на критической прямой.

## 15.3. Двойственности Серра для поверхностей и адельный комплекс

В совместной работе сотрудников лаборатории Р. Я. Будылина и С. О. Горчинского [2] исследовалась задача пересечения адельных групп с разными индексами на алгебраической поверхности над произвольным полем. Адели для поверхностей были введены А. Н. Паршиным [12] как обобщение классических аделей для глобальных полей, в частности, полей рациональных функций на кривых (над конечным полем). Напомним, что адели на кривой это ограниченное произведение по всем точкам на кривой пополнений в точке поля рациональных функций $\prod'_x K_x$. В многомерном обобщении аделей точки на кривых заменяются флагами, то есть последовательностями вложенных неприводимых подмногообразий. В соответствии с наборами коразмерностей членов флага определяются некоторые адельные группы. Точнее, для поверхности $X$ и подмножества $I \subset \{0,1,2\}$ определена адельная группа $\mathbf{A}_X(I,\mathcal{O}_X)$ (эта конструкция является частным случаем адельной группы $\mathbf{A}_X(I,\mathcal{F})$, определённой для произвольного квазикогерентного пучка $\mathcal{F}$ на $X$ А. А. Бейлинсоном [1]). Например, $\mathbf{A}_X(1,\mathcal{O}_X)$ это $\prod' K_x$, а $\mathbf{A}_X(2,\mathcal{O}_X)$ это $\prod' K_C$, где $K_x$ и $K_C$ – это пополнения поля рациональных функций поверхности в точке $x$ и в кривой $C$ соответственно. Для $I \subset J$ имеется каноническое отображение $\varphi_{IJ}\colon \mathbf{A}_X(I,\mathcal{O}_X) \to \mathbf{A}_X(J,\mathcal{O}_X)$. В статье [2] было доказано, что это отображение инъективно, если поверхность $X$ регулярна. Таким образом, все адельные группы являются подгруппами в $\mathbf{A}_X(\{0,1,2\},\mathcal{O}_X)$, и возникает естественный вопрос: верно ли, что группа $\mathbf{A}_X(I\cap J,\mathcal{O}_X)$ равна пересечению $\mathbf{A}_X(I,\mathcal{O}_X)\cap\mathbf{A}_X(J,\mathcal{O}_X)$? Напрашивается ответ, что равен. Ведь то, что получится в пересечении - элемент лежащий в некотором произведении по флагам, но он "не зависит" от многообразий во флаге, чья коразмерность не лежит в пересечении. Заметим, что аналогичный вопрос для рациональных (то есть где присутствует лишь локализация и нет пополнения) аделей был уже решен положительно [12, §2]. Но пополнения существенно усложняют задачу. Более того для пополненных аделей оказалось, что пересечение не всегда есть адельная группа, здесь оказывается важной мощность основного поля.

Для проективной поверхности $X$ положительный ответ на данный вопрос был получен в [6] при помощи глобальных методов. Позже это использовалось в работе [11] при доказательстве теоремы Римана–Роха для поверхностей адельными методами. В статье [2] даётся положительный ответ на поставленный выше вопрос в случае, если основное поле несчётно, и приводится контрпример в аффинном случае для не более чем счётного поля. Также дан положительный ответ на поставленный выше вопрос в проективном случае для произвольного локально свободного пучка конечного ранга. Доказательство во многом близко следует доказательству [6, предл. 4.3] для структурного пучка. Кроме того, удалось описать пересечение для наиболее интересного случая $\mathbf{A}_1 \cap A_2$. Элементы этого пересечения – это ряды регулярных функций, сходящихся в каждой схемной точке по соответствующей метрике.

Вопрос обобщения на случай большей размерности это хороший открытый вопрос, которым Р.Будылин планирует заниматься в следующем году. На самом деле, неизвестно даже, инъективно ли отображение $\varphi_{IJ}$ (в том числе для регулярных многообразий). Локально инъективность этого отображения сводится к интересным вопросам из коммутативной алгебры, касающимся локализации и пополнения по разным идеалам. Глобально ситуация проще если многообразие проективно, например, аналоги всех утверждений статьи [2] верны для ограниченных аделей на проективных коэн–маколеевых многообразиях произвольной размерности [10, Теор. 4, 5].

## 15.4. Когомологии де Рама гладкой поверхности и адельный комплекс

Одно из применение двумерных аделей связано с алгебраическими когомологиями де Рама. С. Горчинским совместно с Д. Щедриной получено новое доказательство формулы, выражающей когомологий де Рама гладкой поверхности в терминах рациональных дифференциальных форм на ней и на кривых на ней. Данная формула является обобщением хорошо известной классической формулы, выражающий первые когомологии де Рама римановой поверхности как фактор пространства форм третьего рода по точным рациональным формам. Идея доказательства заключается в применении адельного комплекса к комплексу де Рама и в вычислении когомологий де Рама для каждого из адельных колец. При этом наиболее нетривиальной задачей является вычисление когомологий де Рама кольца аделей, связанного с флагами вида точка и поверхность. В этом случае применяется некоторое естественное утверждение о локализации алгеброидов Ли, являющееся алгебраическим вариантом одного утверждения из смешанной теории Ходжа.

