ГОДОВОЙ ОТЧЕТ (2014)

Лаборатория алгебраической геометрии и ее приложений

РЕФЕРАТ

Ключевые слова: группа Галуа, функциональное поле, рациональная точка многообразия, К3 поверхность, пространство модулей, рациональные кривые, конечное поле, кэлерово многообразие, гиперкэлерово многообразие, теорема Торелли, отображение периодов, специальное лагранжево подмногообразие, лагранжево слоение, калибрация, гиперкомплексное многообразие, некэлерово многообразие, накрытие, монодромия, биголоморфизм, эргодическое действие теорема Торелли, пространство Тэйхмюллера, группа Тэйхмюллера, некоммутативная геометрия, вектора Витта, аддитивные категории, заставы Дринфельда, когомологии Горески-Макферсона, алгебра Вирасоро, модули Верма, алгебра Гельфанда-Цетлина, стабильные расслоения, A_∞-алгебры, исчисление Шуберта, многогранники Ньютона, многогранники Гельфанда-Цетлина, квазифантомные категории, когомологии Хохшильда, циклические когомологии, алгебры Хопфа, группа Кремоны, многообразия Фано, метрики Кэлера-Эйнштейна, К3-поверхность, рациональные эндоморфизмы, зеркальная симметрия, геометрическое квантование, флаговые многочлены Шура, планаризация, Теорема Мебиуса-фон Штаудта, множество Жюлиа, множество Мандельброта.

Краткая аннотация: Приводятся результаты исследований в области алгебраической геометрии, теории категорий, комплексной геометрии, дифференциальной геометрии и геометрической теории представлений.

Основные темы исследования — производные категории в алгебраической геометрии, геометрия производных категорий, алгебры Темперлея–Либа когомологии Хохшильда и некоммутативная геометрия, производные категории, А-бесконечность алгебры и мотивы, гиперкэлерова и гиперкомплексная геометрия, теория калибрации и голоморфные лагранжевы расслоения, локально конформно кэлеровы многообразия, программа минимальных моделей, многообразия Фано и группа Кремоны, комплексная геометрия многообразий Фано, характеры полубесконечных многообразий флагов, ПБВ вырождения в теории Ли, исключительные наборы, группы алгебраических преобразований аффинных и квазиаффинных многообразий, многогранники Гельфанда-Цетлина и исчисление Шуберта, изучение асимптотических свойств многообразий над глобальными полями и предельных дзета-функций.

Результаты носят теоретический характер и являются существенно новыми. Возможны приложения к теоретической физике, дифференциальной геометрии, теории чисел и задачам классификации комплексных многообразий.

Оглавление

1. Введение

За отчетный период (2014-й год) Лабораторией алгебраической геометрии и ее приложений было организовано 3 международные конференции в г. Москве, школа и конференция по алгебраической геометрии в г. Иркутске, четвертая летняя школа "Алгебра и геометрия" в г. Ярославле. Сотрудниками Лаборатории было опубликовано 40 статей и подготовлено к печати более 55 препринтов; по результатам этой работы сделано более 60 докладов. Всего сотрудники Лаборатории приняли участия более чем в 50 конференциях, семинарах и школах как в России, так и за рубежом. Лаборатория организовала и приняла участие в организации 11 научных мероприятиях, в т.ч.: "Workshop on the Chow group of holomorphically symplectic manifolds", международная конференция "Topological and geometric methods in low-dimensional dynamical systems", летняя школа "Алгебра и геометрия".

Научная деятельность сотрудников Лаборатории была отмечена различными премиями и наградами. Заведующий Лаборатории А. Кузнецов и заместитель заведующего М. Вербицкий были приглашенными докладчиками на Международном Конгрессе Математиков (Сеул, август 2014) по секции алгебраической геометрии. Сотруднику Лаборатории М. Финкельбергу был присвоен статус ординарного профессора. Сотрудники Лаборатории С. Галкин, Е. Фейгин и И. Нетай стали победителями конкурса молодых математиков фонда Дмитрия Зимина "Династия", стажер Лаборатории Лев Суханов был удостоен премии конкурса Мебиуса (первое место).

Пятеро сотрудников Лаборатории защитили кандидатские диссертации: И. Нетай по теме "Сизигии некоторых вложений Сегре и Веронезе", А. Солдатенков по теме "Геометрия гиперкомплексных многообразий", А. Трепалин – "Факторы поверхностей дель Пеццо", Г. Мутафян – "Характеры представлений квантовой тороидальной алгебры $\hat{\hat{gl}}_1$", а А. Фонарев – по теме "Строение производных категорий грассманианов".

Сотрудниками лаборатории были прочитаны больше 30 курсов лекций, многие курсы читались впервые.

Были получены значительные результаты по основным темам, заявленным на 2014-й год:

1) Производные категории в алгебраической геометрии

2) Геометрия производных категорий

3) Когомологии Хохшильда и некоммутативная геометрия

4) Производные категории, A-бесконечность алгебры и мотивы
5) Гиперкэлерова и гиперкомплексная геометрия
6) Теория калибраций и голоморфные лагранжевы расслоения
7) Локально конформно кэлеровы многообразия
8) Программа минимальных моделей, многообразия Фано и группа Кремоны
9) Комплексная геометрия многообразий Фано
10) Характеры полубесконечных многообразий флагов
11) ПБВ вырождения в теории Ли
12) Группы алгебраических преобразований аффинных и квазиаффинных многообразий
13) Многогранники Гельфанда-Цетлина и исчисление Шуберта
14) Изучение асимптотических свойств многообразий над глобальными полями и предельных дзета-функций.

Результаты работ по этим темам составляют содержание настоящего отчета.

2. Производные категории в алгебраической геометрии

2.1. Исследование производных категорий поверхностей и теории представлений алгебр Темперлея–Либа с помощью гомотопов

2.2. Склейки t-структур и гомотопы

А. Бондал совместно с И. Ждановским построил проективный генератор в сердцевине t-структуры, которая получается склейкой, при условии, что в склеиваемых t-структурах имеются проективные генераторы и одна из категорий порождена исключительным объектом. Алгебра эндоморфизмов подходящего генератора является обобщенным гомотопом при условии, что склеивающий дифференциально-градуированный бимодуль имеет только две гомологии и дифференциал хорошо темперирован. Конструкция проективного генератора применена к алгебрам типа Темперлея–Либа графов для изучения их теории представлений.

2.3. Представления алгебр Темперлея–Либа и взаимно-несмешанные базисы в 6-мерном пространстве

Ортогональной парой в простой алгебре Ли $\mathcal{L}$ называется пара Картановских подалгебр $(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$, ортогональных по отношению к форме Киллинга. Описание всех ортогональных пар в $\mathcal{L}$ — первый шаг в направлении классификации ортогональных разложений $\mathcal{L}$, то есть разложений в прямую сумму попарно ортогональных Картановских подалгебр.

Ортогональные разложения первым ввел Томпсон (филдсовский лауреат) в начале 60-х годов. Теория ортогональных разложений получила существенный толчок в развитии в конце 70-х – начале 80-х годов в работах Кострикина А.И. и соавторов.

Параллельно, в 60-х годах 20-го века, физик Швингер (нобелевский лауреат) сформулировал известную задачу классификации взаимно-несмешанных базисов в конечномерном гильбертовом пространстве, а именно, базисы $\{e_i\}_{i=1}^n$ и $\{f_j\}_{j=1}^n$ называются взаимно-несмешанными, если $(e_i, f_j) = \frac{1}{n}$ для любых $i, j = 1, ..., n$. Вопрос Швингера состоял в следующем: сколько существует базисов в n-мерном пространстве попарно взаимно-несмешанных.

В дальнейшем, взаимно-несмешанные базисы получили большое развитие в квантовом компьютере, квантовой теории информации, квантовой телепортации.

В начале 21-го века в работах Тьепа и соавторов было показано, что понятия ортогональных пар, разложений и взаимно-несмешанных базисов оказались практически идентичными.

Также эта проблема допускает описание в терминах теории представлений. Гомологические аспекты ортогональных разложений, пар и представлений естественно возникающих алгебр Темперли–Либа были изучены в [3].

Невзирая на простоту формулировки, вопрос описания ортогональных пар в случае $sl(6)$ сводится к очень сложной алгебро-геометрической проблеме. Например, проблема ортогональных разложений в случае $sl(6)$ до сих пор остается открытой. Тем не менее, в работе [4] удалось показать, что многообразие, параметризующее ортогональные пары в $sl(6)$ имеет 4-хмерную компоненту, что привело к формулировке гипотезы о полной классификации ортогональных пар в $sl(6)$: а именно, помимо найденной 4-хмерной компоненты есть еще несколько изолированных точек.

Работа [4] разбита на несколько частей. Обозначим через $X(6,6)$ - многообразие ортогональных пар в $sl(6)$. В первых частях построено отображение многообразия $X(6,6)$ в более "понятное" расслоенное произведение. Это отображение обладает следующим свойством — оно бирационально на гипотетических 4-хмерных компонентах. Таким образом, для существования 4-хмерной компоненты в $X(6,6)$ достаточно показать, что есть 4-хмерная компонента в расслоенном произведении. Упомянутое отображение строится с помощью методов некоммутативной геометрии, а именно многообразий модулей алгебр Темперли–Либа и деформированной препроективной алгебры.

В дальнейших частях, используя алгебро и дифференциально-геометрические, а также комбинаторные факты и понятия, показывается, что расслоенное произведение имеет 4-хмерную компоненту.

Также, используя известные дифференциально-геометрические факты, получаем также, что есть 4-хмерное семейство взаимно-несмешанных базисов в 6-мерном пространстве.

Доказательство существования семейства использует как гомотопы различных алгебр, их теорию представлений и теорию представлений препроективных алгебр, так и сложную алгебраическую геометрию эллиптических семейств и многообразий общего типа.

2.4. Производные категории раздутий и гомотопы

А.И. Бондал совместно с постдоком лаборатории А. Бодзентой обобщил конструкцию проективных генераторов в склейке t-структур на случай, когда одна из категорий является производной категорией модулей над конечномерной алгеброй. Это позволило использовать гомотопы для описания производных категорий когерентных пучков в терминах бирациональных преобразований гладких поверхностей. Были построены проективные генераторы в склеенных t-структурах, при склейке двойственных t-структур на базе и категории тилтинг-пучков в нуль-категории морфизма. Как оказалось, такая склейка обладает более хорошими свойствами t-точности, чем склейка Т. Бриджленда, для которой проективные генераторы были построены М. Ван ден Бергом.

В частности, для нее оказалось возможным вычислить алгебры эндоморфизмов подходящих генераторов, что позволило отождествить производную категорию раздутой поверхности для любого раздутия в терминах теории представлений явно описываемой алгебры.

Для этого была разработана комбинаторное описание раздутий в терминах последовательностей Фибоначчи, последовательностей пересечений и частично-упорядоченных множеств со специальным декорированием объектов и морфизмов.

Доказано, что схемный носитель нуль-категории раздутия гладкой поверхности является дискрепантностью морфизма. Это проливает свет на смысл дискрепантности в применении производных категорий к вопросам бирациональной геометрии и программы минимальных моделей.

Кроме того, доказаны общие утверждения о точности функторов ограничения на слои в применении к нуль-категориям морфизмов относительной размерности один между любыми схемами.

2.5. Исследование многообразий, обладающих сильным полным исключительным набором из векторных расслоений

Наличие в производной категории когерентных пучков на алгебраическом многообразии сильного полного исключительного набора — очень сильное условие. Примеров таких многообразий известно сравнительно немного: проективные пространства, некоторые рациональные поверхности, их прямые произведения. Тем не менее, про свойства таких многообразий вообще известно очень мало. Например, остаётся открытым вопрос о том, будет ли многообразие с сильным полным исключительным набором из расслоений рационально. Согласно результатам А. Бондала, если на многообразии X есть сильный полный исключительный набор, то имеет место эквивалентность категории $D^b(X)$ и производной категории представлений алгебры A эндоморфизмов этого набора. Это даёт возможность восстановить X по данным, связанным с конечномерной алгеброй A и её представлениями. А именно, X должно получаться как пространство модулей представлений алгебры A с некоторым вектором размерности. Такие конструкции рассматривались А. Кингом, А. Бергманом–Н. Праудфутом и др.

Выглядит перспективной идея изучать алгебры A, которые суть алгебры эндоморфизмов сильного исключительного набора на многообразии, сами по себе. Этой темой занимался сотрудник Лаборатории А. Елагин (совместно с В. Лунцем). Одна из решавшихся задач — охарактеризовать такие алгебры в чисто алгебраических терминах. На этом пути был получен ряд необходимых условий на алгебру A в численных и в гомологических терминах [6].

Другое направление исследований по этой теме — классификация поверхностей, на которых существует сильный полный исключительный набор из линейных расслоений. Известно, что такие поверхности рациональны (М. Браун - И. Шипман), однако обратное неверно: Л. Хилле и М. Перлинг построили пример рациональной поверхности, на которой нет сильного полного исключительного набора из линейных расслоений. Классификации поверхностей, на которых такой набор существует, пока не получено. Среди достижений в этом направлении можно упомянуть результат Хилле и Перлинга, описавших все торические поверхности, на которых есть сильный полный исключительный набор из линейных расслоений. Изучение таких наборов основано на анализе так называемых сильных ортогональных слева дивизоров на поверхности. А. Елагиным совместно с В. Лунцем было получено описание таких дивизоров в геометрических терминах. Оказывается, что свойство дивизора на поверхности быть сильно ортогональным слева зависит только от структуры пересечений его неприводимых компонент, их родов, индексов самопересечения и кратностей [7].

2.6. Голоморфная теория Черна–Саймонса

В недавней работе [3] сотрудници лаборатории А. Бондал и А. Рослый изучили описание производной категории когерентных пучков, а точнее говоря, производной категории комплексов $\mathcal{O}$-модулей с когерентными когомологиями в дифференциально-геометрических терминах. Они построили оснащение этой производной категории с помощью DG-категории суперсвязностей, точнее — $\bar{\partial}$-суперсвязностей. Под суперсвязностью (следуя терминологии Квиллена) понимаем следующее. Рассмотрим сначала пучок DG-алгебр $\mathcal{A}$, состоящий из гладких $(0,q)$-форм на X, снабженных дифференциалом Дольбо $\bar{\partial}$. Плоской $\bar{\partial}$-суперсвязностью на X назовем пучок DG-модулей над $\mathcal{A}$, которые локально свободны над A как над алгеброй без учета дифференциала. Таким образом, $\bar{\partial}$-суперсвязность — это гладкое градуированное векторное расслоение, в котором действует дифференциальный оператор с главным символом, как у $\bar{\partial}$, в квадрате равный нулю. Это обобщение описания голоморфного расслоения в терминах $\bar{\partial}$-связности. Последнее можно считать неабелевым аналогом $\bar{\partial}$-леммы Пуанкаре. Отметим, что рассматриваемая DG-категория, очевидным образом, является предтриангулированной, поскольку любое решение уравнения Маурера-Картана в морфизмах степени один отвечает объекту из нашей категории (тот же $\mathcal{A}$-модуль с новым дифференциалом).

Описанная дифференциально-геометрическая конструкция, во-первых, применима в случае неалгебраических комплексных многообразий, что, на самом деле, и мотивировало ее рассмотрение. Во-вторых, она позволяет сформулировать характеристические классы и (абсолютную) теорему Римана-Роха для когерентных пучков (на алгебраических и неалгебраических многообразиях) точно так же, как это можно сделать для голоморфных векторных расслоений, используя связности и инвариантные полиномы от кривизны связности.

С другой стороны, указанный подход к изучению когерентных пучков полезен с точки зрения квантовой теории поля. Речь идет в первую очередь о так называемой голоморфной теории Черна-Саймонса, в который в роли динамического поля выступает $\bar{\partial}$-(супер)-связность. В наиболее понятной версии эту теорию рассматривают на трехмерном комплексном многообразии. Подобно топологической теории поля, наблюдаемые в голоморфной теории Черна-Саймонса определяются комплексными кривыми в нашем трехмерном многообразии. Это приводит к необходимо-сти изучения определенного голоморфного аналога теории гомологий и зацеплений, что было нами сделано в предшествующие отчетные периоды (см. [9, 10, 11, 8]). Для этого мы изучили некоторые определенные комплексы, дифференциал в которых определяется отображением вычета, действующим на дифференциальных формах с логарифмическими особенностями. Для такой теории гомологий, называемых полярными гомологиями, имеется так же аналог теоремы де Рамы, доказанный в работах [11, 8]. С точки зрения квантовой теории поля это дает полное описание наблюдаемых в простейшем абелевом случае. В будущем желательно было бы обобщить эти конструкции на неабелев случай, то есть построить голоморфные аналоги инвариантов узлов и зацеплений.

В подотчетный период Бондалу и Рослому удалось изучить такую версию голоморфной теории Черна-Саймонса, когда в качестве трехмерного комплексного многообразия берется твисторное пространство $\mathbb{CP}^3$ или подходящее открытое подмножество в нем. В таком случае теория поля на твисторном пространстве эквивалентна более привычной теории поля в обычном пространстве-времени. Последнюю можно назвать самодуальной теорией Янга-Миллса. Лагранжиан в этой теории имеет вид $\mathrm{tr} P \wedge F$, где F-кривизна калибровочного поля, а P-антисамодуальное тензорное поле. Эквивалентность доказана пока в древесном приближении. Наблюдаемые, для которых можно описать соответствие между корреляторами в двух теориях, таковы: 1) для теории Черна-Саймонса на твисторном пространстве наблюдаемые ассоциируются с “колесом”, то есть с набором попарно пересекающихся прямых; 2) для самодуальной теории Янга-Миллса — это вильсоновские петли в случае n-угольника со светоподобными сторонами. Заметим, что между указанными объектами в твисторном пространстве и пространстве-времени имеется взаимнооднозначное соответствие. Надо отметить, что при этом используется версия полярных гомологий с коэффициентами в локально-свободных пучках, изученная в [8]. Мы также изучили квантовые свойства самодуальной теории Янга-Миллса, в частности, ультрафиолетовые расходимости и перенормировки.

Литература

[1] А. И. Бондал, Операции с t-структурами и превратные когерентные пучки, Изв. РАН. Сер. матем., 77:4 (2013), 5–30.

[2] A. Bondal, A. Rosly *Derived categories for complex-analytic manifolds,* Preprint: Working papers by IPMU, Series IPMU11-0117 (2011)

[3] Bondal A., Zhdanovskiy I., Representation theory for system of projectors and discrete Laplace operator, Preprint of IPMU, IPMU13-0001, 48 pp.

[4] Bondal A., Zhdanovskiy I., Orthogonal pairs for Lie algebra $sl(6)$, Preprint of IPMU, IPMU14-0296, 89 pp.

[5] T. Bridgeland, Flops and derived categories, Invent. Math.,147:3 (2002), 613–632.

[6] A.Elagin, V.Lunts, A-algebras and B-algebras, in preparation.

[7] A. Elagin, V. Lunts, On rational surfaces with a full strong exceptional collection", in preparation.

[8] S. Gorchinskiy, A. Rosly, *A polar complex for locally free sheaves,* International Mathematics Research Notices published online: February 28, 2014 doi: 10.1093/imrn/rnu010

[9] B. Khesin and A. Rosly, *Polar Homology and Holomorphic Bundles,* Phil. Trans. R. Soc. Lond., Ser. A, **359**, 1413–1428 (2001) [math.AG/0102152]

[10] B. Khesin and A. Rosly, *Polar Homology and Holomorphic Bundles,* Phil. Trans. R. Soc. Lond., Ser. A, **359**, 1413–1428 (2001) [math.AG/0102152]

[11] B. Khesin, A. Rosly, R. Thomas, *A Polar de Rham Theorem,* Topology **43** (2004) 1231–1246 [math.AG/0305081]

[12] M. Van den Bergh, Three-dimensional flops and noncommutative rings, Duke Math. J. 122 (2004), 423–455.

3. Геометрия производных категорий

3.1. Схема прямых на семействе двумерных квадрик

Пусть Q — семейство двумерных квадрик над гладкой трехмерной базой Y. Рассматривается относителная схема Фано M прямых на Q. Схема M обладает структурой расслоения на коники $M \to X$ над двулистным накрытием $X \to Y$ разветвленным в дискриминантной поверхности семейста квадрик $Q \to Y$. Двойное накрытие $X \to Y$ особо в конечном числе точек $y_1, y_2, \ldots, y_N \in Y$ (соответствующих квадрикам Q_y выродившимся в объединение двух плоскостей), а слои схемы M над такими точками представляют собой объединение двух плоскостей, пересекающихся по точке, $M_{y_i} = \Sigma_i^+ \cup \Sigma_i^-$. В работе А. Кузнецова [9] рассматривается геометрия и структура производной категории схемы M. Показано, что если выбрать по одной компоненте в каждом из слоев схемы M над точками y_i (скажем Σ_i^+) и произвести в них одновременный флип, то полученное многообразие M^+ обладает структурой $\mathbb{P}^1$-расслоения над малым разрешением X^+ особенностей двулистного накрытия $X \to Y$.

Данная геомтрическая конструкция использована для построения полуортогонального разложения производной категории многообразия M. Во-первых, согласно старому результату Бондала–Орлова флип дает полуортогональное разложение $D(M) = \langle D(M^+), \{\mathcal{O}_{\Sigma_i^+}\}_{i=1}^N \rangle$ на производную категорию многообразия M^+ и полностью ортогональный исключительный набор, состоящий из структурных пучков центров флипа. Далее, теорема Бернардары дает разложение $D(M^+) = \langle D(X^+), D(X^+, \beta) \rangle$ производной категории $\mathbb{P}^1$-расслоения $M^+ \to X^+$ на производную категорию базы и производную категорию базы, скрученную на класс β расслоения в группе Брауэра. Кроме того, построена эквивалентность категории $D(X^+, \beta)$ с производной категорией пучков модулей над пучком четных частей алгебр Клиффорда соответствующих квадрикам семейста Q.

3.2. Утонченные раздутия

Категорное разрешение особенностей было построено Кузнецовым и Лунцем в [10]. Всякой отделимой схеме X конечного типа над полем характеристики нуль сопоставляется триангулированная категория снабженная полуортогональным разложением компонентами которого являются производные категории многообразий, связанных с геометрическим разрешением особенностей схемы X, и содержащая категорию совершенных комплексов на X в качестве полной триангулированной подкатегории. Построение такой категории довольно сложное. Оно основано на поочередном использовании шагов двух типов. Первый шаг — приклеивание к производной категории раздутия $\tilde{X}$ схемы X с центром в гладком подмногообразии $Z \subset X$ производной категории достаточно толстой инфинитезимальной окрестности Z в X. Благодаря этому удается достичь строгой полноты естественного функтора из категории совершенных комплексов на X в склейку. Второй шаг — категорное разрешение производной категории инфинитезимальной окрестности схемы Z с помощью конструкции Ауслендера.

В работе [6] показано, как формализм фильтрованных производных категорий позволяет объединить два таких шага в один. В результате получается очень естественное категорное утончение обычной конструкции раздутия алгебраического многообразия с центром в замкнутой подсхеме. Точнее говоря, построена последовательность триангулированных категории $\mathrm{Bl}_n(X, Z)$ снабженных полуортогональными разложениями $\mathrm{Bl}_n(X, Z) = \langle \mathrm{Bl}_{n-1}(X, Z), D(Z) \rangle$ и функторами из категории совершенных комплексов на X в $\mathrm{Bl}_n(X, Z)$. При этом показано, что при больших n построенные функторы строго полны, а категория $\mathrm{Bl}_0(X, Z)$ совпадает с производной категорией обыкновенного раздутия схемы X с центром в Z.

3.3. Циклические накрытия и их дивизоры ветвления

Пусть Y — многообразие с прямоугольным лефшецевым разложением производной категории $D(Y) = \langle \mathcal{B}, \mathcal{B}(1), \dots, \mathcal{B}(m-1) \rangle$ относительно некоторого фиксированного линейного расслоения $\mathcal{O}(1)$ на Y. В работе [11] рассматривается структура производной категории n-листного циклического накрытия $X \to Y$, разветвленного в дивизоре $Z \subset Y$ из линейной системы $\mathcal{O}_Y(nd)$, так что $nd \leq m$, и ее связь с производной категорией дивизора Z. В работе показано, что исходное лефшецево разложение индуцирует полуортогональные разложения

$$D(X) = \langle \mathcal{A}_X, \mathcal{B}, \dots, \mathcal{B}(m - (n-1)d - 1) \rangle,$$
$$D(Z) = \langle \mathcal{A}_Z, \mathcal{B}, \dots, \mathcal{B}(m - nd - 1) \rangle.$$

При этом категории $\mathcal{A}_X$ и $\mathcal{A}_Z$, являющиеся их первыми компонентами оказываются дробными категориями Калаби–Яу. Основной результат работы полуортогональное разложение эквивариантной категории $\mathcal{A}_X^{\mu_n}$ (относительно естественного действия группы корней n-ой степени из 1, индуцированного действием этой группы на циклическом накрытии) на $n-1$ копию категории $\mathcal{A}_Z$. Кроме того, в случае $n = 2$ описано естественное действие группы характеров $\hat{\mu}_2 \cong \mathbb{Z}/2$ на категории $\mathcal{A}_Z$ и установлено, что категория $\mathcal{A}_X$ эквивалентна эквивариантной категории $\mathcal{A}_Z^{\hat{\mu}_2}$.

