В. А. Гриценко, В. В. Никулин, О классификации лоренцевых алгебр Каца–Муди, *УМН*, 2002, том 57, выпуск 5(347), 79–138

2002 г. сентябрь — октябрь *т. 57, вып. 5(347)*

УСПЕХИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК

УДК 512.818.4+512.817.72+511.334+512.774

О КЛАССИФИКАЦИИ ЛОРЕНЦЕВЫХ АЛГЕБР КАЦА–МУДИ

В. А. Гриценко, В. В. Никулин

Рассматривается общая теория лоренцевых алгебр Каца–Муди, которая должна служить гиперболическим аналогом классических теорий конечномерных полупростых и аффинных алгебр Каца–Муди. Первые примеры лоренцевых алгебр Каца–Муди были найдены Борчердсом. Рассматриваются общие результаты конечности для множества лоренцевых алгебр Каца–Муди ранга $\geqslant 3$ и проблема их классификации. В качестве примера дается классификация лоренцевых алгебр Каца–Муди ранга три с гиперболической решеткой корней S_t^*, решеткой симметрии L_t^* и группой симметрии $\widehat{O}^+(L_t)$, $t \in \mathbb{N}$, где

$$H = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \ S_t = H \oplus \langle 2t \rangle = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2t & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ L_t = H \oplus S_t = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2t & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

и $\widehat{O}^+(L_t) = \{g \in O^+(L_t) \mid g$ тривиален на $L_t^*/L_t\}$ – расширенная парамодулярная группа. Вероятно, это первый пример классификации большого класса лоренцевых алгебр Каца–Муди.

Библиография: 73 названия.

СОДЕРЖАНИЕ

0. Введение

Имеется два хорошо известных и очень важных для математики и физики типа алгебр Ли. Первый – класс конечномерных полупростых (или просто конечных) алгебр Ли. Второй – класс аффинных алгебр Каца–Муди. Оба эти класса принадлежат классу алгебр Каца–Муди. См. [47] по поводу их теории.

После фундаментальных результатов Борчердса [2]–[7] мы, вероятно, знаем сейчас правильное определение следующего типа алгебр Ли, который должен служить гиперболическим аналогом конечных (или эллиптического типа) и аффинных (или параболического типа) алгебр Ли. Здесь мы называем этот тип алгебр Ли *лоренцевыми алгебрами Каца–Муди*, но кто-то может предпочесть называть их *гиперболическими типа Борчердса*. Алгебры этого типа очень важны в решении Борчердсом [5] знаменитой “глупой” гипотезы (Moonshine Conjecture) Конвея и Нортона [20] о свойстве модулярности представлений спорадической простой конечной группы, называемой Монстром.

Основные черты теории лоренцевых алгебр Каца–Муди $\mathfrak{g}$ заключаются в следующем (см. детали этого определения в п. 1.4).

1) Лоренцева алгебра Каца–Муди $\mathfrak{g}$ градуирована,

$$\mathfrak{g} = \bigoplus_{\alpha\in R} \mathfrak{g}_\alpha = \mathfrak{g}_0 \oplus \Big(\bigoplus_{\alpha\in\Delta_+} \mathfrak{g}_\alpha\Big) \oplus \Big(\bigoplus_{\alpha\in\Delta_+} \mathfrak{g}_{-\alpha}\Big),$$

гиперболической решеткой корней R, являющейся свободным $\mathbb{Z}$-модулем конечного ранга, снабженным целочисленной симметрической билинейной формой, которая невырождена и имеет в точности один отрицательный квадрат. Для конечных и аффинных алгебр Каца–Муди решетка корней R положительно определена и полуположительно определена соответственно.

2) *Группа Вейля* $W \subset O(R)$ является группой отражений в гиперболическом пространстве (или пространстве Лобачевского) $\mathscr{L}(R)$, связанном с R. Для конечных и аффинных алгебр Каца–Муди группа Вейля является соответственно конечной группой отражений и дискретной группой отражений евклидова пространства.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 00-01-00170).

3) Вещественная часть системы корней алгебры $\mathfrak{g}$, являющаяся некоторым подмножеством корней решетки корней R, является гиперболическим аналогом конечной или аффинной системы корней. Как конечные и аффинные системы корней, она определяется фундаментальной камерой $\mathscr{M}$ группы W и множеством $P(\mathscr{M})$ корней решетки R, которые ортогональны граням $\mathscr{M}$ старшей размерности (множество $P(\mathscr{M})$ является множеством *простых вещественных корней* алгебры $\mathfrak{g}$).

4) *Тождество для знаменателя алгебры* $\mathfrak{g}$ (Г. Вейля, Каца и Борчердса) является автоморфной формой Φ, согласованной с группой Вейля W, на связанной с R эрмитовой симметрической области типа IV (в классификации Э. Картана). Это тождество имеет вид

$$\begin{aligned}\Phi &= \exp\left(-2\pi i(\rho, z)\right)\prod_{\alpha\in\Delta_+}\left(1-\exp(-2\pi i(\alpha, z))\right)^{\operatorname{mult}(\alpha)}\\ &= \sum_{w\in W}\varepsilon(w)\left(\exp\left(-2\pi i(w(\rho), z)\right)-\sum_{a\in S\cap\mathbb{R}_{++}\mathscr{M}} m(a)\exp(-2\pi i(w(\rho+a), z))\right).\end{aligned} \tag{0.1}$$

Бесконечное произведение в этом тождестве является разложением автоморфной формы Φ в бесконечное произведение, где кратности $\operatorname{mult}(\alpha)$ дают размерности корневых пространств $\mathfrak{g}_\alpha$ алгебры $\mathfrak{g}$. Бесконечная сумма в этом тождестве является разложением Фурье автоморфной формы Φ, которое определяет алгебру $\mathfrak{g}$ образующими и определяющими соотношениями, аналогичными найденным Киллингом, Картаном, Шевалле и Серром. Элемент $\rho \in R\otimes\mathbb{Q}$ является *вектором Вейля*, определяемым равенством

$$(\rho, \alpha) = -\alpha^2/2 \quad \text{для любого} \quad \alpha\in P(\mathscr{M}). \tag{0.2}$$

Для конечных и аффинных алгебр Каца–Муди тождество для знаменателя дает соответственно полином и модулярную форму Якоби. Мы хотим сохранить это свойство модулярности и для лоренцевых алгебр Каца–Муди.

5) Автоморфная форма Φ должна быть *рефлективной*, т.е. ее дивизор должен быть объединением рациональных квадратичных дивизоров, ортогональных корням. Это условие можно рассматривать как глобализацию на всю эрмитову симметрическую область множества нулей разложения Φ в бесконечное произведение в окрестности каспа, где данное бесконечное произведение сходится. Это свойство рефлективности имеет место во всех известных интересных случаях и, по-видимому, выделяет наиболее интересные алгебры Ли. Кроме того, это дополнительное условие очень важно для классификации.

В гиперболическом случае невозможно удовлетворить условиям 1)–4) в классе обычных алгебр Каца–Муди. Фундаментальное открытие Борчердса заключается в том, что условиям 1)–5) можно удовлетворить после подходящего обобщения алгебр Каца–Муди на так называемые *обобщенные алгебры Каца–Муди*. Он построил много примеров обобщенных алгебр Каца–Муди, удовлетворяющих условиям 1)–5). См. [2]–[7]. В п. 1.3 мы приводим самый многомерный и интересный пример Борчердса. Мы следуем Борчердсу: лоренцевы алгебры Каца–Муди, которые мы рассматриваем, будут *обобщенными алгебрами или супералгебрами Каца–Муди*, удовлетворяющими условиям 1)–5). См. детали этого определения в п. 1.4.

Лоренцевы алгебры Каца–Муди, использованные Борчердсом для решения "глупой" гипотезы (Moonshine Conjecture), градуированы унимодулярной гиперболической плоскостью (ранга два) $H = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, и их тождество для знаменателя является автоморфной формой $j_g(\tau_1) - j_g(\tau_2)$, $\tau_1, \tau_2 \in \mathbb{H}$, на произведении $\mathbb{H} \times \mathbb{H}$ двух верхних полуплоскостей $\mathbb{H}$, где g – класс сопряженности Монстра и $j_g(\tau)$ – подходящая нормализованная главная модулярная функция (Hauptmodul). Имеется много статей и обзоров, посвященных решению Борчердсом [5] "глупой" гипотезы. Например, см. [6], [10], [27], [70]. В данной статье мы не касаемся этой темы. Мы также не рассматриваем связь лоренцевых алгебр Каца–Муди с вертексными алгебрами (Vertex Algebras), которая очень важна в решении "глупой" гипотезы. См., например, [2]–[6], [11], [25], [27], [28], [49] по этому поводу.

В настоящей статье рассматривается проблема классификации лоренцевых алгебр Каца–Муди ранга $\operatorname{rk} R \geqslant 3$. Одно из главных свойств конечных и аффинных алгебр Каца–Муди заключается в том, что они классифицированы (Киллингом). Конечные алгебры Каца–Муди классифицируются диаграммами Дынкина, аффинные алгебры Каца–Муди классифицируются расширенными диаграммами Дынкина. В этой работе рассматривается аналогичное свойство лоренцевых алгебр Каца–Муди ранга $\operatorname{rk} R \geqslant 3$. Мы рассматриваем результаты и гипотезы, которые показывают, что число лоренцевых алгебр Каца–Муди ранга $\geqslant 3$ в существенном конечно. Таким образом, лоренцевы алгебры Каца–Муди ранга $\geqslant 3$ все исключительны (подобно исключительным алгебрам Ли типа $\mathbb{E}_n$, $n = 6, 7, 8, \mathbb{F}_4, \mathbb{G}_2$) и могут быть в принципе классифицированы. Отметим, что для рангов один и два аналогичные проблемы классификации гораздо проще, но мы ожидаем, что число алгебр в этом случае в существенном бесконечно.

В § 1 рассматриваются общие определения и теория лоренцевых алгебр Каца–Муди (пп. 1.1–1.4), а также общие результаты и гипотезы конечности для лоренцевых алгебр Каца–Муди ранга $\geqslant 3$ (пп. 1.5–1.7). Основной результат здесь заключается в том, что число данных 1)–3) в данных 1)–4) конечно (или в существенном конечно) для ранга $\operatorname{rk} R \geqslant 3$. Мы также приводим некоторые результаты классификации для ранга три. Все эти результаты тесно связаны со старыми результатами второго автора и Э.Б. Винберга о конечности множества арифметических групп отражений в гиперболических пространствах. См. [58]–[61], [71]–[73].

Основное свойство данных 1)–3) в данных 1)–4), которое позволяет получить эти результаты, заключается в том, что фундаментальная камера $\mathscr{M}$ группы Вейля W имеет конечный или почти конечный объем. Именно здесь используется то, что тождество для знаменателя в 4) дает автоморфную форму. Более точно, пусть $\operatorname{Sym}(\mathscr{M}) \subset O^+(R)$ – группа симметрии камеры $\mathscr{M}$. Тогда соответствующее полупрямое произведение $W \rtimes \operatorname{Sym}(\mathscr{M})$ имеет конечный индекс в $O^+(R)$ и существует ненулевой $\rho \in R \otimes \mathbb{Q}$ (называемый *обобщенным вектором Вейля*) такой, что его орбита $\operatorname{Sym}(\mathscr{M})(\rho)$ конечна. Гиперболические решетки R, имеющие подгруппу отражений $W \subset O(R)$ с таким свойством, называются *рефлективными.* Так как группа $O^+(R)$ арифметична и имеет фундаментальную область конечного объема, отсюда следует, что камера $\mathscr{M}$ имеет конечный объем, если $\rho^2 < 0$ (*эллиптический тип*); $\mathscr{M}$ конечна и конечного объема в любом угле с вершиной в бесконечности $\mathbb{R}_{++}\rho$, если $\rho^2 = 0$ (*параболический тип*); $\mathscr{M}$ конечна и конечного объема в любом ортогональном цилиндре над компактным подмножеством гиперплоскости, ортогональной ρ, если $\rho^2 > 0$ (*гиперболический тип*). Используя это свойство фундаментальной камеры $\mathcal{M}$, можно доказать, что число рефлективных гиперболических решеток R конечно для $\operatorname{rk} R \geqslant 3$. См. [57]–[61], [63], [64], [66], [68], [71]–[73]. Существование вектора Вейля ρ, удовлетворяющего (0.2), дополнительно позволяет доказать конечность или почти конечность (т.е. конечность с точностью до очень простого отношения эквивалентности) данных 1)–3) в данных 1)–4).

В п. 1.6 рассматриваются гипотезы и результаты конечности для данных 4) и 5). Некоторые наблюдения из [65] и [40] дают надежду, что число этих данных также конечно для $\operatorname{rk} R \geqslant 3$. Вероятно, общие результаты Борчердса [7], [9] и Бруиньера [14]–[16] о бесконечных автоморфных произведениях и их дивизорах также связаны с этим. Мы не обсуждаем эти результаты Борчердса и Бруиньера в настоящей статье.

В § 2 рассматривается конкретный пример классификации лоренцевых алгебр Каца–Муди ранга три, где используются общие идеи и результаты § 1. Мы даем классификацию лоренцевых алгебр Каца–Муди с решеткой корней S_t^*, где

$$S_t = H \oplus \langle 2t \rangle = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2t & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

решеткой симметрии L_t^*, где

$$L_t = H \oplus S_t = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2t & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

и группой симметрии (автоморфной формы Φ)

$$\widehat{O}^+(L_t) = \{g \in O^+(L_t) \mid g \text{ тривиальна на } L_t^*/L_t\}.$$

Здесь $t \in \mathbb{N}$, $\oplus$ обозначает ортогональную сумму решеток и * обозначает двойственную решетку. Мы доказываем (теорема 2.1.1), что существует в точности **29** лоренцевых алгебр Каца–Муди $\mathfrak{g}$ (или данных 1)–5)) с решеткой корней S_t^*, решеткой симметрии L_t^* и группой симметрии $\widehat{O}^+(L_t)$. Вероятно, это первый результат, когда классифицируется большой класс лоренцевых алгебр Каца–Муди. На самом деле мы доказываем гораздо более общий классификационный результат о рефлективных автоморфных формах с решеткой корней S_t^*, решеткой симметрии L_t^*, группой симметрии $\widehat{O}^+(L_t)$ и с бесконечным произведением, подобным (0.1) (теоремы 2.2.3 и 2.4.1). Этот результат дает информацию о лоренцевых алгебрах Каца–Муди с решетками симметрии L, которые являются эквивариантными подрешетками $L \subset L_t$ того же ранга $\operatorname{rk} L = \operatorname{rk} L_t = 5$. Здесь подрешетка $L \subset L_t$ называется эквивариантной, если $O(L) \subset O(L_t)$. Кроме того, можно ожидать, что соответствующие тождества *бесконечное произведение = бесконечная сумма* (аналогичные (0.1)) для этих рефлективных автоморфных форм могут быть связаны с интересными алгебрами, аналогичными обобщенным алгебрам и супералгебрам Каца–Муди.

В данной статье дается набросок и все идеи доказательства классификационной теоремы 2.1.1. Детали этого доказательства и вычислений мы надеемся представить в соответствующей более длинной статье.

Все 29 лоренцевых алгебр Каца–Муди теоремы 2.1.1 были построены в [41]. Для построения этих алгебр требуется построить соответствующие 29 автоморфных форм (0.1). Они были построены в [41] вместе с их разложениями в бесконечное произведение и сумму. Все 29 автоморфных форм теоремы 2.1.1 строятся, используя некоторый вариант для автоморфных форм Якоби экспоненциального подъема Борчердса. См. [41] об этом варианте. Эта конструкция требует тонких вычислений с подходящими модулярными формами Якоби от двух переменных с целыми коэффициентами. Используется классификация этих форм, полученная в [33], [34]. Некоторые из этих результатов представлены в §3: Приложение.

Для доказательства полноты списка из этих 29 автоморфных форм находятся (теорема 2.3.2) все рефлективные гиперболические решетки S_t ранга три. В частности, для них $t \leqslant 105$. Для рефлективных решеток S_t находятся все возможные данные 1)–3) и предсказывается дивизор возможной рефлективной автоморфной формы Φ. Одна из 29 автоморфных форм теоремы 2.1.1 оказывается имеющей тот же самый дивизор и совпадает с Φ в силу принципа Кёхера.

В общем случае в [68] классифицированы все рефлективные гиперболические решетки ранга три: имеется 122 главных эллиптических и 66 главных гиперболических типов (нет главных параболических типов). Эти результаты и разумное число случаев три дают надежду, что в будущем будут классифицированы все лоренцевы алгебры Каца–Муди ранга три. Результаты конечности для $\operatorname{rk} R \geqslant 3$ дают надежду, что то же самое может быть сделано для всех рангов $\operatorname{rk} R \geqslant 3$. Ожидается, что число случаев уменьшается при возрастании ранга: для большого $\operatorname{rk} R$ алгебр нет. Пример Борчердса, представленный в п. 1.3, – самый высокомерный известный пример лоренцевых алгебр Каца–Муди. Для этого примера $\operatorname{rk} R = 26$.

В этой статье мы не касаемся возможных физических приложений лоренцевых алгебр Каца–Муди. Некоторые из них можно найти в физических статьях [17], [18], [21]–[23], [28], [38], [42], [45], [51]–[53], [56].

Данная работа выполнена в течение нашего пребывания в университетах Лилля и Ливерпуля, Математическом институте им. В. А. Стеклова в Москве и Санкт-Петербурге, Математическом институте Макса Планка в Бонне и Математическом институте Ньютона в Кембридже. Мы благодарны данным институтам за гостеприимство.

§1. Теория лоренцевых алгебр Каца–Муди и общие результаты и гипотезы конечности

Мы начнем с варианта теории лоренцевых алгебр Каца–Муди, которую можно рассматривать как гиперболический аналог классических теорий конечных и аффинных алгебр Каца–Муди. Здесь мы следуем Борчердсу и [36], [40], [41], [64], [67].

1.1. Некоторые общие результаты по алгебрам Каца–Муди. Все определения и детали этого пункта можно найти в классической книге Каца [47].

Обобщенная матрица Картана A – это квадратная целочисленная матрица конечного ранга, имеющая на диагонали только 2 и вне диагонали только неположительные целые числа. Мы будем рассматривать только *симметризуемые* обобщенные матрицы Картана A. Это значит, что существует такая диагональная матрица D с положительными рациональными диагональными коэффициентами, что матрица $B = DA$ целочисленна и симметрична. Тогда B называется *симметризацией* матрицы A. По определению $\operatorname{sign}(A) = \operatorname{sign}(B)$. Мы будем предполагать, что матрица A *неразложима*, т.е. не существует такого разбиения $I = I_1 \cup I_2$ множества I индексов матрицы A, что $a_{ij} = 0$, если $i \in I_1$ и $j \in I_2$.

Каждая обобщенная матрица Картана A определяет алгебру Ли Каца–Муди $\mathfrak{g}(A)$ над $\mathbb{C}$. *Алгебра Каца–Муди* $\mathfrak{g}(A)$ задается множествами образующих и их определяющих соотношений, предписываемыми обобщенной матрицей Картана A. Они были найдены Кацем и Муди. Фактически, они являются естественным обобщением классических результатов Киллинга, Картана, Г. Вейля, Шевалле и Серра по конечномерным полупростым алгебрам Ли. Следует ввести образующие h_i, e_i, f_i, $i \in I$, с определяющими соотношениями

$$\begin{cases} [h_i, h_j] = 0, \ \ [e_i, f_i] = h_i, \ \ [e_i, f_j] = 0, \ \ \text{если } i \neq j, \\ [h_i, e_j] = a_{ij} e_j, \ \ [h_i, f_j] = -a_{ij} f_j, \\ (\operatorname{ad} e_i)^{1-a_{ij}} e_j = (\operatorname{ad} f_i)^{1-a_{ij}} f_j = 0, \qquad \text{если } i \neq j. \end{cases} \tag{1.1.1}$$

Алгебра $\mathfrak{g}(A)$ проста или почти проста: она проста после факторизации по известному центральному идеалу.