## 15.5. Мотивные дзета-функции

Для изучения мотивной дзета-функции важным понятием является симметрическая степень объектов в тензорной $\mathbf{Q}$-линейной категории. Естественно изучить также и симметрические степени с целыми коэффициентами. Нетривиальность задачи тут заключается в том, что идемпотенты, задающие симметрические степени, имеют рациональные коэффициенты. Вместо применения идемпотента в целочисленной ситуации предлагается переходить к фактору по действию симметрической группы на степени объекта. Для приложений оказывается важным изучить, уважает ли такая операция некоторые специальные отношения эквивалентности между объектами. С. Горчинским совместно с В. Гулецким доказано, что симметрическая степень уважает $\mathbf{A}^1$-гомотопическую эквивалентность между мотивными пространствами. Это влечет за собой существование левых производных симметрических степеней на нестабильной мотивной гомотопической теории, важных для дальнейших приложений.

## 15.6. Некоторые элементы группы Брауэра симплектических разрешений в характеристике $p$

Симплектические разрешения играют важную роль в разных разделах математики, таких как геометрическая теория представлений, теория деформаций. Недавнее эмпирическое открытие, также известное как гипотеза Безрукавникова–Окунькова, частные случаи которой среди прочего доказываются в работах ([4], [5], [9]), открывает глубинную связь между квантовыми когомологиями симплектических разрешений и теорией представлений их квантований.

Основным инструментом для изучения этого феномена является разработанная Безрукавниковым технология редукции в характеристику $p$ и изучения получающихся таким образом алгебр Адзумаи. Первый шаг к доказательству гипотезы Безрукавникова–Окунькова в полной общности состоит в том, чтобы показать, что изучаемые алгебры Адзумаи подымаются с базы разрешения. Этот факт был известен в случае факторособенности [3] и нильпотентного конуса алгебры Ли [5], но совершенно не ясен для произвольного симплектического разрешения. В совместной работе Д. Кубрака и Р. Травкина предпринята попытка это доказать. В полной общности сделать этого не удаётся, но явно указывается препятствие в первых когомологиях $p$-кручения относительного Пикара, которое гипотетически должно быть равно нулю. Также, при помощи изящного подхода с кэлеровыми дифференциалами, утверждение полностью доказывается для колчанных многообразий, что уже само по себе является большим прогрессом в этом вопросе.

## Литература

[1] А. А. Бейлинсон, *Вычети и адели*, Функц. Анал. и Прил., **14** (1980), 34–35.

[2] Р. Я. Будылин, С. О. Горчинский,*Пересечения адельных групп на поверхности*, Математический сборник, **204**:12(2013), 3–15.

[3] R. Bezrukavnikov, D. Kaledin, *McKay equivalence for symplectic resolutions of singularities*, arXiv: 0401002.

[4] R. Bezrukavnikov, I. Losev, *Etingof conjecture for quantized quiver varieties*, arXiv: 1309.1716.

[5] R. Bezrukavnikov, I. Mirković, D. Rumynin, *Localization of modules for a semi-simple Lie algebra in prime characteristic*, Ann. of Math. (2) **167** (2008), no. 3, pp. 945–991.

[6] T. Fimmel, A. N. Parshin, *An introduction to the higher adelic theory*, preprint

[7] S. Gorchinskiy, V. Guletskii, *Positive model structures for abstract symmetric spectra*, arXiv:1108.3509.

[8] Y. Ihara, *On "M-functions" closely related to the distribution of $L'/L$-values*, Publ. RIMS, Kyoto Univ. **44** (2008), 893–954.

[9] D. Maulik, A. Okounkov, *Quantum groups and quantum cohomology*, arXiv: 1211.1287.

[10] Д. В. Осипов, *Соответствие Кричевера для алгебраических многообразий*, Изв. Мат., **65**:5 (2001), 941–975.

[11] Д. В. Осипов, А. Н. Паршин, *Гармонический анализ и теорема Римана–Роха*, Докл. Мат., **84**:3 (2011), 826-њ829.

[12] А. Н. Паршин, *Об арифметике двумерных схем I. Ограничения и вычеты*, Изв. Акад. Наук СССР, **40**:4 (1976), 736–773.

[13] A. Zykin, *Asymptotic properties of zeta functions over finite fields*, arXiv:1310.6107.

# 16. Публикации лаборатории

## Литература

[1] Abramov Y. V.. *A resultant system as the set of coefficients of a single resultant*, Functional Analysis and Its Applications. 2013. Vol. 47. No. 3. P. 82-87.

[2] Amerik, Ekaterina; Campana, Frédéric *On families of Lagrangian tori on hyperkähler manifolds*, J. Geom. Phys. 71 (2013), 53-57.

[3] Fedor Bogomolov, Böhning C. *Stable cohomology of alternating groups*, Central European Journal of Mathematics. 2014. Vol. 12. No. 2. P. 212-228.

[4] Fedor Bogomolov, Böhning C. *Isoclinism and Stable Cohomology of Wreath Products*, In bk.: Birational geometry, rational curves, and arithmetic. Boston: Birkhäuser, 2013. Ch. 3. P. 57-76.

[5] F. A. Bogomolov, B. Hasset, Y. Tschinkel (editors) *Birational geometry, rational curves, and arithmetic*, Boston: Birkhäuser, 2013.

[6] F. Bogomolov, I. Karzhemanov, K. Kuyumzhiyan. *Unirationality and existence of infinitely transitive models*, In bk.: Birational geometry, rational curves, and arithmetic. Boston: Birkhäuser, 2013. Ch. 4. P. 77-92.