Кроме того, в работе приводятся примеры использования установленной связи производных категорий. В качестве примеров рассматриваются двулистные накрытия проективных пространств (в частности квартичное двойное тело), гиперэллиптические многообразия Фано–Гушеля–Мукаи, а также циклические кубические гиперповерхности.

3.4. Исключительные наборы на грассманианах

Давняя гипотеза гласит, что в ограниченной производной категории когерентных пучков на рациональном однородном многообразии существует полный исключительный набор, состоящий из эквивариантных векторных расслоений. Известно, что в конечном итоге задача сводится к построению таких наборов в производных категориях обобщенных грассманианов, т.е. факторов простых алгебраических групп по максимальным параболическим подгруппам.

В недавней работе [12] сотрудник лаборатории А. Кузнецов совместно с А. Полищуком предложили некоторый метод построения исключительных наборов максимальной длины в производных категориях обобщенных грассманианов групп типа BCD. Данная конструкция заключается в том, что нужно выбрать некоторое семейство весов фактора Леви параболической подгруппы, удовлетворяющее специальным теоретико-представленческим свойствам, после чего рассмотреть в эквивариантной производной категории набор двойственный к набору эквивариантных расслоений, построенному по данному семейству весов.

Полнота наборов Кузнецова–Полищука остается недоказанной, а конструкция, несмотря на внешнюю простоту, мало изученной. Так, в работе [12] была сформулирована гипотеза, предсказывающая существование некоторого конечного семейства полных исключительных наборов на классических грассманианах (тип A), стоящих в промежутке между Капрановским набором и его двойственным. Гипотетические наборы должны были бы получаться описанной конструкцией, но проверить необходимые теоретико-представленческие условия не представляется возможным.

Сотруднику лаборатории А. Фонарёву в работе [4] удалось обойти описанную проблему и доказать гипотезу Кузнецова–Полищука. В частности, была найдена простая геометрическая конструкция довольно большого числа исключительных эквивариантных векторных расслоений на грассманианах в виде прямых образов специально подобранных векторных расслоений на многообразиях частичных флагов. С помощью данной конструкции удалось напрямую проверить условия исключительности и полуортогональности, а также двойственность в эквивариантной категории. В частности, из результатов Фонарева следует выполнение некоторых нетривиальных теоретико-представленческих условий для представлений максимальных параболических подгрупп в типе A.

Оказалось, что геометрическая конструкция также позволяет доказать полноту построенных наборов. В работе [5] А. Фонарёвым были построены точные комплексы эквивариантных векторных расслоений, названные ступенчатыми, которые выражают некоторые перестройки в капрановском полном исключительном наборе. В работе [4] была найдена альтернативная конструкция ступенчатых комплексов, которая позволила обобщить их на случай новых исключительных наборов и расслоений. С помощью обобщенных ступенчатых комплексов было доказано, что все построенные наборы эквивалентны капрановскому и, в частности, являются полными.

Ожидается, что развитая в работе [4] техника найдет применение к вопросам доказательства полноты наборов Кузнецова–Полищука на обобщенных грассманианах.

3.5. Сизигии квадратичного вложения Веронезе

Сотрудник лаборатории И.Нетай занимался вычислением резольвент некоторых модулей над алгебрами многочленов, имеющих геометрическое происхождение. В общем случае задача построения таких резольвент в явном виде оказывается алгоритмически очень трудной. Поэтому, представляется разумным ограничиться случаем некоторых однородных пространств. Расматривается задача, включающая следующие данные:

- G — редуктивная алгебраическая группа,
- λ — некоторый её доминантный вес,
- V_λ — неприводимое представление группы G со старшим весом λ,
- $X = G \cdot [v_{hw}] \subset \mathbb{P}(V_\lambda)$ — проективизация орбиты вектора старшего веса.

Такие вложения включают все невырожденные проективные вложения обобщённых флаговых многообразий. Вычисление сизигий таких многообразий является широко исследуемой задачей.

Предлагается вычисление сизигий методом отдельного изучения всех изотипических компонент комплекса Кошуля. Сформулированы условия на вес λ, достаточные для комбинаторного описания изотипических компонент. Произведена полная классификация неприводимых представлений редуктивных алгебраических групп, удовлетворяющих этим условиям. Для бесконечных серий классификации, включающих вложение Сегре и квадратичное вложение Веронезе, найдены сизигии, а также построены минимальные резольвенты для обратимых пучков на образе вложения [16].

Данная задача имеет приложение в *задаче метрического шкалирования*, состоящей в следующем. Допустим, имеется некоторое число точек, лежащих в евклидовом пространстве, и мы можем вычислить расстояния между этими точками. Требуется восстановить расположение точек с точностью до ортогонального преобразования пространства, а также найти размерность наименьшего содержащего данную конфигурацию евклидова подпространства. Решение данной задачи в случае точных значений длин является известной задачей с хорошо описанным алгоритмом, имеющей важные практические приложения. С одной стороны, информация избыточна: размерность пространства конфигураций от числа точек растёт линейно, а количество длин — квадратично. В практических приложениях при измерении длин с погрешностью возникает задача минимизации погрешностей, что требует учёта соотношений на расстояния между точками.

На многообразии возможных конфигураций точек в евклидовом пространстве квадраты расстояний между точками являются однородной системой многочленов, разделяющих точки. Задача состоит в нахождении соотношений между этой системой многочленов. В случае рассмотрения точек на аффинной прямой проективизация пространства конфигураций является квадратичным вложением Веронезе. Соотношения, задающие это вложение, имеют естественное обобщение, дающее соотношения для точек в евклидовых пространствах большей размерности. Сформулирована гипотеза, согласно которой в случае произвольной размерности получаемый таким образом набор соотношений является полным. Проведён ряд вычислительных экспериментов, в ряде случаев подтверждающих эту гипотезу.

3.6. Квазифантомные категории

Производные категории когерентных пучков активно изучаются в настоящее время. Классические инварианты их допустимых подкатегорий это гомологии и когомологии Хохшильда, группа K_0 Гротендика. В работе [8] Кузнецов высказал гипотезу о том, что не существует допустимых категорий, гомологии Хохшильда которых нулевые, а сами категории нетривиальны. Однако, в работах [1, 2] были построены примеры таких категорий с $HH_* = 0$ и K_0 — группой кручения (так называемые квазифантомы).

Квазифантомную категорию можно построить, найдя на многообразии исключительный набор максимальной возможной длины, но при этом не полный. В качестве такого многообразия может выступать поверхность общего типа с $p_g = q = 0$, $K^2 = 8$ (ложная квадрика). Бауэр, Катанезе и Грюневальд [3] классифицировали поверхности с такими инвариантами, получающиеся как факторы произведения двух кривых по свободному действию конечной группы. Предположительно, все эти поверхности допускают исключительные наборы максимальной длины и дают примеры квазифантомов. Галкин и Шиндер построили такие наборы для поверхности Бовиля в [9], К.-С. Ли для еще двух семейств поверхностей в [13, 14]. В работе [15] стажер лаборатории Т. Шабалин совместно с К.-С. Ли доказал, что такие наборы есть на поверхностях из еще 4 семейств.

Литература

[1] V. Alexeev, D. Orlov, *Derived categories of Burniat surfaces and exceptional collections*, Math. Ann. 357 (2013), no. 2, 743-759.

[2] Ch. Böhning, H-Ch. Graf von Bothmer, P. Sosna, *On the derived category of the classical Godeaux surface*, Adv. Math. 243 (2013), 203-231.

[3] I. Bauer, F. Catanese, F. Grunewald, *The classification of surfaces with $p_g = q = 0$ isogenous to a product of curves*, Pure Appl. Math. Q. 4 (2008), no. 2, part 1, 547–586.

[4] A. Fonarev, Exceptional vector bundles on Grassmannians, Uspekhi Mat. Nauk, 69:4(418) (2014), 189–190.

[5] A. Fonarev, Minimal Lefschetz decompositions of the derived categories for Grassmannians, Izv. RAN. Ser. Mat., 77:5 (2013), 203–224.

[6] S. Galkin, E. Shinder, *Exceptional collections of line bundles on the Beauville surface*, Adv. in Math., **244** (2013), 1033–1050.

[7] D. Kaledin, A. Kuznetsov, Refined blowups, preprint math.AG/1410.7121.

[8] A. Kuznetsov, *Hochschild homology and semiorthogonal decompositions*, preprint, 2009, arXiv:0904.4330.

[9] A. Kuznetsov, Scheme of lines on a family of 2-dimensional quadrics: geometry and derived categor, Math. Zeitschrift, Volume 276, Issue 3 (2014), Page 655–672.

[10] A. Kuznetsov, V. Lunts, Categorical resolutions of irrational singularities, preprint math.AG/1212.6170, to appear in IMRN.

[11] A. Kuznetsov, A. Perry, Derived categories of cyclic covers and their branch divisors, preprint math.AG/1411.1799.

[12] A. Kuznetsov, A. Polishchuk, Exceptional collections on isotropic Grassmannians, to appear in JEMS.

[13] K.-S. Lee, *Derived categories of surfaces isogenous to a higher product*, arXiv:1303.0541.

[14] K.-S. Lee, *Exceptional sequences of maximal length on some surfaces isogenous to a higher product*, arXiv:1311.5839.

[15] K.-S. Lee, T. Shabalin, *Exceptional collections on some fake quadrics*, arXiv:1410.3098.

[16] И. Нетай, Сизигии квадратичного вложения Веронезе, подготовлена к публикации.

4. Когомологии Хохшильда и некоммутативная геометрия

Некоммутативная геометрия, в ее современной алгебраической версии, предложенной М. Концевичем – это необычайно бурно развивающаяся область современной математики. Уже примерно 15 лет она занимает в мировой математике одно из центральных мест, и значение ее только усиливается. По-видимому, это одна из наиболее перспективных областей математического исследования на ближайшее будушее.

Предмет алгебраической некоммутитативной геометрии – это некомутативные алгебраические многообразия, понимаемые как триангулированные категории с некоторым удобным оснащением. На практике, используются DG или A_∞ оснащения – они эквивалентны – или спектральные оснащения для категорий, происходящих из алгебраической топологии. Примеров некоммутативных многообразий довольно много, причем происходят они из самых разных областей. Наиболее важные классы примеров таковы:

1) Производные категории когерентных пучков на обычных алгебраических многообразиях.

2) Разнообразные категории модулей, происходящие из теории представлений, например, представления колчанов.

3) Категории Фукая, возникающие в симплектической геометрии.

4) Категории, возникающие в математической физике в рамках топологической теории поля.

Удивительным открытием Концевича и других является то, что все эти примеры можно рассматривать униформно, одними и теми же методами, и ожидать в них наличия похожих структур. Например, на удивление многие инварианты алгебраических многообразий, как оказывается, зависят только от производной категории – на современном языке, "производно Морита-инвариантны". Таковы, например, алгебраическая K-теория, и разнообразные теории когомологий "де рамовского типа". Даже и в классических вопросах алгебраической геометрии, таких как программа Мори, категорный подход уже принес немалые плоды.

Кроме того, категории, происходящие из совершенно разных областей математики, могут оказаться эквивалентны. Наиболее яркий пример такой эквивалентности – гипотеза о гомологической зеркальной симметрии, предложенная Концевичем на основании анализа понятия зеркальной симметрии в теории струн. Гипотеза эта отождествляет категории Фукая и категории, происходящие из алгебраической геометрии – производные категории когерентных пучков на многообразиях Калаби-Яу, а также их обобщения, так называемые категории матричных факторизаций.

Следует отметить, что собственно геометрии, в школьном ее понимании, в некоммутативной геометрии нет – у некоммутативных многообразий нет точек, на них нельзя проводить прямые, рассматривать дивизоры и подмногообразия. Изучение некоммутативных многоообразий поэтому происходит с применением гомологической техники, и главным объектом изучения становятся аддитивные инварианты. Один из таких инвариантов, в каком-то смысле универсальный – алгебраическая K-теория. К сожалению, он плохо поддается вычислению, и про него известно очень мало общих результатов. Другой инвариант, гораздо более близкий к повседневной жизни – это так называемые гомологии Хохшильда, и разнообразные их уточнения (например, цилические гомологии). С одной стороны, гомологии Хохшильда легко вычислять во многих конкретных примерах, с другой стороны, на них есть масса дополнительных структур, что позволяет многое сказать об изучаемом некоммутативном многообразии. Поэтому именно гомологии Хохшильда стали одним из основных технических средств в некоммутативной геометрии, и именно через них, в силу знаменитой теоремы Хохшильда-Костанта-Розенберга, восстанавливаются когомологические инварианты алгебраический многообразий де рамовского типа.

Опишем теперь, что сделано сотрудниками лаборатории по этой теме в 2014 году.

Во-первых, было продолжено исследование гомологий Хохшильда и циклических гомологии для некоммутативных многообразий над полями конечной характеристики и над кольцами p-адических чисел, а также возникающих на них естественных дополнительных структур мотивного типа. В p-адическом случае, такая структура известна как структура фильтрованного модула Дьедонне. В 2013 году эта структура была интерпретирована Д. Калединым в терминах циклической категории А. Конна и ее обобщения, циклотомической категории. Получающаяся структура была аксиоматизирована и изучена под именем структуры "циклотомическоо комплекса". Однако дальнейшие исследования показали, что есть и еще более естественная ее интерпретация – а именно, начиная с циклотомической категории можно построить категорию "циклотомических функторов Макки", которые объединяют в себе циклические объекты и функторы Макки для циклической группы Z. С одной стороны, категория циклотомических функторов Макки должна быть эквивалентна категории циклотомических комплексов, хотя и нетривиальным образом, похожим на двойственность Кошуля. С другой стороны, именно структура циклотомического функтора Макки возникает естественным образом на гомологиях Хохшильда некоммутативных многообразий над p-адическими числами, а также и на гомологиях Хохшильда-Витта многообразий над конечным полем – некоммутативного обобщения комплекса де Рама-Витта, введенного Д. Калединым в предыдущих работах.

Для реализации этой программы, необходимо прежде всего корректно построить и изучить категорию циклотомических функторов Макки. Первый шаг здесь – аккуратное построение производной категории функторов Макки для конечных и проконечных групп.

Случай конечных групп был в принципе рассмотрен Д. Калединым ранее, в 2009-2011 годах. В этом году, в рамках работы по циклотомической теме, эти работы были пересмотрены, а результаты значительно усилены и упрощены. В частности, получено простое и внятное описание категории производных функторов Макки для конечных циклических групп Z/nZ. Это описание хорошо согласуется с циклотомическими комплексами, и будет впоследствии использовано для отождествления циклотомических функторов Макки и конечных функторов. Однако прежде чем заниматься этим, необходимо обобщить результаты на случай бесконечных групп (просто потому, что интересуюшая нас группа Z бесконечна). Этот вопрос был также изучен, и обнаружены новые явления.

А именно, хотя формально, теория функторов Макки и производных функторов Макки может быть построена и для бесконечных групп, причем с практически теми же определениями, получаюшаяся категория – не то, цто требуется. Чтобы получить правильное понятие, необходимо изменить определение и ввести новую категорию "профункторов Макки" и их производных аналогов. Такая теория и была построена Д. Калединым в 2014 году.

Следует отметить, что, хотя для приложений нужен только случай группы Z, теория одинаково хорошо работает для любой конечно порожденной группы, как коммутативной, так и некоммутативной. Мы ожидаем, что построенная теория будет крайне интересна и с точки зрения обычных приложений функторов Макки – прежде всего в алгебраической топологии (конкретнее, в эквивариантной стабильной теории гомотопий). Даже в непроизводном случае, теория совершенно новая, и содержит ряд неожиданных результатов, неизвестных в классической теории. В приложении к группе Z, получено также явное и простое описание категории производных профункторов Макки, аналогичное описанию для конечных циклических групп Z/nZ.

Помимо построения новой теории профункторов Макки и производных профункторов Макки, Д. Каледин также написал обзор основных результатов как новой работы, так и более старой своей статьи о производных функторах Макки 2011 года. Такой обзор позволит специалистам в смежных областях лучше понимать новую теорию и использовать ее в своей деятельности.

Работа над применением новой теории к циклотомическим функторам Макки и их отождествлению с циклотомическими комплексами в настоящее время продолжается, а результаты готовятся к публикации.

Кроме того, была проделана некоторая работа, относящаяся скорее не к гомологиям Хохшильда, а к алгебраической К-теории. А именно, ключевой объект при построеннии введенных ранее гомологий Хохшильда-Витта – это группа K_1 пополненной тензорной алгебры, порожденной векторным пространством V над конечным полем k характеристики p. Хотя высшие K-группы в этой конструкции не участвуют, интересно рассмотреть также и их (по аналогии с теорией Топологических Циклических Гомологий Бокстеда-Сяна-Мадсена, ожидается, что это даст эквивалентную теорию, но с большей функториальностью и с полезными дополнительными свойствами). Известно, что если рассматривать относительную K-теорию по отношению к аугментационному идеалу, то получится спектр Эйленберга-Маклейна, т.е. по сути просто комплекс абелевых групп. Однако существующие доказательства этого факта весьма непрямые, и не дают контроля над получающимся комплексом. В связи с этим, Д. Каледин построил прямую и совершенно элементарную конструкцию комплекса, полученного локализацией в p спектра K-теории алгебры над k. Конструкция обладает хорошими функториальными свойствами, и легко позволяет строить на относительной K-теории дополнительные структуры – такие, как структура функтора Макки. Относительная K-теория будет автоматически p-локальна, так что в этом случае локализация не нужна.

Помимо этого, проводились исследования обычных коммутативных алгебраических многообразий, но с некоммутативной точки зрения. Здесь следует отметить категорное разрешение особенностей алгебраического многообразия характеристики 0, построенное ранее А. Кузнецовым и В. Лунцем. В 2014 году, Д. Каледин и А. Кузнецов показали, что ключевой шаг конструкции Кузнецова-Лунца – это на самом деле некоторое очень естественное и простое категорное уточнение обычной коммутативной конструкции раздутия многообразия в пучке идеалов.

Исследованием K-теоретических аспектов некоммутативной алгебраической геометрии занимался и сотрудник лаборатории А. Ефимов. В частности, им построен контрпример к теореме о локализации Томасона для категорий локально свободных матричных факторизаций и для категорий относительно совершенных комплексов (напомним, что теорема Томасона в ее изначальном виде, а именно, для совершенных комплексов – один из важнейших классических результатов, позволяющих изучать алгебраическую K-теорию когомологическими методами).

Помимо этого, А. Ефимов изучал производную категорию когерентных пучков на многообразиях Грассмана над кольцом целых чисел и ее связь с категориями строго полиномиальных функторов. Для многообразий над конечным полем, такая связь известна, и похожие результаты получены также и другими авторами. Однако в универсальной ситуации, т.е. над кольцом целых чисел, не было известно ничего. Поскольку рассмотренная ситуация универсальна, работа Ефимова полностью закрывает эту тему для многообразий над любым кольцом.

Кроме того, Ефимов построил некоммутативную (DG-категорную) версию известной интегрируемой системы Хитчина, которая дает обычную систему Хитчина взятием следа. Эта конструкция также дает общий метод построения гамильтоновых интергируемых систем на кокасательных расслоениях к пространствам модулей объектов в DG-категориях.

Сотрудник лаборатории Н. Маркарян занимался изучением высших аналогов гомологий и когомологий Хохшильда – так называемыми многообразными когомологиями, известными также как топологические киральные гомологии. В размерности один, замкнутое C^∞-многообразие есть только одно – окружность; многообразные гомологии в этом случае совпадают с гомологиями Хохшильда. Однако в старших размерностях многообразий много, и каждое из них порохдает некоторую теорию гомологий n-алгебр, высшего обобщения обычных алгебр. В частности, в размерности 3, многообразные гомологии могут быть использованы для построения инвариантов 3-многообразий. Маркарян проинтерпретировал таким образом пертурбативные инварианты Черна-Саймонса, одни из наиболее важных инвариантов 3-многообразий гомологического происхождения. Результаты сейчас готовятся к публикации.

Стажер лаборатории Г. Папаянов проводил исследования по теме "Когомологические свойства эрмитово симплектических многообразий". Эрмитово симплектическое многообразие — это комплексное многообразие, снабжённое эрмитовой формой ω такой, что $d(\alpha + \omega + \bar{\alpha}) = 0$ для некоторой 1-формы α. Ожидается, что геометрия таких многообразий достаточно близка к кэлеровой геометрии. Папаянову удалось доказать dd^c-лемму для 1-форм на эрмитово симплектических многообразиях произвольной размерности, а также dd^c-лемму для (1,1)-форм для эрмитово симплектических многообразиях размерности 3. Последнее утверждение уже накладывает некоторые когомологические ограничения на многообразие, а именно, из него следует равенство $b^1 = h^{0,1}_{\bar{\partial}}$, где b^1 это первое число Бетти, а $h^{0,1}_{\bar{\partial}}$ это размерность пространства голоморфных 1-форм. Из этого факта и теоремы Г.Кавальканти о том, что спектральная последовательность Фрёлихера для эрмитово симплектических многообразий вырождается на первом листе, можно вывести, что размерности пространств когомологий Ботта-Черна совпадают с размерностями пространств когомологий де Рама во всех степенях, кроме 4.

Результаты, полученные сотрудниками, докладывались на международных конференциях в Майами (США), Плайа-дель-Кармен (Мексика), Обервольфахе (Германия), Париже (Франция), Тбилиси (Грузия) и других, а также на семинарах и конференциях в Москве.

Литература

[1] D. Kaledin, *Mackey profunctors.*

[2] D. Kaledin, *Derived Mackey functors and profunctors: an overview of results.*

[3] D. Kaledin, *K-theory as an Eilenberg-Maclane spectrum.*

[4] D. Kaledin and A. Kuznetsov, *Refined blowups.*

[5] A. Efimov, *erived categories of Grassmannians over integers and modular representation theory*, arXiv:1410.7462.

[6] A. Efimov, *Maximal lengths of exceptional collections of line bundles*, J. Lond. Math. Soc. (2) 90 (2014), no. 2, 350-372.

5. Производные категории, А-бесконечность алгебры и мотивы

5.1. Многообразия Фано: зеркальная симметрия и квантовые когомологии.

Многообразия Фано естественным образом возникают в нескольких смежных разделах математики как образующие строительные блоки для “положительных” геометрий: в алгебраической геометрии это многообразия с обильным анти-каноническим линейным расслоением, в римановой геометрии это кэлеровы многообразия с положительной кривизной Риччи, в симплектической геометрии это положительно монотонные симплектические многообразия (X, ω) (класс симплектической формы равен первому классу Черна: $[\omega] = c_1(M, \omega)$), простые выпуклые многогранники в торической геометрии, итп.

Благодаря результату Кампаны и Коллара–Мияоки–Мори известно, что многообразия Фано рационально связны (через любые две точки проходит много рациональных кривых), и как следствие в каждой фиксированной размерности существует лишь конечное число деформационных семейств многообразий Фано. В настоящее время классификация многообразий Фано известна в комплексной размерности не превосходящей трех: одна проективная прямая, десять поверхностей дель Пеццо, и 105 трехмерных многообразий. Доказательство последней классификации содержится в ряде работ Фано, Исковских (1970-е), Мори и Мукаи (1980-е, erratum 2003). Число деформационных классов многообразий Фано в размерности 4 неизвестно.

По теореме Эресмана все деформационно эквивалентные многообразия Фано представляют один и тот же класс монотонного симплектического многообразия с точностью до симплектоморфизма, поэтому задачу классификации многообразий Фано с точностью до гладкой деформации можно рассматривать как часть задачи классификации положительно монотонных симплектических многообразий. В комплексной размерности два Таубс, используя инварианты Зайберга–Виттена, показал, что все положительно монотонные симплектические 4-многообразия алгебраичны, то есть существует всего десять таких многообразий — десять поверхностей дель Пеццо. В комплексной размерности три уже неизвестно: существуют ли какие-то положительно монотонные симплектические

6-многообразия, кроме 105 алгебраических примеров.

В 1996 году Коллар и Руан выдвинули тезис, утверждающий что "качественные" результаты теории Мори о существовании рациональных кривых на многообразиях Фано должны иметь и уточненное "количественное" отражение в теории Громова–Виттена. В частности, они доказали, что многообразия Фано *симплектически унилинейчатые*, то есть существует нетривиальный ненулевой инвариант Громова–Виттена рода ноль с вставкой класса точки, то есть инвариант вида $\langle [pt], \ldots \rangle_{0,n\geq 1,d>0} \neq 0$ где d это антиканоническая степень кривой. Их теорема является уточнением результата Мияоки–Мори о унирациональности многообразий Фано. Они выдвинули гипотезу, что многообразия Фано также *симплектически рационально связны*, то есть существует нетривиальный ненулевой инвариант с двумя вставками точки $\langle [pt], [pt], \ldots \rangle_{0,n\geq 2,d>0}$. Эта гипотеза открыта по сей день, но несколько частных случаев (включая случай трехмерных многообразий Фано) были доказаны Вуазен и Тианом без использования явной классификации.