Отметим некоторые общие свойства алгебр Каца–Муди $\mathfrak{g}(A)$.

1. Симметризация B определяет свободный $\mathbb{Z}$-модуль $Q = \sum_{i \in I} \mathbb{Z}\alpha_i$ с образующими α_i, $i \in I$, с симметрической билинейной формой $((\alpha_i, \alpha_j)) = B$, определяемой симметризацией B. Модуль Q называется *решеткой корней*. Алгебра $\mathfrak{g}(A)$ *градуирована решеткой корней* Q (по определению образующие h_i, e_i, f_i имеют веса 0, α_i, $-\alpha_i$ соответственно):

$$\mathfrak{g}(A) = \bigoplus_{\alpha \in Q} \mathfrak{g}_\alpha = \mathfrak{g}_0 \oplus \Bigl(\bigoplus_{\alpha \in \Delta_+} \mathfrak{g}_\alpha \Bigr) \oplus \Bigl(\bigoplus_{\alpha \in -\Delta_+} \mathfrak{g}_\alpha \Bigr), \tag{1.1.2}$$

где $\mathfrak{g}_\alpha$ являются конечномерными линейными пространствами, $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta] \subset \mathfrak{g}_{\alpha+\beta}$, подалгебра $\mathfrak{g}_0 \equiv Q \otimes \mathbb{C}$ коммутативна и называется *подалгеброй Картана*. Элемент $0 \neq \alpha \in Q$ называется *корнем*, если $\mathfrak{g}_\alpha \neq 0$. Подпространство $\mathfrak{g}_\alpha$ называется *корневым пространством*, соответствующим α. Размерность $\operatorname{mult}(\alpha) = \dim \mathfrak{g}_\alpha$ называется *кратностью* корня α. В (1.1.2) $\Delta \subset Q$ является множеством всех корней. Оно делится на множество $\Delta_+ \subset \sum_{i \in I} \mathbb{Z}_+ \alpha_i$ *положительных* и множество $-\Delta_+$ *отрицательных* корней. Корень $\alpha \in \Delta$ называется *вещественным*, если $(\alpha, \alpha) > 0$. В противном случае (если $(\alpha, \alpha) \leqslant 0$) он называется *мнимым*. Каждый вещественный корень α определяет *отражение* $s_\alpha \colon x \mapsto x - (2(x, \alpha)/(\alpha, \alpha))\alpha$, $x \in Q$. Все отражения s_α в вещественных корнях порождают *группу Вейля* $W \subset O(S)$. Множество корней Δ и кратности корней инвариантны относительно W.

2. Имеется *тождество Г. Вейля–Каца для знаменателя*, которое позволяет вычислять кратности корней:

$$e(-\rho) \prod_{\alpha \in \Delta_+} (1 - e(-\alpha))^{\operatorname{mult}(\alpha)} = \sum_{w \in W} \det(w) e(-w(\rho)). \tag{1.1.3}$$

Здесь $e(\,\cdot\,) \in \mathbb{Z}[Q]$ – формальные экспоненты, где $\mathbb{Z}[Q]$ – групповое кольцо решетки корней Q. Элемент ρ называется *вектором Вейля* и определяется условием $(\rho, \alpha_i) = -(\alpha_i, \alpha_i)/2$ для любого $i \in I$.

Тождество (1.1.3) комбинаторно, и формулы для кратностей $\operatorname{mult}(\alpha)$ в общем случае неизвестны. Один из подходов к решению этой проблемы заключается в замене формальной функции (1.1.3) на неформальную (например, заменой формальных экспонент на неформальные), при которой получается функция с "хорошими" свойствами. Эти хорошие свойства могут помочь найти формулы для кратностей.

1.2. Конечный и аффинный случаи. Есть два случая, когда имеется очень ясная картина (или теория) алгебр Каца–Муди.

Конечный случай: обобщенная матрица Картана A положительно определена, $A > 0$. Тогда алгебра $\mathfrak{g}(A)$ конечномерна, и мы получаем классическую теорию *конечномерных полупростых алгебр Ли.*

Аффинный случай: обобщенная матрица Картана A полуположительно определена, $A \geqslant 0$. Тогда алгебра $\mathfrak{g}(A)$ называется *аффинной.*

В обоих случаях имеются три очень хороших свойства.

(I) Есть классификация всех возможных обобщенных матриц Картана A и соответствующих алгебр $\mathfrak{g}(A)$: они классифицируются диаграммами Дынкина в конечном случае и расширенными диаграммами Дынкина в аффинном случае.

(II) В тождестве для знаменателя (1.1.3) формальные экспоненты могут быть заменены на неформальные, что дает функцию с очень хорошими свойствами: в конечном случае получается полином. В аффинном случае получается автоморфная форма Якоби. Используя эти свойства (или непосредственно), можно вычислить все кратности.

(III) Оба случая чрезвычайно важны в математике и физике.

Хотелось бы построить подобную теорию для *лоренцева* (*или гиперболического*) *случая*, когда обобщенная матрица Картана A *гиперболична*, т.е. имеет ровно один отрицательный квадрат, все ее остальные квадраты являются положительными или нулевыми. Имеется необозримое множество гиперболических обобщенных матриц Картана, найти их все и классифицировать невозможно. С другой стороны, вероятно, не все они дают интересные алгебры Каца–Муди, и следует найти естественные условия на эти матрицы.

1.3. Лоренцев случай. Пример Борчердса. Имеется следующий ключевой пример, найденный Борчердсом [2]–[6].

В примере Борчердса решетка корней $Q = S$, где S – гиперболическая четная унимодулярная решетка сигнатуры $(25, 1)$. Здесь "четная" означает, что (x, x) четно для любого $x \in S$. "Унимодулярная" означает, что двойственная решетка S^* совпадает с S, или, эквивалентно, для базиса $e_1, \dots, e_{26}$ решетки S определитель матрицы Грама $((e_i, e_j))$ равен ± 1. Решетка S с такими свойствами единственна с точностью до изоморфизма. В примере Борчердса группа Вейля W порождена отражениями $s_\alpha \colon x \mapsto x - (x, \alpha)\alpha$, $x \in S$, во всех элементах $\alpha \in S$, имеющих квадрат $\alpha^2 = 2$. Группа W дискретна в гиперболическом пространстве $\mathscr{L}(S) = V^+(S)/\mathbb{R}_{++}$. Здесь $V^+(S)$ – положительный конус, т.е. пола конуса $V(S) = \{x \in S \otimes \mathbb{R} \mid x^2 < 0\}$ гиперболической решетки S. Пространство $\mathscr{L}(S)$ состоит из лучей, лежащих в $V^+(S)$.

Фундаментальная камера $\mathscr{M} \subset \mathscr{L}(S)$ для W задается множеством P элементов $\alpha \in S$ с $\alpha^2 = 2$, которые *ортогональны камере* $\mathscr{M}$. Множество P имеет следующее описание, полученное Конвеем [19]. Существует ортогональное разложение $S = [\rho, e] \oplus L$, где матрица Грама элементов ρ, e равна $H = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ (в частности, $(\rho,\rho) = 0$) и L – решетка Лича, т.е. положительно определенная четная унимодулярная решетка ранга 24, не имеющая элементов с квадратом 2. Множество P корней, ортогональных фундаментальной камере $\mathcal{M}$ (или множество *простых вещественных корней*) группы Вейля W, равно

$$P = \{\alpha \in S \mid (\alpha,\alpha) = 2 \ \& \ (\rho,\alpha) = -1\}. \tag{1.3.1}$$

Это значит, что фундаментальная камера $\mathcal{M} \subset \mathcal{L}(S)$ равна

$$\mathcal{M} = \{\mathbb{R}_{++}x \in \mathcal{L}(S) \mid (x, P) \leqslant 0\} \tag{1.3.2}$$

и множество P минимально с этим свойством. Отметим, что фундаментальная камера $\mathcal{M}$ имеет *"почти конечный" объем*. Это значит, что камера $\mathcal{M}$ конечна в любом угле гиперболического пространства $\mathcal{L}(S)$ с вершиной в бесконечно удаленной точке $\mathbb{R}_{++}\rho$.

Матрица

$$A = \big((\alpha,\alpha')\big), \qquad \alpha, \alpha' \in P, \tag{1.3.3}$$

является обобщенной матрицей Картана и ρ – вектором Вейля:

$$(\rho,\alpha) = -(\alpha,\alpha)/2, \qquad \forall\, \alpha \in P. \tag{1.3.4}$$

Таким образом, A определяет лоренцеву алгебру Каца–Муди $\mathfrak{g}(A)$, градуированную гиперболической решеткой S. Но $\mathfrak{g}(A)$ – не та алгебра, которая рассматривается в примере Борчердса. Алгебру $\mathfrak{g}(A)$ следует *"откорректировать"*.

Имеется классическая $SL_2(\mathbb{Z})$-модулярная касп-форма Δ веса 12 на верхней полуплоскости $\operatorname{Im}\tau > 0$:

$$\Delta = q\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n)^{24} = \sum_{m\geqslant 0}\tau(m)q^m, \tag{1.3.5}$$

где $q = \exp(2\pi i\tau)$. Имеем

$$\Delta^{-1} = \sum_{n\geqslant 0} p_{24}(n)q^{n-1}, \tag{1.3.6}$$

где $p_{24}(n)$ – положительные целые числа. Борчердс [3] доказал *тождество*

$$\begin{aligned}\Phi(z) &= \exp\left(-2\pi i(\rho,z)\right)\prod_{\alpha\in\Delta_+}\left(1-\exp(-2\pi i(\alpha,z))\right)^{p_{24}(1-(\alpha,\alpha)/2)} \\ &= \sum_{w\in W}\det(w)\sum_{m>0}\tau(m)\exp(-2\pi i(w(m\rho),z)).\end{aligned} \tag{1.3.7}$$

Здесь $\Delta_+ = \{\alpha \in S \mid \alpha^2 = 2 \ \& \ (\alpha,\rho) < 0\} \cup (S \cap \overline{V^+(S)} - \{0\})$. Переменная z пробегает *комплексифицированный положительный конус* $\Omega(V^+(S)) = S\otimes\mathbb{R} + iV^+(S)$.

Кроме того, Борчердс [5], [6] доказал, что функция $\Phi(z)$ *является автоморфной формой веса* 12 относительно группы $O^+(T)$, где $T = H \oplus S$ – расширенная решетка сигнатуры $(26, 2)$ (здесь $\oplus$ обозначает ортогональную сумму решеток). Группа $O^+(T)$ естественно действует в эрмитовой симметрической области типа IV

$$\Omega(T) = \{\mathbb{C}\omega \subset T \otimes \mathbb{C} \mid (\omega, \omega) = 0,\ (\omega, \overline{\omega}) < 0\}_0, \tag{1.3.8}$$

которая канонически отождествляется с $\Omega(V^+(S))$: элемент $z \in \Omega(V^+(S))$ определяет элемент $\mathbb{C}\omega_z \in \Omega(T)_0$, где $\omega_z = ((z,z)/2)e_1 + e_2 \oplus z \in T \otimes \mathbb{C}$ и e_1, e_2 – базис решетки H с приведенной выше матрицей Грама H. Здесь "автоморфная форма веса 12" означает, что функция $\widetilde{\Phi}(\lambda\omega_z) = \lambda^{-12}\Phi(z)$, $\lambda \in \mathbb{C}^*$, однородна степени -12 (это очевидно) в однородном конусе $\widetilde{\Omega(T)}$ над $\Omega(T)$ и $\widetilde{\Phi}(g\omega) = \det(g)\widetilde{\Phi}(\omega)$ для любых $\omega \in \widetilde{\Omega(T)}$ и $g \in O^+(T)$, где $O^+(T)$ – подгруппа индекса 2 группы $O(T)$, которая сохраняет компоненту связности (1.3.8) (отмеченную 0).

Тождество (1.3.7) очень похоже на тождество (1.1.3) для знаменателя алгебры Каца–Муди, но отличается от него.

Чтобы проинтерпретировать (1.3.7) как тождество для знаменателя алгебры Ли, Борчердс определил [3] *обобщенные алгебры Каца–Муди* $\mathfrak{g}(A')$, соответствующие более общим матрицам, чем обобщенные матрицы Картана. Мы будем называть их здесь *обобщенными матрицами Картана–Борчердса*. Разница заключается в том, что обобщенная матрица Картана–Борчердса A' может иметь также неположительные вещественные числа $a_{ij} \leqslant 0$ на диагонали и вне диагонали, но все $a_{ij} \in \mathbb{Z}$, если $a_{ii} = 2$. Определение обобщенной алгебры Каца–Муди $\mathfrak{g}(A')$, соответствующей обобщенной матрице Картана–Борчердса A', аналогично (1.1.1). Нужно заменить последнюю строку в (1.1.1) на

$$(\operatorname{ad} e_i)^{1-a_{ij}} e_j = (\operatorname{ad} f_i)^{1-a_{ij}} f_j = 0, \quad \text{если} \quad i \neq j \quad \text{и} \quad a_{ii} = 2, \tag{1.3.9}$$

и добавить соотношение

$$[e_i, e_j] = [f_i, f_j] = 0, \quad \text{если} \quad a_{ij} = 0. \tag{1.3.10}$$

Борчердс показал, что обобщенные алгебры Каца–Муди имеют свойства, аналогичные свойствам обычных алгебр Каца–Муди. Они также имеют тождество для знаменателя, которое имеет более общую форму, чем (1.1.3), и содержит (1.3.7) как частный случай.

Тождество (1.3.7) является тождеством для знаменателя обобщенной алгебры Каца–Муди $\mathfrak{g}(A')$, где A' – обобщенная матрица Картана–Борчердса, равная матрице Грама $A' = ((\alpha, \alpha'))$, $\alpha, \alpha' \in P'$, где

$$P' = P \cup 24\rho \cup 24(2\rho) \cup \cdots \cup 24(n\rho) \cup \cdots \tag{1.3.11}$$

– последовательность элементов решетки S. Здесь $24(n\rho)$ означает, что при определении матрицы Грама A' элемент $n\rho$ берется двадцать четыре раза. См. детали в [3], [4].

В (1.3.11) множество P', задающее A', называется *множеством простых корней алгебры* $\mathfrak{g}(A')$. Оно делится на множество $P'^{\mathrm{re}} = P$, описанное в (1.3.1), *простых вещественных корней* (они ортогональны фундаментальной камере $\mathscr{M}$ группы Вейля W и имеют положительный квадрат) и совпадает с множеством простых корней (все они вещественны) обычной алгебры Каца–Муди $\mathfrak{g}(A)$, задаваемой обобщенной матрицей Картана A в (1.3.3). Дополнительная последовательность

$$P'^{\mathrm{im}} = 24\rho \cup 24(2\rho) \cup \cdots \cup 24(n\rho) \cup \cdots \tag{1.3.12}$$

в P' (элементы P'^{im} имеют нулевые квадраты) задается коэффициентами Фурье суммы в тождестве (1.3.7). Например, 24 в (1.3.12) определяется 24 в (1.3.5). Вместе P'^{re} и P'^{im} определяют обобщенную матрицу Картана–Борчердса A' и обобщенную алгебру Каца–Муди $\mathfrak{g}(A')$.

Пример Борчердса очень фундаментален и красив. Он имеет важные приложения в математике, например к пространствам модулей поверхностей K3 и поверхностей Энриквеса (см. [8], [13] и [54]), и в физике (например, в теории струн): он дает алгебру Ли физических состояний для вертексной алгебры размерности 26, определяемой гиперболической решеткой S. См. [2], [6], [11].

В [3]–[9], [12] Борчердс нашел много других подобных примеров обобщенных алгебр и супералгебр Каца–Муди, градуированных гиперболическими решетками и связанных с автоморфными формами. Один из них, когда алгебры Ли градуированы унимодулярной гиперболической плоскостью H, очень важен для найденного Бордчердсом решения “глупой гипотезы” (Moonshine Conjecture) о модулярных свойствах представлений спорадической простой конечной группы Монстра. См. об этом [5], [10] и обзоры [27], [70].

1.4. Теория лоренцевых алгебр Каца–Муди. Анализируя пример Борчердса, можно предложить общий класс лоренцевых алгебр Каца–Муди (или автоморфных гиперболических алгебр Каца–Муди), см. [36], [40], [41], [62], [64], [67]. Они задаются приведенными ниже *данными* (1)–(5).

(1) *Гиперболическая решетка* S (т.е. невырожденная целочисленная симметрическая билинейная форма сигнатуры $(n,1)$). Она задает *решетку корней* алгебры Ли, которую мы хотим построить. В терминологии и обозначениях, связанных с решетками, мы следуем [57].

(2) *Группа отражений* $W \subset O(S)$. Она порождена отражениями в некотором множестве корней решетки S. Напомним, что $\alpha \in S$ называется *корнем*, если $\alpha^2 > 0$ и $\alpha^2 \mid 2(\alpha, S)$. Любой корень определяет *отражение* $s_\alpha\colon x \mapsto x - (2(x,\alpha)/\alpha^2)\alpha$, $x \in S$, которое задает автоморфизм решетки S. Группа W является *группой Вейля* для алгебры Ли. Мы предполагаем, что *группа Вейля W нетривиальна.* (Для тривиальной W данное определение следует изменить, см. [40].)

(3) *Множество $P = P(\mathscr{M})$ ортогональных корней к фундаментальной камере $\mathscr{M} \subset \mathscr{L}(S) = V^+(S)/\mathbb{R}_{++}$ группы W* и его разбиение $P = P_{\bar{0}} \cup P_{\bar{1}}$ на подмножества *четных* и *нечетных* корней соответственно. Для данного множества P должно выполняться свойство

$$\mathscr{M} = \{\mathbb{R}_{++}x \in \mathscr{L}(S) \mid (x, P) \leqslant 0\} \tag{1.4.1}$$

(то же самое, что и в (1.3.2)), и множество P должно быть минимально с данным свойством (т.е. каждая грань камеры $\mathscr{M}$ старшей размерности ортогональна в точности одному элементу из P и каждый элемент множества P ортогонален одной из граней старшей размерности камеры $\mathscr{M}$). Дополнительно мы требуем, чтобы элемент 2α являлся корнем решетки S, если $\alpha \in P_{\overline{1}}$ (поэтому $\alpha^2 \mid (\alpha, S)$). Кроме того, множество P должно иметь *вектор Вейля* $\rho \in S \otimes \mathbb{Q}$, т.е. данный элемент $\rho \in S \otimes \mathbb{Q}$ должен удовлетворять условию

$$(\rho, \alpha) = -\alpha^2/2, \qquad \forall \alpha \in P \tag{1.4.2}$$

(это то же самое, что и (1.3.4)).[1] Множества P, $P_{\overline{0}}$ и $P_{\overline{1}}$ являются множествами *простых вещественных корней*, *четных простых вещественных корней* и *нечетных простых вещественных корней* алгебры Ли соответственно. Множество P не пусто, так как группа W нетривиальна. Поэтому, в силу (1.4.2), вектор Вейля ρ не равен нулю.

Основым инвариантом данных (1)–(3) является *обобщенная матрица Картана*

$$A = \left(\frac{2(\alpha, \alpha')}{(\alpha, \alpha)} \right), \qquad \alpha, \alpha' \in P. \tag{1.4.3}$$

Она определяет данные (1)–(3) с точностью до очень прозрачной эквивалентности.