[7] Bogomolov, Fedor; Kulikov, Viktor S., *On the irreducibility of Hilbert scheme of surfaces of minimal degree*, Cent. Eur. J. Math. 11 (2013), no. 2, 254-263

[8] Bogomolov F. A., Prokhorov Y.. *On stable conjugacy of finite subgroups of the plane Cremona group, I*, Central European Journal of Mathematics. 2013. Vol. 11. No. 12.

[9] Bogomolov F. A., Rovinsky M.. *Collineation group as a subgroup of the symmetric group* Central European Journal of Mathematics. 2013. Vol. 11. No. 1. P. 17-26.

[10] Bogomolov, Fedor; Tschinkel, Yuri, *Galois theory and projective geometry*, Comm. Pure Appl. Math. 66 (2013), no. 9, 1335-1359.

[11] Бондал А. И. *Операции над t-структурами и превратные когерентные пучки*, Известия Российской академии наук. Серия математическая. 2013, 77 (4) pp. 5-30.

[12] I. Cheltsov, L. Katzarkov, V. Przyjalkowski, *Birational geometry via moduli spaces*, Birational geometry, rational curves, and arithmetic, Boston: Birkhäuser, 2013. Ch. 5. P. 93-132.

[13] Cheltsov Ivan, Wilson A. *Del Pezzo Surfaces with Many Symmetries*, Journal of Algebraic Geometry. 2013. Vol. 23. No. 3. P. 1257-1289.

[14] Cheltsov Ivan, Park J., Won J. *Log canonical thresholds of certain Fano hypersurfaces*,

[15] Abouzaid, Mohammed; Auroux, Denis; Efimov, Alexander I.; Katzarkov, Ludmil; Orlov, Dmitri, *Homological mirror symmetry for punctured spheres*, J. Amer. Math. Soc. 26 (2013), no. 4, 1051-1083.

[16] Feigin E., Cherulli Irelli G., Reineke M. *Degenerate flag varieties: moment graphs and Schröder numbers*, Journal of Algebraic Combinatorics. 2013. Vol. 38. No. 1. P. 159-189.

[17] Feigin E., Cherulli Irelli G., Reineke M. *Desingularization of quiver Grassmannians for Dynkin quivers*, Advances in Mathematics. 2013. No. 245. P. 182-207.

[18] Feigin E., Finkelberg M. V.. *Degenerate flag varieties of type A: Frobenius splitting and BW theorem*, Mathematische Zeitschrift. 2013. Vol. 275. No. 1-2. P. 55-77.

[19] Finkelberg M. V., *Laumon spaces*, Mathematical Sciences. 2013. Vol. 51. No. 596. P. 46-51.

[20] Finkelberg M., Braverman A., *Pursuing the double affine Grassmannian III: Convolution with affine Zastava*, Moscow Mathematical Journal. 2013. Vol. 13. No. 2. P. 233-265.

[21] Фонарев А. В. *Минимальные лефшецевы разложения производных категорий грассманианов* Известия Российской академии наук. Серия математическая. 2013, 77 (5) pp. 203-224.

[22] Galkin, Sergey; Shinder, Evgeny, *Exceptional collections of line bundles on the Beauville surface*, Adv. Math. 244 (2013), 1033-1050. 1

[23] Cruz Morales, John Alexander; Galkin, Sergey, *Upper bounds for mutations of potentials*, SIGMA Symmetry Integrability Geom. Methods Appl. 9 (2013), Paper 005, 13 pp.

[24] Будылин Р. Я., Горчинский С. О. *Пересечение адельных групп на поверхности*, Математический сборник. 2013. Т. 204 (12) pp. 3-14

[25] Gorchinskiy S., Orlov D. *Geometric phantom categories*, Publications mathématiques de l'IHÉS. 2013. Vol. 117. No. 1. P. 329-349.

[26] Gorchinskiy, S.; Guletskii, V. *Non-trivial elements in the Abel-Jacobi kernels of higher-dimensional varieties*, Adv. Math. 241 (2013), 162-191.

[27] Горчинский С. О. *Порождаемость модулей и трансцендентность нуль-циклов*, Известия Российской академии наук. Серия математическая, 2013, 77 (4) pp. 55-58.

[28] Gillet, Henri; Gorchinskiy, Sergey; Ovchinnikov, Alexey, *Parameterized Picard-Vessiot extensions and Atiyah extensions*, Adv. Math. 238 (2013), 322-411.

[29] Gusev P., Kiritchenko V., Timorin V., *Counting vertices in Gelfand-Zetlin polytopes* Journal of Combinatorial Theory, Series A. 2013. Vol. 120. P. 960-969.

[30] Heiderich, Florian, *On Hasse-Schmidt rings and module algebras*, J. Pure Appl. Algebra 217 (2013), no. 7, 1303-1315.

[31] Каледин Д. Б. *Циклотомические комплексы*, Известия Российской академии наук. Серия математическая. 2013, 77 (5) pp. 3-70.

[32] Kiritchenko, Valentina; Krishna, Amalendu, *Equivariant cobordism of flag varieties and of symmetric varieties*, Transform. Groups 18 (2013), no. 2, 391-413.

[33] Куликов В. С., Харламов В. М. *Полугруппы накрытий*, Известия Российской академии наук. Серия математическая. 2013, 77 (3) pp. 163-198.

[34] Вик. С. Куликов *Разложения на множители в конечных группах*, Математический сборник. 2013, 204, (2) pp. 87-116.