Во всех известных примерах алгебраические положительные монотонные симплектические многообразия (M, ω) обладают структурой интегрируемой системы, а именно отображением $f : M \to \Delta$, слои которого это специальные лагранжевы торы. Среди слоев как правило есть один монотонный тор L, то есть такой, что класс Маслова пропорционален площади для всех дисков на M с границей на L. В таком случае, есть лишь конечное число псевдоголоморфных дисков $D \subset M$ с индексом Маслова 2, с границей на L, проходящих через выбранную точку L. Производящая функция для классов границ таких дисков

$$W_{M,L} = m_0(L) := \sum_D z^{[\partial D]} \in \mathbb{Z}[\pi_1(L)] = \mathbb{Z}[z_1^{\pm 1}, \ldots, z_n^{\pm 1}],$$

называемая так же лагранжевым потенциалом Флоера, в таком случае доставляет интересный инвариант симплектического многообразия: каждому монотонному лагранжеву n-мерному тору L можно сопоставить многочлен Лорана $m_0(L)$ от n переменных с *положительными целыми коэффициентами*, который также имеет интерпретацию зеркального образа $L \subset M$. Множество таких многочленов эффективно перечилимо, и встает ряд важных вопросов:

- как считать инварианты многообразия M в терминах многочлена W?

- какие из всех многочленов Лорана с положительными целыми коэффициентами допустимы, то есть могут являться лагранжевыми потенциалами Флоера для каких-то многообразий Фано?
- как обратить описанную выше конструкцию, и построить (M, L) по допустимому многочлену Лорана?

Рассмотрим производящую функцию для свободных членов степеней многочлена Лорана

$$\hat{G}_W := \sum_{d \geq 0} (W^d)_0 t^d = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{|z_i|=1} \frac{d \log z_1 \wedge \cdots \wedge d \log z_n}{1 - tW},$$

где $(W^d)_0$ это свободный член многочлена Лорана W^d. Бондал и Галкин показали [3], что если L получено из торического вырождения многообразия M, то тогда число $(W^d_{M,L})_0$ равно инварианту Громова–Виттена $\langle \tau^{d-2}[pt] \rangle_{0,1,d}$, считающему рациональные кривые на M, проходящие через общую точку, с "кратностью", предписанной $(d-2)$-ой степенью пси-класса. Определяемая по многообразию Фано M производящая функция

$$\hat{G}_M := 1 + \sum_{d \geq 2} \langle \tau^{d-2}[pt] \rangle_{0,1,d} t^d$$

называется *квантовым периодом*, и является интересным инвариантом многообразия Фано. Функция $\hat{G}_M$ является голономной, и как правило является решением фуксовова дифференциального уравнения. Гипотетически, $\mathcal{D}$-модуль, аннигилирующий $\hat{G}_M$ всегда фуксов и совпадает с $\mathcal{D}$-модулем Пикара–Фукса для зеркального семейства, если оно существует. Для общих многообразий Фано это остается гипотезой, но результат Бондала и Галкина доказывает ее для многообразий Фано, обладающих торическим вырождением (гипотетически, все многообразия Фано обладают бесконечным количеством торических вырождений). Этот же результат может быть переформулирован следующим способом:

$$\hat{G}_{W_{M,L}} = \hat{G}_M$$

для всех L, где слева стоит ряд свободных членов для лагранжевого потенциала Флоера, а справа стоит ряд замкнутых одноточечных инвариантов Громова–Виттена рода ноль с потомками.

Статья [4] Галкина, Голышева, Каспчика, Коатса и Корти является манифестом масштабной программы изучения многообразий Фано с помощью идей из зеркальной симметрии и смежных областей. Авторы вводят понятие *экстремальной локальной системы* и замечают, что как правило локальные системы решений квантового дифференциального уравнения у многообразия Фано экстремальны (гипотетически, они всегда экстремальны для нечетномерных многообразий Фано, а для четномерных многообразий Фано имеют незначительный "дефект"). Основная идея классификации многообразий Фано с помощью зеркальной симметрии вытекает из описанной выше философии. Программа развивается в работах [5, 6, 1], и других.

В препринте [5] Галкина, Каспчика, Коатса и Корти были найдены квантовые периоды всех трехмерных многообразий Фано. Это позволило предсказать существования более 3000 конкретных торических вырождений и монотонных лагранжевых торов на всех трехмерных многообразиях Фано, а также доказать гипотезу Голышева. Кроме того, из этих результатов следует симплектическая рациональная связность трехмерных многообразий Фано, а также незануление многих других инвариантов Громова–Виттена рода ноль.

В препринте [6] Галкина, Каспчика, Коатса и Стрейнджвея вычисляются квантовые периоды некоторых четырехмерных многообразий Фано: многообразий индекса Фано более одного, нетривиальных произведений, различных полных пересечений в раздутии $\mathbb{P}^9$ с центром в грассманиане $Gr(2,5)$. В частности, эти вычисления показывают, что квантовая локальная система произведения двух многообразий Фано может быть неэкстремальной, в то время как квантовые локальные системы факторов экстремальны. Также в ходе вычислений авторы предъявляют новую конструкцию расслоения нуль-корелляции Журека–Вишневского.

Препринт [7] Галкина носит теоретический характер. В [11] Островер и Темкин обнаружили, что существуют четырехмерные монотонные симплектические торические многообразия, алгебра квантовых когомологий которых не полупроста. Тем не менее, они заметили что для всех четырехмерных примеров в алгебре квантовых когомологий есть поле, как одно из прямых слагаемых. Как заметила Макдаф, из существование поля, как одного из прямых слагаемых в алгебре квантовых когомологий, следуют существование квази-изоморфизма Калаби и симплектического квази-состояния, изначально доказанные Энтовым и Полтеровичем в предположении полупростоты алгебры квантовых когомологий. Островер и Темкин выдвинули гипотезу, что у всех монотонных симплектических торических многообразий в алгебре квантовых когомологий есть прямое слагаемое поле. В работе [7] это и доказывается. Также это влечет несмещаемость конкретных лагранжевых торов. Более того, выдвигается гипотеза, что существование поля как слагаемого в квантовых когомологиях выполнено для *всех* многообразий Фано, а не только для торических, и дается вывод этой гипотезы из предположений зеркальной симметрии, описанных выше. Доказательство неожиданное и очень простое: алгебра квантовых когомологий многообразия Фано M отождествляется с алгеброй функций на критическом множестве многочлена Лорана W — зеркального образа M. Но функция W выпукла в "тропических" координатах, поэтому имеет выделенную невырожденную критическую точку, а именно глобальных минимум на вещественном положительном локусе.

Результаты [7] также связаны с препринтом [8] Галкина, Голышева и Иритани. Пусть $U = \star c_1(X)$ это оператор квантового умножения на первый класс Черна на многообразии Фано X, рассматриваемом как монотонное симплектическое многообразие. Пусть $u_1, \ldots, u_N$ это все собственные значения U, а $T = \max |u_i|$ это их максимальное абсолютное значение. Гипотеза $\emptyset$ в [8] утверждает, что тогда T является собственным значением U, кратность T равна единице (если X многообразие, а для орбиобразий кратность может быть и выше), а также что есть ровно $r(X)$ собственных значений U с абсолютным значением T и равны они $T \exp^{\frac{2\pi i k}{r(X)}}$, где $k = 0 \ldots r-1$, а $r(X)$ это индекс Фано многообразия X. Выделенное в [7] прямое слагаемое в квантовых когомологиях многообразия Фано является собственным подпространством относительно U, соответствующее этому пространству собственное значение как раз и есть T, таким образом в [7] доказывается часть гипотезы $\emptyset$ из [8]. В предположениях гипотезы $\emptyset$ в [8] показано, что в пространстве когомологий $H^\bullet(X)$ можно выделить одномерное *асимптотическое* подпространство $\mathcal{A}_X$, решений квантового дифференциального уравнения с наименьшей асимптотикой в иррегулярной особой точке. *Первая гамма-гипотеза* в [8] утверждает, что пространство $\mathcal{A}_X$ порождено гамма-классом $\hat{\Gamma}_X := \exp\left(Cc_1(X) + \sum_{k\geq 2}(-1)^k \frac{ch_k(T_X)}{k}\right.$. Это уточняет гипотезы Галкина 2008 года об асимптотиках квантовых когомологиях многообразий Фано, и имеет приложения к рациональным аппроксимациям значений дзетафункции Римана в целых точках. Наконец, в предположении что алгебра больших квантовых когомологий $QH(X)$ полупроста, в [8] показано существование *асимптотического* базиса $A_0, \ldots, A_{N-1}$ в $H^\bullet(X)$. *Вторая гамма-гипотеза* утверждающает, что элементы этого базиса равны $A_i = \hat{\Gamma}_X \cdot Ch(E_i)$, где E_i это некоторый (численный) исключительный набор в $\mathcal{D}^b_{coh}(X)$, а $Ch(E_i) := (2\pi i)^{\deg} ch(E_i)$ это их нормализованные характеры Черна. Вторая гамма-гипотеза является уточнением третьей части гипотезы Дубровина, выдвинутой на международном конгрессе математиков в 1998 году. В [8] доказана справедливость гипотезы $\emptyset$, первой и второй гамма-гипотез (при условии применимости) для разных классов многообразий Фано: для торических многообразий, для полных пересечений, для грассманианов (используя абелево-неабелево соответствие).

В работе [9] Галкин и Шиндер нашли универсальную формулу, называемую там $Y - F(Y)$ соотношением, связывающую классы в кольце Гротендика многообразий у d-мерной кубической гиперповерхности Y, двухточечной схемы Гильберта $Y^{[2]}$ на ней, и многообразием Фано F_Y прямых на ней:

$$[Y^{[2]}] = [Y] \times [\mathbb{P}^d] + [\mathbb{A}^2] \times [F_Y]$$

Эта формула имеет очень простое геометрическое доказательство и множество интересных следствий, включая новое доказательство существования двадцати семи прямых на гладкой комплексной кубической поверхности.

Самое неожиданное следствие это уточнение гипотетического критерия рациональности гладкой четырехмерной кубической гиперповерхности: если класс аффинной прямой не является делителем нуля в кольце Гротендика комплексных многообразий, тогда для каждой гладкой комплексной четырехмерной кубической гиперповерхности $Y \subset \mathbb{P}^5$ многообразие Фано F_Y прямых на ней бирационально симметрическому квадрату $K3$ поверхности.

5.2. DG-модули над DG-алгебрами де Рама.

Пусть X — гладкое многообразие над полем k характеристики нуль. Комплекс де Рама $\Omega_X = \Omega^\bullet_{X/k}$ является пучком DG-алгебр на X, а квазикогерентные пучки DG-модулей над Ω_X (для краткости будем их называть Ω_X-модулями) образуют DG-категорию, но ее производная категория обычно не интересна. В статье [12] Л. Посицельский определил копроизводную категорию $\mathcal{D}^{co}(\Omega_{\mathrm{X}}-\mathrm{qcoh})$ категории Ω_X-модулей и доказал, что неограниченая производная категория квазикогерентных левых $\mathscr{D}_X$-модулей $\mathcal{D}(\mathscr{D}_{\mathrm{X}}-\mathrm{qcoh})$ эквивалентна $\mathcal{D}^{co}(\Omega_{\mathrm{X}}-\mathrm{qcoh})$. Кроме того, было доказано, что абсолютная производная категория когерентных Ω_X-модулей соответствует ограниченной производной категории $\mathscr{D}_X$-модулей. Этот результат — глубокое обощение кошулевой двойственности между симметрической и внешней алгебрами.

В работе [17] были постороены функторы производного тензорного произведения, прямого образа и обратного образа с компактным носителем на копроизводных категориях Ω_X-модулей. Для когерентных Ω_X-модулей построен функтор двойственности. Доказано, что соответсвие Посицельского переводит эти функторы в соответвующие функторы на $\mathscr{D}_X$-модулях.

Некторые из этих конструкций были известны ранее для DG-категорий Ω-модулей. Например, в статье [10] был построен прямой образ, а в [4, 7.2] обратный для гладкого морфизма.

5.3. Гладкие представления бесконечных групп

Пусть K – множество и G – некоторая группа его перестановок с (хаусдорфовой) вполне несвязной топологией, база которой состоит изо всех сдвигов поточечных стабилизаторов конечных подмножеств K.

В самых разнообразных ситуациях возникает задача описания некоторых классов гладких представлений G, т.е. непрерывных представлений в пространствах с дискретной топологией. Так, например, некоторые мотивные вопросы сводятся к проблеме описания "гомотопически инвариантных" гладких неприводимых представлений группы всех автоморфизмов алгебраически замкнутого расширения алгебраически замкнутого поля бесконечной степени трансцендентности, см. [13].

Если K – поле и G – проконечная группа его автоморфизмов, то любое гладкое неприводимое представление G над неподвижным подполем K содержится в K (теорема 90 Гильберта). Это можно интерпретировать как тривиальность гладких *полулинейных* представлений проконечных групп над полями, на которых они точно действуют.

Таким образом проблема описания определённых гладких неприводимых представлений G сводится к проблеме описания определённых гладких неприводимых полулинейных представлений G.

Ранее интенсивно изучались (i) унитарные представлений таких групп, как симметрические и полные линейные над конечным полем (что не имеет прямого отношение к настоящей работе, хотя представления именно таких групп и изучаются), (ii) дискретные представления локально компактных групп, такие как линейные группы над p-адическим полем (что также не имеет прямого отношение к настоящей работе). Кроме того, с помощью полулинейных представлений, но не гладких, изучались p-адические представления групп Галуа p-адических полей, см.в работы Тейта, Сена, Фонтена и др.

В настоящей работе рассматривается (модельный) случай *псевдопроконечной* группы, т.е. множество $U\backslash G/U$ конечно для любой подгруппы $U \subseteq G$ (эквивалентные определения имеются в [14, 1.1]). Этот класс групп является, в некотором смысле, минимальным обобщением проконечных и олигоморфных групп. В частности, подробно изучаются примеры олигоморфных групп – бесконечная симметрическая группа и бесконечная полная линейная группа над конечным кольцом.

Линейные (но не полулинейные) представления таких групп активно изучаются в последнее время (см., например, [16, 6] и приведённые там ссылки) в несколько ином контексте – функторов (или *предпучков*) на некоторых "конечных" категориях. Представления при таком подходе становятся *пучками* в соответствующей топологии.

Следует отметить, что полулинейные представления можно воспринимать как (эквивариантные) квазикогерентные пучки.

Результаты работы, см. препринт [15, Lemma 4.3].

Описаны инъективные гладкие представления таких групп как бесконечная симметрическая группа или бесконечная полная линейная группа над конечным полем.

Показано, что конечна длина любого гладкого циклического представления таких групп как бесконечная симметрическая группа или бесконечная полная линейная группа над конечным полем, т.е. показана локальная нётеровость и локальная артиновость категории гладких представлений таких групп.

Ситуация кардинально меняется, если вместо линейных представлений рассматривать полулинейные. А именно, теряется локальная артиновость соответствующей категории. Однако в той же работе показано, что сохраняется локальная нётеровость категории гладких полулинейных представлений, по крайней мере в случае бесконечной симметрической группы.

Получено обобщение известного (в теории разностных уравнений) утверждения о цикличности конечномерных полулинейных представлений бесконечных полугрупп. А именно, доказана цикличность конечно порождённых гладких полулинейных представлений. В качестве следствия получено некоторое описание неприводимых гладких полулинейных представлений бесконечных симметрических групп.

Построен пример такой тройки (A, M, P), состоящей из ассоциативного кольца с единицей A, нётерова A-модуля M и простого A-модуля P, что (i) любой фактормодуль M по любому ненулевому подмодулю изоморфен конечной сумме копий P, (ii) для любого целого $N \geq 0$ найдётся фактормодуль M изоморфный прямой сумме N копий P.

Показано, что любое конечномерное гладкое полулинейное представление бесконечной симметрической группы изоморфно прямой сумме копий единственного одномерного гладкого полулинейного представления.

Литература

[1] Mohammad Akhtar, Tom Coates, Sergey Galkin, Alexander Kasprzyk: *Minkowski Polynomials and Mutations*, SIGMA 8 (2012), 094, 707 pages.

[2] A. Beilinson, V. Drinfeld: *Quantization of Hitchin's integrable system and Hecke eigenvalues*, Webdraft.

[3] Alexey Bondal, Sergey Galkin: *Mirror symmetry for minuscule varieties*, preprint IPMU 11-0101, in preparation.

[4] Tom Coates, Alessio Corti, Sergey Galkin, Vasily Golyshev, Alexander Kasprzyk: *Mirror Symmetry and Fano Manifolds*, European Congress of Mathematics (Kraków, 2-7 July, 2012), November 2013 (824 pages), pp. 285–300. ISBN 978-3-03719-120-0. DOI:`http://dx.doi.org/10.4171/120-1/16`10.4171/120-1/16.

[5] Tom Coates, Alessio Corti, Sergey Galkin, Alexander Kasprzyk: *Quantum periods for 3-dimensional Fano manifolds*, `http://arxiv.org/abs/1303.3288`arXiv:1303.3288

[6] Tom Coates, Sergey Galkin, Alexander Kasprzyk, Andrew Strangeway: *Quantum Periods For Certain Four-Dimensional Fano Manifolds*, http://arxiv.org/abs/1406.4891arXiv:1406.4891

[7] Sergey Galkin: *The conifold point*, http://arxiv.org/abs/1404.7388arXiv:1404.7388

[8] Sergey Galkin, Vasily Golyshev, Hiroshi Iritani: *Gamma classes and quantum cohomology of Fano manifolds: Gamma conjectures*, http://arxiv.org/abs/1404.6407arXiv:1404.6407

[9] Sergey Galkin, Evgeny Shinder: *The Fano variety of lines and rationality problem for a cubic hypersurface*, http://arxiv.org/abs/1405.5154arXiv:1405.5154

[10] M. Kapranov: *On DG-modules over the de Rham complex and the vanishing cycles functor*, Algebraic geometry (Chicago, IL, 1989), 57-86, Lecture Notes in Math., 1479, Springer, Berlin, 1991.

[11] Yaron Ostrover, Ilya Tyomkin: *On the quantum homology algebra of toric Fano manifolds*, Selecta Mathematica, 15(1), 121–149.

[12] L. Positselski: *Two kinds of derived categories, Koszul duality, and comodule-contramodule correspondence*, *Memoirs of the Amer. Math. Soc.*, posted on November 19, 2010, S 0065-9266(2010)00631-8 (to appear in print). v+133 pp. http://arxiv.org/abs/0905.2621arXiv:0905.2621 [math.CT]

[13] M. Rovinsky, Motives and admissible representations of automorphism groups of fields, Math. Zeit., 249 (2005), no. 1, 163–221.

[14] M.Rovinsky, On semilinear representations of the infinite symmetric group, http://arxiv.org/abs/1405.3265arXiv:1405.3265.

[15] M.Rovinsky, On semilinear representations of the infinite symmetric group, http://arxiv.org/abs/1405.3265v3arXiv:1405.3265v3.

[16] S.V.Sam, A.Snowden, Stability patterns in representation theory, http://arxiv.org/abs/1302.5859arXiv:1302.5859,

[17] S. Rybakov: *DG-modules over de Rham DG-algebra*, Accepted to European Journal of Mathematics. `http://arxiv.org/abs/1311.7503`arXiv:1311.7503

6. Гиперкэлерова и гиперкомплексная геометрия

Геометрия гиперкэлеровых, голоморфно симплектических и гиперкомплексных многообразий - бурно развивающаяся область математики, лежащая на перекрестье дифференциальной геометрии, алгебраической геометрии, комплексного анализа и математической физики. Используя методы этих разделов математики, сотрудники лаборатории доказали ряд давно стоявших гипотез, получив результаты, которые потенциально имеют весьма широкую область применимости.

6.1. Гипотеза Каваматы–Моррисона

Конус классов обильных дивизоров вместе с его замыканием - численно эффективным конусом - является одним из важнейших объектов изучения программы минимальных моделей. Из теоремы Мори о конусе следует, что для многообразий Фано это конечный рациональный полиэдр. Утверждение неверно для многообразий с нулевым каноническим классом; тем не менее, гипотеза Каваматы и Моррисона утверждает, что это конечный рациональный полиэдр “с точностью до автоморфизмов” (т. е. с небольшой погрешностью, связанной с поведением на границе, которая несущественна для наших дальнейших рассмотрений что группа автоморфизмов имеет конечную фундаментальную область на этом конусе). Она известна для поверхностей типа К3 (это результат Ханса Стерка 1985 года) и для некоторых трехмерных многообразий Калаби-Яу.

Е. Америк и М. Вербицкий доказали гипотезу о конусе для многомерных аналогов поверхностей типа К3 - неприводимых голоморфно симплектических многообразий. На самом деле их основной результат несколько более сильный, и он получен в более общем (кэлеровом) случае для кэлерова конуса (здесь, конечно, нельзя утверждать, что группа автоморфизмов имеет полиэдральную фундаментальную область, поскольку для большинства голоморфно симплектических многообразия она тривиальна, а кэлеров конус равен положительному для формы Бовилля-Богомолова, то есть “круглый”; теорема Америк и Вербицкого касается действия группы автоморфизмов на множестве граней кэлерова конуса и утверждает, что число орбит этого действия конечно. Гипотеза Каваматы-Моррисона получается как следствие.) Как указал Кавамата, из этого доказательства гипотезы Каваматы-Моррисона получается еще один важный результат в теории минимальных моделей: количество симплектических бирациональных моделей симплектического многообразия конечно.

Америк и Вербицкий подготовили об этом препринт [AV], в настоящий момент он находится на рецензии в журнале. Результаты докладывались на международных конференциях.

6.2. Слоения симплектических многообразий

Методы теории минимальных моделей (“Mori’s bend-and-break”) применялись Е. Америк в соавторстве с Ф. Кампана для классификации тех случаев, когда характеристическое слоение на гладкой гиперповерхности в голоморфно симплектическом многообразии (не обязательно неприводимом) является алгебраическим (см. препринт [AC], находящийся на рецензии).

6.3. Результаты гиперкомплексной геометрии

Гиперкомплексное многообразие есть многообразие, снабженное тройкой комплексных структур, удовлетворяющих кватернионным соотношениям. Это понятие является неметрическим обобщением понятия гиперкэлерова многообразия, примерно в том же смысле, в котором комплексное многообразие является обобщением кэлерова. Геометрия гиперкомплексных многообразий много богаче примерами, чем гиперкэлерова геометрия, но эти примеры гораздо хуже изучены. Совместно со стажером лаборатории А. Солдатенковым, а также с Г. Гранчаровым (Майами) и М. Лежми (Брюссель), заместитель заведующего лаборатории М. Вербицкий получил следующие результаты.

Вместе с А. Солдатенковым, Вербицкий определил k-симплектические структуры и изучил их базовые свойства в статье [SV]. Было доказано, что любой комплексный тор в общем гиперкэлеровом многообразии M допускает k-симплектическую структуру, где k есть второе число Бетти M. Также было построено действие алгебры Клиффорда $Cl_0(k)$ на касательном расслоении к k-симплектическому многообразию, что позволяет оценить размерность таких торов (она очень большая) и для одного из двух многообразий О’Грэди доказать, что их нет. Понятие k-симплектических многообразий обобщает понятие 3-симплектических многообразий, введенное Вербицким и Жардимом в статье Статья "k-symplectic structures and absolutely trianalytic subvarieties in hyperkahler manifolds" принята к печати в журнале "Journal of Geometry and Physics".

Вместе с Г. Грантчаровым и М. Лежми, Вербицкий доказал гиперкомплексный аналог теоремы Бухдаля и Ламари о кэлеровых структурах на поверхности. Было доказано, что гиперкомплексное многообразие кватернионной размерности 2 с тривиальным каноническим расслоением допускает НКТ-метрику тогда и только тогда, когда первые когомологии структурного пучка четномерны. Результат опубликован в препринте [GLV].

6.4. Симплектические упаковки шарами в гиперкэлеровых многообразиях

М. Вербицкий, совместно с М. Энтовым, вел работу над классификацией симплектических упаковок в гиперкэлеровых многообразиях и торах ([EV]). Было доказано, что эти многообразия допускают полные симплектические упаковки, что существенно улучшает важный и технически весьма сложный результат Латшефа, Макдафф и Шленка, которые доказали это же для 4-мерного тора и K3. Теорема Латшефа, Макдафф и Шленка была передоказана существенно проще; аналогичный результат был получен в любой размерности.

Проблема симплектических упаковок - классический вопрос симплектической геометрии, известный с 1980-х. Симплектический шар есть шар в симплектическом пространстве R^{2n} со стандартной симплектической структурой. Симплектическая упаковка в симплектическом многообразии M есть набор симплектических шаров, симплектически вложенных в M таким образом, что их образы не пересекаются. Говорится, что M допускает полные симплектические упаковки, если для любого набора шаров общим объемом меньше, чем объем M, M допускает упаковку данным набором шаров. Латшев, Макдафф и Шленк доказали, что 4-мерный тор всегда допускает полную симплектическую упаковку. Их теорему удалось существенно улучшить в работе М. Вербицкого работе, совместной с М. Энтовым (Технион): [EV]. Доказательство базируется на классической работе Макдафф и Полтеровича, которые описали симплектические упаковки в терминах симплектического конуса симплектических раздутий, и на фундаментальной теореме Демайи и Пауна, которые явно описали кэлеров конус многообразия в терминах его подмногообразий.