(4) *Голоморфная автоморфная форма* $\Phi(z)$ некоторого веса k ($k \in \mathbb{Z}/2$) на эрмитовой симметрической области типа IV (в классификации Э. Картана), $z \in \Omega(V^+(S)) = \Omega(T)$, относительно некоторой подгруппы $G \subset O^+(T)$ конечного индекса (*группы симметрии* алгебры Ли) расширенной решетки $T = H(m) \oplus S$ (*решетки симметрии* алгебры Ли), где $H(m) = \begin{pmatrix} 0 & -m \\ -m & 0 \end{pmatrix}$, $m \in \mathbb{N}$. (В [40] можно найти более общее определение.) Определение автоморфной формы Φ – то же самое, что и для приведенного в п. 1.3 примера Борчердса. Нужно изменить только следующее: отождествление $\Omega(V^+(S)) = \Omega(T)$ задается формулой

$$z \mapsto \mathbb{C}\omega_z, \qquad z \in \Omega(V^+(S)), \quad \omega_z \in \widetilde{\Omega}(T), \tag{1.4.4}$$

где $\omega_z = (z, z)e_1/2 + e_2/m \oplus z$ и e_1, e_2 – базис решетки $H(m)$ с приведенной выше матрицей, и мы предполагаем, что $\widetilde{\Phi}(\lambda\omega_z) = \lambda^{-k}\Phi(z)$, $\lambda \in \mathbb{C}^*$, на конусе $\widetilde{\Omega}(T)$ имеет свойство: $\widetilde{\Phi}(g\omega) = \chi(g)\widetilde{\Phi}(\omega)$ для любого $g \in G$, где $\chi\colon G \to \mathbb{C}^*$ – характер или мультипликативная система с ядром конечного индекса в G.

Автоморфная форма Φ должна иметь разложение Фурье, вида тождества для знаменателя обобщенной алгебры Каца–Муди с гиперболической обобщенной матрицей

---

[1] Существование вектора Вейля ρ, принадлежащего $S \otimes \mathbb{Q}$, является очень сильным условием на данные (1)–(3). Было бы более правильно называть его *решеточным вектором Вейля*. Мы этого не делаем, чтобы не утяжелять терминологию. Возможно, существует более общая теория лоренцевых алгебр Каца–Муди, в которой алгебра Ли может быть градуирована вырожденной гиперболической решеткой. В этом случае вектор Вейля должен быть линейной функцией на данной вырожденной гиперболической решетке, удовлетворяющей (1.4.2), и, для подходящей градуировки, всегда существует. Легко видеть, что для этого к невырожденной решетке S достаточно добавить одномерное ядро. С другой стороны, если эта теория существует, она, по-видимому, настолько общая, что отпадает вопрос о классификации. Поэтому данная теория для нас не так интересна.

Картана–Борчердса и которое согласовано с предыдущими данными (1)–(3). Оно должно иметь вид

$$\Phi(z)=\sum_{w\in W}\varepsilon(w)\biggl(\exp(-2\pi i(w(\rho),z))-\sum_{a\in S\cap\mathbb{R}_{++}\mathcal{M}}m(a)\exp(-2\pi i(w(\rho+a),z))\biggr),\tag{1.4.5}$$

где $\varepsilon\colon W\to\{\pm1\}$ – квадратичный характер (т.е. гомоморфизм) такой, что $\varepsilon(s_\alpha)=(-1)^{1+\bar i}$, если $\alpha\in P_{\bar i}$ и $\bar i=\bar 0,\bar 1$. Все коэффициенты Фурье $m(a)$ должны быть целыми.

Пусть

$$H=\{g\in O^+(S)\mid\Phi(g(z))=\pm\Phi(z)\}.\tag{1.4.6}$$

Так как Φ – автоморфная форма, эта подгруппа имеет конечный индекс в $O^+(S)$. Имеем $W\subset H$. Пусть

$$\operatorname{Sym}(\mathcal{M})=\{g\in O^+(S)\mid g(\mathcal{M})=\mathcal{M}\}\tag{1.4.7}$$

– подгруппа симметрии фундаментальной камеры $\mathcal{M}$ и

$$\operatorname{Sym}(P_{\bar 1}\subset P)=\{g\in O^+(S)\mid g(P)=P\&g(P_{\bar 1})=P_{\bar 1}\}\tag{1.4.8}$$

– ее подгруппа, оставляющая инвариантным как множество P корней, ортогональных камере $\mathcal{M}$, так и его подмножество $P_{\bar 1}$.

$(*)$ *Мы предполагаем, что существует такая подгруппа* $A\subset\operatorname{Sym}(P_{\bar 1}\subset P)$, *что* $A\subset H$ *и полупрямое произведение* $W\rtimes A$ *имеет конечный индекс в* H. Отсюда следует, что A – подгруппа конечного индекса в $\operatorname{Sym}(P_{\bar 1}\subset P)$ и в $\operatorname{Sym}(\mathcal{M})$ и подгруппа $W\rtimes A$ имеет конечный индекс в $O^+(S)$. В частности, подгруппы $W\rtimes\operatorname{Sym}(P_{\bar 1}\subset P)$ и $W\rtimes\operatorname{Sym}(\mathcal{M})$ имеют конечый индекс в $O(S)$.

Автоморфная форма Φ задает множество *простых мнимых корней* и дает *тождество для знаменателя* алгебры Ли. Используя автоморфные свойства $\Phi(z)$, хорошо *вычислить часть тождества для знаменателя*, *являющуюся бесконечным произведением*

$$\Phi(z)=\exp(-2\pi i(\rho,z))\prod_{\alpha\in\Delta_+}\bigl(1-\exp(-2\pi i(\alpha,z))\bigr)^{\operatorname{mult}(\alpha)},\tag{1.4.9}$$

которая дает кратности $\operatorname{mult}(\alpha)$ корней α алгебры Ли. См. об этом ниже. Известно много случаев, когда это возможно.

Как и в примере Борчердса, уже *данные* (1)–(4) *определяют обобщенную алгебру или супералгебру Каца–Муди*. См. приведенное ниже определение. Но, как было понято, важно предположить (по крайней мере, чтобы иметь результаты конечности) дополнительное условие:

(5) Автоморфная форма Φ на области $\Omega(V^+(S))=\Omega(T)$ должна быть *рефлективна*. Это значит, что дивизор формы Φ является объединением рациональных квадратичных дивизоров, которые ортогональны некоторым корням расширенной решетки T. Здесь для корня $\alpha\in T$ (определение корня решетки T – то же, что и для решетки S) *рациональный квадратичный дивизор*, *ортогональный* α, равен

$$D_\alpha=\{\mathbb{C}\omega\in\Omega(T)\mid(\omega,\alpha)=0\}.\tag{1.4.10}$$

Свойство (5) имеет место для приведенного выше примера Борчердса и в большинстве известных случаев. Кроме того, оно верно в окрестности каспа, где сходится бесконечное произведение (1.4.9). Таким образом, мы хотим, чтобы оно выполнялось глобально.

Ниже мы даем определение обобщенной суперамгебры Каца–Муди $\mathfrak{g}$, соответствующей данным (1)–(4). Она задается последовательностью $P' \to S$ *простых корней*. Эта последовательность делится на последовательность P'^{re} *простых вещественных корней* и последовательность P'^{im} *простых мнимых корней*. Обе последовательности также делятся на подпоследовательности *четных и нечетных корней*, обозначенные знаками $\overline{0}$ и $\overline{1}$ соответственно. Мы полагаем $P'^{\mathrm{re}} = P$, $P'^{\mathrm{re}}_{\overline{i}} = P_{\overline{i}}$, где P, $P_{\overline{i}}$, $\overline{i} = \overline{0}, \overline{1}$, определяются данными (3).

Для любого примитивного $0 \neq a \in S \cap \mathbb{R}_{++}\mathscr{M}$ с $(a,a) = 0$ следует найти числа $\tau(na) \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$, из тождества с формальной переменной t:

$$1 - \sum_{k\in\mathbb{N}} m(ka)t^k = \prod_{n\in\mathbb{N}} (1-t^n)^{\tau(na)}. \tag{1.4.11}$$

Положим

$$\begin{aligned} P'^{\mathrm{im}}_{\overline{0}} &= \{m(a)a \mid a \in S\cap\mathbb{R}_{++}\mathscr{M},\ (a,a)<0 \text{ и } m(a)>0\} \\ &\quad \cup \{\tau(a)a \mid a \in S\cap\mathbb{R}_{++}\mathscr{M},\ (a,a)=0 \text{ и } \tau(a)>0\}; \\ P'^{\mathrm{im}}_{\overline{1}} &= \{-m(a)a \mid a \in S\cap\mathbb{R}_{++}\mathscr{M},\ (a,a)<0 \text{ и } m(a)<0\} \\ &\quad \cup \{-\tau(a)a \mid a \in S\cap\mathbb{R}_{++}\mathscr{M},\ (a,a)=0 \text{ и } \tau(a)<0\}. \end{aligned} \tag{1.4.12}$$

Здесь ka означает, что в данной последовательности элемент a повторяется ровно k раз. Обобщенная супералгебра Каца–Муди $\mathfrak{g}$ является супералгеброй Ли, порожденной h_r, e_r, f_r, где $r \in P'$. Все образующие h_r четны, образующие e_r, f_r четны (соответственно нечетны), если r четно (соответственно нечетно). Они имеют определяющие соотношения 1)–5), приведенные ниже:

1) отображение $r \mapsto h_r$ для $r \in P'$ задает вложение $S\otimes\mathbb{C}$ в $\mathfrak{g}$ как коммутативную подалгебру (она четна);
2) $[h_r, e_{r'}] = (r,r')e_{r'}$ и $[h_r, f_{r'}] = -(r,r')f_{r'}$;
3) $[e_r, f_{r'}] = h_r$, если $r = r'$, и 0, если $r \neq r'$;
4) $(\operatorname{ad} e_r)^{1-2(r,r')/(r,r)}e_{r'} = (\operatorname{ad} f_r)^{1-2(r,r')/(r,r)}f_{r'} = 0$, если $r \neq r'$ и $(r,r) > 0$ (эквивалентно, $r \in P'^{\mathrm{re}}$);
5) если $(r,r') = 0$, то $[e_r, e_{r'}] = [f_r, f_{r'}] = 0$.

См. детали в [3], [5], [36], [40], [69]. Отметим, что для алгебр Ли данное определение эквивалентно определению из п. 1.3, использующему обобщенные матрицы Картана–Борчердса, определяемые последовательностью P'.

Алгебра $\mathfrak{g}$ градуирована решеткой корней S, где образующие h_r, e_r и f_r имеют веса 0, $r \in S$ и $-r \in S$ соответственно. Имеем

$$\mathfrak{g} = \bigoplus_{\alpha\in S} \mathfrak{g}_\alpha = \mathfrak{g}_0 \oplus \Bigg(\bigoplus_{\alpha\in\Delta_+} \mathfrak{g}_\alpha\Bigg) \oplus \Bigg(\bigoplus_{\alpha\in\Delta_+} \mathfrak{g}_{-\alpha}\Bigg), \tag{1.4.13}$$

где $\mathfrak{g}_0 = S \otimes \mathbb{C}$ и Δ – множество корней (т.е. множество элементов $\alpha \in S$ с $\mathfrak{g}_\alpha \neq 0$). Корень α называется положительным ($\alpha \in \Delta_+$), если $(\alpha, \mathcal{M}) \leqslant 0$.

По определению *кратность корня* $\alpha \in \Delta$ равна $\operatorname{mult}(\alpha) = \dim \mathfrak{g}_{\alpha,\overline{0}} - \dim \mathfrak{g}_{\alpha,\overline{1}}$. Кратности $\operatorname{mult}(\alpha)$ корней и числа $m(a)$, определяющие образующие алгебры $\mathfrak{g}$, связаны тождеством для знаменателя (полученным Г. Вейлем, Кацем и Бордчердсом)

$$\begin{aligned}&\exp\left(-2\pi i(\rho, z)\right) \prod_{\alpha\in\Delta_+} \left(1-\exp(-2\pi i(\alpha, z))\right)^{\operatorname{mult}(\alpha)} \\ &\quad= \sum_{w\in W} \varepsilon(w)\biggl(\exp(-2\pi i(w(\rho), z)) - \sum_{a\in S\cap\mathbb{R}_{++}\mathcal{M}} m(a)\exp(-2\pi i(w(\rho+a), z))\biggr),\end{aligned} \tag{1.4.14}$$

которое отождествляет кратности множителей в (1.4.9) с кратностями корней алгебры $\mathfrak{g}$. См. [3], [5], [47], [48], [36], [69].

Вышеприведенные обобщенные супералгебры Каца–Муди $\mathfrak{g}$, *задаваемые данными* (1)–(5), *составляют теорию лоренцевых алгебра Каца–Муде* (*или автоморфных алгебр Каца–Муди*), *которую мы рассматриваем.*

В силу (4), они имеют свойство, аналогичное свойству (II) из п. 1.2 для конечных и аффинных алгебр: их тождество для знаменателя дает автоморфную форму. В лоренцевом случае она является автоморфной формой на эрмитовой симметрической области типа IV.

Что можно сказать по поводу свойства, аналогичного свойству (I) из п. 1.2 для конечных и аффинных алгебр Каца–Муди? Как много имеется данных (1)–(5)? Это – основной вопрос, который рассматривается в данной статье. Ему посвящены следующие параграфы.

1.5. Результаты конечности для гиперболических систем корней (данных (1)–(3)) лоренцевых алгебр Каца–Муди. Для классификации конечных и аффинных алгебр Каца–Муди нужно классифицировать подходящие конечные и аффинные системы корней (другой метод авторам неизвестен). Они классифицируются, и их классификация дает классификацию конечных и аффинных алгебр Ли.

Данные (1)–(5) определяют лоренцевы алгебры Каца–Муди. Множество возможных данных (1)–(3) в данных (1)–(5) можно рассматривать как *гиперболические системы корней*, *соответствующие лоренцевым алгебрам Каца–Муди.* Основной результат заключается в том, что они удовлетворяют очень ограничительным условиям и, в принципе, могут быть классифицированы; это делает теорию лоренцевых алгебр Каца–Муди подобной теориям конечных и аффинных алгебр Каца–Муди. Кроме того, их число в существенном конечно, если $\operatorname{rk} S \geqslant 3$. Это означает, что лоренцевы алгебры Каца–Муди ранга $\operatorname{rk} S \geqslant 3$ *исключительны* подобно исключительным простым алгебрам Ли $\mathbb{E}_6, \mathbb{E}_7, \mathbb{E}_8, \mathbb{F}_4, \mathbb{G}_2$. Более общим образом, в этих результатах можно опустить условие (5), рассматривая множество возможных данных (1)–(3) в данных (1)–(4).

Так как мы предполагаем, что группа Вейля нетривиальна, то $\operatorname{rk} S \geqslant 2$. Если $\operatorname{rk} S = 2$, то P имеет один или два элемента и классификация данных (1)–(3) в данных (1)–(4) очень проста.

Далее мы предполагаем, что $\operatorname{rk} S \geqslant 3$.

В силу условия $(*)$ в (4)

$$W \rtimes \operatorname{Sym}(\mathcal{M}) \ \textit{имеет конечный индекс в}\ O^+(S). \tag{1.5.1}$$

Про подгруппы отражений $W \subset O(S)$, имеющие это свойство, говорят, что они имеют *ограниченный арифметический тип* (мы следуем терминологии из [64; п. 1.4]). Отсюда следует [64; теорема 1.4.3], что W имеет *арифметический тип*, т.е.

$$\{x \in S \otimes \mathbb{R} \mid (x, P) \leqslant 0\} \subset \mathbb{R}_{++}\mathcal{M} \subset \overline{V^+(S)}. \tag{1.5.2}$$

В частности, вектор Вейля $\rho \in \mathbb{R}_{++}\mathcal{M} \subset \overline{V^+(S)}$ и $\rho^2 \leqslant 0$. В силу (1.4.2) вектор ρ ненулевой.

Из (1.5.2) можно вывести, что множество P порождает $S \otimes \mathbb{Q}$. В силу (1.4.2) легко видеть, что вектор Вейля ρ единствен и инвариантен относительно подгруппы $\operatorname{Sym}(P_{\overline{1}} \subset P)$, которая имеет конечный индекс в $\operatorname{Sym}(\mathcal{M})$. То же самое можно получить, используя разложение Фурье (1.4.5). Действительно, $\exp(-2\pi i(\rho, z))$ – одна из гармоник разложения Фурье голоморфной автоморфной формы $\Phi(z)$. Отсюда следует, что $\rho^2 \leqslant 0$. Иначе автоморфная форма $\Phi(z)$ имеет полюсы. Подгруппа конечного индекса $H \subset O^+(S)$ из (1.4.6) сохраняет $\pm\Phi(z)$ и множество гармоник Фурье $-\varepsilon(w)m(a)\exp(-2\pi i(w(\rho + a), z))$, $a \in S \cap \mathbb{R}_{++}\mathcal{M}$, $m(a) \neq 0$, $w \in W$. Для гармоник Фурье $c(x)\exp(-2\pi i(x, z))$ и $c(y)\exp(-2\pi i(y, z))$ скажем, что $x \geqslant y$, если $x - y \in \overline{V^+(S)}$. Подгруппа H сохраняет это упорядочивание и переставляет его минимальные элементы $\varepsilon(w)\exp(-2\pi i(w(\rho), z))$, $w \in W$. Пусть $H_\rho \subset H$ – стационарная подгруппа элемента ρ. Тогда $W \rtimes H_\rho = H$ имеет конечный индекс в $O^+(S)$. Из определения ρ вытекает, что $H_\rho \subset \operatorname{Sym}(\mathcal{M})$. Отсюда следует, что ρ инвариантен относительно подгруппы $H_\rho \subset \operatorname{Sym}(\mathcal{M})$ конечного индекса. Отметим, что в этих рассуждениях дополнительное условие $(*)$ в (4) не использовалось.

Таким образом,

$$\text{орбита } \operatorname{Sym}(\mathcal{M})(\rho) \text{ конечна.} \tag{1.5.3}$$

Здесь $\rho \in S \otimes \mathbb{Q}$ и $\rho \neq 0$. Для некоторого $m \in \mathbb{N}$ элемент $r = m\rho \in S$, $r \neq 0$, и орбита $\operatorname{Sym}(\mathcal{M})(r)$ тоже конечна.

Гиперболическия решетка S, имеющая свойство, аналогичное (1.5.1) и (1.5.3) для некоторой ее подгруппы отражений W, называется рефлективной. Дадим точное определение.

Определение 1.5.1. Гиперболическая решетка M называется *рефлективной*, если существует такая подгруппа отражений $W \subset O(M)$ с фундаментальной камерой $\mathcal{M} \subset V^+(M)/\mathbb{R}_{++}$ и ее группой симметрии $\operatorname{Sym}(\mathcal{M})$, что соответствующее полупрямое произведение $W \rtimes \operatorname{Sym}(\mathcal{M})$ имеет конечный индекс в $O(M)$ (т.е. W имеет *ограниченный арифметический тип*), и существует ненулевой $r \in M$ такой, что орбита $\operatorname{Sym}(\mathcal{M})(r)$ конечна. Данный элемент r называется *обобщенным вектором Вейля* для группы отражений W и ее фундаментальной камеры $\mathcal{M}$.

Таким образом, гиперболическая решетка M рефлективна, если она имеет группу отражений $W \subset O(M)$, имеющую ограниченный арифметический тип и обобщенный вектор Вейля для ее фундаментальной камеры. Группа W имеет *эллиптический*, *параболический или гиперболический тип*, если она имеет соответственно обобщенный вектор Вейля r с $r^2 < 0$, имеет обобщенный вектор Вейля с $r^2 = 0$ и не имеет обобщенного вектора Вейля с $r^2 < 0$, имеет обобщенный вектор Вейля с $r^2 > 0$ и не имеет обобщенного вектора Вейля с $r^2 \leqslant 0$.