[35] Levin A., Olshanetsky M., Smirnov A., A. Zotov, *Characteristic classes of $SL(N)$-bundles and quantum dynamical elliptic R-matrices*, Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical, 2013, Vol. 46. No. 3, P. 035201.

[36] Львовский С. М. *Семейства прямых и гауссовы отображения*, М.: МЦНМО, 2013, 40 страниц.

[37] Khoroshkin, A., Markarian, N., Shadrin, S. *Hypercommutative Operad as a Homotopy Quotient of $BV$*, Communications in Mathematical Physics. 2013. Vol. 322. No. 3. P. 697-729.

[38] Мутафян Г. С., Фейгин Б. Л. *Квантовая тороидальная gl(1): вычисление характеров некоторых представлений как производящих функций плоских разбиений*, Функциональный анализ и его приложения, 2013, 47 (1) pp. 62-76.

[39] Нетай И. В. *Алгебры сизигий вложений Сегре*, Функциональный анализ и его приложения (2013), 47 (3) pp. 54-74.

[40] Prokhorov, Yuri $G$-Fano threefolds, II. Adv. Geom. 13 (2013), no. 3, 419-434. 14J45 (14E30 14J30)

[41] Prokhorov, Yuri, *G-Fano threefolds, I*, Adv. Geom. 13 (2013), no. 3, 389-418.

[42] Prokhorov, Yu. G. *On birational involutions of* $\mathbf{P}^3$, Izv. Ross. Akad. Nauk Ser. Mat. 77 (2013), no. 3, 199–222; translation in Izv. Math. 77 (2013), no. 3, 627-648 1

[43] Prokhorov, Yu. G. *On Fano threefolds of large Fano index and large degree*, Mat. Sb. 204 (2013), no. 3, 43–78; translation in Sb. Math. 204 (2013), no. 3-4, 347-382.

[44] Kishimoto T., Yuri Prokhorov, Zaidenberg M. *Unipotent Group Actions on Del Pezzo Cones*, Algebraic Geometry. 2014. Vol. 1. No. 1. P. 46-56.

[45] Ilten, Nathan Owen; Lewis, Jacob; Przyjalkowski, Victor *Toric degenerations of Fano threefolds giving weak Landau-Ginzburg models*, J. Algebra 374 (2013), 104-121.

[46] Пржиялковский В. В. Слабые модели Ландау-Гинзбурга гладких трехмерных многообразий Фано Известия Российской академии наук. Серия математическая, 2013, 77 (4), pp. 135-160.

[47] Смирнов Е. Ю. *Диаграммы Юнга, плоские разбиения и знакочередующиеся матрицы*, Москва, МЦНМО, 2014.

[48] Ghys E., Tabachnikov S., Timorin V., *Osculating Curves: Around the Tait-Kneser Theorem*, The Mathematical Intelligencer, **35** (2013), No. 1, pp 61–66

[49] Blokh A., Oversteegen L., Ptacek R., Timorin V.A., *Dynamical cores of topological polynomials*, Proceedings of the International Conference “Frontiers in Complex Dynamics” celebrating J. Milnor’s 80th Birthday. Princeton : Princeton University Press, 2013

[50] Andrey S. Trepalin. *Rationality of the quotient of* $\mathbf{P}^2$ *by finite group of automorphisms over arbitrary field of characteristic zero*, Central European Journal of Mathematics. 2014. Vol. 12. No. 2. P. 229-239.

[51] Tyurin N. A., *Exotic Chekanov tori in toric symplectic varieties*, Journal of Physics: Conference Series. 2013. Vol. doi:10.1088/1742-6596/411/1/012028. No. 411. P. 1-9.

[52] Grantcharov G., Verbitsky M., *Calibrations in hyper-Kähler geometry*, Communications in Contemporary Mathematics. 2013. Vol. 15. No. 2. P. 1-27.

[53] Liviu Ornea, Misha Verbitsky, *Locally conformally Kahler manifolds admitting a holomorphic conformal flow,* Mathematische Zeitschrift, Volume 273, Issue 3 (2013), Page 605-611.

[54] Ornea L., Verbitsky M., Vuletescu V. *Blow-ups of locally conformally Kahler manifolds*, International Mathematics Research Notices. 2013. No. 12. P. 2809-2821.

[55] Soldatenkov A. O., Verbitsky M.. *Holomorphic Lagrangian fibrations on hypercomplex manifolds*, International Mathematics Research Notices, 2013 doi:10.1093/imrn/rnt218

[56] Misha Verbitsky *Pseudoholomorphic curves on nearly Kahler manifolds*, Communications in Mathematical Physics November 2013, Volume 324, Issue 1, pp 173-177.

[57] Misha Verbitsky *A global Torelli theorem for hyperkahler manifolds*, Duke Math. J. Volume 162, Number 15 (2013), 2929-2986.

[58] Zhgoon V. S.. *On the Local Structure Theorem and equivariant geometry of cotangent bundles*, Journal of Lie Theory. 2013. Vol. 23. P. 607-638.

[59] Платонов В. П., Петрунин М. М., Жгун В. С. *К вопросу о простоте якобианов кривых рода 2 над полем рациональных чисел с точками кручения больших порядков*, Доклады академии наук. 2013, 450. (4) pp. 385-388.

# 17. Препринты лаборатории

## Литература


[1] Ekaterina Amerik, Par Kurlberg, Khoa Nguyen, Adam Towsley, Bianca Viray, Jose Felipe Voloch, *Evidence for the Dynamical Brauer-Manin Criterion*, arXiv:1305.4398.