Зафиксируем набор симплектических шаров S Относительная симплектическая упаковка есть симплектическая упаковка из набора шаров, гомотетичных S с одним и тем же коэффициентом s. Относительная упаковочная константа s(M,S) - частное объема S к объему M, умноженное на супремум s по всем упаковкам S в M. Она равна 1 для всех S тогда и только тогда, когда M допускает полные симплектические упаковки, в противном случае она строго меньше 1.

Используя понятие эргодической комплексной структуры, Вербицкому удалось доказать, что относительная упаковочная константа s(M,S) не зависит от выбора симплектической структуры на M, являясь топологическим инвариантом. Это наблюдение легло в основу совместной работы Вербицкого и Энтова, в ходе которой удалось установить, что эта константа равна 1. Для других задач упаковок (таких, как упаковки голоморфными симплектическими шарами) наличие полных симплектических упаковок неизвестно, и определение относительной упаковочной константы (которая и в этих случаях не зависит от выбора многообразия в его деформационном классе) становится интересной математической задачей. Переходя к пределу как в доказательстве теоремы Броди, из теорем о существовании голоморфных симплектических иммерсированных упаковок можно выводить результаты о метрике Кобаяши и аналогичных инвариантах, таких, как мера Кобаяши и инфинитезимальная метрика Кобаяши-Ройдена. Это показывает, что задача определения относительной упаковочной константы имеет много полезных применений.

6.5. Рациональные кривые в пространстве твисторов

Пространство твисторов есть комплексное многообразие, связанное с дифференциально-геометрическими структурами на многообразиях. Оно было введено и изучалось в математической физике, как способ представить решения уравнений математической физики (Эйнштейна, Янг-Миллса и т. п.) в терминах комплексной геометрии. Пространство твисторов определено для кватернионно-кэлерова многообразия, для гиперкэлерова или гиперкомплексного многообразия, для кватернионного многообразия и для 4-мерного автодуального многообразия. Все эти пространства покрываются рациональными кривыми, что делает их геометрию похожей на геометрию многообразий Фано.

В работе “Holography principle for twistor spaces” [V1], опубликованной в отчетный период М. Вербицкий доказал, что пространство голоморфных сечений любого голоморфного расслоения на пространстве твисторов односвязного многообразия M а также пространство мероморфных функций, равно такому же пространству на твисторах от любого связного открытого подмножества $U \subset M$. Таким образом, комплексная геометрия пространства твисторов M определяется из комплексной геометрии любого открытого подмножества; это объясняет термин "голографический принцип".

В работе М. Вербицкого "Rational curves and special metrics on twistor spaces" ([V2]), опубликованной в отчетный период, рациональные кривые в пространстве твисторов используются для изучения специальных метрик на этих пространствах. В комплексной геометрии особую роль играют два класса метрик: кэлеровы метрики кручения (КТ-метрики), пришедшие из физики, и подкласс в КТ-метриках, играющий важную роль в теории потоков Риччи – симплектические эрмитовы метрики. Одна из важных задач комплексной дифференциальной геометрии - поиск примеров метрик КТ-типа и симплектических эрмитовых метрик на некэлеровых комплексных многообразиях. Симплектические эрмитовы метрики на некэлеровых комплексных многообразиях дп сих пор неизвестны; доказано, что на нескольких важных классах комплексных некэлеровых многообразий (мойшезоновы многообразия, некэлеровы комплексные поверхности, ниль- и сольвмногообразия) таких метрик нет. Используя геометрию пространства модулей рациональных кривых, Вербицкий доказал, что пространства твисторов, которые допускают КТ-метрики, всегда кэлеровы. Кэлеровы пространства твисторов классифицированы Н. Хитчиным, и их совсем немного. Помимо этого отрицательного результата, Вербицкий доказал, что пространство кривых на пространстве твисторов К3, трансверсальных слоям твисторной проекции, всегда штейново, применив тот же самый аргумент в ситуации, когда вторая производная от метрики на твисторах — положительная (2,2)-форма.

6.6. Доказательство гипотезы Барта

Изучение пространства модулей стабильных расслоений на $\mathbb{C}P^3$ имеет богатую историю, которая уходит корнями в работы Мамфорда и Хартсхорна 1960-х годов. В начале 1970-х появилась гипотеза (ее обыкновенно приписывают Барту), что пространство модулей стабильных расслоений ранга 2 на $\mathbb{C}P^3$ гладко.

Если выражаться чуть более точно, следует рассмотреть пространство модулей математических инстантонов (расслоений ранга 2, удовлетворяющих определенному когомологическому условию, имеющую ту же природу, что регулярность Кастельнуово-Энриквеса). Такие расслоения автоматически стабильны. Второй класс Черна математического инстантона называется его **зарядом**. Гипотеза Барта утверждает, что пространство модулей инстантонов на $\mathbb{C}P^3$ с зарядом c гладко, неприводимо и имеет размерность $8c-3$ ([CTT, Conjecture 1.2]).

Барт в 1977 доказал эту гипотезу для случая $c=1$ ([B1]); Хартсхорн доказал ее в 1978-м году для $c=2$ ([H]), а Эллингсруд и Стромме доказали случай $c=3$ (1981, [ES]). Для случая $c=4$, неприводимость была доказана Бартом (citeB2, 1981), а гладкость – Ле Потье ([LeP], 1983). Недавно, А. Тихомиров ([T]) доказал неприводимость пространства модулей инстантонов для всех нечетных значений c.

В работах М. Жардима и М. Вербицкого, гладкость пространства модулей инстантонов была доказана для любого заряда, и установлено, что его размерность равна предсказанной гипотезой Барта.

Аргумент основан на изучении открытой авторами геометрической структуры на многообразиях, так называемой тригиперкэлеровой структуры. В работе [JV1], Жардим и Вербицкий доказали, что пространство модулей инстантонов изоморфно компоненте пространства модулей рациональных кривых на пространстве твисторов гиперкэлерова многообразия. На этой компоненте Жардим и Вербицкий построили трисимплектическую структуру и изучили его свойства. Среди прочего, было доказано, что трисимплектическое многообразие допускает каноническую голоморфную связность без кручения. Аналогичная связность была построена Черном в его диссертации 1936-го года годы для 3-сетей ([C]).

В работе [JV2], опубликованной в отчетный период, Жардим и Вербицкий построили аналог гиперкэлеровой редукции для трисимплектических многообразий, ассоциированных с пространствами твисторов. Используя эту конструкцию, им удалось доказать гладкость пространства модулей, решив 30-летнюю проблему, над частными случаями которой ломали голову десятки математиков.

Литература

[AC] Ekaterina Amerik and Frédéric Campana. *Characteristic foliation on non-uniruled smooth divisors on projective hyperkaehler manifolds* arXiv:1405.0539.

[AV] Ekaterina Amerik and Misha Verbitsky. Morrison-Kawamata cone conjecture for hyperkahler manifolds. arXiv:1408.3892, 23 pages.

[B1] W. Barth, Some properties of stable rank-2 vector bundles on $\mathbf{P}_n$. Math. Ann. **226** (1977), 125–150.

[B2] W. Barth, Irreducibility of the space of mathematical instanton bundles with rank 2 and $c_2 = 4$. Math. Ann. **258** (1981/82), 81–106.

[C] S. S. Chern, *Eine Invariantentheorie der Dreigewebe aus r-dimensionalen Mannigfaltigkeiten im R_{2r},* Abhandl. Math. Semin. Univ. Hamburg, 1936.

[CTT] I. Coandă, A. S. Tikhomirov, G. Trautmann, Irreducibility and smoothness of the moduli space of mathematical 5-instantons over $\mathbb{P}^3$. Internat. J. Math. **14** (2003), 1–45.

[ES] G. Ellingsrud and S.A. Stromme, Stable rank 2 vector bundles on $\mathbb{P}^3$ with $c_1 = 0$ and $c_2 = 3$. Math. Ann. **255** (1981), 123–135.

[EV] Michael Entov, Misha Verbitsky, *Full symplectic packing for tori and hyperkahler manifolds*, arXiv:1412.7183, 44 pages

[GLV] Gueo Grantcharov, Mehdi Lejmi, Misha Verbitsky, *Existence of HKT metrics on hypercomplex manifolds of real dimension 8*, arXiv:1409.3280, 30 pages.

[H] R. Hartshorne, Stable vector bundles of rank 2 on $\mathbb{P}^3$. Math. Ann. **238** (1978), 229–280.

[JV1] M. Jardim, M. Verbitsky, *Moduli spaces of framed instanton bundles on $\mathbb{CP}^3$ and twistor sections of moduli spaces of instantons on $\mathbb{C}^2$*, Adv. Math., 2011, No. 227. pp. 1526-1538.

[JV2] Marcos Jardim, Misha Verbitsky, *Trihyperkahler reduction and instanton bundles on CP^3*, Compositio Mathematica, Volume 150, Issue 11, November 2014, pp 1836-1868.

[LeP] J. Le Potier, Sur l'espace de modules des fibrés de Yang et Mills. In: *Mathematics and physics*, 65–137. Progr. Math. **37**, Birkhцзuser Boston, 1983.

[SV] Andrey Soldatenkov, Misha Verbitsky, *k-symplectic structures and absolutely trianalytic subvarieties in hyperkahler manifolds*, 23 pages, arXiv:1409.1100, accepted by "Journal of Geometry and Physics".

[T] A. S. Tikhomirov. *Moduli of mathematical instanton vector bundles with odd c_2 on projective space*, 2012 Izv. Math. 76 991.

[V1] Misha Verbitsky, *Holography principle for twistor spaces*, Pure and Applied Mathematics Quarterly 10 (2014), pp. 325-354 (Special Issue: In Memory of Andrey Todorov)

[V2] Misha Verbitsky *Rational curves and special metrics on twistor spaces*, Geom. Topol. 18 (2014) 897-909.

7. Теория калибраций и голоморфные лагранжевы расслоения

Голоморфные лагранжевы расслоения – одно из основных технических средств в арсенале математика, который занимается голоморфной симплектической геометрией. Построение и классификация таких расслоений - центральный вопрос голоморфной симплектической геометрии. Дополнительная мотивация для этих исследований приходит из математической физики. Существование специальных лагранжевых расслоений на многообразиях Калаби-Яу и двойственность между ними было продложени Стромингером, Яу и Засловым как одно из объяснений зеркальной симметрии. Исследования калиброванных подмногообразий, предложенных Стромингером, Яу и Засловым, стали фундаментом для SYZ-гипотезы в голоморфной симплектической геометрии.

Теория специальных лагранжевых многообразий - одна из основных тем в симплектической геометрии и дифференциальной геометрии многообразий с калибрацией. Голоморфная симплектическая геометрия - основной, но не единственный источник примеров в этих исследованиях. Сотрудники Лаборатории Алгебраической Геометрии активно работают над различными аспектами этой проблемы, как алгебро-геометрическими, так и происходящими из симплектической топологии и дифференциальной геометрии.

7.1. Лагранжевы слоения и псевдометрика Кобаяши

В статье "Families of Lagrangian fibrations on hyperkaehler manifolds", опубликованной в отчетный период ([KV]) Людмила Каменова (Stony Brook University), и заместитель заведующего лабораторией Миша Вербицкий доказывают, что для каждого гиперкэлерова многообразия существует конечное число классов деформации голоморфных лагранжевых расслоений, и многообразия, допускающие такие расслоения, плотны в пространстве деформаций многообразия M, если M допускает хотя бы одно. Этот результат был использован, чтобы доказать, что метрика Кобаяши на таких многообразиях всегда вырождена, решив таким образом важную проблему, поставленную Кобаяши в 1970-е.

Этот результат основан на статье "Any component of moduli of polarized hyperkaehler manifolds is dense in its deformation space" [AV], за авторством Саши Ананьина (UNICAMP) и заместителя заведующего лабораторией Миши Вербицкого, опубликованной в отчетный период. В этой статье доказано, что для любого класса η вторых когомологий, любая компонента пространства M_η модулей гиперкэлеровых многообразий, для которых η имеет тип $(1,1)$, плотна в пространсыве модулей,

В статье "Kobayashi pseudometric on hyperkahler manifolds", опубликованной в отчетный период ([KLV]) Людмила Каменова (Stony Brook University), Steven Lu (UQAM) и заместитель заведующего лабораторией Миша Вербицкий применили лагранжевы расслоения и результаты Вербицкого об эргодическом действии группы классов отображений, чтобы доказать, что метрика Кобаяши и метрика Кобаяши-Ройдена зануляется на любом гиперкэлеровом многообразии, и которого есть деформация, допускающая лагранжево расслоенние.

7.2. Геометрия симплектических многообразий с инвариантными лагранжевыми подмногообразиями.

Симплектические многообразия играют фундаментальную роль в современной алгебраической геометрии и математической физике. Исследования последних 20 лет показали тесную связь G-бирациональных инвариантов вложений однородных пространств для редуктивной группы G и симплектической геометрии их кокасательных расслоений. Одним из инетересных результатов последних лет была теорема Д.И.Панюшева (1999), которая утверждает, что для G-многообразия X и его G-инвариантного подмногообразия Y сложность и ранг конормального расслоения к Y в X равны соответственно сложности и рангу X. Напомним, что для многообразия X сложность - это коразмерность типичной орбиты в X борелевской подгруппы B в G, а ранг - это ранг решетки характеров B- полуинвариантных функций на X. В связи с этой теоремой Панюшев высказал гипотезу о том, что в кокасательном расслоении к G-многообразию X ранг и сложность G-инвариантного лагранжева подмногообразия равны рангу и сложности X соответственно (отметим, что конормальное расслоение к инвариантному подмногообразию в X как раз является примером инвариантного лагранжева подмногообразия в кокасательном расслоении). Ранее сотрудником Лаборатории В.С.Жгуном совместно с доцентом механико-математического факультета МГУ Д.А.Тимашевым [Z1] вышеупомянутая гипотеза была сформулирована в большей общности, чем это было сделано самим Панюшевым. А именно, пусть M – симплектическое многообразие, снабженное отображением моментов, тогда все G-инвариантные лагранжевы подмногообразия в M имеют одинаковую сложность и ранг. Более того, гипотетически сложность и ранг G-инвариантного лагранжева подмногообразия могут быть выражены через симплектические инварианты M, а именно через коранг и дефект. Напомним, что корангом симплектического многообразия M называется ранг ограничения симплектической формы на косоортогональное дополнение к касательному пространству к общей G-орбите в M, а дефектом называется размерность ядра ограничения симплектической формы на касательное пространство к общей G-орбите в M. Отметим также, что эти инварианты могут быть выражены через размерность образа отображения моментов и размерность рационального фактора этого образа по группе G. Напомним, что в работе [Z1] сотрудник Лаборатории В.С. Жгун и доцент механико-математического факультета МГУ Д.А. Тимашев доказали эту гипотезу в случае, когда инвариантные лагранжевы подмногообразия являются квазиаффинными (или, более общо, невырожденными в терминологии Ф.Кнопа). В этой статье был предложен метод доказательства обобщенной гипотезы Панюшева, базирующийся на деформации симплектической структуры к симплектической структуре на нормальном расслоении к лагранжевому подмногообразию. Это нормальное расслоение естественно отождествляется с кокасательным расслоением, а симплектическая структура оказывается стандартной. Существенным шагом в доказательстве являются результаты Кнопа об эквивариантной структуре кокасательного расслоения для квазиаффинных (или, более общо, невырожденных по Кнопу многообразий). На основе этих исследований также удалось исследовать геометрию отображения моментов симплектических многообразий с инвариантными лагранжевыми подмногообразиями. В частности, было описано замыкание образа отображения моментов и доказана теорема о равноразмерности слоев инвариантного отображения моментов вне множества коразмерности два.

Основным результатом исследований в настоящем этапе проекта стало новое доказательство следующей теоремы.

Теорема 7.1. *Пусть X – квазиаффинное G-многообразие. Тогда его малая группа Вейля порождена отражениями.*

Новое доказательство имеет существенное преимущество перед старым, поскольку не использует редукцию к однородным пространствам, теорему о гладкой эквивариантной компактификации и теорему Серра об односвязности проективных унирациональных многообразий. Существенным шагом в доказательстве этой теоремы является лишь односвязность слоев кокасательного расслоения и наличие теоремы о равноразмерности слоев инвариантного отображения моментов вне множества коразмерности два.

Результаты исследований были доложены на конференции "Конференция "Наука Будущего", Санкт-Петербургский государственный университет, Россия, Санкт-Петербург, 16 – 21 сентября; на Четвертой школе-конференции "Алгебры Ли, алгебраические группы и теория инвариантов", Механико-математический факультет МГУ им. М.В.Ломоносова, 27 января – 1 февраля 2014 г.; в Независимом Московском университете; а также будут опубликованы в совместной статье с Д.А.Тимашевым "Свойства фактор-отображения моментов для симплектических многообразий с инвариантными лагранжевыми подмногообразиями". Работа сдана в печать в Доклады академии наук.

Литература

[AV] Sasha Anan'in, Misha Verbitsky, *Any component of moduli of polarized hyperkaehler manifolds is dense in its deformation space*, Journal de mathematiques pures et appliques, 101 (2014), pp. 188-197.

[KV] Ljudmila Kamenova, Misha Verbitsky, *Families of Lagrangian fibrations on hyperkaehler manifolds,* Advances in Mathematics Volume 260, 1 August 2014, Pages 401-413.

[KLV] Ljudmila Kamenova, Steven Lu, Misha Verbitsky, *Kobayashi pseudometric on hyperkahler manifolds*, J. London Math. Soc. (2014) 90 (2): 436-450.

[Z1] Жгун В. С., Тимашев Д. Симплектические многообразия с инвариантными лагранжевыми подмногообразиями, Доклады академии наук. 2012. Т. 443. § 4. С. 418-421.

[Z2] Zhgoon V. S. On the Local Structure Theorem and equivariant geometry of cotangent bundles, Journal of Lie Theory. 2013. Vol. 23. P. 607-638.

8. Локально конформно кэлеровы многообразия

При участии Ливиу Орнеа (Бухарест), заместитель заведующего лаборатории М. Вербицкий прочел весной 2014 года курс "Локально конформные кэлеровы многообразия" (Независимый Университет и математический факультет НИУ ВШЭ), записки которого легли в основу готовящейся монографии. Программа курса:

Lecture 1: LCK manifolds:] introduction and definitions.

Lecture 2: Vaisman theorem.

Lecture 3: Vaisman manifolds (local geometry).

Lecture 4: Sasakian manifolds.

Lecture 5: Structure theorem for Vaisman manifolds.

Lecture 6: Orbifolds.

Lecture 7: Immersion theorem for Vaisman manifolds.

Lecture 8: LCK manifolds with potential.

Lecture 9: Holomorphic contractions.

Lecture 10: CR-geometry and pseudoconvex shells.

Lecture 11: CR-geometry of Sasakian manifolds

Lecture 12: Morse-Novikov cohomology.

Lecture 13: Automorphisms of LCK manifolds.

Lecture 14: Oeljeklaus-Toma manifolds.

Lecture 15: Classification of complex surfaces.

Записки лекций и упражнения для курса опубликованы на странице `http://bogomolov-lab.ru/KURSY/LCK-2014/`. В процессе работы над лекциями, авторами был существенно переработан и улучшен препринт "Locally conformally Kahler metrics obtained from pseudoconvex shells", Liviu Ornea, Misha Verbitsky, arXiv:1210.2080.

9. Программа минимальных моделей, многообразия Фано и группа Кремоны

9.1. Геометрия рациональных G-многообразий

Ю. Прохоровым исследовались (возможно, особые) G-многообразия Фано, т.е. многообразия Фано допускающие “минимальное” действие конечной группы. Ранее ([22], [23]) были классифицированы такие многообразия индекса > 1 и с числом Пикара > 1. В 2014 г. была получена классификация G-многообразия Фано рода 12. Готовится препринт. Получена точная оценка на порядки 2-элементарных подгрупп в трехмерной группе Кремоны [24]. В краткой заметке [25] описаны G-многообразия, имеющие структуру расслоения на поверхности дель Пеццо для группы $G = A_5$.

9.2. Трехмерные экстремальные окрестности

Продолжалась работа над совместным проектом Ю. Прохорова и С. Мори по классификации трехмерных экстремальных окрестностей [20], [14]. Опубликована работа [21] в которой классифицированы экстремальные окрестности типа IC и IIB.

9.3. Рациональность фактормногообразий

Рациональность фактормногообразий – одна из классических тем алгебраической геометрии, восходящая к работам руководителя Лаборатории Алгебраической Геометрии Ф. А. Богомолова. В 2014 г. А. Трепалиным изучены все возможности, когда фактор рациональной поверхности может является нерациональным в случае алгебраически незамкнутого поля. В недавно принятой к печати (в журнале Transfomation Groups) работе А. Трепалиным доказана бирациональная неограниченность факторов рациональных поверхностей в случае, если в основном поле есть элемент, не являющийся квадратом (см. [29]). Для поверхности дель Пеццо степени 4 явно построены примеры всех возможных нерациональных факторов рациональных поверхностей [30]. В случае кубической поверхности получено полное описание в терминах группы Галуа, когда фактор рациональной кубики является нерациональным. Для алгебраически замкнутых полей доказано, что фактор торического многообразия по группе порождённой торическими отражениями является торическим многообразием. Описан веер получившегося многообразия.

10. Комплексная геометрия многообразий Фано

10.1. Геометрия многообразия V_5

К.А. Шрамовым и И.А. Чельцовым велись работы по изучению бирациональной геометрии многообразий Фано, в частности, трехмерного многообразия Фано V_5. Были классифицированы все эквивариантные структуры эллиптических расслоений и расслоений, слоем которых являются поверхности K3, на V_5 относительно группы икосаэдра.

Многообразие Фано V_5 является единственным неособым трехмерным многообразием Фано индекса 2 и антиканонической степени 40. Оно рационально, и замечательно тем, что имеет довольно большую группу автоморфизмов, а именно, ее группа автоморфизмов изоморфна группе $PSL_2(\mathbb{C})$. В частности, на этом многообразии действует группа вращений икосаэдра A_5. Оказывается, что A_5-эквивариантная бирациональная геометрия многообразия V_5 очень интересна. А именно, К. Шрамовым и с И.Чельцовым было доказано, что многообразие V_5 является эквивариантно бирационально жестким относительно группы A_5, то есть в некоторых отношениях ведет себя как нерациональное многообразие. Отметим, что ранее не было известно ни одного A_5-бирационально жесткого рационального многообразия размерности больше 2. Отметим также, что этот результат дал первые примеры несопряженных вложений группы A_5 в группу Кремоны ранга 3. Наконец, в продолжение этого исследования были классифицированы структуры A_5-эквивариантных эллиптических расслоений на V_5 (оказалось, что существует единственное такое расслоение) и A_5-эквивариантных расслоений на V_5, общим слоем которых является поверхность K3 (такое расслоение также оказалось единственным). Отметим, что расслоение на поверхности K3 на многообразии V_5 имеет много общих черт с пучком A_5-инвариантных поверхностей K3 степени 4 в трехмерном проективном пространстве, который был недавно исследован К.Хашимото. Результаты докладывались на многочисленных конференциях.

10.2. Модели Ландау–Гинзбурга многообразий Фано

Слоями моделей Ландау–Гинзбурга для многообразий Фано являются многообразия Калаби–Яу, зеркально двойственные антиканоническим сечениям многообразий Фано. В частности, в трехмерном случае такие сечения являются зеркально двойственными K3 поверхностями. Зеркальная двойственность для K3 поверхностей описана Долгачевым и Никулиным. Она утверждает что, грубо говоря, зеркально двойственными семействами K3 поверхностей являются такие семейства, что решетка алгебраических циклов для поверхностей из одного семейства совпадает с решеткой трансцендентных циклов другого, и наоборот. Антиканоническими сечениями гладких трехмерных многообразий Фано являются K3 поверхности с малым рангом Пикара. Соответственно, зеркально двойственные им K3 поверхности имеют большой ранг Пикара и, значит, малое пространство модулей. Так, для многообразий Фано основной серии общее антиканоническое сечение имеет ранг Пикара 1, а, значит, существует лишь одномерное семейство слоев двойственных моделей Ландау–Гинзбурга. Такие модели были конструктивно построены и изучены Пржиялковским [34], Илтеном, Льюисом и Пржиялковским [13] а также Дораном, Илтеном, Кацарковым, Льюисом и Пржиялковским [10].

Используя технику Гивенталя построения моделей Ландау–Гинзбурга для полных пересечений в гладких торических многообразиях, в рамках проекта Пржиялковским совместно с Дораном, Илтеном, Льюисом, Кацарковым и Хардером были построены торические модели Ландау–Гинзбурга для трехмерных многообразий Фано, соответствующие произвольной симплектической форме, и изучены их модулярные свойства и их монодромии. В частности, пространства модулей возможных слоев моделей Ландау–Гинзбурга для любого трехмерного многообразия Фано покрывается семейством (на единицу меньшей размерности) одномерных семейств — моделей Ландау–Гинзбурга.