Легко видеть, что гиперболическая решетка M рефлективна, если и только если ее полная группа отражений $W(M)$ (она порождена отражениями во всех корнях решетки M) и ее фундаментальная камера имеют обобщенный вектор Вейля. Группа $W(M)$, очевидно, имеет ограниченный арифметический тип, так как она нормальна в $O(M)$.

Таким образом, имеем

Предложение 1.5.2. *Предположим, что* $\operatorname{rk} S \geqslant 3$. *Тогда данные* (1)–(3) *из данных* (1)–(4) *удовлетворяют условиям: вектор Вейля* $\rho \in S\otimes\mathbb{Q}$ *не равен нулю и* $\rho^2 \leqslant 0$;

$$W \rtimes \operatorname{Sym}(\mathscr{M}) \text{ имеет конечный индекс в } O(S) \text{ и } \operatorname{Sym}(\mathscr{M})(\rho) \text{ конечно.} \tag{1.5.4}$$

В частности, гиперболическая решетка S *рефлективна, группа Вейля* W *имеет ограниченный арифметический тип, вектор Вейля* ρ *является обобщенным вектором Вейля для* W *и* $\mathscr{M}$,[2]

$$\operatorname{Sym}(P_{\overline{1}} \subset P) \text{ имеет конечный индекс в } \operatorname{Sym}(\mathscr{M}) \tag{1.5.5}$$

и

$$\operatorname{Sym}(P_{\overline{1}} \subset P)(\rho) = \rho. \tag{1.5.6}$$

Имеет место следующий общий ключевой результат, из которого, в частности, вытекает конечность множества решеток корней в (1).

Теорема 1.5.3. *Множество рефлективных гиперболических решеток* M *ранга* $\operatorname{rk} M \geqslant 3$ *конечно (с точностью до изоморфизма), если рассматривать решетки с точностью до умножения их форм на положительные рациональные числа.*

В частности, множество гиперболических решеток S *ранга* $\operatorname{rk} S \geqslant 3$ *в* (1) *из данных* (1)–(4) *конечно, если рассматривать решетки с точностью до умножения их форм на положительные рациональные числа.*

Если ранг $\geqslant 3$ фиксирован, доказательство для эллиптического случая см. в [59], [60]; для параболического случая – в [64], [68]; для гиперболического случая – в [66], [68]. Ограниченность ранга следует из результатов [60], [63], [71].

Для фиксированного ранга доказательство теоремы 1.5.3 вытекает из следующей леммы.

---

[2] Отметим, что все приведенные выше утверждения имеют место без дополнительного условия $(*)$ в (4) и, при желании, это дополнительное условие можно опустить, рассматривая более общий класс лоренцевых алгебр Каца–Муди.

Лемма 1.5.4 (об узкой части многогранника $\mathcal{M}$). *Пусть M – рефлективная гиперболическая решетка ранга $n = \operatorname{rk} M \geqslant 3$ с группой отражений W ограниченного арифметического типа и с фундаментальной камерой $\mathcal{M}$, имеющей обобщенный вектор Вейля. Пусть $P(\mathcal{M})$ – множество ортогональных векторов к $\mathcal{M}$, направленных наружу от $\mathcal{M}$.*

Тогда существуют $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ из $P(\mathcal{M})$ со свойствами:

(a) *$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ порождают $M \otimes \mathbb{Q}$;*

(b) $\dfrac{4(\alpha_i, \alpha_j)^2}{\alpha_i^2 \alpha_j^2} < 100^2$ *для любых $1 \leqslant i, j \leqslant n$;*

(c) *граф Грама векторов $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ связен, т.е. нельзя разделить множество $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ на два непустых ортогональных друг другу подмножества.*

Отметим, что для корней $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ числа $\dfrac{4(\alpha_i, \alpha_j)^2}{\alpha_i^2 \alpha_j^2}$ целые. Доказательство леммы 1.5.4 основано на изучении геометрии выпуклых многогранников $\mathcal{M}$. В действительности, лемма 1.5.4 верна для всех выпуклых многогранников со свойствами, аналогичными свойствам $\mathcal{M}$. Основное свойство многогранника $\mathcal{M}$ – то, что он локально конечен и имеет *почти конечный объем*. Здесь "почти конечный объем" означает следующее. Для эллиптического случая $\mathcal{M}$ – конечный многогранник конечного объема. Для параболического случая $\mathcal{M}$ конечен и имеет конечный объем в любом угле с вершиной $\mathbb{R}_{++}r$ над компактным подмножеством орисферы (аналогичное свойство имеет место для примера Борчердса из п. 1.3). Для гиперболического случая $\mathcal{M}$ конечен и имеет конечный объем в любом ортогональном цилиндре над компактным подмножеством гиперплоскости, ортогональной r. Здесь r – обобщенный вектор Вейля для $\mathcal{M}$. Например, лемма 1.5.4 верна для любого конечного выпуклого многогранника конечного объема в гиперболическом пространстве размерности $n - 1 \geqslant 2$. Для параболического и гиперболического случаев необходимо также добавить некоторые условия периодичности многогранника $\mathcal{M}$. Доказательство леммы 1.5.4 нетривиально и наиболее сложно для гиперболического случая.

Теорема 1.5.3 требует существования только обобщенного вектора Вейля r. Если существует вектор Вейля ρ (удовлетворяющий (1.4.2)), можно получить результаты конечности также для данных (1)–(3) из (1)–(4). Два набора данных (1)–(3) называются изоморфными, если они могут быть отождествлены изоморфизмом гиперболических решеток в (1). Мы также допускаем умножение форм решеток S в (1) на положительные рациональные числа. Мы знаем, что данные (1)–(3) из данных (1)–(4) удовлетворяют условиям (1.5.4)–(1.5.6) предложения 1.5.2. *Можно рассматривать данные* (1)–(3), *удовлетворяющие дополнительным условиям* (1.5.4)–(1.5.6), *как гиперболические системы корней, подходящие для теории лоренцевых алгебр Каца–Муди.* Из теоремы 1.5.3 и леммы 1.5.4 можно вывести следующую теорему.

Теорема 1.5.5. *Предположим, что $\operatorname{rk} S \geqslant 3$.*

Тогда множество данных (1)–(3), *удовлетворяющих условиям* (1.5.4)–(1.5.6), *пусто, если $\rho^2 > 0$ (т.е. для гиперболического случая); конечно, если $\rho^2 < 0$ (т.е. для эллиптического случая). Оно также конечно для $\rho^2 = 0$ (т.е. в параболическом случае), если зафиксировать константу $C > 0$ и дополнительно* *потребовать, что* $[O^+(S)_\rho : \mathrm{Sym}(P_{\overline{1}} \subset P)] < C$, *где* $O^+(S)_\rho$ *– стационарная подгруппа элемента* ρ *в* $O^+(S)$.

См. доказательство в [64; теорема 1.3.3]. Отметим, что группа $O^+(S)_\rho$ для $\rho^2 = 0$ является $(\mathrm{rk}\, S - 2)$-мерной кристаллографической группой, действующей в евклидовом пространстве, связанном с полуположительной решеткой $(\rho)^\perp_S$. В частности, она содержит подгруппу $\mathbb{Z}^{\mathrm{rk}\, S - 2}$ параллельных переносов конечного индекса. Если константа $C \to +\infty$, число данных в параболическом случае стремится к бесконечности, см. [64; пример 1.3.4]. Существование вектора Вейля ρ означает геометрически, что каждая грань старшей размерности многогранника $\mathscr{M}$, ортогональная элементу $\alpha \in P$, касается сферы с центром $\mathbb{R}_{++}\rho$ радиуса, зависящего от α^2, где α^2 ограничено константой, зависящей от решетки S. Это делает многогранники $\mathscr{M}$ очень специальными и влечет конечность их числа.

Для примера докажем утверждение теоремы 1.5.5 для эллиптического случая $(\rho^2 < 0)$ при фиксированном ранге $n = \mathrm{rk}\, S \geqslant 3$.

По теореме 1.5.3 множество решеток корней S конечно. Фиксируем одну из них.

Пусть α – корень решетки S. Пусть $\alpha = m\alpha_0$, где α_0 – примитивный корень решетки S и $m \in \mathbb{N}$. Так как α – корень, то $(\frac{2\alpha}{\alpha^2}, S) \in \mathbb{Z}$. Таким образом, $\frac{\alpha_0}{m\alpha_0^2} \in 2^{-1}S^*$, где $S^* = \mathrm{Hom}(S, \mathbb{Z})$ – двойственная решетка. Отсюда следует, что $m\alpha_0^2 \mid 2\lambda$, где λ – экспонента (максимальный порядок элементов) конечной абелевой группы S^*/S. Таким образом, m, α_0^2 и $\alpha^2 = m^2\alpha_0^2$ ограничены константой, зависящей от S.

По лемме 1.5.4 найдутся корни $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ из P, удовлетворяющие условиям (a) и (b) леммы. Числа $\frac{4(\alpha_i, \alpha_j)^2}{\alpha_i^2\alpha_j^2}$ целые и не превосходят 100^2. Так как α_i^2 ограничены, отсюда следует конечность множества возможных матриц Грама $((\alpha_i, \alpha_j))$, $1 \leqslant i, j \leqslant n$. Зафиксируем одну из них.

Так как $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ порождают $S \otimes \mathbb{Q}$ и решетка S невырождена, существует единственный $\rho \in S \otimes \mathbb{Q}$ такой, что $(\rho, \alpha_i) = -\alpha_i^2/2$, $i = 1, \dots, n$. Он является вектором Вейля ρ для P.

Все элементы $\alpha \in P$ удовлетворяют условию $(\rho, \alpha) = -\alpha^2/2$, где $0 < \alpha^2 < K$ для некоторой константы K, зависящей от S. Таким образом, P – подмножество множества элементов $a \in S$, удовлетворяющих условиям $-K/2 < (\rho, a) < 0$ и $0 < a^2 < K$. Если $\rho^2 < 0$, последнее множество конечно, так как решетка S гиперболична (имеет ровно один отрицательный квадрат). Отсюда следует, что множество P конечно и для него и его подмножества $P_{\overline{1}}$ есть только конечное число возможностей. Это доказывает теорему 1.5.5 для эллиптического случая.

Ее доказательство в параболическом случае (когда $\rho^2 = 0$ и $\rho \neq 0$) требует дополнительных простых рассуждений с кристаллографической группой $O(S)_\rho$ и ее действием на множестве P, которое в этом случае бесконечно. Группа $\mathrm{Sym}(P_{\overline{1}} \subset P)$ имеет конечный индекс в $O(S)_\rho$ и конечное число орбит в P.

Формально в данном доказательстве мы не использовали условие (c) леммы 1.5.4, но оно очень важно для доказательства теоремы 1.5.3, которая тоже использовалась. Как мы видим, в данном доказательстве важна не только теорема 1.5.3, но и метод (лемма 1.5.4) ее доказательства.

Приведем пример классификации данных (1)–(3), удовлетворяющих условиям (1.5.4)–(1.5.6).

ТЕОРЕМА 1.5.6. *Рассмотрим все данные* (1)–(3), *удовлетворяющие условиям* (1.5.4)–(1.5.6) *и такие, что дополнительно* $\operatorname{rk} S = 3$, *все корни* $\alpha \in P$ *имеют равные квадраты* α^2 (*эквивалентно, обобщенная матрица Картана* (1.4.3) *множества* P *симметрична*) *и вектор Вейля* ρ *имеет* $\rho^2 < 0$ (*эллиптический тип*).

Тогда обобщенная матрица Картана множества P – *одна из следующих* 16 *симметрических матриц* $A_{i,j}$ *и* B_j:

$$A_{1,0} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -2 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix}, \quad A_{1,I} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ -2 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad A_{1,II} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -2 \\ -2 & 2 & -2 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix},$$

$$A_{1,III} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -6 & -6 & -2 \\ -2 & 2 & 0 & -6 & -7 \\ -6 & 0 & 2 & -2 & -6 \\ -6 & -6 & -2 & 2 & 0 \\ -2 & -7 & -6 & 0 & 2 \end{pmatrix}; \quad A_{2,0} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -2 \\ -2 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad A_{2,I} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -4 & 0 \\ -2 & 2 & 0 & -4 \\ -4 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & -4 & -2 & 2 \end{pmatrix},$$

$$A_{2,II} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -6 & -2 \\ -2 & 2 & -2 & -6 \\ -6 & -2 & 2 & -2 \\ -2 & -6 & -2 & 2 \end{pmatrix}, \quad A_{2,III} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -8 & -16 & -18 & -14 & -8 & 0 \\ -2 & 2 & 0 & -8 & -14 & -18 & -16 & -8 \\ -8 & 0 & 2 & -2 & -8 & -16 & -18 & -14 \\ -16 & -8 & -2 & 2 & 0 & -8 & -14 & -18 \\ -18 & -14 & -8 & 0 & 2 & -2 & -8 & -16 \\ -14 & -18 & -16 & -8 & -2 & 2 & 0 & -8 \\ -8 & -16 & -18 & -14 & -8 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & -8 & -14 & -18 & -16 & -8 & -2 & 2 \end{pmatrix};$$

$$A_{3,0} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -2 \\ -2 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad A_{3,I} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -5 & -1 \\ -2 & 2 & -1 & -5 \\ -5 & -1 & 2 & -2 \\ -1 & -5 & -2 & 2 \end{pmatrix},$$

$$A_{3,II} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -10 & -14 & -10 & -2 \\ -2 & 2 & -2 & -10 & -14 & -10 \\ -10 & -2 & 2 & -2 & -10 & -14 \\ -14 & -10 & -2 & 2 & -2 & -10 \\ -10 & -14 & -10 & -2 & 2 & -2 \\ -2 & -10 & -14 & -10 & -2 & 2 \end{pmatrix},$$

$$A_{3,III} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -11 & -25 & -37 & -47 & -50 & -46 & -37 & -23 & -11 & -1 \\ -2 & 2 & -1 & -11 & -23 & -37 & -46 & -50 & -47 & -37 & -25 & -11 \\ -11 & -1 & 2 & -2 & -11 & -25 & -37 & -47 & -50 & -46 & -37 & -23 \\ -25 & -11 & -2 & 2 & -1 & -11 & -23 & -37 & -46 & -50 & -47 & -37 \\ -37 & -23 & -11 & -1 & 2 & -2 & -11 & -25 & -37 & -47 & -50 & -46 \\ -47 & -37 & -25 & -11 & -2 & 2 & -1 & -11 & -23 & -37 & -46 & -50 \\ -50 & -46 & -37 & -23 & -11 & -1 & 2 & -2 & -11 & -25 & -37 & -47 \\ -46 & -50 & -47 & -37 & -25 & -11 & -2 & 2 & -1 & -11 & -23 & -37 \\ -37 & -47 & -50 & -46 & -37 & -23 & -11 & -1 & 2 & -2 & -11 & -25 \\ -23 & -37 & -46 & -50 & -47 & -37 & -25 & -11 & -2 & 2 & -1 & -11 \\ -11 & -25 & -37 & -47 & -50 & -46 & -37 & -23 & -11 & -1 & 2 & -2 \\ -1 & -11 & -23 & -37 & -46 & -50 & -47 & -37 & -25 & -11 & -2 & 2 \end{pmatrix};$$

$$B_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & -3 \\ -3 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & -3 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad B_2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -4 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & -4 \\ -4 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & -4 & -1 & 2 \end{pmatrix},$$

$$B_3 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -4 & -6 & -4 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -4 & -6 & -4 \\ -4 & 0 & 2 & 0 & -4 & -6 \\ -6 & -4 & 0 & 2 & 0 & -4 \\ -4 & -6 & -4 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -4 & -6 & -4 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad B_4 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -7 & -10 & -7 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & -7 & -10 & -7 \\ -7 & -1 & 2 & -1 & -7 & -10 \\ -10 & -7 & -1 & 2 & -1 & -7 \\ -7 & -10 & -7 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & -7 & -10 & -7 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Во всех этих случаях фундаментальная камера $\mathscr{M}$ является замкнутым многоугольником на гиперболической плоскости с углами соответственно

$A_{1,0}$: $\pi/2, 0, \pi/3$; $A_{1,I}$: $0, \pi/3, \pi/3$; $A_{1,II}$: $0, 0, 0$; $A_{1,III}$: $0, \pi/2, 0, \pi/2, 0$;
$A_{2,0}$: $0, \pi/2, 0$; $A_{2,I}$: $0, \pi/2, 0, \pi/2$; $A_{2,II}$: $0, 0, 0, 0$;
$A_{2,III}$: $0, \pi/2, 0, \pi/2, 0, \pi/2, 0, \pi/2$;
$A_{3,0}$: $0, \pi/3, 0$; $A_{3,I}$: $0, \pi/3, 0, \pi/3$; $A_{3,II}$: $0, 0, 0, 0, 0, 0$;
$A_{3,III}$: $0, \pi/3, 0, \pi/3, 0, \pi/3, 0, \pi/3, 0, \pi/3, 0, \pi/3$;
B_1: $\pi/2, \pi/3, \pi/2, \pi/3$; B_2: $\pi/3, \pi/3, \pi/3, \pi/3$;
B_3: $\pi/2, \pi/2, \pi/2, \pi/2, \pi/2, \pi/2, \pi/2, \pi/2$; B_4: $\pi/3, \pi/3, \pi/3, \pi/3, \pi/3, \pi/3$.

Все эти многоугольники описаны вокруг окружности с центром $\mathbb{R}_{++}\rho$, где ρ – вектор Вейля. Первые 12 матриц $A_{i,j}$ дают некомпактные многоугольники (они имеют хотя бы один нулевой угол). Последние четыре матрицы B_i дают компактные многоугольники.

См. доказательство в [40; теоремы 1.2.1 и 1.3.1]. Доказательство основано на лемме 1.5.4 и использует компьютерные вычисления. Эти вычисления следуют доказательству теоремы 1.5.5, набросок которого был только что приведен.

Теорема 1.5.6 дает классификацию обобщенных матриц Картана возможных множеств P, но отсюда можно получить и описание возможных данных (1)–(3). Пусть $A = (a_{ij})$, $1 \leqslant i, j \leqslant m$, – одна из матриц теоремы 1.5.6. Рассмотрим свободный $\mathbb{Z}$-модуль $\widetilde{M} = \bigoplus_{i=1}^{m} \mathbb{Z}\widetilde{\alpha}_i$ с симметрической билинейной формой $((\widetilde{\alpha}_i, \widetilde{\alpha}_j)) = A$. Матрица A имеет ранг три, и $\widetilde{M}$ по модулю ядра этой формы определяет гиперболическую решетку M ранга три. Она порождена образами α_i элементов $\widetilde{\alpha}_i$. В качестве данных (1) можно взять любую целочисленную надрешетку $M \subset S$ конечного индекса. Их число конечно, так как $S \subset M^*$. Множество P задается всеми элементами α_i. Так как $\alpha_i^2 = 2$, все элементы α_i являются корнями решетки S. Отражения в корнях P порождают группу отражений $W \subset O(S)$. Ее фундаментальная камера равна $\mathscr{M} = \{0 \neq x \in S \otimes \mathbb{R} \mid (x, P) \leqslant 0\}/\mathbb{R}_{++} \subset \overline{\mathscr{L}(S)} = \overline{V^+(S)/\mathbb{R}_{++}}$. В качестве подмножества $P_{\overline{1}} \subset P$ можно взять любое число корней $\alpha_i \in P$, удовлетворяющих условию $\alpha_i^2 = 2 \mid (\alpha_i, S)$. Можно проверить (это зависит только от обобщенной матрицы Картана A), что все эти данные удовлетворяют условиям (1)–(3) и условиям (1.5.4)–(1.5.6).