[2] Ekaterina Amerik, Frédéric Campana, *On families of lagrangian tori on hyperkaehler manifolds*, arXiv:1303.0613, 9 pages.

[3] Fedor Bogomolov, Bruno De Oliveira *Closed symmetric 2-differentials of the 1st kind*, arXiv:1310.0061.

[4] Fedor Bogomolov, Christian Böhning, *On uniformly rational varieties*, arXiv:1307.0102, 18 pages.

[5] Fedor Bogomolov, Yuri Prokhorov, *On stable conjugacy of finite subgroups of the plane Cremona group, I*, arXiv:1306.3045, 7 pages.

[6] Alexey Bondal *Operations on t-structures and perverse coherent sheaves*, arXiv:1308.2549, 24 pages.

[7] Alexey Bondal, Ilya Zhdanovskiy. *Coherence of relatively quasi-free algebras* IPMU13-0053. IPMU13-0053. IPMU, 2013

[8] Ivan Cheltsov, *Del Pezzo surfaces and local inequalities*, arXiv:1311.5260, 13 pages.

[9] Ivan Cheltsov, Jihun Park, Joonyeong Wonm *Cylinders in singular del Pezzo surfaces*, arXiv:1311.5257, 30 pages.

[10] Ivan Cheltsov, Jihun Park, *Birationally rigid Fano threefold hypersurfaces*, arXiv:1309.0903, 95 pages.

[11] Ivan Cheltsov, Yanir Rubinstein, *Asymptotically log Fano varieties*, arXiv:1308.2503.

[12] Ivan Cheltsov, Jihun Park, Joonyeong Wonm *Affine cones over smooth cubic surfaces*, arXiv:1303.2648, 23 pages.

[13] Ivan Cherednik, Evgeny Feigin, *Extremal part of the PBW-filtration and E-polynomials*, arXiv:1306.3146

[14] Alexander I. Efimov, *Homotopy finiteness of some DG categories from algebraic geometry*, arXiv:1308.0135, 58 pages.

[15] Evgeny Feigin, *Highest weight orbits: PBW and toric degenerations*, arXiv:1306.1292, 16 pages

[16] Michael Finkelberg, Leonid Rybnikov, *Quantization of Drinfeld Zastava in type C*, arXiv:1306.5427, 14 pages.

[17] Sergey Galkin, Ludmil Katzarkov, Anton Mellit, Evgeny Shinder, *Minifolds and Phantoms*, arXiv:1305.4549, 20 pages.

[18] Tom Coates, Alessio Corti, Sergey Galkin, Alexander Kasprzyk, *Quantum Periods for 3-Dimensional Fano Manifolds*, arXiv:1303.3288, 103 pages

[19] John Alexander Cruz Morales, Sergey Galkin, *Upper Bounds for Mutations of Potentials*, arXiv:1301.4541, 13 pages

[20] Roman Budylin, Sergey Gorchinskiy, *Intersections of adelic groups on a surface*, arXiv:1310.2092, 11 pages

[21] Alexander Kuznetsov, *A simple counterexample to the Jordan-Hölder property for derived categories*, arXiv:1304.0903.

[22] D. Kaledin, *Beilinson conjecture for finite-dimensional associative algebras*, arXiv:1312.4069, 15 pages.

[23] D. Kaledin, *Trace theories and localization*, arXiv:1308.3743, 47 pages.

[24] Valentina Kiritchenko, *Divided difference operators on polytopes*, arXiv:1307.7234, 20 pages, 5 figures.

[25] Viatcheslav Kharlamov, Viktor Kulikov, *On numerically pluricanonical cyclic coverings*, arXiv:1308.0516, 21 pages

[26] A. Levin, M. Olshanetsky, A. Zotov *Classification of Isomonodromy Problems on Elliptic Curves*, arXiv:1311.4498, 65 pages.

[27] G. Aminov, S. Arthamonov, A. Levin, M. Olshanetsky, A. Zotov, *Painleve Field Theory*, arXiv:1306.3265, 67 pages.

[28] Yu. Burman, Serge Lvovski, *On projections of smooth and nodal plane curves*, arXiv:1311.1904, 18 pages

[29] Serge Lvovski, *On surfaces with zero vanishing cycles*, arXiv:1305.2205, 8 pages,

[30] Mayanskiy E., *Abelian automorphism groups of cubic fourfolds*, arXiv:1308.5150, 259 pages.

[31] Mayanskiy E., *Poisson cohomology of two Fano threefolds*, arXiv:1303.5916, 24 pages.

[32] Sergey Rybakov, *DG-modules over de Rham DG-algebra*, arXiv:1311.7503, 21 pages.

[33] Yuri Prokhorov, *On stable conjugacy of finite subgroups of the plane Cremona group, I*, arXiv:1308.5698, 24 pages.

[34] Yuri Prokhorov, *2-elementary subgroups of the space Cremona group*, arXiv:1308.5628

[35] Yuri Prokhorov, Constantin Shramov *Jordan property for groups of birational selfmaps*, arXiv:1307.1784, 18 pages

[36] Victor Przyjalkowski, Constantin Shramov *On Hodge numbers of complete intersections and Landau–Ginzburg models*, arXiv:1305.4377, 15 pages.

[37] Sergey Rybakov, *DG-modules over de Rham DG-algebra*, arXiv:1311.7503, 21 pages.

[38] Vladlen Timorin, *Disquisitiones 235*, 12 pages, arXiv:1309.4879.