Пржиялковским и Шрамовым было показано, что тотальные пространства гивенталевских моделей Ландау–Гинзбурга для полных пересечений Фано в грассманианах плоскостей, которые были предложены Батыревым–Чиокан-Фонтанином–Кимом–ван Стратеном, бирационально эквивалентны комплексному тору. Был построен алгоритм, по которому можно получить многочлен Лорана по такому полному пересечению. Было также показано, что главный период для такого многочлена совпадает с интегралом Гивенталя. Таким образом, этот многочлен Лорана является очень слабой моделью Ландау–Гинзбурга для полных пересечений в грассманианах плоскостей. Результат опубликован в препринте [26]

Публикации: [12]

10.3. Пространство Гурвица и группа Галуа

Для каждой оснащенной группы (G, O), где $O = C_1 \cup \cdots \cup C_m$ – это объединение некоторых классов сопряженности C_i группы G таких, что элементы из O порождают группу G, в [33] было введено понятие индекса неоднозначности $a_{(G,O)}$ оснащенной группы (G, O) и было доказано, что для каждой оснащенной группы (G, O) существует константа T такая, что число неприводимых компонент непустого пространства Гурвица $HUR^G_{d,b,\tau}$ равно $a_{(G,O)}$ при условии, что $\tau_i \geq T$ для $i = 1, \ldots, m$, где $\tau = (\tau_1 C_1, \ldots, \tau_m C_m)$. Поэтому в 2014 году исследования были направлены на вычисления индексов неоднозначности различных оснащенных групп.

В 2014 году совместно с Ф.А. Богомоловым в работе [3] было доказано, что для оснащенной конечной группы (G, O) имеют место следующие неравенства

$$b_0(G) \leq a_{(G,O)} \leq h_2(G),$$

где $h_2(G)$ – порядок группы $H_2(G, \mathbb{Z})$, а $b_0(G)$ – мультипликатор Богомолова. В частности, $a_{(G,G\setminus\{1\})} = b_0(G)$.

Б.Кунявский в [19] доказал, что $b_0(G) = 1$ для каждой почти простой неабелевой группы G. В качестве следствия имеем $a_{(G,G\setminus\{1\})} = 1$ для почти простой группы G.

Пусть G_p – конечная p-группа порядка p^9 – центральное расширение группы $A_p = \mathbb{Z}_p^4$, где $\mathbb{Z}_p$ – циклическая группа порядка p. Пусть x_i, $i = 1, ..., 4$ – порождающие элементы группы A_p. Центр группы G_p порождается коммутаторами $x_i x_j x_i^{-1} x_j^{-1} = [x_i, x_j]$, удовлетворяющими одному соотношению: $[x_1, x_2][x_3, x_4] = 1$. Имеем естественную точную последовательность:

$$1 \to \mathbb{Z}_p^5 \to G_p \to A_p \to 1.$$

Доказано, что $B_o(G_p) = \mathbb{Z}_p$. Отсюда получается, что индекс неоднозначности $a_{(G_p,O)} = p$ для любого оснащения O группы G_p.

10.4. Цилиндричность многообразий Фано

Алгебраическое многообразие X называется *цилиндрическим*, если оно содержит отрытое в топологии Зарисского подмножество U, изоморфное произведению $\mathbb{A}^1 \times V$. Если на многообразии X зафиксирована поляризация H, то говорят, что X является H-*цилиндрическим*, если носитель H совпадает с границей $X \setminus U$ (при подходящем выборе представителя H). Это свойство тесно связано с действиями унипотентных групп на аффинных конусах [15], [16]. Например, это связано с вопросом Фленнара и Зайденберга [11, Question 2.22] о том, допускает ли аффинная кубика Ферма $x^3 + y^3 + z^3 + w^3 = 0$ нетривиальное регулярное действие группы $\mathbb{G}_a$.

Ю. Прохоровым в соавторстве с М. Зайденбергом и Т. Кишимото было доказано, что поверхности дель Пеццо (двумерные многообразия Фано) степени ≥ 4 допускают антиканонический цилиндр, ими были построены также примеры двух семейств цилиндрических трехмерных многообразий Фано [17], а в работе [27] Ю. Прохоровым и М. Зайденберга построены примеры цилиндрических четырехмерных многообразий Фано.

Техника доказательства нецилиндричности многообразий Фано пока развита только в двумерном случае. Так в работе [18] Т. Кишимото, М. Зайденбергом и Ю. Прохоровым было доказано, что антиканонические цилиндры отсутствуют на поверхностях дель Пеццо степени ≤ 2. Это было обобщено для случая дель Пеццо степени 3 (кубических поверхностей) Чельцовым, Парком и Воном [6]. В частности, ими дан отрицательный ответ на вопрос Фленнара - Зайденберга. Наконец, в работе [5] Чельцовым, Парком и Воном свойство цилиндричности изучалось для поверхностей дель Пеццо с произвольной (необязательно антиканонической) поляризацией.

10.5. α-инвариант многообразий Фано

Гипотеза Яу-Тяна-Дональдсона, которая недавно была доказана Ченом, Дональдсоном, Саном и, независимо, Тьяном, предсказывает, что существование метрики Кэлера-Эйнштейна на многообразии Фано должно быть эквивалентно алгебро-геометрическому понятию K-стабильности. Недавно была также высказана логарифмическая версия этой гипотезы. Здесь играет очень важную роль понятие асимптотических лог многообразий Фано. Чельцов и Рубинштейн [8] классифицировали строго асимптотические лог многообразия Фано размерности 2, 3, 4. Ими также было введено и изучалось новое понятие “флоповой наклонной стабильности” [7].

Чельцов и Мартинес-Гарсия (Johns Hopkins University, Maryland) развили технику вычисления динамических α-инвариантов поверхностей дель Пеццо Был выпущен препринт [4]. Работа находится на рецензии.

Чельцовым Ахмадинежадом и Шичо доказана гипотеза Тьяна [28, Conjecture 5.4] для поверхностей степени 4 в $\mathbb{P}^3$ и доказано, что эта гипотеза неверна для поверхностей степени ≥ 4. Выпущен препринт на эту тему [1], однако работа еще не окончена.

10.6. Рациональность некоторых трехмерных квартик

Для каждого $t \in \mathbb{C}$ пусть X_t – трехмерное многообразие в $\mathbb{P}^4$ заданное

$$\sum_{i=0}^{6} x_i = \sum_{i=0}^{6} x_i^4 - t\left(\sum_{i=0}^{6} x_i^2\right)^2 = 0.$$

Эта конструкция дает все неприводимые трехмерные квартики многообразия в $\mathbb{P}^4$, допускающих точное действие группы S_6.

Напомним, что гладкая трехмерные квартики в $\mathbb{P}^4$ нерационально по [32]. Тем не менее, этот результат неприменим к X_t поскольку все X_t особы (см [2]). Тем не менее, X_t нерационально при условии

$$t \notin \left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{7}{10}\right\}.$$

Это было показано Арно Бовилем в [2].

Хорошо известно, что многообразия $X_{\frac{1}{2}}$ и $X_{\frac{1}{4}}$ рациональны. Кроме того, из [9] следует, что $X_{\frac{7}{10}}$ также рационально. И. Чельцов и К. Шрамов доказали, что квартика $X_{\frac{1}{6}}$ рациональна (ответ на вопрос Бовиля [2]). Идет работа над препринтом.

Литература

[1] H. Ahmadinezhad, I. Cheltsov, and J. Schicho. On a conjecture of Tian. work in progress.

[2] Arnaud Beauville. Non-rationality of the S_6-symmetric quartic threefolds. *arXiv*, 1212.5345, 2012.

[3] F. A. Bogomolov and Vik. S. Kulikov. The ambiguity index of an equipped finite group. *arXiv preprint*, 1404.5763, 2014.

[4] I. Cheltsov and J. Martinez-Garcia. Dynamic α-invariants of del Pezzo surfaces. arXiv:1405.5161, 2014.

[5] I. Cheltsov, J. Park, and J. Won. Cylinders in smooth del Pezzo surfaces. work in progress.

[6] I. Cheltsov, J. Park, and J. Won. Affine cones over smooth cubic surfaces. *ArXiv e-print*, 1303.2648, 2013. to appear in J. of EMS.

[7] I. Cheltsov and Y. Rubinstein. Flops and canonical metrics. work in progress.

[8] I. Cheltsov and Y. Rubinstein. Asymptotically log Fano varieties. *arXi preprint*, 1308.2503, 2013.

[9] Ivan Cheltsov and Constantin Shramov. Five embeddings of one simple group. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 366(3), 2014.

[10] B. Doran, N. O. Ilten, L. Katzarkov, J. Lewis, and V. Przyjalkowski. Moduli spaces of K3 surfaces and mirror symmetry for Fano threefolds. preprint.

[11] Hubert Flenner and Mikhail Zaidenberg. Rational curves and rational singularities. *Math. Z.*, 244(3):549–575, 2003.

[12] Atanas Iliev, Ludmil Katzarkov, and Victor Przyjalkowski. Double solids, categories and non-rationality. *Proc. Edinb. Math. Soc., II. Ser.*, 57(1):145–173, 2014.

[13] Nathan Owen Ilten, Jacob Lewis, and Victor Przyjalkowski. Toric degenerations of Fano threefolds giving weak Landau-Ginzburg models. *J. Algebra*, 374:104–121, 2013.

[14] János Kollár and Shigefumi Mori. Classification of three-dimensional flips. *J. Amer. Math. Soc.*, 5(3):533–703, 1992.

[15] T. Kishimoto, Yu. Prokhorov, and M. Zaidenberg. Group actions on affine cones. In *Peter Russell's Festschrift, Proceedings of the conference on Affine Algebraic Geometry held in Professor Russell's honour, 1–5 June 2009, McGill Univ., Montreal.*, volume 54 of *Centre de Recherches Mathématiques CRM Proc. and Lect. Notes*, pages 123–163, 2011.

[16] T. Kishimoto, Yu. Prokhorov, and M. Zaidenberg. $\mathbf{G}_a$-actions on affine cones. *Transformation Groups*, 18(4):1137–1153, 2013. ArXiv e-print 1212.4249.

[17] Takashi Kishimoto, Yuri Prokhorov, and Mikhail Zaidenberg. Affine cones over Fano threefolds and additive group actions. *Osaka J. Math.*, 51(4):1093–1113, 2014.

[18] Takashi Kishimoto, Yuri Prokhorov, and Mikhail Zaidenberg. Unipotent group actions on del Pezzo cones. *Algebraic Geometry*, 1(1):46–56, 2014.

[19] Boris Kunyavskiĭ. The Bogomolov multiplier of finite simple groups. In *Cohomological and geometric approaches to rationality problems*, volume 282 of *Progr. Math.*, pages 209–217. Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 2010.

[20] Shigefumi Mori. Flip theorem and the existence of minimal models for 3-folds. *J. Amer. Math. Soc.*, 1(1):117–253, 1988.

[21] S. Mori and Yu. Prokhorov. Threefold extremal contractions of types (IC) and (IIB). *Proc. Edinburgh Math. Soc.*, 57(1):231–252, 2014.

[22] Yuri Prokhorov. G-Fano threefolds, I. *Adv. Geom.*, 13(3):389–418, 2013.

[23] Yuri Prokhorov. G-Fano threefolds, II. *Adv. Geom.*, 13(3):419–434, 2013.

[24] Yu. Prokhorov. 2-elementary subgroups of the space Cremona group. In I. Cheltsov, C. Ciliberto, H. Flenner, J. McKernan, Y. G. Prokhorov, and M. Zaidenberg, editors, *Automorphisms in birational and affine geometry. Levico Terme, Italy, October 2012*, volume 79 of *Springer Proceedings in Mathematics & Statistics*, pages 215–229. 2014.

[25] Yu. Prokhorov. Del Pezzo fibrations. Appendix to "Five embeddings of one simple group" by I. Cheltsov and C. Shramov, Trans. Amer. Math. Soc. 366 (2014), 1289-1331, 2014.

[26] Victor Przyjalkowski and Constantin Shramov. Laurent phenomenon for Landau-Ginzburg models of complete intersections in Grassmannians of planes. *arXiv preprint*, 1409.3729, 2014.

[27] Yu. Prokhorov and M. Zaidenberg. Examples of cylindrical Fano fourfolds. *ArXiv e-print*, 1406.6339, 2014.

[28] Gang Tian. On Kähler-Einstein metrics on certain Kähler manifolds with $C_1(M) > 0$. *Invent. Math.*, 89(2):225–246, 1987.

[29] Andrey Trepalin. Quotients of conic bundles. *arXiv preprint*, 1312.6867, 2013.

[30] Andrey Trepalin. Quotients of del Pezzo surfaces of high degree. *arXiv preprint*, 1312.6904, 2013.

[31] A. S. Trepalin. Rationality of the quotient of $\mathbf{P}^2$ by finite group of automorphisms over arbitrary field of characteristic zero. *Cent. European J. Math.*, 12(2):229–239, 2014.

[32] В. А. Исковских and Ю. И. Манин. Трехмерные квартики и контрпримеры к проблеме Люрота. *Матем. сб.*, 86(128)(1(9)):140–166, 1971.

[33] Вик. С. Куликов. Разложения на множители в конечных группах. *Матем. сб.*, 204(2):87–116, 2013.

[34] В. В. Пржялковский. Слабые модели Ландау-Гинзбурга гладких трехмерных многообразий Фано. *Изв. Российской академии наук. Серия матем.*, 77(4):135–160, 2013.

10.7. Формальные достижения

А. Трепалиным защищена кандидатская диссертация на тему "Факторы поверхностей дель Пеццо".

Активно работали семинары которыми руководили и принимали участие многие сотрудники лаборатории.

- Семинар им В. А. Исковских (МИАН-МГУ) Руководители семинара: Ю. Г. Прохоров; В. В. Пржиялковский; Д. О. Орлов; К. А. Шрамов

- Учебный семинар "Алгебраическая геометрия" Руководители семинара: Д. О. Орлов, Ю. Г. Прохоров, К. А. Шрамов

Доклады на конференциях.

- К. Шрамов *Bounded groups of birational automorphisms* (конференция Landau-Ginzburg Theory and Fano Varieties, Геонгжу, Южная Корея, 26-30 мая)

- К. Шрамов *Boundedness properties for birational automorphisms* (конференция Edge days, Эдинбург, Великобритания, 6-8 июня)

- К. Шрамов *Bounded groups of birational automorphisms* (Университет Кембриджа, 11 июня)

- К. Шрамов *Birational automorphisms of rationally connected varieties* (Университет Глазго, 13 октября)

- К. Шрамов *Automorphisms of Fano threefolds.* (Университет Шеффилда, 16 октября)

- К. Шрамов *Fano threefolds with many symmetries* (конференция Complex manifolds, dynamics and birational geometry, ВШЭ, Москва, 10-14 ноября)

- Е. Америк (конференция Frontiers of Rationality, Longyearbyen (Норвегия), июль 2014)

- Е. Америк (конференция Komplexe Analysis, Oberwolfach (Германия), август 2014)

- Ю. Прохоров *"Finite groups of birational automorphisms of algebraic varieties"* (конференция *Complex manifolds, dynamics and birational geometry*, Laboratory of Algebraic Geometry, SU-HSE, Moscow, 10-14 November, 2014)

- Ю. Прохоров *"On stable conjugacy of finite subgroups of the Cremona group"* (конференция *Frontiers of rationality*, Longyearbyen (Spitsbergen) 14–18 July, 2014)
- Ю. Прохоров *"Automorphisms of Fano varieties and Jordan properties of Cremona groups"* (конференция *Landau-Ginzburg theory and Fano varieties*, Gyeongju, Korea, May 26–30, 2014)
- Ю. Прохоров *"On birational involutions of $\mathbb{P}^3$"* (конференция *Algebraic varieties and moduli spaces* (*with emphasis on self maps*), RIMS, Kyoto University, 4-7 March, 2014)

Сотрудники лаборатории организовали следующие конференции:

- К. Шрамов Frontiers of rationality (University Center in Svalbard, Лонгйир, Норвегия, 14-18 июля)
- Ю. Прохоров, В. Пржиялковский Однодневная конференция, посвященная памяти В. А. Исковских

Ю. Прохоров в 2014 г. стал лауреатом гранта фонда Саймонса.

Научно-педагогическая деятельность

Курсы лекций.

- К.А. Шрамов и В.В. Пржиялковский прочитали курс лекций по основам алгебраической геометрии на научной школе *"Программа повышения квалификации профессорско-преподавательского состава Сибири и Дальнего Востока"* (Иркутск, 3-7 марта).
- Ю. Прохоров: Автоморфизмы алгебраических многообразий (НОЦ МИАН – НМУ)
- Ю. Прохоров: Алгебраические кривые (мех-мат МГУ)
- Ю. Прохоров: European Mathematical Society School "New Perspectives on the classification of Fano Manifolds", September 29 - October 3, 2014, Udine (Italy)

- Ю. Прохоров: "Finite subgroups of the space Cremona group and Fano threefolds", 5 lectures (5 hours), January 27-31, 2014, 3rd Swiss-French workshop on algebraic geometry Enney (near Gruyères, Fribourg, Switzerland)

Ю. Прохоровым подготовлены к печати записки курса лекций "Рациональные поверхности" (работа находится на рецензии).

11. Характеры полубесконечных многообразий флагов

Отчёт М. Финкельберга

В 2011-2012 годах наша группа занималась гипотезой Алдая-Гайотто-Тачикавы, связывающей 4-мерную суперсимметричную $N = 2$ калибровочную теорию с некоторой двумерной конформной теорией поля. В 2013-2014 году наши исследования были сконцентрированы вокруг 5-мерной суперсимметричной $N = 2$ калибровочной теории с поверхностными операторами. На математическом языке речь идёт о вычислении эквивариантной эйлеровой характеристики естественных линейных расслоений на пространстве застав (локальный вариант) и квазиотображений из прямой в пространство флагов полупростой группы Ли (глобальный вариант). Производящая функция (по степени квазиотображений) этих эйлеровых характеристик является решением интегрируемой системы — квантовой разностной цепочки Тоды в локальном случае; а в глобальном — так называемой q-функцией Уиттэкера. В случае, когда группа Ли является специальной линейной (тип A), пространства застав и квазиотображений снабжены малым разрешением особенностей (так называемым разрешением Ломона), и вышеуказанные эйлеровы характеристики можно вычислять и на этом разрешении. Более того, на пространстве Ломона можно вычислять и эйлерову характеристику комплекса ДеРама, подкрученного на линейное расслоение. Ответом будут знаменитые многочлены Макдональда. Доказательству этих утверждений посвящена следующая серия работ.

Braverman, Alexander; Finkelberg, Michael *Semi-infinite Schubert varieties and quantum K-theory of flag manifolds*, J. Amer. Math. Soc. **27** (2014), no. 4, 1147–1168.

Пусть $\mathfrak{g}$ — полупростая комплексная алгебра Ли, а $\mathcal{B}_\mathfrak{g}$ — её пространство флагов. Авторы изучают пространства $Z^\alpha_\mathcal{B}$ базированных квазиотображений $\mathbb{P}^1 \to \mathcal{B}_\mathfrak{g}$ и их аффинные варианты (отвечающие случаю, когда $\mathfrak{g}$ — нескрученная аффинная алгебра Ли). Цель их двояка. Во-первых, авторы изучают особенности этих пространств (как известно, они моделируют особенности “полубесконечных многообразий Шуберта”, которые корректно не определены). Авторы доказывают, что $Z^\alpha_\mathcal{B}$ нормальны, а если $\mathfrak{g}$ типа ADE, то $Z^\alpha_\mathcal{B}$ горенштейновы с рациональными особенностями. Некоторые более слабые результаты доказываются и в аффинном случае. Во-вторых, авторы изучают характер кольца функций на $Z^{\alpha}_{\mathcal{B}}$. Когда $\mathfrak{g}$ конечномерна типа ADE, они доказывают, что производящая функция этих характеров удовлетворяет фермионной рекурсии (вариант квантовой разностной цепочки Тоды), тем самым обобщая предыдущие результаты для типа A. Учитывая вышеприведённый анализ особенностей $Z^{\alpha}_{\mathcal{B}}$, отсюда выводится гипотеза Гивенталя-Ли, описывающая квантовую K-теорию $\mathcal{B}_{\mathfrak{g}}$ в терминах Ленглендс-двойственной квантовой группы $U_q(\check{\mathfrak{g}})$ (для типов $BCFG$ эта гипотеза требует некоторого уточнения).

Braverman, Alexander; Finkelberg, Michael *Weyl modules and q-Whittaker functions*, Mathematische Annalen **359**, no. 1 (2014), 45–59.

Пусть G полупростая односвязная комплексная группа Ли. Следуя работам Герасимова-Лебедева-Облезина, авторы используют квантовую разностную цепочку Тоды (получаемую квантовым вариантом редукции Костанта-Уиттэкера), чтобы определить понятие q-функции Уиттэкера $\Psi_\lambda(q,z)$. Это семейство инвариантных многочленов на максимальном торе $T \subset G$ (здесь $z \in T$), зависящее от доминантного веса λ группы G, коэффициенты которых являются рациональными функциями переменной $q \in \mathbb{C}^*$. Богдан Ион и Иван Чередник изучали другое определение квантовой разностной цепочки Тоды (в терминах двойной аффинной алгебры Гекке; авторы обозначают соответствующие q-функции Уиттэкера через $\Psi'_\lambda(q,z)$), но гипотетически эти определения эквивалентны. В типе A q-функции Уиттэкера были всесторонне изучены в работах Герасимова-Лебедева-Облезина. Авторы доказывают, что в типе ADE функция $\widehat{\Psi}_\lambda(q,z) := \Psi_\lambda(q,z)\cdot\prod_{i\in I}\prod_{r=1}^{\langle\alpha_i,\lambda\rangle}(1-q^r)$ (где I обозначает множество вершин диаграммы Дынкина группы G) равняется характеру модуля Демазюра $D(\lambda)$ над $G[[t]] \times \mathbb{C}^*$. Когда группа G имеет тип $BCFG$, аналогичное утверждение верно для скрученных модулей. Этот результат известен для $\Psi'_\lambda(q,z)$ вместо $\Psi'_\lambda(q,z)$, но доказательство авторов является алгебро-геометрическим, и из него вытекает равенство $\Psi'_\lambda(q,z) = \Psi_\lambda(q,z)$, а также новая алгебро-геометрическая интерпретация модулей Демазюра $D(\lambda)$ в духе теоремы Бореля-Вейля-Ботта для полубесконечных флагов.

Braverman, Alexander; Finkelberg, Michael; Shiraishi, Junichi *Macdonald polynomials, Laumon spaces and perverse coherent sheaves*, Contemporary Mathematics **610** (2014), 23–41.

Пусть G — почти простая односвязная комплексная группа Ли, а

G/U_- — её основное аффинное пространство. Авторы формулируют гипотезу, которая доставляет новую геометрическую интерпретацию многочленов Макдональда, связанных с группой G, в терминах извращённых когерентных пучков на схеме формальных токов в аффинизацию G/U_-. Авторы доказывают свою гипотезу для $G = SL(N)$, используя так называемое разрешение Ломона пространства квазиотображений (пользуясь этим разрешением, можно переформулировать гипотезу без упоминания извращённых когерентных пучков). В процесе доказательства этой гипотезы авторы доказывают K-теорный аналог знаменитой теоремы Андрея Негуца.

Помимо вычисления характера кольца регулярных функций на пространстве застав, в 2014 году наша группа достигла больших успехов в квантовании этого кольца. Уже 15 лет назад на этом кольце была построена пуассонова структура (Кузнецов-Маркарян-Миркович-Финкельберг), но только в истекающем году удалось построить её квантование для полных линейных и симплектических групп; зато сразу в аффинном варианте. Вопросам квантования посвящены следующие работы.

Finkelberg, Michael; Rybnikov, Leonid *Quantization of Drinfeld Zastava in type A*, Journal of the European Mathematical Society **16** (2014), 235–271.

Аффинное пространство застав Дринфельда типа A — это некое замыкание пространства модулей базированных отображений из проективной прямой в схему флагов аффинной алгебры Ли $\widehat{\mathfrak{sl}}_n$, построенную Кашиварой. Мы определяем аффинное, приведённое, неприводимое, нормальное колчанное многообразие Z, которое изоморфно отображается в пространство застав (в нулевой характеристике). Естественная пуассонова структура на пространстве застав описывается на Z в терминах гамильтоновой редукции некоторого пуассонова подмногообразия двойственного пространства некой неполупростой алгебры Ли. Квантовая гамильтонова редукция соответствующего фактора универсальной обёртывающей алгебры задаёт квантование Y координатного кольца Z. Это квантование было получено в работе Герасимова-Лебедева-Облезина 2004 года, но только в общей точке и для конечной алгебры $\mathfrak{g}$ (а не для аффинной). Мы доказываем, что для общих значений параметров квантования Y является фактором аффинного борелевского янгиана. В конечной характеристике эти результаты могли бы помочь в категорификации действия группы крашеных кос на универсальном модуле Верма:

на уровне K-теории это действие было определено нашей группой в 2011 году.