Почти для всех матриц $A_{i,j}$ теоремы 1.5.6 и соответствующих данных (1)–(3) можно построить дополнительные данные (4), удовлетворяющие (5). См. [36], [37], [39], [41]. Почти все эти примеры будут приведены в п. 2.6.

Замечание 1.5.7. Формально, для рассматриваемой нами теории лоренцевых алгебр Каца–Муди, задаваемых данными (1)–(5), достаточно рассматривать лишь рефлективные гиперболические решетки S с вектором Вейля ρ. В частности, для ранга $\operatorname{rk} S \geqslant 3$ всегда $\rho^2 \leqslant 0$, и все такие решетки S рефлективны эллиптического или параболическиго типа.

Важность и необходимость рассмотрения произвольных рефлективных гиперболических решеток, с произвольным обобщенным вектором Вейля (в частности, имеющим квадрат любого знака), продиктована несколькими причинами.

Во-первых, результаты конечности имеют место и для общих рефлективных гиперболических решеток. При общей классификации рефлективных гиперболических решеток с вектором Вейля следует вначале найти максимальные рефлективные гиперболические решетки с обобщенным вектором Вейля, а потом найти их подрешетки конечного индекса с вектором Вейля. На практике рассмотрение рефлективных гиперболических решеток с вектором Вейля и с обобщенным вектором Вейля невозможно разделить.

Во-вторых, по-видимому, существует более общий класс алгебр Ли (аналогичный лоренцевым алгебрам Каца–Муди, которые мы здесь рассматриваем), для которого необходимо рассматривать рефлективные гиперболические решетки и тождества, аналогичные тождествам (1.4.14), с обобщенным вектором Вейля ρ, имеющим квадрат любого знака. В § 2 мы приведем и классифицируем множество таких тождеств. Очень немногие из них окажутся связанными с вектором Вейля ρ. Ситуация здесь может оказаться аналогичной тождествам Макдональда, связь которых с аффинными алгебрами Ли была установлена после их открытия. Результаты из [26] и [50] дают такую надежду.

С нашей точки зрения все рефлективные гиперболические решетки и тождества, аналогичные тождествам (1.4.14), с обобщенным вектором Вейля ρ должны быть интересны и важны для той или иной теории алгебр Ли, аналогичной теории лоренцевых алгебр Каца–Муди, которую мы здесь рассматриваем. Понимание их важности с точки зрения тех или иных классов алгебр Ли является очень интересной проблемой.

1.6. Гипотезы и результаты конечности для данных (4), (5) лоренцевых алгебр Каца–Муди. Здесь мы следуем [40] и [65].

Мы ожидаем, что данные (4), (5) для лоренцевых алгебр Каца–Муди также удовлетворяют очень ограничительным условиям, но здесь мы не имеем столь сильных результатов, как для гиперболических систем корней (данных (1)–(3)).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.6.1. Решетка Q с двумя отрицательными квадратами называется *рефлективной*, если ее эрмитова симметрическая область $\Omega(Q)$ имеет мероморфную (необязательно голоморфную) автоморфную форму Φ ненулевого веса относительно подгруппы $G \subset O^+(Q)$ конечного индекса такую, что ее дивизор является объединением рациональных квадратичных дивизоров, ортогональных некоторым корням решетки Q. Данная автоморфная форма Φ также называется *рефлективной* для Q. (При дальнейших рассмотрениях мы предполагаем, что автоморфная форма Φ имеет ненулевой вес, но, возможно, это условие может быть ослаблено условием, что Φ не постоянна.)

Очевидно, рефлективность решетки Q не меняется при умножении формы решетки Q на рациональные положительные числа.

Мы предложили в [40; гипотеза 2.2.1] и [65] следующую гипотезу.

ГИПОТЕЗА 1.6.2. *Множество рефлективных решеток Q с двумя отрицательными квадратами и ранга $\mathrm{rk}\, Q \geqslant 5$ конечно с точностью до умножения формы решеток Q на положительные рациональные числа.*

Мы ожидаем утверждение гипотезы 1.6.2 благодаря *принципу Кёхера* (например, см. [1]): *Любая непостоянная мероморфная автоморфная форма на эрмитовой* *симметрической области* Ω *должна иметь нетривиальный дивизор в* Ω, *если* $\dim\Omega-\dim\Omega_\infty\geqslant 2$. Здесь Ω_∞ – множество точек на бесконечности Ω, которое добавляется, чтобы получить компактификацию Сатаке $G\setminus\Omega\subset G\setminus(\Omega\cup\Omega_\infty)$ арифметического фактора $G\setminus\Omega$.

Для решетки Q с двумя отрицательными квадратами и $G\subset O(Q)$ конечного индекса $\dim\Omega(Q)=\operatorname{rk}Q-2$ и $\dim\Omega(Q)_\infty=s(Q)-1$, где $s(Q)$ – ранг максимальной изотропной подрешетки решетки Q. Имеем $0\leqslant s(Q)\leqslant 2$. В частности, принцип Кёхера верен для $\Omega(Q)$, если либо $\operatorname{rk}Q\geqslant 5$, либо $\operatorname{rk}Q\geqslant 3+s(Q)$.

Мы применяем принцип Кёхера к ограничениям $\Phi|\Omega(Q_1)$ рефлективной автоморфной формы Φ на все подобласти $\Omega(Q_1)\subset\Omega(Q)$, где $Q_1\subset Q$ – подрешетка с двумя отрицательными квадратами решетки Q и $\operatorname{rk}Q_1\geqslant 3+s(Q_1)$. Здесь $\Phi|\Omega(Q_1)$ – автоморфная форма на эрмитовой симметрической области $\Omega(Q_1)$ того же веса, что и вес Φ, и она не является константой, если вес ненулевой. Таким образом, получаем

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.6.3. *Предположим, что* Q *– рефлективная решетка с двумя отрицательными квадратами. Тогда*

$$\Omega(Q_1)\cap\biggl(\bigcup_{\text{корень }\alpha\in Q}\Omega(Q)_\alpha\biggr)\neq\varnothing \tag{1.6.1}$$

для любой подрешетки $Q_1\subset Q$ *такой, что* Q_1 *имеет два отрицательных квадрата и* $\operatorname{rk}Q_1\geqslant 3+s(Q_1)$. *Здесь* $\Omega(Q)_\alpha$ *– рациональный квадратичный дивизор, ортогональный корню* $\alpha\in Q$.

Приведем пример из [65], показывающий, что это условие является очень сильным.

Любой элемент α решетки Q с квадратом $\alpha^2=2$ является корнем. Если в определении рефлективной решетки Q и рефлективной автоморфной формы Φ рассматривать только корни с квадратом 2, то получится определение 2-*рефлективной решетки* Q и 2-*рефлективной автоморфной формы* Φ. Это специальный случай рефлективных решеток и рефлективных автоморфных форм.

Рассмотрим решетки

$$T_n=H\oplus H\oplus E_8\oplus E_8\oplus\langle 2n\rangle, \tag{1.6.2}$$

$n\in\mathbb{N}$. Здесь E_8 – четная унимодулярная положительно определенная решетка ранга 8. Через $\langle A\rangle$ обозначается решетка с матрицей A в некотором базисе. Мы хотим показать, что решетки $T=T_n$ не 2-рефлективны для большого n. Этот пример интересен тем, что арифметические факторы $G\setminus\Omega(T)$ по подгруппам $G\subset O^+(T_n)$ конечного индекса дают модули поверхностей K3 степени $2n$ и

$$\mathrm{Discr}=\bigcup_{\alpha\in T_n\text{ с }\alpha^2=2}\Omega(T_n)_\alpha \tag{1.6.3}$$

– дискриминант модулей. Точки Discr дают поверхности K3 с особенностями. Таким образом, мы хотим показать, что дискриминант модулей поверхностей K3 не может быть задан дивизором автоморфной формы ненулевого веса, если степень поверхностей K3 достаточно велика.

Рассмотрим четную унимодулярную решетку $L = 3H \oplus E_8 \oplus E_8$. Рассмотрим примитивный элемент $h \in L$ с $h^2 = -2n$. Используя стандартные результаты о неопределенных решетках и технику дискриминантных форм (см. [57]), можно доказать, что ортогональное дополнение $h^\perp$ к элементу h в L изоморфно решетке T_n.

Воспользуемся следующей общей конструкцией. Предположим, что $K \subset L$ – примитивная подрешетка с двумя отрицательными квадратами, $\operatorname{rk} K \geqslant 3 + s(K)$, где $s(K)$ – ранг максимальной изотропной подрешетки решетки K, и решетка K не имеет элементов с квадратом 2. Пусть $S = K^\perp$ – ортогональное дополнение к K в L. Решетка S гиперболична, так как L имеет ровно три отрицательных квадрата.

Рассмотрим множество $\Delta \subset S^*$ элементов $\delta_1 \in \Delta$ со следующими свойствами: если $\delta_1 \in \Delta$, то (i) $\delta_1^2 > 0$; (ii) существует $\delta_2 \in K^*$ такой, что либо $\delta_2 = 0$, либо $\delta_2^2 > 0$ и $\delta_1 + \delta_2 \in L$; (iii) $\delta_1^2 + \delta_2^2 = 2$. В частности, $0 < \delta_1^2 \leqslant 2$ и $0 \leqslant \delta_2^2 < 2$.

Имеет место простая

Лемма 1.6.4. *Пусть элемент $h \in S$ примитивен, $h^2 = -2n$ и решетка $h^\perp \simeq T_n$ является 2-рефлективной. Тогда существует $\delta \in \Delta \subset S^*$ такой, что $h \in \delta^\perp$.*

Доказательство. Предположим, что решетка $T_n = h^\perp$ рефлективна. Применим к $Q = T_n$, $Q_1 = K$ и корням с квадратом два предложение 1.6.3. Получаем, что существует $\delta \in h^\perp$ такой, что $\delta^2 = 2$ и $\Omega(h^\perp)_\delta \cap \Omega(K) \neq \varnothing$. Имеем $\delta = \delta_1 + \delta_2$, где $\delta_1 \in S^*$ и $\delta_2 \in K^*$. Отсюда следует, что $\delta_1^2 + \delta_2^2 = 2$. Так как $(h, \delta) = 0$ и $h \in S$, отсюда следует, что $(h, \delta_1) = 0$. Решетка S гиперболична и $h^2 < 0$. Отсюда следует, что либо $\delta_1^2 > 0$, либо $\delta_1 = 0$. Последний случай невозможен, так как тогда $\delta = \delta_2 \in K$ и $\delta^2 = 2$. Но мы предположили, что K не имеет элементов с квадратом 2. Таким образом, $\delta_1^2 > 0$. Если $\delta_2 = 0$, то $\delta_1 \in \Delta$ и $(h, \delta_1) = 0$, что и требуется. Пусть $\delta_2 \neq 0$. Пусть $\mathbb{C}\omega \in \Omega(h^\perp)_\delta \cap \Omega(K)$. Тогда $\omega \in K \otimes \mathbb{C}$, $(\omega, \omega) = 0$, $(\omega, \overline{\omega}) < 0$ и $(\omega, \delta_2) = 0$. Записывая $\omega = a + bi$, где $a, b \in K \otimes \mathbb{R}$, получаем $a^2 = b^2 < 0$ и $(a, b) = (a, \delta_2) = (b, \delta_2) = 0$. Так как решетка K имеет в точности два отрицательных квадрата, отсюда следует, что $\delta_2^2 > 0$. Это доказывает утверждение.

Можно проинтерпретировать утверждение леммы 1.6.4 геометрически следующим образом. Пусть $\mathscr{L}(S) = V^+(S)/\mathbb{R}_{++}$ – гиперболическое пространство, связанное с гиперболической решеткой S. Каждый элемент $\delta \in \Delta$ определяет гиперплоскость $\mathscr{H}_\delta \subset \mathscr{L}(S)$, ортогональную элементу δ. Элемент $\delta \in \Delta$ имеет $\delta^2 < 2$ и $m\delta \in S$, где m – экспонента группы S^*/S. Отсюда следует, что *множество гиперплоскостей $\mathscr{H}_\delta$, $\delta \in \Delta$, локально конечно в $\mathscr{L}(S)$*. Решетка $h^\perp \simeq T_n$ не рефлективна, если точка $\mathbb{R}_{++}h \in \mathscr{L}(S)$ не принадлежит этому локально конечному множеству гиперплоскостей (нужно заменить h на $-h$, если необходимо). Множество точек $\mathbb{R}_{++}h \in \mathscr{L}(S)$, $h \in S$, всюду плотно в гиперболическом пространстве $\mathscr{L}(S)$. Имеется множество таких точек, которые не принадлежат локально конечному множеству гиперплоскостей $\mathscr{H}_\delta$, $\delta \in \Delta$, и определяют нерефлективные решетки $h^\perp \simeq T_n$. Например, отсюда следует, что существует бесконечная последовательность натуральных чисел n, для которых решетка T_n не 2-рефлективна. Именно это и было продемонстрировано в [65].

Возьмем конкретную решетку $K = H(2) \oplus H(2) \oplus \langle 4 \rangle$, где $M(k)$ – решетка, получаемая из решетки M умножением формы решетки M на $k \in \mathbb{Q}$. Тогда $S = \langle -4 \rangle \oplus D_8 \oplus D_8$, где D_8 – решетка корней для системы корней $\mathbb{D}_8$. Таким образом, решетка S – это множество целочисленных векторов $h = (x, u_1, \dots, u_8, v_1, \dots, v_8)$ таких, что $u_1 + \dots + u_8 \equiv 0 \mod 2$ и $v_1 + \dots + v_8 \equiv 0 \mod 2$. Форма задается формулой $-4xx' + u_1u_1' + \dots + u_8u_8' + v_1v_1' + \dots + v_8v_8'$.

Рассмотрим $h_0 = (1, 0, 0, \dots, 0)$ и $\Delta_0 = \{\delta \in \Delta \mid (\delta, h_0) = 0\}$ (геометрически это множество гиперплоскостей H_δ, $\delta \in \Delta$, которые содержат $\mathbb{R}_{++}h_0$). Рассмотрим множество примитивных элементов $h \in S$ таких, что $h^2 < 0, \mathbb{R}_{++}h \notin H_\delta$, если $\delta \in \Delta_0$, и расстояние между точками $\mathbb{R}_{++}h_0$ и $\mathbb{R}_{++}h$ гиперболического пространства $\mathscr{L}(S)$ настолько мало, что точка $\mathbb{R}_{++}h$ не принадлежит другим гиперплоскостям H_δ, $\delta \in \Delta$. По лемме 1.6.4 для таких h решетка $T_n = h^\perp$ не является 2-рефлективной. В результате получаем следующую теорему.

Теорема 1.6.5. *Рассмотрим целые числа y вида*

$$y = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_4^2 + y_5^2 + y_6^2 + y_7^2 + y_8^2, \tag{1.6.4}$$

где все y_i целые,

$$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 + y_6 + y_7 + y_8 \equiv 0 \mod 2$$

и

$$0 < y_1 < y_2 < y_3 < y_4 < y_5 < y_6 < y_7 < y_8.$$

Пусть u и v – два числа вида (1.6.4) *для соответствующих векторов* $(u_1, \dots, u_8)$, $(v_1, \dots, v_8)$, *вектор* $(x, u_1, \dots, u_8, v_1, \dots, v_8)$ *примитивен* (*достаточно предположить, что он примитивен в подрешетке* $u_1 + \dots + u_8 \equiv v_1 + \dots + v_8 \equiv 0 \mod 2$) *и* $x^2 > (9/4)(u + v)$. *Тогда для*

$$2n = 4x^2 - u - v \tag{1.6.5}$$

решетка T_n не 2-рефлективна.

Любое достаточно большое четное целое число $y > N$ можно представить в виде (1.6.4) для некоторого примитивного вектора $(y_1, \dots, y_8)$. Отсюда следует, что любое достаточно большое четное целое $2n$ может быть представлено в форме (1.6.5), и решетка T_n не 2-рефлективна. Более точно, элементарные оценки показывают, что это верно для

$$n > \left(\frac{32}{3} + \sqrt{128 + 8N}\right)^2,$$

и решетки T_n не 2-рефлективны для таких n.

1.7. Пример классификации лоренцевых алгебр Каца–Муди ранга 3. В остальной части статьи рассматриваются гиперболические решетки $S_t = H \oplus \langle 2t\rangle$ и решетки с двумя отрицательными квадратами $L_t = H \oplus S_t = 2H \oplus \langle 2t\rangle$. Рассматривается группа

$$\widehat{O}^+(L_t) = \{g \in O^+(L_t) \mid g \text{ тривиален на } L_t^*/L_t\}. \tag{1.7.1}$$

Группа $\widehat{O}^+(L_t)$ называется *расширенной парамодулярной группой*. В §2 дается классификация лоренцевых алгебр Каца–Муди с решеткой корней S_t^*, решеткой симметрии L_t^* и группой симметрии $\widehat{O}^+(L_t)$.

Решетки $S_t^* = H \oplus \langle \frac{1}{2t} \rangle$ и $L_t^* = 2H \oplus \langle \frac{1}{2t} \rangle$ целочисленны при умножении их формы на $2t$. Группы автоморфизмов $O(L_t) = O(L_t^*)$ решеток L_t и L_t^* естественно отождествляются. Таким образом, можно рассматривать группу $\widehat{O}^+(L_t)$ как подгруппу в $O(L_t^*)$.

Этот случай особенно интересен, так как решетки S_t и L_t максимальные четные, если t свободно от квадратов. Отсюда следует, что многие гиперболические четные решетки S ранга три и многие четные решетки L ранга пять с двумя отрицательными квадратами имеют эквивариантные вложения в S_t и L_t соответственно. Здесь вложение решеток $M_1 \subset M$ одного и того же ранга называется *эквивариантным*, если оно индуцирует вложение $O(M_1) \subset O(M)$ их групп автоморфизмов. Любая решетка имеет эквивариантное вложение в максимальную решетку. Таким образом, изучая решетки S_t и L_t, мы одновременно изучаем лоренцевы алгебры Каца–Муди с решетками корней S^* и группами симметрии $G \subset O^+(L)$ (конечного индекса), где S имеет эквивариантное вложение в S_t и L имеет эквивариантное вложение в L_t. См. ниже (2.2.7).

Более общим образом, то же самое верно для m-двойственных решеток к решеткам S_t и L_t. Здесь для решетки M и $m \in \mathbb{N}$, свободного от квадратов, m-двойственная решетка решетки M – это решетка

$$M^{*,m} = \bigcap_{p|m} \bigl(M \otimes \mathbb{Q} \cap (M \otimes \mathbb{Z}_p)^* \bigr). \tag{1.7.2}$$

Этот пример также важен из-за его связи с теорией абелевых поверхностей A над $\mathbb{C}$ с поляризацией типа $(1,t)$. Напомним, что это алгебраический 2-мерный класс когомологий абелевой поверхности A, заданный симплектической целочисленной формой

$$J_t = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & t \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -t & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{1.7.3}$$

в некотором базисе $H_1(A,\mathbb{Z})$. Решетка $\langle 2t \rangle$ является решеткой Нерона–Севери общей абелевой поверхности с поляризацией типа $(1,t)$. Решетка $L_t(-1)$ – решетка трансцендентных (2-мерных) циклов общей абелевой поверхности с поляризацией типа $(1,t)$. Арифметический фактор $\widehat{O}^+(L_t) \setminus \Omega(L_t)$ дает модули абелевых поверхностей с поляризацией типа $(1,t)$ при отождествлении абелевой поверхности A с ее двойственной абелевой поверхностью $\widehat{A}$. См. детали в [35] и [41]. Таким образом, все автоморфные формы относительно расширенной паромодулярной группы $\widehat{O}^+(L_t)$ могут быть проинтерпретированы геометрически в связи с пространствами модулей абелевых поверхностей.