[39] Askold Khovanskii, Vladlen Timorin *On the theory of coconvex bodies.* 17 pages, 1 figure, arXiv:1308.1781.

[40] Alexander Blokh, Lex Oversteegen, Ross Ptacek, Vladlen Timorin *Quadratic-like dynamics of cubic polynomials,* 34 pages, 1 figure, arXiv:1305.5799.

[41] Alexander Blokh, Lex Oversteegen, Ross Ptacek, Vladlen Timorin *The Main Cubioid*, 25 pages, arXiv:1305.5798.

[42] Alexander Blokh, Lex Oversteegen, Ross Ptacek, Vladlen Timorin *Laminations from the Main Cubioid* 41 pages, 4 figures, arXiv:1305.5788.

[43] Askold Khovanskii, Vladlen Timorin, *Aleksandrov-Fenchel inequality for coconvex bodies*, 5 pages, arXiv:1305.4484.

[44] Misha Verbitsky *Degenerate twistor spaces for hyperkahler manifolds*, arXiv:1311.5073, 20 pages.

[45] Ljudmila Kamenova, Steven Lu, Misha Verbitsky *Kobayashi pseudometric on hyperkahler manifolds*, arXiv:1308.5667, 21 pages.

[46] Taras Panov, Yuri Ustinovsky, Misha Verbitsky *Complex geometry of moment-angle manifolds*, arXiv:1308.2818, 24 pages.

[47] Misha Verbitsky *Ergodic complex structures on hyperkahler manifolds*, arXiv:1306.1498, 22 pages.

[48] Frédéric Campana, Jean-Pierre Demailly, Misha Verbitsky, *Compact Kähler 3-manifolds without non-trivial subvarieties*, arXiv:1304.7891, 11 pages.

[49] Andrey Soldatenkov, Misha Verbitsky *Holomorphic Lagrangian fibrations on hypercomplex manifolds*, arXiv:1301.0175, 16 pages.

# 18. Приложение. Флориан Хайдерих: отчет постдока лаборатории. Generalized differentials and prolongation spaces

Sweedler introduced the notions of "$D$-measuring" if $D$ is a coalgebra and of "$D$-module algebra" if $D$ is a bialgebra, cf. [7]. They can be used to describe "rings with operators", for instance differential rings or difference rings. Recently, Moosa and Scanlon defined (generalized) Hasse-Schmidt rings, cf. [4] and [5]. In our article "On Hasse-Schmidt rings and module algebras" [3] we provide a bijection between Hasse-Schmidt systems $\mathcal{D}$ in the sense of Moosa and Scanlon and certain cocommutative coalgebras $D$. This bijection induces a bijection between certain cocommutative bialgebras and unital iterative Hasse-Schmidt systems. Given a unital iterative Hasse-Schmidt system $\mathcal{D}$ and the associated bialgebra $D$, we obtain a bijection between $D$-module algebras and unital iterative $\mathcal{D}$-rings.

In the above mentioned articles Moosa and Scanlon also set up a unified framework for prolongation spaces. They define prolongation spaces as certain Weil restrictions. Although their existence is known in several important cases, the definition is not very explicit. We exploit the above-mentioned equivalence between $\mathcal{D}$-rings and $D$-module algebras to give an explicit construction of the generalized prolongation spaces of Moosa and Scanlon, at least in the case of affine schemes, cf. [2]. For this purpose we introduce generalized differentials and we obtain the prolongation spaces as spectra of these generalized differentials. The generalized differentials unify and generalize the symmetric algebra of the module of Kähler differentials To be more precise, given a coalgebra $D$, a $D$-measuring $\psi\colon D\otimes A \to A$ on a commutative algebra $A$ and any commutative $A$-algebra $B$, we define the generalized differentials as an $A$-algebra $\Omega^D_{B/(A,\psi)}$ together with a $D$-measuring $\Psi_u\colon D\otimes B \to \Omega^D_{B/(A,\psi)}$. They generalize the aforementioned objects, being universal among all $D$-measurings $\Psi\colon D\otimes B \to R$ from $B$ to any commutative $A$-algebra $R$ that extends $\psi$, in the sense that for any such $D$-measuring there exists a homomorphism of $A$-algebras $\phi\colon \Omega^D_{B/(A,\psi)} \to R$ such that $\phi(\Psi_u(d\otimes b)) = \Psi(d\otimes b)$ holds for all $b\in B$ and $d\in D$. We construct a prolongation functor that unifies the following results:

1) Gillet constructs a left adjoint functor for the forgetful functor from the category of differential algebras over a given differential ring $(A,\delta_A)$ to

the category of $A$-algebras, cf. [1]. We recover this result from ours by taking $D$ to be the coordinate ring $k[\mathbf{G}_a]$ of the additive group scheme $\mathbf{G}_a$.

2) Rosen proves an analogue of Gillet's result for higher differential rings, cf. [6]: The forgetful functor from the category of higher differential rings over a given higher differential ring has a left adjoint. We recover this from our results by taking the bialgebra $D$ to be the free $k$-module $k\langle \theta^{(i)} \mid i \in \mathbf{N}\rangle$ with coalgebra structure given by $\Delta(\theta^{(i)}) = \sum_{i_1+i_2=i} \theta^{(i_1)} \otimes \theta^{(i_2)}$ and $\varepsilon(\theta^{(i)}) = \varepsilon_{i,0}$ and algebra structure given by $\theta^{(i)} \cdot \theta^{(j)} := \binom{i+j}{i}\theta^{(i+j)}$ and $1 := \theta^{(0)}$.