Finkelberg, Michael; Rybnikov, Leonid *Quantization of Drinfeld Zastava in type C*, Journal Algebraic Geometry **1**, no. 2 (2014), 166–180.

Здесь доказываются аналогичные вышеприведённым результаты для аффинной алгебры Ли $\widehat{\mathfrak{sp}}_{2n}$ вместо $\widehat{\mathfrak{sl}}_n$.

12. ПБВ вырождения в теории Ли

Теория групп и алгебр Ли является классической областью современной математики. Важность и актуальность теории обуславливаются разнообразными глубокими приложениями в алгебраической геометрии, комбинаторике, алгебре, теории представлений и математической физике. В частности, конструкции и структурные теоремы о свойствах групп и алгебр Ли и их представлений позволяют связывать разные части математики и использовать их методы для решения сложных и важных задач алгебраической геометрии.

Одной из фундаментальных теорем в теории Ли является теорема Пуанкаре-Биркгофа-Витта, позволяющая переходить от универсальной обёртывающей алгебры к её абелевой версии – симметрической алгебре, изоморфной алгебре полиномов. Этот переход осуществляется с помощью фильтрации Пуанкаре-Биркгофа-Витта (ПБВ фильтрации) и рассмотрения присоединённого градуированного пространства. Рассмотрим неприводимое циклическое представление V для данной алгебры Ли g. ПБВ фильтрация индуцирует возрастающую фильтрацию на V, причём присоединённое градуированное пространство является циклическим модулем для абелевой алгебры Ли, изоморфной g как векторное пространство. Описание этой конструкции для простых конечномерных алгебр Ли и их неприводимых представлений содержится в [15] (см. также [5], [3], [4]).

Обозначим через G группу Ли алгебры Ли g. С каждым циклическим представлением V алгебры g можно связать проективное алгебраическое многообразие, являющееся замыканием G-орбиты старшей прямой в проективизации представления V. Эти многообразия естественно называть обобщёнными многообразиями флагов по аналогии со случаем простых алгебр Ли и их неприводимых представлений. Вышеприведённая конструкция ПБВ фильтрации на V позволяет строить вырожденные многообразия флагов, являющиеся замыканиями орбиты старшей прямой. При этом унипотентная абелева группа, действующая на получающихся таким образом многообразиях, является вырождением группы G (см. [1], [22],[14]). Возникает естественный вопрос об изучении вырожденных многообразий флагов, об описании их алгебро-геометрических и топологических свойств (см. [18], [17]). В работах последних лет была установлена связь между вырожденными многообразиями флагов и структурами теории представлений колчанов ([9], [10], [11], [12]), многообразиями

Шуберта ([13]) и торическими многообразиями ([16]).

Фильтрация Пуанкаре-Биркгофа-Витта естественным образом возникает и в теории аффинных алгебр Каца-Муди. В частности, это относится к модулям Демазюра для алгебр токов и к интегрируемым представлениям аффинных алгебр. В работах Чередника и Орра [7],[8] (см. также [24]) была высказана гипотеза о связи насимметрических полиномов Макдональда с ПБВ градированными характерами аффинных модулей Демазюра. Точнее, $t \to \infty$-предел несимметричных полиномов Макдональда гипотетически совпадает с подкрученными на ПБВ степень характерами модулей Демазюра. В работе [6] сотрудником лаборатории Е.Фейгиным была доказана эта гипотеза для экстремальных весов на уровне представлений подлежащей конечномерной (простой) алгебры Ли. В этом году Фейгин получил доказательство гипотезы для полного модуля Демазюра в некоторых частных случаях (см. [20]). Ключевую роль в доказательстве играет комбинаторная формула Хаймана-Хаглунда-Лоера [23] для несимметрических полиномов Макдональда.

Аналогами конечномерных неприводимых представлений простых алгебр Ли в аффинном случае служат интегрируемые представления. Естественно возникает вопрос об описание ПБВ фильтрации на пространстве интегрируемых представлений, а также определении и описании соответствующих вырожденных многообразий флагов. В работе [19] сотрудники лаборатории Е.Фейгин и М.Финкельберг получили новые результаты о ПБВ градуированных представлениях для аффинных алгебр типа A. В частности, Фейгин и Финкельберг построили градуированный базис в вакуумных представлениях уровня один для типа A_1 и показали, что для всех аффинных алгебр все операторы действуют на вырожденных интегрируемых представлениях локально нильпотентно. Это позволило определить вырожденные многообразия флагов, являющиеся бесконечномерными проективными алгебраическими многообразиями. Также получено описание вырожденных аффинных грассманианов типа A и построена конечномерная аппроксимация. При этом конечномерные проективные алгебраические многообразия, аппроксимирующие вырожденный аффинный грассманиан, отождествлены с колчанными многообразиями Грассмана для однопетлевого колчана.

Литература

[1] I. Arzhantsev, *Flag varieties as equivariant compactifications of* $\mathbb{G}_a^n$, Proceedings of the American Mathematical Society, vol. 139 (2011), no. 3, pp. 783–786.

[2] I.Arzhantsev, E.Sharoyko, *Hassett-Tschinkel correspondence: Modality and projective hypersurfaces*, Journal of Algebra, vol. 348 (2011), no. 1, pp. 217–232, arXiv:1003.2358.

[3] R.Biswal, G.Fourier, *Minuscule Schubert varieties: Poset polytopes, PBW-degenerated Demazure modules, and Kogan faces*, arXiv:1410.1126

[4] T. Backhaus, C. Desczyk, *PBW filtration: Feigin-Fourier-Littelmann modules via Hasse diagrams*. arXiv:1407.7366.

[5] T.Backhaus, L.Bossinger, C.Desczyk, G.Fourier, *The degree of the Hilbert-Poincare polynomial of PBW-graded modules*, arXiv:1408.0901.

[6] I. Cherednik, E.Feigin, *Extremal part of the PBW-filtration and E-polynomials*, arXiv:1306.3146.

[7] I. Cherednik, D. Orr, *Nonsymmetric difference Whittaker functions*, arXiv:1302.4094 (2013).

[8] I. Cherednik, D. Orr, *One-dimensional nil-DAHA and Whittaker functions*, Transformation Groups 18:1 (2013), 23–59.

[9] G. Cerulli Irelli, E. Feigin, M. Reineke, *Quiver Grassmannians and degenerate flag varieties*, Algebra & Number Theory, 6-1 (2012), 165–194.

[10] G. Cerulli Irelli, E. Feigin, M. Reineke, *Homological approach to the Hernandez-Leclerc construction and quiver varieties*, Representation Theory 2014, no. 18, pp.1–14..

[11] G. Cerulli Irelli, E. Feigin, M. Reineke, *Desingularization of quiver Grassmannians for Dynkin quivers*, Advances in Mathematics (2013), no. 245, pp. 182–207.

[12] G. Cerulli Irelli, E. Feigin, M. Reineke, *Degenerate flag varieties: moment graphs and Schröder numbers*, Journal of Algebraic Combinatorics, Volume 38, Issue 1 (2013), pp. 159–189.

[13] G. Cerulli Irelli, M. Lanini, *Degenerate flag varieties of type A and C are Schubert varieties*, arXiv:1403.2889.

[14] E. Feigin, $\mathbb{G}_a^M$ *degeneration of flag varieties*, Selecta Mathematica: Volume 18, Issue 3 (2012), pp. 513–537.

[15] E. Feigin, G. Fourier, P. Littelmann, *PBW–filtration over* $\mathbb{Z}$ *and compatible bases for* $V_{\mathbb{Z}}(\lambda)$ *in type* $\mathtt{A}_n$ *and* $\mathtt{C}_n$, Symmetries, Integrable Systems and Representations, vol. 40, Springer, 2013, pp. 35–63.

[16] E. Feigin, G. Fourier, P. Littelmann, *Favourable modules: Filtrations, polytopes, Newton-Okounkov bodies and flat degenerations*, arXiv:1306.1292.

[17] E.Feigin and M.Finkelberg, *Degenerate flag varieties of type A: Frobenius splitting and BW theorem*, Mathematische Zeitschrift (2013), vol. 275, no. 1-2, pp. 55–77.

[18] E.Feigin, M.Finkelberg, P.Littelmann, *Symplectic degenerate flag varieties*, Canadian Journal of Mathematics, vol.66 (2014), no. 6, pp. 1250–1286

[19] E.Feigin, M. Finkelberg and M. Reineke, *Degenerate affine Grassmannians and loop quivers*, arXiv:1410.0777.

[20] E.Feigin, I.Makedonskyi, *Nonsymmetric Macdonald polynomials, Demazure modules and PBW filtration*, arXiv:1407.6316.

[21] G.Fourier, *PBW-degenerated Demazure modules and Schubert varieties for triangular elements*, arXiv:1408.6939.

[22] B. Hassett, Yu. Tschinkel, *Geometry of equivariant compactifications of* $\mathbb{G}_a^n$, Int. Math. Res. Notices **20** (1999), 1211–1230.

[23] M. Haiman, and J. Haglund, and N. Loehr, *A combinatorial formula for non-symmetric Macdonald polynomials*, Amer. J. Math. 130:2 (2008), 359–383.

[24] D.Orr, M.Shimozono, *Specializations of nonsymmetric Macdonald-Koornwinder polynomials*, arXiv:1310.0279.

13. Группы алгебраических преобразований аффинных и квазиаффинных многообразий

13.1. Униформно рациональные многообразия

В работе научного руководителя Лаборатории Ф.А. Богомолова и Кристиана Бёнинга [1] рассматривалась гипотеза Громова для гладких рациональных многообразий, а именно, следующий вопрос: имеет ли всякая точка гладкого комплексного рационального алгебраического многообразия аффинную окрестность, которая изоморфна открытой части линейного пространства? Этот вопрос эквивалентен вопросу о локальной транзитивности действия подгруппы рациональных автоморфизмов, определённых в некоторой точке. Этот вопрос решается положительно в размерности один и два, а также для некоторых специальных классов многообразий – например, торических. Также было доказано ранее, что после некоторого конечного числа раздутий все точки полученного многообразия обладают такой окрестностью. В размерности три ответа в обшем случае нет. В работе [1] показано, что эта гипотеза справедлива для произвольных разрешений кубических гиперповерхностей размерности три, имеющих только квадратичные особые точки.

Литература

[1] On uniformly rational varieties, Fedor Bogomolov, Christian Böhning, arXiv:1307.0102, принято в сборник, посвящённый 75 лет С.П. Новикова

13.2. Пространство модулей алгебраических поверхностей

Исследование пространств модулей алгебраических поверхностей и, в частности, нахождение числа неприводимых (или связных) компонент пространства модулей поверхностей с фиксированным набором дискретных инвариантов (так же, как и задача о числе неприводимых компонент пространства Гурвица накрытий с фиксированным набором дискретных инвариантов) является классической и имеет богатую историю (см., например, обзор [2]). Одним из способов построения алгебраических поверхностей является представление этих поверхностей в виде конечнолистных накрытий других известных поверхностей, в частности, в совместной работе сотрудника Лаборатории В.С. Куликова с В.М. Харламовым ([4]) исследовались циклические накрытия поверхностей основного типа.

Разветвленное накрытие Галуа $f : Y \to X$ называется *циклическим,* если группа Галуа $Gal(Y/X)$ накрытия – циклическая группа. Сотрудником Лаборатории В.С. Куликовым и В.М. Харламовым исследовались такие накрытия, которые имеют непустой дивизор ветвления $B \subset X$ и действие группы Галуа не имеет точек из Y, стабилизатор которых является нетривиальной собственной подгруппой группы Галуа. Такие накрытия называются *тотально разветвленными.* Накрытие f называется *численно кратно-каноническим* циклическим накрытием, если кривая ветвления B этого накрытия неособа и численно эквивалентна некоторой кратности канонического класса.

Обозначение: $\delta : Pic(V) \to H^2(V, \mathbb{Z})$ – гомоморфизм Черна,

$$Tor(V) = Tor\, H^2(V, \mathbb{Z}).$$

Фиксируем целое число $d \geq 2$ и гладкую неприводимую кривую $B \equiv dmK_X$ на неособой поверхности X. Тотально разветвленное d-листное циклическое накрытие $f : Y \to X$, разветвленное вдоль B и заданное классом дивизоров $C + \alpha$, $dC \sim B$, $\alpha \in Tor_d\, Pic(X)$, называется (d, m)-*каноническим,* если $C \sim mK_X$ и $d\alpha = 0$, *чисто* (d, m)*-каноническим,* если $C \sim mK_X$ и $\alpha = 0$, и *численно* (d, m)*-каноническим,* если $C \equiv mK_X$. Отметим, что если f является (d, m)-каноническим накытием, то $B \in |dmK_X|$.

Для дивизора D на поверхности X обозначим $\varphi_D : X \to \mathbb{P}^{\dim |D|}$ – рациональное отображение, определенное линейной системой $|D|$.

Теорема Бомбьери утверждает, что если $m \geq 5$, то для гладкой минимальной (то есть без (-1)-кривых) проективной поверхности X общего типа m*-каноническое отображение* $\varphi_{D_m} : X \to \mathbb{P}^{P_m - 1}$, где $D_m \equiv mK_X$, является бирациональным морфизмом на свой образ, $P_m = \dim H^0(X, \mathcal{O}_X(mK_X))$. В частности, если $dm \geq 5$ и $D \equiv dmK_X$, то согласно теореме Бертини общая кривая $B \in |D|$ является неособой и неприводимой. Также известно (I. Reider), что общая кривая $B \in |dK_X|$ является гладкой и неприводимой в следующих случаях: когда либо $d = 4$ и $K_X^2 \geq 2$, либо $d = 3$ и $K_X^2 \geq 3$, либо $d = 2$ и $K_X^2 \geq 5$.

Предложение 13.1. *Пусть $f : Y \to X$ – тотально разветвленное численно (d, m)-каноническое циклическое накрытие поверхности X. Тогда Y имеет следующие инварианты:*

$$p_a(Y) = dp_a(X) + \frac{d(d-1)m((2d-1)m+3)}{12}K_X^2, \tag{13.2.1}$$

$$K_Y^2 = d(dm - m + 1)^2 K_X^2, \tag{13.2.2}$$

и $q(Y) = q(X)$, где $p_a = p_g - q + 1$ – арифметический род поверхности.

Согласно этому предложению при фиксированных d и m все тотально разветвленные численно (d, m)-канонические циклические накрытия $f : Y \to X$ имеют одни и те же инварианты K_Y^2 и $p_a(Y)$. Обозначим их соответственно через $k_{X,d,m}$ и $p_{X,d,m}$. Обозначим через $\mathcal{M}_{k,p}$ пространство модулей поверхностей Z с заданными инвариантами $K_Z^2 = k$ и $p_a(Z) = p$.

Теорема 13.1. *Пусть X – поверхность общего типа. Если существует элемент $\alpha \in Tor_d\, Pic(X)$ такой, что $\delta(\alpha)$ не делится на d в группе $Tor(X)$, то для каждого целого числа $n \geq 1$ пространство модулей $\mathcal{M}_{k,p}$ с $k = k_{X,d,dn+1}$ и $p = p_{X,d,dn+1}$ состоит по меньшей мере из двух связных компонент.*

Предложение 13.2. *Существуют ровно две связные компоненты пространства модулей $\mathcal{M}_{16,4}$, которым принадлежат тотально разветвленные $(2, 1)$-канонические циклические накрытия поверхностей Кампеделли, то есть поверхностей общего типа с $p_g = 0$, $K_X^2 = 2$ и $\pi_1(X) \simeq (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^3$.*

Теорема 13.2. *Пусть X – поверхность общего типа и пусть $f_1 : Y_1 \to X$, $f_2 : Y_2 \to X$ – два тотально разветвленных численно (d, m)-канонических циклических накрытия, заданных соответственно дивизорами $C_1 \sim mK_X + \alpha_1$ и $C_2 \sim mK_X + \alpha_2$, где α_1 и α_2 – дивизоры, численно эквивалентные нулю и такие, что $\delta(\alpha_1) = \delta(\alpha_2)$. Если $dm \geq 5$, то Y_1 и Y_2 являются деформационно эквивалентными поверхностями.*

Пусть X – поверхность Мияоки-Яу, т.е. универсальная накрывающая для X – это шар в $\mathbb{C}^2$ или, эквивалентно, $K_X^2 = 3e(X)$, где $e(X)$ – это эйлерова характеристика поверхности X.

Обозначим для комплексной проективной поверхности X через $\overline{X}$ поверхность, комплексно сопряженную поверхности X, и пусть $Kl(X)$ – группа голоморфных и антиголоморфных автоморфизмов поверхности X.

Теорема 13.3. *Пусть X – поверхность Мияоки-Яу, $f_1 : Y_1 \to X$, $f_2 : Y_2 \to X$ – тотально разветвленные численно (d,m)-канонические циклические накрытия, заданные дивизорами $C_1 \sim mK_X + \alpha_1$ и $C_2 \sim mK_X + \alpha_2$, где α_1, α_2 численно эквивалентны нулю. Предположим, что в случае $d \geq 3$ элементы $\delta(\alpha_1)$ и $\delta(\alpha_2)$ имеют один и тот же порядок n в группе $Tor(X)$ и этот порядок взаимно прост с числом $d-1$. Если Y_1 и Y_2 диффеоморфны с сохранением ориентации, то существует автоморфизм $\psi \in Kl(X)$ такой, что $\psi^*(\delta(\alpha_2)) = \pm\delta(\alpha_1)$ (знак "плюс", если ψ – голоморфное отображение, и "минус" – в противном случае). Если Y_1 и Y_2 – деформационно эквивалентные поверхности, то существует автоморфизм $\psi \in Aut(X)$ такой, что $\psi^*(\delta(\alpha_2)) = \delta(\alpha_1)$.*

Следствие 13.3. *Пусть $f_1 : Y_1 \to X$ и $f_2 : Y_2 \to X$ – такие, как в теореме 13.3. Предположим, что $dm \geq 5$ и что существует сохраняющий ориентацию диффеоморфизм $\varphi : Y_1 \to Y_2$. Тогда Y_2 деформационно эквивалентна поверхности Y_1, если $\varphi^*(K_{Y_2}) = K_{Y_1}$, и $\overline{Y}_2$ деформационно эквивалентна поверхности Y_1, если $\varphi^*(K_{Y_2}) = -K_{Y_1}$.*

Следствие 13.4. *Пусть X – поверхность Мияоки-Яу и пусть $d \geq 2$ и $m \geq 1$ таковы, что $dm \geq 5$ и $d-1$ взаимно просто с порядком группы $Tor(X)$. Тогда число связных компонент пространства модулей поверхностей, которые содержат численно (d,m)-канонические тотально разветвленные циклические накрытия поверхности X, равно числу орбит действия группы $Aut(X)$ на $Tor(X)$.*

Теорема 13.4. *Пусть X – поверхность Мияоки-Яу и пусть $f_1 : Y_1 \to X$, $f_2 : Y_2 \to \overline{X}$ – два тотально разветвленных численно (d,m)-канонических циклических накрытия. Если Y_1 и Y_2 деформационно эквивалентны, то $Kl(X) \neq Aut(X)$.*

Пусть $L = \bar{l}_1 \cup \cdots \cup \bar{l}_9$ –конфигурация прямых в $\mathbb{P}^2$, двойственная девяти точкам перегиба кубики C, заданной уравнением $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = 0$. Прямые $\bar{l}_1, \ldots, \bar{l}_9$ заданы уравнениями

$$\begin{array}{lll} \bar{l}_1 = \{x_1 - x_3 = 0\}, & \bar{l}_2 = \{x_1 - \mu^2 x_3 = 0\}, & \bar{l}_3 = \{x_1 + \mu x_3 = 0\}, \\ \bar{l}_4 = \{x_2 - \mu^2 x_3 = 0\}, & \bar{l}_5 = \{x_2 - x_3 = 0\}, & \bar{l}_6 = \{x_2 + \mu x_3 = 0\}, \\ \bar{l}_7 = \{x_1 + \mu x_2 = 0\}, & \bar{l}_8 = \{x_1 - \mu^2 x_2 = 0\}, & \bar{l}_9 = \{x_1 - x_2 = 0\}, \end{array}$$

где $\mu = e^{\pi i/3}$. Пусть $l_i(x,y) = 0$ – уравнение прямой $\bar{l}_i$, где $x = \frac{x_1}{x_3}$, $y = \frac{x_2}{x_3}$.

Пусть X_1 – минимальное разрешение особенностей замыкания в $\mathbb{P}^4$ поверхности в $\mathbb{C}^4 \subset \mathbb{P}^4$, заданной уравнениями

$$\begin{array}{rcl} w_1^5 & = & l_1 l_2 l_3 l_4^3 l_5^3 l_9, \\ w_2^5 & = & l_1 l_3 l_4^3 l_6 l_7 l_8^2 l_9, \end{array}$$

и пусть X_2 – минимальное разрешение особенностей замыкания в $\mathbb{P}^4$ поверхности в $\mathbb{C}^4 \subset \mathbb{P}^4$, заданной уравнениями

$$\begin{array}{rl} w_1^5 = & (x^2+x+1)(y-1)(x^2+xy+y^2), \\ w_2^5 = & (x-1)(y^2+y+1)(x^2+xy+y^2)^2(x-y)^3. \end{array}$$

Имеем: $K_{X_1}^2 = K_{X_2}^2 = 333$, $e(X_1) = e(X_2) = 111$, $Tor(X_1) \simeq Tor(X_2) \simeq \mathbb{Z}_5^6$, $Kl(X_1) = Aut(X_1) \simeq \mathbb{Z}_5^2$, $Kl(X_2) \neq Aut(X_2) \simeq \mathbb{Z}_5^2$.

Предложение 13.5. *Для каждой пары положительных целых чисел d и m таких, что $dm \geq 5$, $d \not\equiv 1(mod\, 5)$, и для поверхности общего типа X с $(K^2)_X = 333$ и $e(X) = 111$ пространство модулей $\mathcal{M}_{k_{X,d,m},p_{X,d,m}}$ имеет по меньшей мере $3 \cdot 5^6$ различных связных компонент.*

Теорема 13.5. *Пусть $f_1 : Y_1 \to X$ – тотально разветвленное численно $(2,m)$-каноническое циклическое накрытие поверхности Мияоки-Яу X, и пусть $\widetilde{Y}_2$ деформационно эквивалентна поверхности Y_1. Тогда каноническая модель Y_2 поверхности $\widetilde{Y}_2$ может быть представлена в виде численно $(2,m)$-канонического циклического накрытия поверхности X, тотально разветвленного вдоль $B_2 \subset X$, где B_2 – приведенная кривая с ADE-особенностями. Если $2m \geq 5$, то связная компонента M пространства модулей поверхностей, которому принадлежит Y_1, является неприводимым многообразием размерности $m(2m-1)K_X^2 + p_g(X)$. Размерность Кодаиры $\kappa(M)$ многообразия M равна $-\infty$, и если $q(X) = 0$, то M – унирациональное многообразие.*

Литература

[1] F.A. Bogomolov, Vik.S. Kulikov: *The ambiguity index of an equipped finite group.* arXiv:1404.5763 (2014).

[2] F. Catanese: Algebraic surfaces and their moduli spaces: real, differentiable and symplectic structures. arXiv:0812.4318.

[3] B. Kunyavskii: *The Bogomolov multiplier of finite simple groups.* Cohomological and geometric approaches to rationality problems, 209—217, Progr. Math., 282, Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, (2010), 209—217,

[4] Вик. С. Куликов, В. М. Харламов: *О численно плюриканонических циклических накрытиях.* Изв. РАН. Сер. матем., **78:5** (2014), 143 – 166.

[5] Vik.S. Kulikov: *Factorizations in finite groups.* Sb. Math., **204:2** (2013), 87 –116.

[6] Vik.S. Kulikov: *Factorization semigroups and irreducible components of Hurwitz space. II.* Izv. Math., **76:2** (2012), 356 – 364.

[7] B. Wajnryb: *Orbits of Hurwitz action for coverings of a sphere with two special fibres.* Indag. Math. (N.S.), vol. 7 (1996), no. 4, 549 – 558.

13.3. Поверхности с тривиальной монодромией и гипотеза Кизини

В 1973 году Ф. Л. Зак полностью описал проективные поверхности над $\mathbb{C}$ с тривиальной группой монодромии (средних когомологий гиперплоского сечения). Доказательство Зака опирается на «теорию особенностей» в смысле Арнольда и тем самым зависит от условия характеристики нуль. Сотрудник лаборатории С. М. Львовский показал, что классификация Зака переносится на случай произвольной характеристики [3].