§ 2. Классификация лоренцевых алгебр Каца–Муди с гиперболической решеткой корней S_t^*, решеткой симметрии L_t^* и группой симметрии $\widehat{O}^+(L_t)$

В этом параграфе дается (следуя [43]) классификация лоренцевых алгебр Каца–Муди $\mathfrak{g}$ с решеткой корней S_t^*, решеткой симметрии L_t^* и группой симметрии $\widehat{O}^+(L_t)$. Здесь t – любое натуральное число. См. определения в п. 1.7. Вероятно, это первый пример классификации большого класса лоренцевых алгебр Каца–Муди. Чтобы облегчить чтение, мы стараемся напоминать основные определения и обозначения из § 1.

2.1. Формулировка результата классификации лоренцевых алгебр Каца–Муди. Согласно п. 1.4 лоренцева алгебра Каца–Муди $\mathfrak{g}$ с решеткой кореней S_t^*, решеткой симметрии L_t^* и группой симметрии $\widehat{O}^+(L_t)$ задается голоморфной автоморфной формой $\Phi(z)$, $z \in \Omega(V^+(S_t)) = S_t \otimes \mathbb{R} + iV^+(S_t)$, относительно группы $\widehat{O}^+(L_t)$ с разложением Фурье

$$\Phi(z) = \sum_{w \in W} \varepsilon(w) \biggl(\exp(-2\pi i(w(\rho), z)) - \sum_{a \in S_t^* \cap \mathbb{R}_{++}\mathcal{M}} m(a) \exp(-2\pi i(w(\rho + a), z)) \biggr), \tag{2.1.1}$$

где все коэффициенты $m(a)$ целые; $W \subset O^+(S_t)$ – подгруппа отражений (группа Вейля алгебры), порожденная отражениями в некоторых корнях решетки S_t; $\varepsilon \colon W \to \{\pm 1\}$ – квадратичный характер; $\mathcal{M} \subset \mathscr{L}(S_t) = V^+(S_t)/\mathbb{R}_{++}$ – фундаментальная камера группы W; $\rho \in S_t \otimes \mathbb{Q}$ – вектор Вейля (см. (1.4.2)) для множества $P(\mathcal{M}) \subset S_t^*$ ортогональных корней к камере $\mathcal{M}$ (множества простых вещественных корней алгебры). Дополнительно автоморфная форма $\Phi(z)$ должна быть рефлективна, т.е. должна иметь нули только на рациональных квадратичных дивизорах, ортогональных корням решетки L_t. Небольшое дополнительное условие из п. 1.4 заключается в том, что полупрямое произведение $W \rtimes \mathrm{Sym}(P(\mathcal{M})_{\overline{1}} \subset P(\mathcal{M}))$ должно иметь конечный индекс в $O(S_t)$. Здесь $P(\mathcal{M})_{\overline{1}} \subset P(\mathcal{M})$ – множество нечетных простых вещественных корней, определяемое условием, что $\varepsilon(s_\alpha) = 1$ для отражения s_α относительно корня $\alpha \in P(\mathcal{M})_{\overline{1}}$. Множество $P(\mathcal{M})_{\overline{0}} = P(\mathcal{M}) - P(\mathcal{M})_{\overline{1}}$ является множеством четных простых вещественных корней.

Автоморфная форма Φ автоматически имеет разложение в бесконечное произведение

$$\Phi(z) = \exp(-2\pi i(\rho, z)) \prod_{\alpha \in \Delta_+} \bigl(1 - \exp\left(-2\pi i(\alpha, z)\right)\bigr)^{\mathrm{mult}(\alpha)}, \tag{2.1.2}$$

где $\mathrm{mult}(\alpha) \in \mathbb{Z}$ – кратности корней алгебры $\mathfrak{g}$ и $\Delta_+ \subset S_t^*$ – множество положительных корней алгебры $\mathfrak{g}$, определяемое условием $(\Delta_+, \mathcal{M}) \leqslant 0$. Бесконечное произведение (2.1.2) также может быть использовано для определения автоморфной формы Φ и алгебры Каца–Муди $\mathfrak{g}$. Тождество (2.1.1) $=$ (2.1.2) называется тождеством для знаменателя.

Бесконечная сумма (2.1.1) в тождестве для знаменателя задает образующие и определяющие соотношения лоренцевой алгебры Каца–Муди $\mathfrak{g}$, которая является обобщенной супералгеброй Каца–Муди (или алгеброй Борчердса). Алгебра $\mathfrak{g}$ градуирована решеткой корней S_t^*:

$$\mathfrak{g} = \bigoplus_{\alpha\in S_t^*} \mathfrak{g}_\alpha = \mathfrak{g}_0 \oplus \biggl(\bigoplus_{\alpha\in\Delta_+} \mathfrak{g}_\alpha\biggr) \oplus \biggl(\bigoplus_{\alpha\in\Delta_+} \mathfrak{g}_{-\alpha}\biggr), \qquad \mathfrak{g}_0 = S_t\otimes\mathbb{C}, \tag{2.1.3}$$

и бесконечное произведение (2.1.2) в тождестве для знаменателя дает кратности

$$\operatorname{mult}(\alpha) := \dim\mathfrak{g}_\alpha = \dim\mathfrak{g}_{\alpha,\bar 0} - \dim\mathfrak{g}_{\alpha,\bar 1} \tag{2.1.4}$$

корневых пространств $\mathfrak{g}_\alpha$, $\alpha\in\Delta_+$, супералгебры $\mathfrak{g}$. Также $\operatorname{mult}(-\alpha) = \operatorname{mult}(\alpha)$.

Наш классификационный результат утверждает:

Теорема 2.1.1. *Имеется в точности* 29 *лоренцевых алгебр Каца–Муди* $\mathfrak{g}$ *с решеткой корней* S_t^*, *решеткой симметрии* L_t^* *и группой симметрии* $\widehat{O}^+(L_t)$ (*эквивалентно, имеется в точности* 29 *автоморфных форм* (2.1.1)), *где* t *пробегает все натуральные числа*, $t\in\mathbb{N}$. *Они существуют только для*

$$t = 1\,(\textit{три}),\ 2\,(\textit{семь}),\ 3\,(\textit{семь}),\ 4\,(\textit{семь}),\ 8\,(\textit{одна}),\ 9\,(\textit{одна}),$$
$$12\,(\textit{одна}),\ 16\,(\textit{одна}),\ 36\,(\textit{одна}),$$

где для каждого t *в скобках дается число форм. Все эти* 29 *форм приведены ниже в п.* 2.6.

Доказательство теоремы 2.1.1 делится на две части. Во-первых, нужно построить все 29 автоморфных форм теоремы. Во-вторых, нужно показать, что других автоморфных форм, удовлетворяющих ее условиям, не существует. Конструкция данных 29 автоморных форм дается в п. 2.2. Полнота их списка рассматривается в пп. 2.2–2.4.

Все 29 автоморфных форм теоремы 2.1.1 были найдены в [36], [37], [39], [41] вместе с их разложениями в бесконечную сумму и бесконечное произведение. Формально формы для $t = 8, 12, 16$ новые, но они совпадают с некоторыми формами для $t = 2, 3, 4$ соответственно после подходящей замены переменных. Таким образом, фактически они не новы.

Все 29 автоморфных форм теоремы 2.1.1 описываются в п. 2.6. Для их построения в [41] был использован вариант экспоненциального подъема Борчердса [7], который применяется к формам Якоби, см. [41; теорема 2.1]. Он дает разложение этих форм в бесконечное произведение (2.1.2) и конструкцию этих форм, использующую разложение в бесконечное произведение. Этот вариант рассматривается в следующем п. 2.2.

Для разложения Фурье данных 29 автоморфных форм в [36], [37], [39], [41] были использованы различные методы, для этого не существует общего метода. Один из методов – *арифметический подъем*, [29]–[32], форм Якоби, который дает простые разложения Фурье (2.1.1) некоторых из данных 29 автоморфных форм. В данной статье мы не обсуждаем методы нахождения разложения Фурье данных 29 автоморфных форм и только приводим соответствующие формулы. Для доказательства теоремы 2.1.1 эти разложения не нужны, но они очень важны для конструкции алгебр $\mathfrak{g}$, используя их образующие и определяющие соотношения.

2.2. Вариант автоморфных произведений Борчердса для форм Якоби. Мы используем общий результат из [41], который позволяет построить в виде произведений, аналогичных (2.1.2), множество автоморфных форм относительно расширенной парамодулярной группы.

Обозначим через f_2, f_{-2} базис для H с матрицей Грама $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ и через f_3 базис для $\langle 2t\rangle$. Вместе они дают базис f_2, f_3, f_{-2} для решетки $S_t = H \oplus \langle 2t\rangle$ с матрицей Грама $\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2t & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Для двойственной решетки S_t^* получаем базис $f_2, \widehat{f_3} = f_3/(2t), f_{-2}$. Обозначим $\alpha = (n, l, m) := nf_2 - l\widehat{f_3} + mf_{-2} \in S_t^*$, где $\alpha^2 = -2nm + \frac{l^2}{2t}$. Обозначим через $D(\alpha) = 2t\alpha^2 = -4tnm + l^2$ *дискриминант*, или *норму*, элемента α. Для двойственной решетки S_t^* мы обычно используем эту форму. Таким образом, дискриминант или норма дает целочисленную решетку $S_t^*(2t)$. Пусть $z = z_3 f_2 + z_2 f_3 + z_1 f_{-2} \in \Omega(V^+(S_t))$. Тогда $\exp(-2\pi i(\alpha, z)) = q^n r^l s^m$, где $q = \exp(2\pi i z_1)$, $r = \exp(2\pi i z_2)$, $s = \exp(2\pi i z_3)$.

В [41] доказан вариант экспоненциального подъема Борчердса. Экспоненциальный подъем Борчердса [7] дает подъем модулярных форм одной переменной. В [41] построен его вариант для модулярных форм Якоби. Этот вариант формулируется в нижеприведенной теореме 2.2.1. Необходимые определения и результаты, связанные с модулярными формами Якоби, приведены в § 3.

Пусть

$$\phi_{0,t}(\tau, z) = \sum_{k,l\in\mathbb{Z}} f(k,l) q^k r^l \in J_{0,t}^{nh} \tag{2.2.1}$$

– почти голоморфная форма Якоби веса 0 и индекса $t \in \mathbb{N}$ (т.е. k в разложении Фурье может быть отрицательным), где $q = \exp{(2\pi i \tau)}$, $\operatorname{Im}\tau > 0$, $r = \exp{(2\pi i z)}$, $z \in \mathbb{C}$. Форма Якоби $\phi_{0,t}(\tau, z)$ автоморфна относительно группы Якоби $H(\mathbb{Z}) \rtimes SL_2(\mathbb{Z})$, где $H(\mathbb{Z})$ – целочисленная группа Гейзенберга, которая является центральным расширением

$$0 \to \mathbb{Z} \to H(\mathbb{Z}) \to \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to 0.$$

То, что форма $\phi_{0,t}$ почти голоморфна, означает, что $\phi_{0,t}$ голоморфна всюду, кроме возможных полюсов конечного порядка на бесконечности $q = 0$. Коэффициенты Фурье $f(k,l)$ формы Якоби $\phi_{0,t}$ зависят только от нормы $4tk - l^2$ пары (k,l) и $l \bmod 2t$. Кроме того, $f(k,l) = f(k,-l)$. Из определения почти голоморфной формы вытекает, что норма $4tk - l^2$ индексов ненулевых коэффициентов Фурье $f(k,l)$ ограничена снизу. Пусть

$$\phi_{0,t}^{(0)}(z) = \sum_{l\in\mathbb{Z}} f(0,l) r^l \tag{2.2.2}$$

– q^0-часть формы $\phi_{0,t}(\tau, z)$. Ее коффициенты Фурье особенно важны для формулируемой ниже теоремы.

Теорема 2.2.1 [41; теорема 2.1]. *Предположим, что* $t \in \mathbb{N}$ *и коэффициенты Фурье* $f(k,l)$ *формы Якоби* $\phi_{0,t}$ *из* (2.2.1) *целочисленны. Тогда бесконечное произведение*

$$B_\phi(z) = q^A r^B s^C \prod_{\substack{n,l,m\in\mathbb{Z} \\ (n,l,m)>0}} (1 - q^n r^l s^m)^{f(nm,l)}, \tag{2.2.3}$$

где

$$A = \frac{1}{24}\sum_{l} f(0,l), \quad B = \frac{1}{2}\sum_{l>0} lf(0,l), \quad C = \frac{1}{4t}\sum_{l} l^2 f(0,l) \tag{2.2.4}$$

и $(n,l,m) > 0$ *означает, что либо* $m > 0$, *либо* $m = 0$ *и* $n > 0$, *либо* $m = n = 0$ *и* $l < 0$, *определяет мероморфную автоморную форму веса* $\frac{f(0,0)}{2}$ *относительно* $\widehat{O}^+(L_t)$ *с характером (или мультипликативной системой, если вес является полуцелым). Все компоненты дивизора формы* $B_\phi(z)$ *являются рациональными квадратичными дивизорами, ортогональными* $\alpha = (a,b,1)$, *с дискриминантом* $D = -4ta + b^2 > 0$ *(с точностью до действия группы* $\widehat{O}^+(L_t)$) *и с кратностями*

$$m_{D,b} = \sum_{n>0} f(n^2a, nb). \tag{2.2.5}$$

См. другие детали в [41; теорема 2.1].

Все 29 автоморфных форм теоремы 2.1.1 задаются некоторыми *автоморфными произведениями* теоремы 2.2.1. Так мы будем называть все автоморфные формы теоремы 2.1.1. Таким образом, для задания этих 29 автоморфных форм следует задать соответствующие 29 форм Якоби. Все эти формы приведены в таблице 2 из п. 2.6.

Более общим образом, мы описываем все рефлективные мероморфные автоморфные формы, задаваемые теоремой 2.2.1. Здесь мероморфная автоморфная форма на области $\Omega(L_t)$ называется *рефлективной*, если ее дивизор является суммой с некоторыми кратностями рациональных квадратичных дивизоров, ортогональных корням решетки L_t. Напомним, что элемент $\alpha \in L_t$ называется *корнем*, если $\alpha^2 > 0$ и $\alpha^2 \mid 2(\alpha, L_t)$. Используя описание дивизора формы B_ϕ из теоремы 2.2.1, легко доказать следующее.

Лемма 2.2.2. *Бесконечное произведение* B_ϕ, *задаваемое формой Якоби* $\phi = \phi_{0,t}$ *с целыми коэффицентами (теоремы 2.2.1), определяет рефлективную автоморфную форму, если и только если каждый ее ненулевой коэффицент* $f(k,l)$ *с отрицательной нормой* $4tk - l^2 < 0$ *удовлетворяет условию*

$$4tk - l^2 \mid (4t, 2l). \tag{2.2.6}$$

Обозначим через RJ_t пространство всех форм Якоби $\phi = \phi_{0,t}$ индекса t теоремы 2.2.1, которые задают рефлективные автоморфные произведения B_ϕ (эквивалентно, $\phi = \phi_{0,t}$ удовлетворяет лемме 2.2.2). Естественно называть эти формы Якоби также *рефлективными*. Пространство RJ_t всех рефлективных форм Якоби является свободным $\mathbb{Z}$-модулем относительно сложения. Имеет место следующая

Основная теорема 2.2.3. *Для* $t \in \mathbb{N}$ *пространство* RJ_t *рефлективных форм Якоби индекса* t *нетривиально (т.е. ненулевое), если и только если* t *равно*

$$1(2), 2(3), 3(3), 4(3), 5(3), 6(4), 7(2), 8(3), 9(3), 10(3), 11(1), 12(4), 13(2),$$
$$14(3), 15(2), 16(2), 17(1), 18(3), 20(3), 21(3), 22(1), 24(2), 25(1), 26(1),$$
$$28(1), 30(3), 33(1), 34(2), 36(3), 39(2), 42(1), 45(1), 48(1), 63(1), 66(1),$$

где в скобках указан ранг соответствующего $\mathbb{Z}$-модуля RJ_t рефлективных форм Якоби.

В таблице 1 *из п.* 2.5 *дается базис $\mathbb{Z}$-модуля RJ_t для $t = 1, 2, 3, 4, 8, 9, 12, 16, 36$, когда подпространство RJ_t также содержит формы Якоби, задающие тождество для знаменателя лоренцевых алгебр Каца–Муди* (*т.е. дает некоторые формы теоремы* 2.1.1).

Все автоморфные формы теоремы 2.1.1 имеют свойство, что компоненты их дивизоров имеют кратность 1. Это вытекает из свойств вещественных корней алгебры $\mathfrak{g}$ и разложения (2.1.2) в бесконечное произведение. Если простой вещественный корень $\alpha \in P(\mathscr{M})$ алгебры $\mathfrak{g}$ четен (т.е. $\alpha \in P(\mathscr{M})_{\overline{0}}$), то $m\alpha$, $m \in \mathbb{N}$, является корнем алгебры $\mathfrak{g}$, если и только если $m = 1$, и кратность корня α равна единице. Если простой вещественный корень $\alpha \in P(\mathscr{M})$ нечетен, то $m\alpha$, $m \in \mathbb{N}$, является корнем, если и только если $m = 1$ или $m = 2$. Корень α имеет кратность (-1), а корень 2α имеет кратность 1. Из полного списка всех рефлективных форм Якоби основной теоремы 2.2.3 нетрудно выделить все формы Якоби ϕ с дивизором кратности один для B_ϕ, так как теорема 2.2.1 дает кратности дивизоров автоморфных произведений. См. таблицу 1 из п. 2.5 для $t = 1, 2, 3, 4, 8, 9, 12, 16, 36$. Для всех других t полный список дан в [44]. Он слишком длинный, чтобы быть здесь приведенным.

Потенциально основная теорема 2.2.3 содержит информацию о всех рефлективных автоморфных формах с бесконечным произведением типа теоремы 2.2.1 для всех эквивариантных подрешеток $L \subset L_t$ конечного индекса. Здесь *эквивариантная* означает, что $O(L) \subset O(L_t)$; в частности, каждый корень решетки L является кратным корню решетки L_t. Если L имеет рефлективную автоморфную форму Φ относительно $O(L)$ с бесконечным произведением, то ее симметризация

$$\prod_{g \in O(L)\backslash O(L_t)} g^*\Phi \tag{2.2.7}$$

дает рефлективную автоморфную форму с бесконечным произведением для решетки L_t.

Таким образом, потенциально основная теорема 2.2.3 содержит важную информацию о рефлективных автоморфных формах с бесконечными автоморфными произведениями и об автоморфных формах тождеств для знаменателя лоренцевых алгебр Каца–Муди с решетками симметрии L^* вместо L_t^* и с соответствующими гиперболическими решетками корней S^*, где $S = S_t \cap L$ вместо S_t. Кроме того, вероятно, можно рассматривать более общий класс алгебр Ли, для которых рефлективные формы основной теоремы 2.2.3 будут давать тождества типа тождеств для знаменателя. Результаты из [26] и [50] дают такую надежду.

2.3. Доказательство основной теоремы 2.2.3 и рефлективные гиперболические решетки. Для классификации конечномерных полупростых и аффинных алгебр Каца–Муди необходима классификация соответствующих конечных и аффинных систем корней. Для доказательства основной теоремы 2.2.3 необходимо описание подходящих гиперболических систем корней. Они являются подсистемами корней рефлективных гиперболических решеток, которые рассматривались в п. 1.5.