3) A similar result for endomorphisms can be found in [8]: The functor from the category of difference algebras over a given difference ring $(A, \sigma_A)$ to the category of $A$-algebras has a left adjoint. We recover this result from ours by taking the bialgebra $D$ to be the polynomial algebra $k[\sigma]$ generated by a group-like element $\sigma$.

## Литература

[1] Henri Gillet. Differential algebra—a scheme theory approach. In *Differential algebra and related topics (Newark, NJ, 2000)*, pages 95–123. World Sci. Publ., River Edge, NJ, 2002.

[2] Florian Heiderich. Generalized differentials and prolongation spaces. preprint, 2013.

[3] Florian Heiderich. On Hasse–Schmidt rings and module algebras. *J. Pure Appl. Algebra*, 217:1303–1315, 2013.

[4] Rahim Moosa and Thomas Scanlon. Jet and prolongation spaces. *J. Inst. Math. Jussieu*, 9(2):391–430, 2010.

[5] Rahim Moosa and Thomas Scanlon. Generalized Hasse-Schmidt varieties and their jet spaces. *Proc. Lond. Math. Soc. (3)*, 103(2):197–234, 2011.

[6] Eric Rosen. Prolongations in differential algebra. *Israel J. Math.*, 166:239–284, 2008.

[7] Moss E. Sweedler. *Hopf algebras.* Mathematics Lecture Note Series. W. A. Benjamin, Inc., New York, 1969.

[8] Michael Wibmer. Algebraic difference equations. Lecture Notes, 2 2013.

# 19. Приложение. Евгений Маянский: отчет постдока лаборатории.

In the paper "Abelian automorphism groups of cubic fourfolds" (E. Mayanskiy, arXiv:1308.5150, 259 pages) the author gives a list of all finite abelian groups which act effectively on smooth cubic fourfolds.

In the paper " Poisson cohomology of two Fano threefolds" (E. Mayanskiy, arXiv:1303.5916, 24 pages), the author studies the variety of Poisson structures and computes Poisson cohomology for two families of Fano threefolds - smooth cubic threefolds and the del Pezzo quintic threefold. Along the way he reobtains by a different method earlier results of Loray, Pereira and Touzet in the special case considered.

# 20. Приложение. Росс Мэтью Птачек: отчет постдока лаборатории.

## 20.1. Laminations and Quadratic Dynamics.

My research examines holomorphic dynamical systems from a topological and combinatorial perspective. This general approach was was pioneered by Thurston in [Thu85] for quadratic polynomials. He developed combinatorial models both for connected, locally connected Julia sets of polynomials and the Mandelbrot set $\mathcal{M}_2$. In both cases, the model was provided by a lamination of the unit disc, $\overline{\mathbf{D}}$. Study of laminations has continued with Kiwi [Kiw04] solidifying the connections between laminations and Julia sets. More recently, Blokh and Oversteegen [BO04] answered an open question about the existence of wandering cutpoints for cubic Julia sets in the affirmative using laminations. A lamination is a closed equivalence relation on the unit circle $\mathbf{S}$ whose classes are finite and unlinked. In this context, unlinkage means that the convex hulls of distinct classes have disjoint interiors. Consequently, the quotient of $\mathbf{S}$ by a lamination yields a locally connected plane continuum.

If $\mathcal{J}_p$ is a connected, locally connected Julia set of degree $d$ polynomial $p$, then it is a compact subset of the Riemann sphere $\mathbf{C}^*$ with unbounded complementary component $U_\infty$. A lamination for $\mathcal{J}_p$ arises by extending the Riemann map $\phi : \mathbf{D} \to U_\infty$ to $\overline{\phi} : \mathbf{S} \to \mathrm{Bd}(U_\infty) = \mathcal{J}_p$. The fibers of $\overline{\phi}$ form the classes of the lamination $\sim_p$ which models $\mathcal{J}_p$. Furthermore, $\overline{\phi}$ induces the angle d-tupling map $\sigma_d$ on $\mathbf{S}$. Since $\mathcal{J}_p$ is invariant under $p$, the classes of $\sim_p$ inherit invariance properties under $\sigma_d$. The dynamics of $\sim_p$ under $\sigma_d$ and $\mathcal{J}_p$ under $p$ are semiconjugate. Conjugacy is obtained after quotienting $\mathbf{S}$ by $\sim_p$. It is often convenient to instead consider the chords of $\mathbf{S}$ which are boundary edges of classes of $\sim_p$. This collection of chords $\mathcal{L}_p$ is a pairwise unlinked collection which also are invariant under $\sigma_d$. Any compact pairwise unlinked collection of chords of $\mathbf{S}$ which are invariant under $\sigma_d$ is called a $d$-invariant geo(metric)-lamination.

Thurston parameterized invariant 2-invariant (quadratic) geo-laminations to produce a combinatorial model of the Mandelbrot set. Since a geo-lamination $\mathcal{L}$ is compact, each has a longest leaf $M_{\mathcal{L}}$, called a major of $\mathcal{L}$ and the image $m_{\mathcal{L}} = \sigma_2(M_{\mathcal{L}})$ the minor. Majors and minors roughly correspond to the critical point and critical value of a quadratic polynomial Thurston's main result on quadratic invariant laminations was the following.