Метод из работы [3] удается использовать и в другой ситуации. Именно, классическая гипотеза Кизини утверждала, что разветвленное накрытие над проективной плоскостью однозначно определяется кривой ветвления. Во многих случаях эту гипотезу доказал сотрудник лаборатории Виктор Куликов [2]; в частности, в цитированной работе Куликова было установлено, что гипотеза Кизини верна, если кривая ветвления двойственна к общей нодальной кривой степени $\geqslant 7$. В совместной работе сотрудника лаборатории С.М. Львовского и доцента факультета математики НИУ ВШЭ Ю.М. Бурмана [1] с помощью варианта метода из работы [3] утстанавливается, что гипотеза Кизини верна для накрытий, разветвленных над общей нодальной кривой степени $\geqslant 4$ (а также над гладкой или нодальной кривой степени 3 — с тем дополнительным ограничением, что если степень накрытия ранга 4, то кубическая кривая должна быть нодальной) — тем самым результат Куликова усиливается. Метод доказательства, использованный в цитированной работе, существенно отличен от методов работы [2].

Литература

[1] Yu. Burman, Serge Lvovski, *On projections of smooth and nodal plane curves*, Moscow Mathematical Journal **15** (2015), no.1.

[2] Vik. S. Kulikov, *On Chisini's conjecture*, Izv. Ross. Akad. Nauk Ser. Mat. **63** (1999), no. 6, 83–116 (Russian), English translation: Izv. Math. 63 (1999), no. 6, 1139–1170.

[3] Serge Lvovski, *On surfaces with zero vanishing cycles*, Manuscripta Math. **145** (2014), no. 3-4, 235–242.

[4] F. L. Zak, *Surfaces with zero Lefschetz cycles*, Mat. Zametki **13** (1973), 869–880 (Russian), English translation: Math. Notes 13 (1973), 520–525.

13.4. Насыщенность в алгебраической геометрии

Хорошо известно, что для регулярного действия алгебраического тора T в пространстве V замыкание T-орбиты вектора v нормально тогда и только тогда, когда для соответствующего вектору v набора весов выполняется комбинаторное свойство насыщенности о том, что полугруппа, порождённая данными весами, равна пересечению группы, порождённой этими весами, и конуса, натянутого на эти веса [5]. Необходимость проверить данное свойство возникает в различных задачах, связанных с колчанами, грассманианами и многообразиями флагов [3, 4]. Для множества контуров матроида известно, что соответствующий набор векторов является насыщенным [11]. С алгебраической точки зрения насыщенность соответствует целой замкнутости в своём поле частных соответствующей алгебры. Для мономиальных алгебр, построенных по конечным графам, данное свойство эквивалентно отсутствию в графе подграфов специального вида: двух нечётных циклов, соединённых путём длины более, чем один [8, 9].

К сожалению, имеющиеся методы доказательства этого свойства [2, 6, 7, 10, 8, 9, 11] разрозненны. Несмотря на тесную взаимосвязь вопросов насыщенности в различных постановках, в каждой работе развивается свой метод. В обзоре [1] сотрудница Лаборатории К.Г. Куюмжиян и профессор Факультета компьютерных наук И.В. Аржанцев планируют привести все эти методы и показать, как они взаимосвязаны. Для случая системы корней A_n доказательство насыщенности очень сильно упрощается. Критерий для алгебры, построенной по графу, удаётся вывести из критерия Штумфельса о нормальности мономиальной алгебры в терминах контуров.

Литература

[1] The saturation property in algebra, combinatorics, and geometry. I.V. Arzhantsev, K. Kuyumzhiyan. In preparation.

[2] I. Bogdanov, K. Kuyumzhiyan, Simple modules of exceptional linear groups with normal closures of maximal torus orbits, Mathematical Notes, September 2012, **92** (3–4), 445–457

[3] C. Chindris, Orbit semigroups and the representation type of quivers. J. Pure Applied Algebra **213** (2009), no. 7, 1418–1429

[4] R. Dabrowski, On normality of the closure of a generic torus orbit in G/P. Pacific J. Math. **192** (1996), no. 2, 321–330

[5] M.Hochster. Rings of invariants of tori, Cohen-Macaulay rings generated by monomials and polytopes. Ann. Math. **96** (1972), 318-337

[6] K. Kuyumzhiyan, Simple $SL(n)$-modules with normal closures of maximal torus orbits. Journal of Algebraic Combinatorics **30** (2009), no. 4, 515–538, preprint version arXiv:0806.1981,

[7] K. Kuyumzhiyan, Simple modules of classical linear groups with normal closures of maximal torus orbits, Siberian Mathematical Journal, 2012, **53** (6), 1089–1104, 2012

[8] H. Ohsugi, T. Hibi, Normal polytopes arising for finite graphs. J. Algebra **207** (1998), 409–426

[9] A. Simis, W. Vasconcelos, R. Villarreal, The integral closure of subrings associated to graphs. J. Algebra **199** (1998), 281–299

[10] B. Sturmfels, Gröbner bases and convex polytopes. University Lecture Series **8**, AMS, Providence, RI, 1996

[11] N. White, The basis monomial ring of a matroid. Adv. Math. **24** (1977), 292–297

14. Многогранники Гельфанда-Цетлина и исчисление Шуберта

14.1. Характеры Демазюра и геометрический митоз

В препринте [3] определён геометрический митоз: операции на гранях многогранника, связанного с многообразием полных флагов, соответствующие действию операторов Демазюра на характерах. С их помощью строится эффективный алгоритм, дающий наборы граней многогранника, реализующие характеры Демазюра всех многообразий Шуберта. Алгоритм работает для произвольной редуктивной группы, в частности, для GL_n и многогранника Гельфанда-Цетлина комбинаторика геометрического митоза совпадает с комбинаторикой митоза Кнутсона-Миллера. Детально разобран новый пример для 4-мерного симплектического многообразия флагов и многогранника, построенного с помощью выпукло-геометрических операторов разделённых разностей. В этом примере геометрический митоз даёт новое комбинаторное правило, которое удаётся обобщить на Sp_{2n}. Также явно вычислены неравенства, задающие многогранник Ньютона-Окунькова симплектического многообразия флагов для естественного геометрического нормирования, рассмотренного Каве и Андерсоном. Оказалось, что этот многогранник совпадает с многогранником, построенным с помощью выпукло-геометрических операторов разделённых разностей. Это даёт новый пример в пользу гипотезы, высказанной в статье [11] о том, что многогранники Ньютона-Окунькова разрешений Ботта-Самельсона можно эффективно вычислить с помощью выпукло-геометрических операторов разделённых разностей.

Для многообразия полных флагов произвольной редуктивной группы геометрический митоз позволяет реализовать циклы Шуберта с помощью положительных выпукло-геометрических объектов (объединений граней многогранников), которые можно рассматривать как обобщения многогранников Ньютона-Окунькова. В совместном проекте с М.Падалко, планируется детально разобрать слчай многообразия полных флагов для Sp_{2n} (аналогично уже разобранному случаю Sp_4) и многогранника, построенного с помощью выпукло-геометрических операторов разделённых разностей для разложения $(s_1...s_n)^n$ самого длинного элемента в группе Вейля. Как и в случае $n = 2$, предполагается проверить совпадает ли полученный многогранник с многогранником Ньютона-Окунькова симплектического многообразия флагов, и описать явно его грани, представляющие данный цикл Шуберта.

14.2. Орбиты борелевской подгруппы на сферических многообразиях

По замечаниям рецензента доработаны доказательства в препринте [1] (совместно с К.Альтманном и Л.Петерсеном). В частности, доказан новый результат о соотношениях инцидентности между орбитами борелевской группы в сферическом однородном пространстве G/H минимального ранга ([1, Lemma 3.11]). Для таких пространств (которые включают в себя орисферические многообразия и компактификации редуктивных групп) результаты Рессейра дают описание борелевских орбит аналогичное описанию клеток Брюа в многообразиях флагов, а именно, на орбитах транзитивно действует группа Вейля $W(G)$ и множество орбит совпадает с фактормножеством $W(G)/W(H)$ (причём $\dim s_\alpha * \mathcal{O}_w = \dim \mathcal{O}_{s_\alpha w} \pm 1$). Мы показываем, что как и в случае многообразий флагов, имеет место следующее соотношение инцидентности между замыканиями орбит. Обозначим через $\mathcal{O}_{\mathrm{id}}$ открытую борелевскую орбиту в G/H. Пусть $s_\alpha \in W(G) \setminus W(H)$ — простое отражение, а $\mathcal{O}_{s_\alpha} := s_\alpha * \mathcal{O}_{\mathrm{id}}$ соответствующая ему орбита коразмерности один. Тогда замыкание $\overline{\mathcal{O}_{s_\alpha}}$ содержит орбиты $\mathcal{O}_w$ для всех $w \in W(G)$ с таким разложением $w = s_{\alpha_1} \dots s_{\alpha_l}$ на простые отражения, что

1) $\alpha_i = \alpha$ для некоторого $i \le l$

2) $l = \operatorname{codim} \mathcal{O}_w$.

Как следствие явно описана взаимосвязь между аффинными покрытиями сферического многообразия минимального ранга и его тороидального разрешения (Lemma 7.1). Это важно для построения дивизориальных вееров по крашеным веерам в случае не обязательно тороидального сферического многообразия минимального ранга.

14.3. Ковыпуклые тела

В статье В.А. Тиморина с А.Г. Хованским [4] была построена теория ковыпуклых тел, во многом параллельная теории выпуклых тел. Эта теория уже нашла применения в теории особенностей и алгебраической геометрии.

Пусть $C \subset \mathbb{R}^d$ — выпуклый конус с вершиной в 0 и непустой внутренностью. Рассмотрим выпуклое замкнутое множество $\Delta \subset C$, такое, что $C \setminus \Delta$ ограниченно и непусто. Тогда множество $A = C \setminus (\Delta \cup \{0\})$ называется *ковыпуклым телом*. Для двух ковыпуклых тел A_i, построенных по выпуклым подмножествам $\Delta_i \subset C$, $i = 1, 2$, определена их сумма $A_1 \oplus A_2 = C \setminus ((\Delta_1 + \Delta_2) \cup \{0\})$, где $\Delta_1 + \Delta_2$ обозначает сумму Минковского.

Виртуальные выпуклые многогранники — геометрические объекты, введенные Пухликовым и Хованским — можно отождествлять с формальными разностями выпуклых многогранников. Виртуальные выпуклые многогранники представляются определенными кусочно-постоянными функциями на $\mathbb{R}^d$, причем сложение виртуальных многогранников по Минковскому представляется сверткой $*$ по эйлеровой характеристике. Следующая теорема вкладывает теорию ковыпуклых тел в контест теории виртуальных выпуклых тел.

Теорема. *Пусть $C \subset \mathbb{R}^d$ — острый выпуклый полиэдральный конус с вершиной в точке 0 и непустой внутренностью. Предположим, что $\Delta \subset C$ — выпуклый неограниченный многогранник, отличный от C и такой, что $C \setminus \Delta$ ограниченно, а $A = C \setminus (\Delta \cup \{0\})$ — соответствующий C-ковыпуклый многогранник.*

1) *Функция $-\mathbb{I}_A$ является виртуальным многогранником. Более того, имеем*
$$-\mathbb{I}_A = \mathbb{I}_{\Delta_t} * \mathbb{I}_{C_t}^{-1}.$$
для достаточно больших $t \in \mathbb{R}$.

2) *Если A и B — C-ковыпуклые многогранники, то*
$$-\mathbb{I}_{A \oplus B} = (-\mathbb{I}_A) * (-\mathbb{I}_B).$$

Сформулированная теорема позволяет переносить утверждения про выпуклые многогранники на случай ковыпуклых многогранников. Например, был получен ковыпуклый аналог неравенств Александрова–Фенхеля и утверждение про полиномиальность ковыпуклого многочлена Эрхарта.

14.4. Главная кубиоида

Пространство параметров кубических многочленов состоит из классов аффинной сопряженности кубических многочленов с комплексными коэффициентами. Множество $\mathcal{M}_3$ классов многочленов со связными множествами Жюлиа называется *кубическим множеством Мандельброта*. Главная кубиоида CU определяется как множество классов кубических многочленов, у которых есть неподвижная неотталкивающая точка, нет отталкивающих периодических точек, разделяющих множество Жюлиа, и есть не более одной неотталкивающей периодической точки с мультипликатором, отличным от 1. Это опреледение мотивировано тем, что замыкание главной компоненты внутренности $\mathcal{M}_3$ (состоящей из классов гиперболических многочленов, множества Жюлиа которых являются жордановыми кривыми) лежит в CU. Многочлены с неотталкивающей неподвижной точкой, классы которых не лежат в CU, допускают явную комбинаторную классификацию [6]. Таким образом, CU является кубическим аналогом главной кардиоиды (центральной части множества Мандельброта).

В работе [5] доказано, что $\overline{\mathrm{PHD}}_3 \subset \mathrm{CU}$, и сформулирована гипотеза о том, что $\overline{\mathrm{PHD}}_3 = \mathrm{CU}$.

Рассмотрим пространство $\mathcal{F}$, состоящее из многочленов

$$f_{\lambda,b}(z) = \lambda z + bz^2 + z^3, \quad \lambda \in \mathbb{C}, \quad b \in \mathbb{C}.$$

Любой кубический многочлен аффинно сопряжен многочлену из пространства $\mathcal{F}$, так что рассмотрение только этого пространства не приводит к потере общности. Заметим, что точка 0 является неподвижной точкой каждого многочлена пространства $\mathcal{F}$. Определим *λ-срез* $\mathcal{F}_\lambda$ как множество всех многочленов $g \in \mathcal{F}$ таких, что $g'(0) = \lambda$. Скажем, что $f \in \mathcal{F}_\lambda$ *устойчив*, если он J-устойчив в срезе $\mathcal{F}_\lambda$ с $\lambda = f'(0)$. Обозначим через $\mathcal{P}_\lambda$ пространство многочленов $f \in \mathcal{F}_\lambda$, классы которых принадлежат замыканию главной гиперболической компоненты. В работе [7] был получен следующий результат.

Теорема. *Пусть $\mathcal{W}$ — ограниченная компонента множества $\mathcal{F}_\lambda \setminus \mathcal{P}_\lambda$, где $|\lambda| \leq 1$. Тогда всякий многочлен $f \in \mathcal{W}$ устойчив, не имеет ни отталкивающих периодических разделяющих точек, ни нейтральных периодических точек, отличных от* 0*. Более того, $\mathcal{W}$ имеет либо тип* Зигелевского захвата*, либо* странный *тип.*

Мы говорим, что $\mathcal{W}$ имеет тип *Зигелевского захвата*, если любой $f \in \mathcal{W}$ имеет инвариантный диск Зигеля U вокруг 0 и другую компоненту Фату V, такую, что отображение $f|_V$ является двулистным разветвленным накрытием, причем $f^{\circ k}(V) = U$ для некоторого $k > 0$. Компонента $\mathcal{W}$ имеет *странный* тип, если множество Жюлиа $J(f)$ связно, содержит критическую точку, имеет положительную меру Лебега и инвариантное измеримое поле направлений.

14.5. Планаризации

Теорема Мебиуса-фон Штаудта, часто называемая *основной теоремой проективной геометрии*, утверждает, что биективное преобразование вещественной проективной плоскости, переводящее прямые в прямые, является проективным преобразованием. У этой теоремы есть локальные аналоги. Мы рассматриваем локальные вопросы, продолжающие тот вопрос, на который отвечает основная теорема проективной геометрии. А именно, мы рассматриваем локальную классификации отображений, переводящих отрезки прямых в дуги плоских кривых.

Более точно, пусть $U \subset \mathbb{R}\mathrm{P}^2$ — открытое подмножество вещественной проективной плоскости. Достаточное число раз дифференцируемое отображение $\Phi : U \to \mathbb{R}\mathrm{P}^3$ называется *планаризацией*, если для всякой прямой $\lambda \subset \mathbb{R}\mathrm{P}^2$ множество $\Phi(\lambda \cap U)$ лежит в некоторой плоскости. Планаризации названы так по аналогии с *коллинеациями*, отображениями, переводящими прямые в прямые. Рассмотрение планаризаций полезно для решения задач такого вида. Дано линейное семейство $\mathcal{L}$ кривых в $\mathbb{R}\mathrm{P}^2$ (например, семейство всех окружностей, семейство всех коник и проч.). Описать все отображения, переводящие отрезки прямых в отрезки кривых семейства $\mathcal{L}$. Например, если $\mathcal{L}$ — трехмерное линейное семейство кривых, то всякое отображение f из открытого подмножества $U \subset \mathbb{R}\mathrm{P}^2$ в $\mathbb{R}\mathrm{P}^2$, переводящее отрезки прямых в дуги $\mathcal{L}$-кривых, задает следующую планаризацию $\Phi : V \to \mathcal{L}$. Множество $V \subset \mathbb{R}\mathrm{P}^{2*}$ состоит из тех прямых λ, для которых есть только одна $\mathcal{L}$-кривая γ, содержащая множество $f(\lambda \cap U)$, а $\Phi(\lambda)$ совпадает с γ. В работе [8] доказан следующий результат.

Теорема. *Рассмотрим планаризацию $\Phi : U \to \mathbb{R}\mathrm{P}^3$. Существует непустое открытое подмножество $V \subset U$, такое, что планаризация $\Phi : V \to \mathbb{R}\mathrm{P}^3$ тривиальна, или котривиальна, или квадратична, или двой-*

ственно квадратична.

Мы должны дать необходимые пояснения. Планаризация $\Phi : V \to \mathbb{RP}^3$ называется *тривиальной*, если $\Phi(V)$ — подмножество плоскости. Планаризация $\Phi : V \to \mathbb{RP}^3$ *котривиальна*, если найдется точка $b \in \mathbb{RP}^3$, такая, что для всякой прямой $\lambda \subset \mathbb{RP}^2$, множество $\Phi(\lambda \cap V)$ лежит в плоскости, проходящей через b. Формально, тривиальные планаризации включаются в котривиальные, однако мы разделяем эти два класса по той причине, что котривиальных планаризаций, не являющихся тривиальными, «меньше», чем тривиальных, а также в связи с частичной двойственностью между тривиальными и котривиальными планаризациями. Квадратичное отображение из $\mathbb{RP}^2$ в $\mathbb{RP}^3$ — это рациональное отображение (которое, вообще говоря, может иметь точки неопределенности в $\mathbb{RP}^2$), заданное в однородных координатах набором из четырех однородных квадратичных форм от трех переменных. Любое квадратичное отображение из $\mathbb{RP}^2$ в $\mathbb{RP}^3$ является планаризацией.

Наконец, двойственно квадратичные планаризации связаны с квадратичными планаризациями при помощи следующей версии проективной двойственности. Пусть $\Phi : U \to \mathbb{RP}^3$ — планаризация. Рассмотрим открытое множество V двойственной проективной плоскости $\mathbb{RP}^{2*}$, состоящее из всех прямых $\lambda \subset \mathbb{RP}^2$, таких, что $\Phi(\lambda \cap U)$ лежит в единственной плоскости P_λ. Если V непусто, то определена *двойственная планаризация* $\Phi^* : V \to \mathbb{RP}^{3*}$, сопоставляющая прямой $\lambda \in V$ плоскость P_λ. *Двойственно квадратичные планаризации* — это планаризации, двойственные к квадратичным.

Естественно рассматривать планаризации с точностью до следующего отношения эквивалентности: две планаризации эквивалентны, если, после проективного преобразования в прообразе и проективного преобразования в образе, они совпадают на некотором непустом открытом множестве. Конечно, тривиальные и котривиальные планаризации образуют бесконечно много классов. Но все остальные планаризации разбиваются ровно на 16 классов, и все эти классы явно описаны (можно выписать явные простые формулы для представителей этих классов).

14.6. Флаговые многочлены Шура

Многочлены Шура — это семейство симметрических многочленов, введенных Якоби в XIX веке. Они играют важную роль в теории представлений (как характеры представлений полной линейной группы) и в комбинаторике, в особенности в задачах, связанных с таблицами Юнга. Они могут быть выражены через элементарные и полные симметрические многочлены при помощи детерминантных формул, известных как формулы Якоби–Труди. Флаговые многочлены Шура являются обобщениями классических многочленов Шура. Они были определены в 1982 году в работе А. Ласку и М.-П. Шютценберже. Флаговый многочлен Шура $s_\lambda(b)$ определяется по разбиению λ и последовательности возрастающих натуральных чисел $b = (b_1, \ldots, b_n)$, называемой флагом. Для флаговых многочленов Шура также имеются детерминантные формулы выражающие их через обычные многочлены Шура и обобщающие формулы Якоби–Труди.

В совместной работе с Г. А. Мерзоном [9] рассматриваются флаговые многочлены Шура для флага, являющегося последовательностью; они называются *h-флаговыми многочленами Шура.* Получены новые детерминантные формулы, отличные от формул типа Якоби–Труди, выражающие h-флаговые многочлены Шура через 1-флаговые. Как следствие из этого получаются детерминантные формулы, выражающие многочлены Шуберта сдвинутых доминантных перестановок через многочлены Шуберта перестановок более простого вида. Главные специализации и специализации в единице некоторых из этих формул имеют интересные приложения к теории плоских разбиений; так, в частности, из них получаются формулы Краттенталера и Кириллова–Фомина для числа плоских разбиений внутри треугольной призмы.

14.7. Многокомпонентные оснащенные хордовые диаграммы и биалгебра лагранжевых подпространств

В совместной работе с В. А. Клепцыным [10] предложен способ построения весовых систем, отвечающих многокомпонентным оснащённым хордовым диаграммам. Такие диаграммы возникают при обобщении теории инвариантов узлов конечного порядка (инвариантов Васильева) на пространство многокомпонентных плоских кривых (так называемых кольчуг, или chainmails). Этот способ основан на обобщении понятия матрицы пересечений для оснащенной хордовой диаграммы обычной (однокомпонентной) плоской кривой; при этом многокомпонентной оснащённой хордовой диаграмме сопоставляется так называемое L-пространство —

элемент грассманиана лагранжевых подпространств над полем из двух элементов. Показано, что на множестве L-пространств может быть определена структура биалгебры; эта биалгебра является аналогом биалгебры графов, определенной С. К. Ландо для изучения инвариантов Васильева узлов.

Литература

[1] Klaus Altmann, Valentina Kiritchenko, Lars Petersen, *Merging divisorial with colored fans*, 34 pages, revised version https://www.researchgate.net/publication/232253014_Merging_divisorial_with_colored_fan submitted to Michigan Math. J.

[2] Valentina Kiritchenko, *Divided difference operators on polytopes*, 20 pages, to appear in Adv. Studies in Pure Math.

[3] Valentina Kiritchenko, *Geometric mitosis*, preprint arXiv:1409.6097 [math.AG], 20 pages, submitted to Duke Math. J.

[4] A. Khovanskii, V. Timorin, *On the theory of coconvex bodies*, Discrete and Computational Geometry (2014)

[5] A. Blokh, L. Oversteegen, R. Ptacek, V. Timorin, *The main cubioid*, Nonlinearity **27**:8 (2014), 1879–1897.

[6] A. Blokh, L. Oversteegen, R. Ptacek, V. Timorin, *Laminations from the Main Cubioid*, to appear in CGDS.

[7] A. Blokh, L. Oversteegen, R. Ptacek, V. Timorin, *Complementary components to the Principal Hyperbolic Domain*, preprint arXiv:1411.2535 [math.DS]

[8] V. Petruschenko, V. Timorin, *On maps taking lines to plane curves*, preprint arXiv:1409.3403 [math.AG], submitted to IMRN

[9] G. Merzon, E.Smirnov, *Determinantal identities for flagged Schur and Schubert polynomials*, preprint arXiv:1410.6857 [math.CO]

[10] V. Kleptsyn, E.Smirnov, *Plane curves and bialgebra of Lagrangian subspaces*, preprint arXiv:1401.6160 [math.GT]

15. Изучение асимптотических свойств многообразий над глобальными полями и предельных дзета-функций

15.1. Многомерные законы взаимности и символ Конту–Каррера

Для каждого многообразия Паршин и Бейлинсон определили группы многомерных аделей. Ожидается, что многомерные адели должны контролировать значительную часть арифметических свойств многообразий. В частности, Паршиным было предсказано существование многомерной теории полей классов, основанной на рассмотрении K-групп от кольца многомерных аделей и являющейся непосредственным обобщением классической одномерной теории полей классов. Для доказательств основных теорем при таком подходе требуется установить многомерные законы взаимности для различных многомерных локальных инвариантов. Все такие многомерные законы взаимности оказываются частным случаем одного гипотетического закона взаимности для так называемого многомерного символа Конту-Каррера.

Совместно с Д.В. Осиповым было проведено детальное исследование многомерного символа Конту-Каррера. Более точно, для произвольного коммутативного кольца A рассматривается кольцо $A((t_1))\dots((t_n))$ итерированных рядов Лорана от n формальных переменных с коэффициентами из A. Строится функториальный гомоморфизм из $(n+1)$-ой K-группы Милнора $K_{n+1}\Big(A((t_1))\dots((t_n))\Big)$ в группу A^* обратимых элементов исходного кольца A. Такой гомоморфизм называется многомерным символом Конту-Каррера. В случае, когда кольцо A является $\mathbb{Q}$-алгеброй, для многомерного символа Конту-Каррера приводится явная формула, использующая логарифмы от обратимых рядов Лорана и их производные. В случае произвольного кольца A для многомерного символа Конту-Каррера приводится явная формула в виде формального степенного ряда от коэффициентов обратимых рядов Лорана. Аналогичные утверждения были доказаны Конту-Каррером [7], [8] для случая $n = 1$ и частично были известны для случая $n = 2$ после работы Осипова и Жу [13].