Пусть S – гиперболическая, т.е. сигнатуры $(m,1)$, решетка, $W(S)$ – ее группа отражений, $\mathcal{M} \subset V^+(S)/\mathbb{R}_{++}$ – ее фундаментальная камера и $\operatorname{Sym}(\mathcal{M})$ – группа симметрии фундаментальной камеры. Таким образом, имеем соответствующее полупрямое произведение $O^+(S) = W(S) \rtimes \operatorname{Sym}(\mathcal{M})$. Напомним (см. п. 1.5), что гиперболическая решетка S называется *рефлективной*, если $\mathcal{M}$ имеет *обобщенный вектор Вейля* $\rho \in S \otimes \mathbb{Q}$. Это означает, что $\rho \neq 0$ и орбита $\operatorname{Sym}(\mathcal{M})(\rho)$ конечна. Рефлективная решетка называется *эллиптически рефлективной*, если имеет обобщенный вектор Вейля ρ с $\rho^2 < 0$. Она называется *параболически рефлективной*, если не является эллиптически рефлективной, но имеет обобщенный вектор Вейля ρ с $\rho^2 = 0$. Она называется *гиперболически рефлективной*, если не является ни эллиптически, ни параболически рефлективной, но имеет обобщенный вектор Вейля ρ с $\rho^2 > 0$.

Предположим, что $B_\phi(z)$ – автоморфная форма теоремы 2.2.1, являющаяся рефлективной. Неравенство $(n,l,m) > 0$ теоремы 2.2.1 является вариантом выбора фундаментальной камеры $\mathcal{M}$ для $W(S_t)$. Вектор $\rho = (A,B,C)$ инвариантен относительно группы $\widehat{\operatorname{Sym}}(\mathcal{M}) = \operatorname{Sym}(\mathcal{M}) \cap \widehat{O}^+(L_t)$, которая имеет конечный индекс в $\operatorname{Sym}(\mathcal{M})$. Если $\rho = (A,B,C)$ не равен нулю, то он определяет обобщенный вектор Вейля для $\operatorname{Sym}(\mathcal{M})$. Если форма $B_\phi(z)$ имеет нулевой вектор $\rho = (A,B,C)$, можно заменить форму $B_\phi(z)$ на форму $w^*(B_\phi(z))$, где $w \in W$ – подходящее отражение, так, что $w^*(B_\phi(z))$ будет иметь ненулевой обобщенный вектор Вейля ρ. Таким образом, получаем следующую лемму.

Лемма 2.3.1. *Если пространство RJ_t рефлективных форм Якоби не равно нулю, то решетека S_t рефлективна.*

Интересно, что пространство RJ_t действительно может иметь форму Якоби с нулевым вектором $\rho = (A,B,C)$. Это имеет место для $t = 6$ и $t = 12$, когда $\operatorname{rk} RJ_t = 4$.

Монография [68] посвящена классификации рефлективных гиперболических решеток и подходящих (для лоренцевых алгебр Каца–Муди) гиперболических систем корней ранга три. Эта классификация содержит 122 главных эллиптических и 66 главных гиперболических типов (главных параболических типов нет). В частности, классифицированы все рефлективные гиперболические решетки ранга три со свободным от квадратов определителем (например, это дает классификацию всех рефлективных решеток S_t для свободного от квадратов t, см. теорему 2.3.2). Отсюда вытекает классификация всех максимальных рефлективных гиперболических решеток ранга три. Для произвольных рефлективных гиперболических решеток ранга три даны эффективные методы их перечисления и получены эффективные оценки их инвариантов.

Используя эти результаты и прямые вычисления, получаем следующую теорему.

Теорема 2.3.2. *Решетка $S_t = H \oplus \langle 2t \rangle$ рефлективна для следующих и только следующих $t \in \mathbb{N}$, где в скобках также указан тип рефлективности решетки, (e) для эллиптического, (p) для параболического и (h) для гиперболического типа:*

$$\begin{aligned} t = {} & 1\text{–}22\,(e),\ 23\,(h),\ 24\text{–}26\,(e),\ 28\,(e),\ 29\,(h),\ 30\,(e),\ 31\,(h),\ 33\,(e),\ 34\,(e),\\ & 35\,(h),\ 36\,(e),\ 37\,(h),\ 38\,(h),\ 39\,(e),\ 40\,(h),\ 42\,(e),\ 44\,(h),\ 45\,(e),\\ & 46\,(h),\ 48\,(h),\ 49\,(e),\ 50\,(e),\ 52\,(e),\ 55\,(e),\ 56\,(h),\ 57\,(h),\ 60\,(h),\\ & 63\,(h),\ 66\,(e),\ 70\,(h),\ 72\,(h),\ 78\,(h),\ 84(h),\ 90\,(h),\ 100\,(h),\ 105\,(h). \end{aligned}$$

В частности, рефлективных решеток S_t параболического типа нет.

Для доказательства основной теоремы 2.2.3 и нахождения базисов модулей RJ_t нужно рассмотреть только t теоремы 2.3.2. В частности, $t \leqslant 105$. Для нахождения рангов модулей RJ_t и их базисов можно воспользоваться известными образующими градуированного кольца слабых форм Якоби. Над $\mathbb{Q}$ (с рациональными коэффициентами Фурье) эти образующие были найдены в [24] (см. §3), и это достаточно для вычисления рангов $\operatorname{rk} RJ_t$ (например, пользуясь компьютером). Образующие градуированного кольца слабых форм Якоби с целыми коэффициентами Фурье найдены в [33] и [34] (см. § 3). Эти результаты позволяют найти базис RJ_t для всех t теоремы 2.2.3. Мы даем его для $t = 1, 2, 3, 4, 8, 9, 12, 16, 36$ в таблице 1 из п. 2.5. Для упрощения этих вычислений можно также использовать соображения, которые будут приведены ниже для доказательства теоремы 2.1.1.

Классификация всех рефлективных гиперболических решеток ранга три из [68] дает надежду, что могут быть классифицированы все лоренцевы алгебры Каца–Муди ранга три (с произвольными гиперболическими решетками корней ранга три).

Результаты конечности для всех рефлективных гиперболических решеток (теоремы 1.5.3 и 1.5.5) и разумное число основных типов для ранга три $(122 + 66)$ дают надежду, что все лоренцевы алгебры Каца–Муди ранга $\geqslant 3$ могут быть в будущем классифицированы. Мы ожидаем, что с возрастанием ранга число случаев уменьшается. Мы предполагаем, что случай ранга три наиболее богат и сложен.

2.4. Доказательство теоремы 2.1.1 и рефлективные гиперболические решетки с вектором Вейля. Здесь мы даем набросок доказательства теоремы 2.1.1, подчеркивая важность рефлективных гиперболических решеток и гиперболических систем корней с вектором Вейля.

Из теоремы 2.2.3 и вышеприведенных рассуждений вытекает, что теорема 2.1.1 дает все автоморные формы (удовлетворяющие ее условиям), которые могут быть получены конструкцией теоремы 2.2.1. Здесь мы хотим показать, что других автоморфных форм, удовлетворяющих ее условиям, нет. Таким образом, любая из форм теоремы 2.1.1 получается конструкцией теоремы 2.2.1.

В теореме 2.1.1 фундаментальный многогранник $\mathcal{M}$ и множество $P(\mathcal{M})$ ортогональных корней к $\mathcal{M}$ имеют вектор Вейля ρ (удовлетворяющий (1.4.2)). Множество $P(\mathcal{M})$ и ρ инвариантны относительно группы $\widehat{\operatorname{Sym}}(P(\mathcal{M}))$, которая имеет конечный индекс в $\operatorname{Sym}(\mathcal{M})$ (мы обозначаем $\widehat{G} = G \cap \widehat{O}^+(L_t)$). В частности, соответствующие решетки S_t рефлективны. Для любой рефлективной решетки S_t (она принадлежит списку теоремы 2.3.2) можно вычислить фундаментальную камеру $\mathcal{M}_0$ для полной группы отражений $W(S_t)$, и она известна. (Для $t = 1, 2, 3, 4, 8, 9, 12, 16, 36$ эти вычисления представлены ниже в таблице 1.) Таким образом, фундаментальная камера $\mathcal{M}$ сложена при помощи отражений из известного многоугольника $\mathcal{M}_0$ и имеет вектор Вейля ρ. Используя эту информацию, можно найти все возможные $\mathcal{M}$, $P(\mathcal{M})$, ρ и предсказать дивизор возможной рефлективной автоморфной формы $\Phi(z)$. Просматривая список из 29 форм теоремы 2.1.1, можно видеть, что одна из них (для соответствующего t) имеет тот же самый дивизор. По принципу Кёхера (мы обсуждали этот принцип в п. 1.6) форма $\Phi(z)$ совпадает с этой формой.

Аналогичные аргументы могут быть использованы для классификации всех *рефлективных мероморфных автоморфных форм с бесконечным произведением* типа (2.1.2) и с обобщенным вектором Вейля $\rho \neq 0$. Но мы не требуем, чтобы кратности бесконечного произведения были связаны с коэффициентами Фурье какой-то модулярной формы. Как и произведение (2.1.2), это произведение должно быть связано с подгруппой отражений $W \subset W(S_t)$, ее фундаментальной камерой $\mathscr{M}$, множеством $P(\mathscr{M}) \subset S_t^*$ ортогональных корней к $\mathscr{M}$ (они задают $\Delta_+ \subset S_t^*$) и обобщенным вектором Вейля $\rho \in S_t \otimes \mathbb{Q}$ (т.е. $\rho \neq 0$, орбита $\mathrm{Sym}(P(\mathscr{M}))(\rho)$ конечна и $W \rtimes \mathrm{Sym}(P(\mathscr{M}))$ имеет конечный индекс в $O(S_t)$). Функция $\mathrm{mult}(\alpha)$, $\alpha \in \Delta_+$, должна быть целочисленна и инвариантна относительно $\widehat{\mathrm{Sym}}(P(\mathscr{M}))$. Произведение должно сходиться в окрестности $(\mathrm{Im}\, z)^2 \ll 0$ каспа на бесконечности. Все определения аналогичны. Имеем:

Теорема 2.4.1. *Любая рефлективныя мероморфная автоморфная форма с решеткой корней S_t^*, решеткой симметрии L_t^* и группой симметрии $\widehat{O}^+(L_t)$, имеющая разложение в бесконечное произведение типа* (2.1.2) *с ненулевым обобщенным вектором Вейля ρ есть $B\varphi$, где φ принадлежит списку основной теоремы* 2.2.3.

Применяя к формам теоремы 2.4.1 отражения относительно корней решетки S_t, можно получить рефлективные автоморфные формы с нулевым обобщенным вектором Вейля и с бесконечным произведением. Они существуют только для $t = 6$ и $t = 12$.

2.5. Рефлективные формы Якоби из RJ_t для $t = 1, 2, 3, 4, 8, 9, 12, 16, 36$. Для данных t дается базис $\xi_{0,t}^{(1)}, \dots, \xi_{0,t}^{(rk)}$ для $\mathbb{Z}$-модуля RJ_t. Для каждой формы Якоби базиса указывается главная часть ее разложения Фурье, которая однозначно определяет данную форму. Даются все коэффициенты Фурье с отрицательной нормой (с точностью до эквивалентности); соответствующая отрицательная норма указывается в скобках $[\,\cdot\,]$. Для каждой формы Якоби базиса также дается формула, которая использует основные формы Якоби. В этих формулах $E_4 = E_4(\tau)$ и $\Delta_{12} = \Delta(\tau)$ – ряд Эйзенштейна веса 4 и функция Рамануджана веса 12 для $SL_2(\mathbb{Z})$ соответственно, $E_{4,m}$ ($m = 1, 2, 3$) – ряды Эйзенштейна – Якоби веса 4 и индекса m (см. [24]) и $\phi_{0,1}$, $\phi_{0,2}$, $\phi_{0,3}$, $\phi_{0,4}$ – четыре образующих из [33] и [41] градуированного кольца слабых форм Якоби веса нуль с целыми коэффициентами Фурье. См. §3 об этих формах Якоби.

Дается множество $\overline{R}$ примитивных корней решетки S_t^* с точностью до эквивалентности (действия группы $\pm\widehat{O}(L_t)$). С точностью до этой эквивалентности корень $\alpha = (n, l, m)$ определяется его нормой $-2t\alpha^2 = -4nm + l^2$ и $\pm l \mod 2t$. Также дается матрица

$$\mathrm{Mul}(\overline{R}, \xi) = \mathrm{mul}(\gamma_i, \xi_{0,t}^{(j)}),$$

где $\mathrm{mul}(\gamma_i, \xi_{0,t}^{(j)})$ – кратность формы $\Phi_{\xi_{0,t}^{(j)}}$ в рациональном квадратичном дивизоре, ортогональном корню из класса эквивалентности $\gamma_i \in \overline{R}$.

Дается множество $P(\mathscr{M}_0)$ примитивных корней из S_t^*, которые ортогональны фундаментальной камере $\mathscr{M}_0$ группы отражений $W(S_t)$ (это эквивалентно упорядочиванию $(n, l, m) > 0$, использованному в теореме 2.2.1), и его матрица Грама

$$G(P(\mathscr{M}_0)) = 2t((\alpha, \beta)), \qquad \alpha, \beta \in P(\mathscr{M}_0).$$

Таким образом, мы отождествляем двойственную решетку S_t^* с целочисленной решеткой $S_t^*(2t) = H(2t) \oplus \langle 1 \rangle$, делая ее целочисленной.

Все эти данные приведены в таблице 1.

Таблица 1. Базис пространства RJ_t рефлективных форм Якоби для $t = 1, 2, 3, 4, 8, 9, 12, 16, 36$

Случай $t = 1$. Пространство RJ_1 имеет базис

$$\begin{aligned}
\xi_{0,1}^{(1)} &= \phi_{0,1} = (r[-1] + 10 + r^{-1}[-1]) + O(q);\\
\xi_{0,1}^{(2)} &= {E_4}^2 E_{4,1}/\Delta_{12} - 57\phi_{0,1}\\
&= q^{-1}[-4] + (r^2[-4] - r[-1] + 60 - r^{-1}[-1] + r^{-2}[-4]) + O(q).
\end{aligned}$$

Имеем $\overline{R} = \overline{P(\mathscr{M}_0)}$ и

$$P(\mathscr{M}_0) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \equiv \begin{bmatrix} 4, \overline{0}\\ 1, \overline{1}\\ 4, \overline{0} \end{bmatrix}; \quad \mathrm{Mul}(P(\mathscr{M}_0), \xi) = \begin{pmatrix} 0 & 1\\ 1 & 0\\ 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$G(P(\mathscr{M}_0)) = \begin{pmatrix} 4 & -2 & -2\\ -2 & 1 & 0\\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Случай $t = 2$. Пространство RJ_2 имеет базис

$$\begin{aligned}
\xi_{0,2}^{(1)} &= \phi_{0,2} = (r[-1] + 4 + r^{-1}[-1]) + O(q);\\
\xi_{0,2}^{(2)} &= (\phi_{0,1})^2 - 21\phi_{0,2} = (r^2[-4] - r[-1] + 18 - r^{-1}[-1] + r^{-2}[-4]) + O(q);\\
\xi_{0,2}^{(3)} &= {E_4}^2 E_{4,2}/\Delta_{12} - 14(\phi_{0,1})^2 + 216\phi_{0,2} = q^{-1}[-8] + 24 + O(q).
\end{aligned}$$

Имеем $\overline{R} = \overline{P(\mathscr{M}_0)}$, где

$$P(\mathscr{M}_0) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \equiv \begin{bmatrix} 4, \overline{2}\\ 1, \overline{1}\\ 8, \overline{0} \end{bmatrix}; \quad \mathrm{Mul}(P(\mathscr{M}_0), \xi) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$G(P(\mathscr{M}_0)) = \begin{pmatrix} 4 & -2 & -4\\ -2 & 1 & 0\\ -4 & 0 & 8 \end{pmatrix}.$$

Случай $t = 3$. Пространство RJ_3 имеет базис

$$\begin{aligned}
\xi_{0,3}^{(1)} &= \phi_{0,3} = (r[-1] + 2 + r^{-1}[-1]) + O(q);\\
\xi_{0,3}^{(2)} &= \phi_{0,1}\phi_{0,2} - 15\phi_{0,3} = (r^2[-4] - r[-1] + 12 - r^{-1}[-1] + r^{-2}[-4]) + O(q);\\
\xi_{0,3}^{(3)} &= {E_4}^2 E_{4,3}/\Delta_{12} - 2(\phi_{0,1})^3 + 33\phi_{0,1}\phi_{0,2} + 90\phi_{0,3} = q^{-1}[-12] + 24 + O(q).
\end{aligned}$$

Имеем $\overline{R}=\overline{P(\mathscr{M}_0)}$, где

$$P(\mathscr{M}_0)=\begin{pmatrix}1&2&0\\0&-1&0\\-1&0&1\end{pmatrix}\equiv\begin{bmatrix}4,\overline{2}\\1,\overline{1}\\12,\overline{0}\end{bmatrix};\qquad \mathrm{Mul}(P(\mathscr{M}_0),\xi)=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix};$$

$$G(P(\mathscr{M}_0))=\begin{pmatrix}4&-2&-6\\-2&1&0\\-6&0&12\end{pmatrix}.$$

Случай $t=4$**.** Пространство RJ_4 имеет базис

$$\xi_{0,4}^{(1)}=\phi_{0,4}=(r[-1]+1+r^{-1}[-1])+O(q);$$
$$\xi_{0,4}^{(2)}=(\phi_{0,2})^2-9\phi_{0,4}=(r^2[-4]-r[-1]+9-r^{-1}[-1]+r^{-2}[-4])+O(q);$$
$$\begin{aligned}\xi_{0,4}^{(3)}&=E_4E_{4,1}E_{4,3}/\Delta_{12}-2(\phi_{0,1})^2\phi_{0,2}+20\phi_{0,1}\phi_{0,3}+16\phi_{0,4}\\&=q^{-1}[-16]+24+O(q).\end{aligned}$$

Имеем $\overline{R}=\overline{P(\mathscr{M}_0)}$, где

$$P(\mathscr{M}_0)=\begin{pmatrix}1&2&0\\0&-1&0\\-1&0&1\end{pmatrix}\equiv\begin{bmatrix}4,\overline{2}\\1,\overline{1}\\16,\overline{0}\end{bmatrix};\qquad \mathrm{Mul}(P(\mathscr{M}_0),\xi)=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix};$$

$$G(P(\mathscr{M}_0))=\begin{pmatrix}4&-2&-8\\-2&1&0\\-8&0&16\end{pmatrix}.$$

Случай $t=8$**.** Пространство RJ_8 имеет базис

$$\begin{aligned}\xi_{0,8}^{(1)}&=(\phi_{0,2})^2\phi_{0,4}-\phi_{0,2}(\phi_{0,3})^2-(\phi_{0,4})^2=(2r[-1]-1+2r^{-1}[-1])\\&\quad+(-r^6[-4]-2r^5+4r^4-4r^3+r^2+6r-8+\cdots)q+O(q^2);\end{aligned}$$
$$\begin{aligned}\xi_{0,8}^{(2)}&=\phi_{0,2}(\tau,2z)=\phi_{0,1}\phi_{0,3}\phi_{0,4}+\phi_{0,2}(\phi_{0,3})^2-2(\phi_{0,2})^2\phi_{0,4}-2(\phi_{0,4})^2\\&=(r^2[-4]+4+r^{-2}[-4])+(r^6[-4]-8r^4-r^2+16-\cdots)q+O(q^2);\end{aligned}$$
$$\begin{aligned}\xi_{0,8}^{(3)}&=E_4E_{4,3}(E_{4,2}\phi_{0,3}-E_{4,1}\phi_{0,4})/\Delta_{12}-3(\phi_{0,1})^2(\phi_{0,3})^2+2(\phi_{0,1})^2\phi_{0,2}\phi_{0,4}\\&\quad+\phi_{0,1}\phi_{0,3}\phi_{0,4}-16(\phi_{0,4})^2=q^{-1}[-32]+24+(8r^6[-4]+256r^5+2268r^4\\&\quad+9472r^3+23608r^2+39424r+46812+\cdots)q+O(q^2).\end{aligned}$$