Theorem 20.1 ([Thu85]) QML $= \{m_{\mathcal{L}} \mid \mathcal{L}$ *is quadratic invariant*$\}$ *is a (non-invariant) geo-lamination. with corresponding equivalence relation* $\sim_{\mathrm{QML}}$

The quotient $\mathcal{M}_2^c = \mathbf{S}/\sim_{\mathrm{QML}}$ is Thurston's combinatorial Mandelbrot set. Douady [D91] later established that $\mathcal{M}_2^c$ is a model by proving that that it is a monotone image of $\mathcal{M}_2$. Unfortunately, this still falls short of the ultimate goal, showing that $\mathcal{M}_2$ is locally connected.

## 20.2. Cubic Dynamics

My work tries to extend Thurston's work to cubic polynomials where the analytic picture is even more murky than in the quadratic case. We generalize Thurston's techniques to provide some insights, although there are significant technical difficulties. The existence of two critical points necessitates the use of multiple minors to parameterize cubic invariant laminations. Moreover, every generalization of Thurston minors so far has lead to having laminations with linked minors, preventing a similar combinatorial model. Recent work aims to figure out how prevalent linkage is and find ways to work around it to construct a combinatorial model $\mathcal{M}_3^c$ for $\mathcal{M}_3$, the cubic analog of the Mandelbrot set. Results on linkage are preliminary and have not yet been published. We expect submission in early 2014. Our most fundamental result shows that linked minors force a rigid stucture.

Theorem 20.2 *If $\mathcal{L}$ and $\mathcal{L}'$ have linked minors, then each has periodic minors in the same periodic orbit. Linked minors have compatible dynamics.*

By compatible dynamics we mean that the two minor chords, under iteration of $\sigma_3$ behave like an object of a single lamination. We can apply these results to various classes of laminations. For cubic laminations, this statement becomes more rigid.

Corollary 20.3 *If two cubic laminations have linked minors, then each has the property that each of its critical objects are periodic and in the same orbit.*

Perfect laminations, those for which every chord is a limit of other chords, are an important subfamily which can be defined for any degree. Their importance comes from the fact that any invariant lamination is a finite refinement of a perfect invariant lamination. We have an unlinkage result for perfect laminations.

THEOREM 20.4 *No invariant lamination has minors which are linked with the minors of a perfect lamination.*

This gives the hope of a parameterization in the style of Thurston of the set of perfect laminations for all degree.

Work that has been completed almost exclusively during my brief stay at the Laboratory of Algebraic Geometry is on slices of the space of cubic laminations. Since there are two (mostly) independent minors, slices are considered by fixing a minor $c$ and allowing the other to run. Denote by $\mathcal{S}_c$ the set of all cubic laminations with $c$ as a minor. Given $\sim\in\mathcal{S}$, call $d_\sim$ the other minor of $\sim$. We have the following result.

THEOREM 20.5 $\mathcal{P}_c = \{d_\sim \mid \ \sim\in\mathcal{S}_c\}$ *is a pairwise unlinked collection of chords. Moreover, if two chords of* $\mathcal{P}_c$ *meet at a point of* $\mathbf{S}$*, then they are contained in a simple closed curve consisting of finitely many chords from* $\mathcal{P}_c$.

The only thing missing from this description to obtain laminational slices in the style of Thurston's QML is for the slice to be closed. Unfortunately, it will not be so and future investigation is required to consider the closure. Future work involves both closing these slices and potentially knitting the slices together to form $\mathcal{M}_3^c$.

## Recent Publications

1) A. Blokh, L. Oversteegen, R. Ptacek, V. Timorin, *Dynamical cores of topological polynomials*, to appear in Proceedings for the Conference "Frontiers in Complex Dynamics (Celebrating John Milnor's 80th birthday)"

2) A. Blokh, L. Oversteegen, R. Ptacek, V. Timorin, *Laminations from the Main Cubioid* / Working papers by Cornel, Series math "arxiv.org". 2013. No. 1305.5788.

3) A. Blokh, L. Oversteegen, R. Ptacek, V. Timorin, *Quadratic-like Dynamics of Cubic Polynomials* / Working papers by Cornell University. Series math "arxiv.org". 2013. No. 1305.5799.

4) A. Blokh, L. Oversteegen, R. Ptacek, V. Timorin, *The Main Cubioid* / Working papers by Cornell University. Series math "arxiv.org". 2013. No. 1305.5798

## Литература

[BO04] A. Blokh, L. Oversteegen, *Wandering Triangles Exist*, C. R. Math. (Acad. Sci., Paris), 339 (2004), 365–370

[Kiw04] J. Kiwi, **R***eal laminations and the topological dynamics of complex polynomials*, Advances in Mathematics, **184** (2004), 207–267.

[Thu85] W. Thurston. *The combinatorics of iterated rational maps* (1985), published in: “Complex dynamics: Families and Friends”, ed. by D. Schleicher, A K Peters (2008), 1–108

[D91] A. Douady. *Descriptions of compact sets in* **C** (1991), in “Topological Methods in Modern Mathematics”, ed. L. Goldberg, A. Phillips, Publish or Perish (1993), 425–465.

# 21. Приложение. Аннотации работ о проводимых научных исследованиях привлеченных на основании договоров гражданско-правового характера к работе в Лаборатории сотрудников

# 22. Приложение. Аннотации курсов в рамках программы повышения квалификации сотрудников Лаборатории

# 23. Приложение. Первые страницы публикаций сотрудников лаборатории (представляется в электронном виде)