Кроме того, доказывается равенство между многомерным символом Конту-Каррера и гомоморфизмом, возникающим из композиции граничных отображений в алгебраической K-теории, построенных Грейсоном [9] и Като [11]. Доказывается следующее свойство универсальности многомерного символа Конту-Каррера: любой функториальный гомоморфизм $K_{n+1}\Big(A((t_1))\dots((t_n))\Big) \to A^*$ является целочисленной степенью многомерного символа Конту-Каррере. Данные утверждения является новыми при всех n.

15.2. Классы сопряженности в дискретных группах Гейзенберга

Группа Гейзенберга $\mathrm{Heis}(3, \mathrm{R})$ над кольцом R это группа матриц вида

$$\begin{pmatrix} 1 & n & c \\ 0 & 1 & p \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

где $n, p, c \in \mathrm{R}$. Если $\mathrm{R} = \mathbb{Z}$, то мы называем такую группу целочисленной группой Гейзенберга.

Существует более общее определение дискретной группы Гейзенберга, например см. статью [15]. Дискретная группа Гейзенберга – это тройка абелевых групп (N, P, C) и спаривание $(\cdot,\cdot)$: $N \times P \to C$. Элементы таких троек можно умножать так же, как и унипотентные матрицы.

В алгебраической геометрии группа Гейзенберга возникает из рассмотрения флагов из кривой и точки на ней, и соответствующих локальных полей и нормирований. А именно, существует известное центральное расширение

$$1 \longrightarrow k(C)^*_P \xrightarrow{\ i\ } \tilde{K}^*_{P,C} \xrightarrow{\ \alpha\ } K^*_{P,C} \longrightarrow 1, \qquad (15.2.1)$$

, где $K_{P,C}$ - двумерное локальное поле, а $K(C)^*_P$ - одномерное локальное поле на кривой (см. [1]). Если профакторизовать данное расширение по ядрам нормирований, то получается центральное расширение вида:

$$1 \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow \Gamma \longrightarrow \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \longrightarrow 1. \qquad (15.2.2)$$

И Γ здесь оказывается изоморфной группе Гейзенберга. Можно построить пространство модулей неприводимых представлений группы Гейзенберга - оно оказывается равным объединению комплексных торов. Пользуясь этой конструкцией можно свести законы взаимности для точки и кривой к тому факту, что сумма вычетов на римановой поверхности (на этих комплексных торах) равна нулю (см. [15]).

Для изучения теории представлений группы Гейзенберга оказывается более удобным рассматривать некоторое расширение группы Гейзенберга, используя конструкцию из теории групп петель. Дело в том, что характеры неприводимых представлений расширенной группы Гейзенберга являются не обобщенными функциями, а обычными. Важная проблема состоит в том, чтобы исследовать центральные функции на расширенной группе Гейзенберга и доказать теорему Планшереля на ней. Это объясняет наш интерес к классам сопряженности в расширенной группе Гейзенберга. Нам удалось найти полную систему инвариантов для классов сопряженности в такой группе (см. статью [5]), то есть такое множество инвариантов класса сопряженности, что два элемента сопряжены тогда и только тогда, когда значения инвариантов на них совпадают. Для случая целочисленных расширенных групп Гейзенберга инварианты посчитаны явно.

15.3. Асимптотически точные семейства и G-расслоения

Асимптотические формулы для квази-вычетов L-функций кривой являются прямым обобщением теоремы Брауэра-Зигеля на случай, когда рассматривается последовательность полей с неограниченной степенью. Первое такое обощение дается формулой Тцфасмана-Влэдуца [16] для асимптотически точных семейств кривых.

В статье [10] мы обобщаем понятие асимтотически точного семейства на случай, когда вместо семейства кривых мы рассматриваем семейство пар: кривая и $\mathbb{Q}_l$-конструктивный пучок на ней. Подобные семейства пар мы называем системами и вводим для асимптотически точных систем понятие инвариантов Цфасмана-Влэдуца. Далее для асимптотически точных систем мы доказываем формулу для квазивычета L-функции пучка, аналогичную формуле Цфасмана-Влэдуца.

В качестве приложения мы используем эту формулу для вычисления асимптотики числа точек на стэке Bun_G для произвольной расщепимой редуктивной группы G и для асимптотически точного семейства кривых. В случае $G = \mathrm{GL}_n$ мы также доказываем, что формула остается верной если мы берем только полустабильные точки.

15.4. Точки на Якобианах кривых над конечными полями

Проблема оценки числа точек на Якобианах кривых над конечными полями (т.е. числа классов функциональных полей) хорошо известна. Оценки Вейля, соответствующие гипотезе Римана для кривых над конечными полями, оказываются весьма неточными и были улучшены многими авторами, в том числе Lachaud–Martin-Deschamps [12] и, в самое последнее время, Ballet–Rolland–Tutdere ([3], [4]), а также Aubry–Haloui–Lachaud ([2]). Кроме того, Цфасманом и Влэдуцем были получены асимптотические формулы, дающие ответ на вопрос о росте числа классов, когда род $g \to \infty$ ([16]).

Совместно с P. Lebacque были получены нижние оценки на число классов, дающие в пределе формулу Цфасмана–Влэдуца и улучшающие во всех, кроме очень небольшого числа случаев, все известные ранее нижние границы на число точек на якобианах. В частности, эти границы оказываются очень хорошими, если род кривой не слишком мал. Более точно, получающийся результат таков. Для всякой гладкой проективной кривой $X/\mathbb{F}_q$ рода g и для всякого натурального N имеется оценка на число классов $h_X = |\mathrm{Jac}_X(\mathbb{F}_q)|$:

$$h_X \geq q^g \exp\left(\sum_{f=1}^{N} \frac{1}{fq^f}|X(\mathbb{F}_{q^f})| - \frac{2g}{(\sqrt{q}-1)(N+1)q^{\frac{N}{2}}} - \sum_{n=1}^{N} \frac{1+q^{-n}}{n}\right)$$

Подобный результат может иметь приложения к улучшению границ на плотности упаковок сфер, построенных с помощью функциональных полей (мультипликативные конструкции), а также имеет связь с теорией кодирования и криптографией.

Литература

[1] E. Arbarello, V. G. Kac, C. De Concini, *The Infinite Wedge Representation and the Reciprocity Law for Algebraic Curves*, Proc. Sympos. Pure Math., **49**(1989),171–190.

[2] Y. Aubry, S. Haloui, G. Lachaud, *Sur le nombre de points rationnels des variétés abéliennes et des Jacobiennes sur les corps finis*, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I **350**, 907–910, 2012.

[3] S. Ballet, R. Rolland, *Lower bounds on the class number of algebraic function field defined over any finite field*, J. Théor. Nombres Bordeaux, **24**(3), 505–54, 2012.

[4] S. Ballet, R. Rolland, S. Tutdere, *Lower Bounds on the number of rational points of Jacobians over finite fields and application to algebraic function fields in towers*, *arXiv:1303.5822*

[5] R. Y. Budylin, *Conjugacy classes in discrete Heisenberg groups*, *Sbornik: Mathematics*, 205:8(2014), 3–12.

[6] R. Y. Budylin, *Conjugacy classes in discrete Heisenberg groups*, *arXiv:1405.5499*

[7] C. Contou-Carrère, *Jacobienne locale, groupe de bivecteurs de Witt universel, et symbole modéré*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math., **318**:8 (1994), 743–746.

[8] C. Contou-Carrère, *Jacobienne locale d'une courbe formelle relative*, Rend. Semin. Mat. Univ. Padova, **130** (2013), 1–106.

[9] D. Grayson, *Higher algebraic K-theory. II (after Daniel Quillen)*, Algebraic K-theory (Proc. Conf., Northwestern Univ., Evanston, Ill., 1976), Lecture Notes in Math., Springer, Berlin, **551** (1976), 217–240.

[10] D. Kubrak. *On some asymptotic formulas for curves in positive characteristic*, *arXiv:1412.0908.*

[11] K. Kato, *A generalization of local class field theory by using K-groups. II*, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math., **27**:3 (1980), 603–683.

[12] G. Lachaud, M. Martin-Deschamps, *Nombre de points des jacobiennes sur un corps fini*, Acta Arith, **56**(4): 329–340, 1990.

[13] D. Osipov, X. Zhu, *The two-dimensional Contou-Carrère symbol and reciprocity laws*, e-print *arXiv:1305.6032v2*; to appear in J. Algebraic Geom. (2015).

[14] А. Н. Паршин, *О голоморфных представлениях дискретных групп Гейзенберга*, Функциональный анализ и приложения, **44**:2 (2010), 92–96.

[15] A. N. Parshin, *Representations of higher adelic groups and arithmetic*, Proceedings of the International Congress of Mathematicians (Hyderabad, India, 19–27 August 2010), **1**(2010), 362 –392.

[16] M. A. Tsfasman, S. G. Vlăduts. *Asymptotic properties of zeta-functions*, J. Math. Sciences (New York), 1997, **84**, n.5, pp.1445–1467.

16. Заключение: публикации лаборатории

В заключение отчета, мы приводим список публикаций лаборатории, и список препринтов, подготовленных к печати.

16.1. Статьи в международных журналах

1) Bogomolov F. A., Greenleaf F. P.A Constructive Proof of Brauer's Theorem on Induced Characters in the Group Ring, Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society. 2014. Vol. 57. No. 1. P. 31-53.

2) Sergey Gorchinskiy and Alexei Rosly A Polar Complex for Locally Free Sheaves, International Mathematical Research Notices, advance access published February 28, 2014

3) Gorchinskiy S. O., Ovchinnikov A., Isomonodromic differential equations and differential categories, Journal de Mathematiques Pures et Appliquees. 2014. Vol. 102. P. 48-78

4) Alexander I. Efimov, Maximal lengths of exceptional collections of line bundles, Journal of London Mathematical Society, 2014, vol. 90, No 2, pp. 350-372

5) Feigin E., Degenerate group of type A: Representations and flag varieties, Functional Analysis and Its Applications. 2014. Vol. 48. No. 1. P. 59-71.

6) Cherulli Irelli G., Feigin E., Reineke M., Homological approach to the Hernandez-Leclerc construction and quiver varieties, Representation Theory. 2014. No. 18. P. 1-14.

7) Feigin E., Michael Finkelberg, Littelmann P. Symplectic Degenerate Flag Varieties, Canadian Journal of Mathematics. 2014. Vol. 66. No. 6. P. 1250-1286.

8) Braverman A. and M.Finkelberg, Semi-infinitive Schubert varieties and quantum k-theory of flag manifolds, Journal of American mathematical Society, Vol. 27, num. 4, pp. 1147-1168

9) Michael Finkelberg, Braverman A. Weyl modules and q-Whittaker functions, Mathematische Annalen. 2014. Vol. 359. No. 1. P. 45-59.

10) Braverman A., Finkelberg M. V., Shiraishi J., Macdonald polynomials, Laumon spaces and perverse coherent sheaves, Contemporary Mathematics Series. 2014. Vol. 610. P. 23-41

11) Finkelberg M. V., Rybnikov L. G., Quantization of Drinfeld Zastava in type C, Journal of Algebraic Geometry. 2014. Vol. 1. No. 2. P. 166-180.

12) Finkelberg M. V., Rybnikov L. G., Quantization of Drinfeld Zastava in type A, Journal of the European Mathematical Society. 2014. Vol. 16. No. 2. P. 235-271

13) Kaledin Dmitry, Trace theories and localization Contemporary Mathematics, to appear in 2015 (in print)

14) Alexander Kuznetsov, Scheme of lines on a family of 2-dimensional quadrics: geometry and derived category, Mathematische Zeqitschrift, 2014, vol. 276, pp. 655-672

15) Serge Lvovski, On surfaces with zero vanishing cycles, Manuscripta Mathematica. 2014. Vol. 145. P. 235-242

16) Yu.Burman, S.Lvovsky. On projections of smooth and nodal plane curves, Moscow Mathematical Journal. 2014 (in print)

17) Positselski L., Galois cohomology of a number field is Koszul, Journal of Number Theory. 2014. Vol. 145. P. 126-152

18) Kishimoto T., Yuri Prokhorov, Zaidenberg M., Affine cones over Fano threefolds and additive group actions, Osaka Journal of Mathematics. 2014. Vol. 51. No. 4. P. 1093-1113

19) S. Mori, Yu.Prokhorov, 3-Fold Extremal Contractions of Types (IC) and (IIB), Proceedings of Edinburgh Mathematical Society, 2014, vol.57, pp. 231-252

20) Prokhorov Y., 2-elementary subgroups of the space Cremona group, Springer Proceedings in Mathematics and Statistics. 2014. Vol. 79. P. 215-229

21) Iliev A., Katzarkov L., Victor Przyjalkowski, Double solids, categories and non-rationality, Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society. 2014. Vol. 57. P. 145-173.

22) Rybakov S., Finite group subschemes of abelian varieties over finite fields, Finite Fields and Their Applications. 2014. Vol. 29. P. 132-150

23) Kamenova L., Lu S., Verbitsky M., Kobayashi pseudometric on hyperkähler manifolds, Journal of the London Mathematical Society. 2014. Vol. 90. No. 2. P. 436-450

24) Verbitsky M., Rational curves and special metrics on twistor spaces, Geometry and Topology. 2014. Vol. 18. No. 2. P. 897-909.

25) Campana F., Demailly J., Verbitsky M., Compact Kahler 3-manifolds without nontrivial subvarieties, Algebraic Geometry. 2014. Vol. 2. P. 131-139

26) Misha Verbitsky, Holography principle for twistor spaces, Pure and Applied Mathematics, 2014, volume 10 No 2, pp. 325 - 354

27) Sasha Anan'in, Misha Verbitsky, Any component of moduli of polarized hyperkahler manifolds is dense in its deformation space, Journal de Mathematical Pures et Applications, 2014, vol. 101, pp. 188-197

28) Marcos Jardim, Misha Verbitsky, Trihyperkähler reduction and instanton bundles on CP3, Compositio Mathematica, 2014, vol. 150, pp. 1836-1868

29) Kamenova L., Verbitsky M., Families of Lagrangian fibrations on hyperkahler manifolds, Advances in Mathematics. 2014. Vol. 260. P. 401-413

30) Zykin A. I. Uniform distribution of zeroes of L-functions of modular forms, Contemporary Mathematics Series. 2015. Vol. 637 (in print)

31) Абрамов Я. В. Экспоненциальное отображение Артина-Хассе, алгебраические группы в положительной характеристике и Ноттингемская группа, Математические заметки. 2015. Т. 97. no. 1.

32) Будылин Р.Я. Классы сопряженности в дискретных группах Гейзенберга, Математический сборник, 2014, Том 205 no.

33) Г. С. Мутафян, Б. Л. Фейгин, Характеры представлений квантовой тороидальной алгебры gl1: плоские разбиения "с трибуной", Функциональный анализ и его приложения, 2014, т. 48, вып. 1, с. 46-60

34) Фонарев А.В., Исключительные векторные расслоения на грассманианах, Успехи математических наук, том 69, вып. 4, стр. 189-190

16.2. Прочие публикации сотрудников Лаборатории

1) Prokhorov Y. "Del Pezzo fibrations", Appendix to "Five embeddings of one simple group" by I. Cheltsov and C. Shramov, Transactions of the American Mathematical Society. 2014. Vol. 366. No. 3. P. 1289-1331

2) Глава Kiritchenko V. A., Geometric mitosis and Newton-Okounkov polytopes, In bk.: Oberwolfach Reports. Vol. 11. Iss. 1. European Mathematical Society Publishing house, 2014. В печати

3) Coates T., Corti A., Galkin S. et al. Mirror Symmetry and Fano Manifolds, In bk.: European Congress of Mathematics Kraków, 2 - 7 July, 2012. Zürich: European Mathematical Society Publishing house, 2014. Ch. 16. P. 285-300.

4) Ivan Cheltsov, Constantin Shramov. Five embeddings of one simple group, Transactions of the American Mathematical Society. 2014. Vol. 366. No. 3. P. 1289-1331

5) Львовский С.М. Набор и верстка в LaTeX, 5-е издание, переработанное, Москва, МЦНМО, 2014

6) Гельфанд И., Львовский С.М., Тоом А., Тригонометрия, изд-е 5-еб стереотипное, Москва, МЦНМО, 2014

16.3. Статьи сотрудников Лаборатории, подготовленных в рамках проведения научно-исследовательских работ по гранту РНФ (Соглашение 14-21-00053 от 11.08.2014):

1) Soldatenkov A. O., Verbitsky M. k-symplectic structures and absolutely trianalytic subvarieties in hyperkahler manifolds, Journal of Geometry and Physics (в печати), 2014.

2) Хованский А. Г., Timorin V. A., On the Theory of Coconvex Bodies, Discrete and Computational Geometry. 2014, vol. 52, pp.806-823

3) Alexander Blokh, Lex Oversteegen, Ross Ptacek and Vladlen Timorin The Main Cuboid Nonlinearity, 2014, Vol. 27. No. 8. P. 1879-1897

4) Prokhorov Y., A note on degenerations of del Pezzo surfaces, Annales de l'Institut Fourier. 2015. P. 1-16. (в печати)

5) Galkin S., Mellit A., Smirnov M., Dubrovin's conjecture for IG(2,6), International Mathematics Research Notices. 2014.

6) Тюрин Н.А. псевдоторические структуры на гиперплоском сечении торического многообразия, принято к печати в Теоретическая математическая физика, том 183, номер 2, 2015 (в печати).

17. Препринты лаборатории

17.1. Препринты со ссылкой на грант 11.G34.31.0023

1) Alexey Zykin. Uniform distribution of zeroes of L-functions of modular forms arXiv: 1412.2990
2) Fedor Bogomolov, Böhning C., Graf von Bothmer H. Birationally isotrivial fiber spaces arXiv: 1405.1389
3) Positselski L.Categorical Bockstein sequences arXiv: 1404.5011.
4) Roman Budylin Conjugacy classes in discrete Heisenberg groups arXiv: 1405.5499
5) Positselski L. Contraherent cosheaves arXiv: 1209.2995.
6) Fedor Bogomolov, Böhning C. Essential dimension, stable cohomological dimension, and stable cohomology of finite Heisenberg groups arXiv: 1405.1394
7) Yuri Prokhorov, Zaidenberg M. Examples of cylindrical Fano fourfolds arXiv: 1406.6339
8) Andrey Soldatenkov, Misha Verbitsky k-symplectic structures and absolutely trianalytic subvarieties in hyperkahler manifolds arXiv: 1409.1100
9) Victor Przyjalkowski, Constantin Shramov.Laurent phenomenon for Landau-Ginzburg models of complete intersections in Grassmannians of planes arXiv: 1409.3729
10) Fedor Bogomolov, De Oliveira B. Local structure of closed symmetric 2-differentials arXiv: 1410.1014
11) Alexey Elagin. On equivariant triangulated categories arXiv: 1206.2881.
12) Rovinsky M. On semilinear representations of the infinite symmetric group arXiv: 1405.3265
13) Zykin A. I. On the Number of Rational Points of Jacobians over Finite Fields arXiv: 1412.2609.

14) Alexey Bondal, Ilya Zhdanovskiy. Orthogonal pairs for Lie algebra sl(6) IPMU14-0296. IPMU14-0296. IPMU, 2014
15) Coates T., Galkin S., Kasprzyk A. et al. Quantum Periods For Certain Four-Dimensional Fano Manifolds arXiv: 1406.4891.
16) Alexey Zykin, Philippe Lebacque, On the Number of Rational Points of Jacobians over Finite Fields? arXiv: 1412:2609
17) Fedor Bogomolov, Yuri Tschinkel, Universal spaces for unramified Galois cohomology, arXiv: 1408:0392
18) Ludmil Katzarkov, Victor Przyjalkowski, Landau-Ginzburg models – old and new, arXiv: 1405.2953
19) D. Kaledin, A. Kuznetsov, Refined blowups, arXiv: 1410.7121
20) Alexander Kuznetsov, Alexander Perry, Derived categories of cyclic covers and their branch divisors, arXiv: 1411:1799
21) Michael Finkelberg, Vadim Schechtman, Microlocal approach to Lusztig's symmetries, arXiv: 1401.5885
22) Sergey Galkin, Evgeny Shinder, The Fano variety of lines and rationality problem for a cubic hypersurface, arXiv: 1405.3857
23) Sergey Galkin, The conifold point, arXiv: 1404.7388
24) Alexander Blokh, Lex Oversteegen, Ross Ptacek, Vladlen Timorin, Smart criticality, arXiv: 1401.5123
25) Alexander Blokh, Lex Oversteegen, Ross Ptacek, Vladlen Timorin, Combinatorial models for spaces of cubic polynomials, arXiv: 1405.4287
26) Alexander Blokh, Lex Oversteegen, Ross Ptacek, Vladlen Timorin, Complementary components to the cubic Principal Hyperbolic Domain, arXiv: 1411.2535
27) Alexander I. Efimov, Derived categories of Grassmannians over integers and modular representation theory, arXiv: 1410.7462
28) F.A. Bogomolov, Vik.S. Kulikov, The ambiguity index of an equipped finite group, arXiv: 1404.5763

29) Vik.S. Kulikov, On the Galois groups of the dualizing coverings for plane curves, arXiv: 1403.1426

30) Victor Kulikov, Eugenii Shustin, Duality of planar and spacial curves: new insight, arXiv: 1412.1944

31) Sergey Rybakov, On classification of groups of points on abelian varieties over finite fields, arXiv: 1401.1652

32) Alexander Beilinson, Guido Kings, Andrey Levin, Topological polylogarithms and p-adic interpolation of L-values of totally real fields, arXiv: 1410.4741

33) Feigin E., Finkelberg M. V., Reineke M. Degenerate affine Grassmannians and loop quivers arXiv: 1410.0777.

17.2. Препринты без указания номера гранта 11.G34.31.0023

1) A. Levin, M. Olshanetsky, A. Zotov, Planck Constant as Spectral Parameter in Integrable Systems and KZB Equations, arXiv: 1408.6246

2) Duval C., Shevchishin V., Valent G. Explicit metrics for a class of two-dimensional superintegrable systems arXiv: 1403.0422

3) Braverman A., Finkelberg M. V., Nakajima H. Instanton moduli spaces and $\mathscr{W}$-algebras arXiv: 1406.2381.

4) Feigin E., Makedonskyi I. Nonsymmetric Macdonald polynomials, Demazure modules and PBW filtration arXiv: 1407.6316

5) Misha Verbitsky, Teichmuller spaces, ergodic theory and global Torelli theorem, arXiv: 1404.3847

6) Ivan Cheltsov, Worst singularities of plane curves of given degree, arXiv: 1409:6186

7) Ivan Cheltsov, Jesus Martinez-Garcia, Dynamic alpha-invariants of del Pezzo surfaces, arXiv: 1405.5161

8) Alexander Braverman, Galyna Dobrovolska, Michael Finkelberg, Gaiotto-Witten superpotential and Whittaker D-modules on monopoles, arXiv: 1406.6671

9) Alexander Braverman, Michael Finkelberg, Twisted zastava and q-Whittaker functions, arXiv: 1410.2365

10) Ekaterina Amerik, Some applications of p-adic uniformization to algebraic dynamics, arXiv: 1407.1558

17.3. Препринты сотрудников Лаборатории, подготовленных в рамках проведения научно-исследовательских работ по гранту РНФ (Соглашение 14-21-00053 от 11.08.2014)

1) Ekaterina Amerik, Misha Verbitsky Morrison-Kawamata cone conjecture for hyperkahler manifolds arXiv: 1408.3892

2) Timorin V. A., Petrushchenko S. On maps taking lines to plane curves arXiv: 1409.3403

3) Lev Soukhanov. On the phenomena of constant curvature in the diffusion-orthogonal polynomials arXiv: 1409:5332

4) Michael Entov, Misha Verbitsky, Full symplectic packing for tori and hyperkahler manifolds, arXiv: 1412.7183

5) Verbitsky M., Grantcharov G., Lejmi M. Existence of HKT metrics on hypercomplex manifolds of real dimension 8 arXiv: 1409.3280

6) Amerik E., Campana, F.Characteristic foliation on non-uniruled smooth divisors on projective hyperkaehler manifolds arXiv:. 1405.0539.

7) Galkin S., Golyshev V., Iritani H. Gamma classes and quantum cohomology of Fano manifolds: Gamma conjectures arXiv: 1404.6407.

8) Lee K., Shabalin T. Exceptional collections on some fake quadrics, arXiv: 1410.3098

9) Kiritchenko V. A. Geometric mitosis arXiv: 1409.6097

10) Merzon G., Smirnov E.Determinantal identities for flagged Schur and Schubert polynomials arXiv:1410.6857

11) Smirnov E., Kleptsyn V. Plane curves and bialgebra of Lagrangian subspaces arXiv. 1401.6160

17.4. Препринты со ссылкой на исследовательские гранты НИУ ВШЭ

1) Ekaterina Amerik, Misha Verbitsky. Rational curves on hyperkaehler manifolds arXiv: 1401.0479