Имеем $\overline{R}=\overline{P(\mathscr{M}_0)}$, где

$$P(\mathscr{M}_0)=\begin{pmatrix}1&2&0\\0&-1&0\\-1&0&1\\1&6&1\end{pmatrix}\equiv\begin{bmatrix}4,\overline{2}\\1,\overline{1}\\32,\overline{0}\\4,\overline{6}\end{bmatrix};\qquad \mathrm{Mul}(P(\mathscr{M}_0),\xi)=\begin{pmatrix}0&1&0\\2&1&0\\0&0&1\\-1&1&8\end{pmatrix};$$

$$G(P(\mathscr{M}_0))=\begin{pmatrix}4&-2&-16&-4\\-2&1&0&-6\\-16&0&32&0\\-4&-6&0&4\end{pmatrix}.$$

Случай $t = 9$**.** Пространство RJ_9 имеет базис

$$\begin{aligned}
\xi_{0,9}^{(1)} &= -\phi_{0,1}(\phi_{0,4})^2 + 6\phi_{0,2}\phi_{0,3}\phi_{0,4} - 5(\phi_{0,3})^3 = (3r[-1] - 2 + 3r^{-1}[-1]) \\
&\quad + (-4r^6 + 6r^5 - 12r^4 + 22r^3 - 30r^2 + 36r - 36 + \cdots)q + (-r^9[-9] - 6r^8 \\
&\quad + 15r^7 - 36r^6 + 72r^5 - 120r^4 + 171r^3 - 216r^2 + 255r - 268 + \cdots)q^2 + O(q^3); \\
\xi_{0,9}^{(2)} &= \phi_{0,1}(\phi_{0,4})^2 - 5\phi_{0,2}\phi_{0,3}\phi_{0,4} + 4(\phi_{0,3})^3 = (r^2[-4] - r[-1] + 4 - \cdots) \\
&\quad + (3r^6 - 8r^5 + 9r^4 - 24r^3 + 31r^2 - 32r + 42 - \cdots)q + (r^9[-9] + 7r^8 - 15r^7 \\
&\quad + 33r^6 - 80r^5 + 110r^4 - 177r^3 + 219r^2 - 241r + 286 - \cdots)q^2 + O(q^3); \\
\xi_{0,9}^{(3)} &= E_{4,2}E_{4,3}(E_{4,1}\phi_{0,3} - E_4\phi_{0,4})/\Delta_{12} - 3\phi_{0,1}\phi_{0,2}(\phi_{0,3})^2 + 2(\phi_{0,1})^2\phi_{0,3}\phi_{0,4} \\
&\quad - 30\phi_{0,1}(\phi_{0,4})^2 + 27\phi_{0,2}\phi_{0,3}\phi_{0,4} + 9(\phi_{0,3})^3 = q^{-1}[-36] + 24 \\
&\quad + (33r^6 + 486r^5 + 3159r^4 + 10758r^3 + 24057r^2 + 37908r + 44082 + \cdots)q \\
&\quad + (2r^9[-9] + 243r^8 + 5346r^7 + 44055r^6 + 204120r^5 + 642978r^4 + 1483416r^3 \\
&\quad + 2632905r^2 + 3679020r + 4109590 + \cdots)q^2 + O(q^3).
\end{aligned}$$

Имеем $\overline{R} = \overline{P(\mathscr{M}_0)}$, где

$$P(\mathscr{M}_0) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 9 & 1 \end{pmatrix} \equiv \begin{bmatrix} 4, & \overline{2} \\ 1, & \overline{1} \\ 36, & \overline{0} \\ 9, & \overline{9} \end{bmatrix}; \qquad \mathrm{Mul}(P(\mathscr{M}_0), \xi) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix};$$

$$G(P(\mathscr{M}_0)) = \begin{pmatrix} 4 & -2 & -18 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & -9 \\ -18 & 0 & 36 & -18 \\ 0 & -9 & -18 & 9 \end{pmatrix}.$$

Случай $t = 12$**.** Пространство RJ_{12} имеет базис

$$\begin{aligned}
\xi_{0,12}^{(1)} &= \big(\vartheta(\tau, z)/\eta(\tau)\big)^{12} = (r^8[-16] - 8r^7[-1] + 24r^6 - 24r^5 - 36r^4 + 120r^3 \\
&\quad - 88r^2 - 88r + 198 - \cdots)q + (-4r^{10}[-4] + 24r^9 - 32r^8 - 104r^7 + 396r^6 \\
&\quad - 352r^5 - 512r^4 + 1440r^3 - 904r^2 - 1008r + 2112 - \cdots)q^2 + O(q^3); \\
\xi_{0,12}^{(2)} &= 3\phi_{0,2}(\phi_{0,3})^2\phi_{0,4} - (\phi_{0,2})^2(\phi_{0,4})^2 - 2(\phi_{0,3})^4 - (\phi_{0,4})^3 \\
&= (r[-1] - 1 + r^{-1}[-1]) + (-r^7[-1] + r^6 - r^5 + r^4 - r^2 + 2r - 2 + \cdots)q \\
&\quad + (-r^{10}[-4] + r^8 - 2r^7 + 3r^6 - 3r^5 + 2r^4 - 2r^2 + 5r - 6 + \cdots)q^2 + O(q^3); \\
\xi_{0,12}^{(3)} &= 2(\phi_{0,2})^2(\phi_{0,4})^2 - 5\phi_{0,2}(\phi_{0,3})^2\phi_{0,4} + 3(\phi_{0,3})^4 + (\phi_{0,4})^3 \\
&= (r^2[-4] - r[-1] + 3 - \cdots) + (r^7[-1] - 3r^6 + r^5 - 3r^4 + 3r^3 - 2r + 6 - \cdots)q \\
&\quad + (2r^{10}[-4] - 3r^8 + 2r^7 - 9r^6 + 3r^5 - 6r^4 + 7r^2 - 5r + 18 - \cdots)q^2 + O(q^3);
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\xi_{0,12}^{(4)} &= E_{4,3}\big(E_{4,1}E_{4,2}(\phi_{0,3})^2 - 2E_4E_{4,2}\phi_{0,3}\phi_{0,4} + E_4E_{4,1}(\phi_{0,4})^2\big)/\Delta_{12}\\
&\quad - 2(\phi_{0,1})^2\phi_{0,2}(\phi_{0,4})^2 + +5(\phi_{0,1})^2(\phi_{0,3})^2\phi_{0,4} - 3\phi_{0,1}\phi_{0,2}(\phi_{0,3})^3\\
&\quad - 36\phi_{0,1}\phi_{0,3}(\phi_{0,4})^2 + 24\phi_{0,2}(\phi_{0,3})^2\phi_{0,4} + 9(\phi_{0,3})^4 + 16(\phi_{0,4})^3\\
&= q^{-1}[-48] + 24 + (24r^7[-1] + 264r^6 + 1608r^5 + 5610r^4 + 13464r^3\\
&\quad + 24312r^2 + 34056r + 38208 + \cdots)q + (12r^{10}[-4] + 440r^9 + 5544r^8\\
&\quad + 34104r^7 + 135388r^6 + 395808r^5 + 902352r^4 + 1667360r^3 + 2550552r^2\\
&\quad + 3276240r + 3558160 + \cdots)q^2 + O(q^3).
\end{aligned}$$

Имеем

$$P(\mathscr{M}_0) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ -1 & 0 & 1\\ 1 & 8 & 1 \end{pmatrix} \equiv \begin{bmatrix} 4, & \overline{2}\\ 1, & \overline{1}\\ 48, & \overline{0}\\ 16, & \overline{8} \end{bmatrix}; \qquad G(P(\mathscr{M}_0)) = \begin{pmatrix} 4 & -2 & -24 & -8\\ -2 & 1 & 0 & -8\\ -24 & 0 & 48 & 0\\ -8 & -8 & 0 & 16 \end{pmatrix};$$

$$\overline{R} = \begin{bmatrix} 4, & \overline{2}\\ 1, & \overline{1}\\ 48, & \overline{0}\\ 16, & \overline{8}\\ 4, & \overline{10}\\ 1, & \overline{7} \end{bmatrix}; \qquad \mathrm{Mul}(\overline{R}, \xi) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0 & 0\\ -4 & -1 & 2 & 12\\ -12 & -2 & 3 & 36 \end{pmatrix}.$$

Случай $t = 16$**.** Пространство RJ_{16} имеет базис

$$\begin{aligned}
\xi_{0,16}^{(1)} &= \phi_{0,4}(\tau, 2z) = (r^2[-4] + 1 + r^{-2}[-4]) + (-r^8 - r^6 + r^2 + 2 + \cdots)q^2\\
&\quad + (r^{14}[-4] - 2r^{10} - 4r^8 - 4r^6 + 5r^2 + 8 + \cdots)q^3 + O(q^4);\\
\xi_{0,16}^{(2)} &= E_{4,3}\big(E_4E_{4,1}(\phi_{0,3})^4 - (E_4)^2(\phi_{0,3})^3\phi_{0,4} - 2E_{4,1}E_{4,2}(\phi_{0,3})^2\phi_{0,4}\\
&\quad + E_4E_{4,2}\phi_{0,3}(\phi_{0,4})^2 - E_{4,1}E_{4,2}(\phi_{0,3})^2\phi_{0,4} + 2E_4E_{4,2}\phi_{0,3}(\phi_{0,4})^2\\
&\quad - E_4E_{4,1}(\phi_{0,4})^3\big)/\Delta_{12} + 2(\phi_{0,1})^3(\phi_{0,3})^3\phi_{0,4} - 3(\phi_{0,1})^2\phi_{0,2}(\phi_{0,3})^4\\
&\quad - 7(\phi_{0,1})^2(\phi_{0,3})^2(\phi_{0,4})^2 - 31\phi_{0,1}\phi_{0,2}(\phi_{0,3})^3\phi_{0,4} + 46\phi_{0,1}(\phi_{0,3})^5\\
&\quad + 72\phi_{0,1}\phi_{0,3}(\phi_{0,4})^3 + 7(\phi_{0,2})^3(\phi_{0,3})^2\phi_{0,4} - 72\phi_{0,2}(\phi_{0,3})^2(\phi_{0,4})^2\\
&\quad - 197(\phi_{0,3})^4\phi_{0,4} + 2(\phi_{0,1})^2\phi_{0,2}(\phi_{0,4})^3 + 21(\phi_{0,3})^4\phi_{0,4} - 26(\phi_{0,4})^4\\
&\quad + 2\phi_{0,1}(\phi_{0,2})^2\phi_{0,3}(\phi_{0,4})^2 - (\phi_{0,2})^2(\phi_{0,3})^4 - 4(\phi_{0,2})^2(\phi_{0,4})^3 - 2(\phi_{0,2})^4(\phi_{0,4})^2\\
&= q^{-1}[-64] + (8r[-1] + 14 + 8r^{-1}[-1]) + (21r^8 + 200r^7 + 1036r^6\\
&\quad + 3360r^5 + 8100r^4 + 15240r^3 + 23604r^2 + 30352r + 33058 + \cdots)q\\
&\quad + (56r^{11} + 1008r^{10} + 7336r^9 + 32932r^8 + 108800r^7 + 283504r^6 + 610344r^5\\
&\quad + 1112832r^4 + 1750728r^3 + 2401952r^2 + 2896688r^1 + 3081400 + \cdots)q^2\\
&\quad + (4r^{14}[-4] + 560r^{13} + 8092r^{12} + 58328r^{11} + 283784r^{10} + 1042328r^9\\
&\quad + 3082176r^8 + 7616904r^7 + 16136000r^6 + 29802144r^5 + 48582612r^4\\
&\quad + 70497736r^3 + 91619124r^2 + 107054192r + 112732002 + \cdots)q^3 + O(q^4).
\end{aligned}$$

Имеем $\overline{R} = \overline{P(\mathscr{M}_0)}$, где

$$P(\mathscr{M}_0) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 5 & 32 & 3 \\ 3 & 14 & 1 \end{pmatrix} \equiv \begin{bmatrix} 4, & \overline{2} \\ 1, & \overline{1} \\ 64, & \overline{0} \\ 64, & \overline{0} \\ 4, & \overline{14} \end{bmatrix}; \qquad \operatorname{Mul}(P(\mathscr{M}_0), \xi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 8 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix};$$

$$G(P(\mathscr{M}_0)) = \begin{pmatrix} 4 & -2 & -32 & -32 & -4 \\ -2 & 1 & 0 & -32 & -14 \\ -32 & 0 & 64 & -64 & -64 \\ -32 & -32 & -64 & 64 & 0 \\ -4 & -14 & -64 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Случай $t = 36$**.** Пространство RJ_{36} имеет базис

$$\begin{aligned}
\xi^{(1)}_{0,36} &= 3\xi^{(2)}_{0,36} - \xi^{(1)}_{0,9}(\tau, 2z) \\
&= (-3r[-1] + 5 - 3r^{-1}[-1]) + (r^{12} + 3r^{11} + \cdots)q \\
&\quad + (r^{18}[-36] - 3r^{17}[-1] + 9r^{16} + \cdots)q^2 + (6r^{20} - 3r^{19} + \cdots)q^3 \\
&\quad + (4r^{24} - 15r^{22} + \cdots)q^4 + (3r^{27}[-9] - 9r^{26} + 3r^{25} + \cdots)q^5 \\
&\quad + (3r^{29} + 6r^{28} + \cdots)q^6 + (3r^{32}[-16] - 25r^{30} + 9r^{29} + \cdots)q^7 \\
&\quad + (-3r^{33} + 33r^{32} + \cdots)q^8 + O(q^9); \\
\xi^{(2)}_{0,36} &= (\vartheta(\tau, 10z)\vartheta(\tau, z))/(\vartheta(\tau, 5z)\vartheta(\tau, 2z)) \\
&= (r^2[-4] - r[-1] + 1 - r^{-1}[-1] + r^{-2}[-4]) + (-r^{12} + r^{11} - r^{10} + \cdots)q \\
&\quad + (-r^{17}[-1] + r^{16} - r^{15} + \cdots)q^2 + (-r^{19} + 2r^{18} - 3r^{17} + \cdots)q^3 \\
&\quad + (-r^{21} + 2r^{20} - 4r^{19} + \cdots)q^4 + (r^{27}[-9] - r^{26} + r^{25} + \cdots)q^5 \\
&\quad + (r^{29} - 2r^{28} + 3r^{27} + \cdots)q^6 + (r^{32}[-16] - r^{30} + 3r^{29} + \cdots)q^7 \\
&\quad + (r^{34}[-4] - r^{33} + r^{32} - 3r^{30} + \cdots)q^8 + O(q^9); \\
\xi^{(3)}_{0,36} &= \big[(-36\phi^4_{0,3} + 56\phi^3_{0,4})\phi^3_{0,4}\phi^3_{0,3}E^2_4 + (45\phi^8_{0,3} - 126\phi^3_{0,4}\phi^4_{0,3} + \phi^6_{0,4})\phi^2_{0,4}E_4E_{4,1} \\
&\quad + (-10\phi^8_{0,3} + 126\phi^3_{0,4}\phi^4_{0,3} - 8\phi^6_{0,4})\phi_{0,4}\phi_{0,3}E_4E_{4,2} \\
&\quad + (\phi^8_{0,3} - 84\phi^3_{0,4}\phi^4_{0,3} + 28\phi^6_{0,4})\phi^2_{0,3}E_{4,1}E_{4,2}\big]E_{4,3}/\Delta \\
&\quad +\big[770\phi^6_{0,4}\phi^2_{0,3} - 731\phi^7_{0,4}\phi_{0,2} - 731\phi^6_{0,4}\phi^3_{0,2} + 2924\phi^5_{0,4}\phi^2_{0,3}\phi^2_{0,2} \\
&\quad - 3655\phi^4_{0,4}\phi^4_{0,3}\phi_{0,2} - 29\phi^4_{0,4}\phi^2_{0,3}\phi^4_{0,2} + 133\phi^3_{0,4}\phi^4_{0,3}\phi^3_{0,2} + 1472\phi^3_{0,4}\phi^6_{0,3} \\
&\quad - 225\phi^2_{0,4}\phi^6_{0,3}\phi^2_{0,2} + 167\phi_{0,4}\phi^8_{0,3}\phi_{0,2} - 46\phi^{10}_{0,3}\big]D_{0,6} \\
&\quad + (72\phi^4_{0,3} - 112\phi^3_{0,4})\phi^3_{0,4}\phi^3_{0,3}\phi^3_{0,1} + \big[-731\phi^6_{0,4}\phi^3_{0,2} + 1462\phi^5_{0,4}\phi^2_{0,3}\phi^2_{0,2} \\
&\quad + (-126\phi_{0,4}\phi^8_{0,3} + 1039\phi^4_{0,4}\phi^4_{0,3} - 733\phi^7_{0,4})\phi_{0,2} \\
&\quad + 29\phi^{10}_{0,3} - 1615\phi^3_{0,4}\phi^6_{0,3} - 714\phi^6_{0,4}\phi^2_{0,3}\big]\phi_{0,4}\phi^2_{0,1} \\
&\quad + \big[12425\phi^6_{0,4}\phi_{0,3}\phi^4_{0,2} - 50600\phi^5_{0,4}\phi^3_{0,3}\phi^3_{0,2} \\
&\quad + (67608\phi^4_{0,4}\phi^5_{0,3} + 20633\phi^7_{0,4}\phi_{0,3})\phi^2_{0,2} - (3\phi^{11}_{0,3} + 37314\phi^3_{0,4}\phi^7_{0,3}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\quad + 35785\phi_{0,4}^{6}\phi_{0,3}^{3})\phi_{0,2} + 8144\phi_{0,4}^{2}\phi_{0,3}^{9} + 17917\phi_{0,4}^{5}\phi_{0,3}^{5} + 8005\phi_{0,4}^{8}\phi_{0,3}]\phi_{0,1} \\
&\quad - 29\phi_{0,4}^{5}\phi_{0,2}^{8} + 162\phi_{0,4}^{4}\phi_{0,3}^{2}\phi_{0,2}^{7} - (358\phi_{0,3}^{4} + 10464\phi_{0,4}^{3})\phi_{0,4}^{3}\phi_{0,2}^{6} \\
&\quad + (392\phi_{0,3}^{4} + 45141\phi_{0,4}^{3})\phi_{0,4}^{2}\phi_{0,3}^{2}\phi_{0,2}^{5} - (213\phi_{0,3}^{8} + 66918\phi_{0,4}^{3}\phi_{0,3}^{4} \\
&\quad + 30811\phi_{0,4}^{6})\phi_{0,4}\phi_{0,2}^{4} + (46\phi_{0,3}^{8} + 43947\phi_{0,4}^{3}\phi_{0,3}^{4} + 83053\phi_{0,4}^{6})\phi_{0,3}^{2}\phi_{0,2}^{3} \\
&\quad - (14354\phi_{0,3}^{8} + 64611\phi_{0,4}^{3}\phi_{0,3}^{4} + 30093\phi_{0,4}^{6})\phi_{0,4}^{2}\phi_{0,2}^{2} \\
&\quad + (3426\phi_{0,3}^{8} - 496\phi_{0,4}^{3}\phi_{0,3}^{4} + 37331\phi_{0,4}^{6})\phi_{0,4}\phi_{0,3}^{2}\phi_{0,2} - 569\phi_{0,3}^{12} \\
&\quad + 3899\phi_{0,4}^{3}\phi_{0,3}^{8} - 455\phi_{0,4}^{6}\phi_{0,3}^{4} - 9861\phi_{0,4}^{9} - 83\xi_{0,36}^{(1)} \\
&= q^{-1}[-144] + 24 + (24r^{12} + 72r^{11} + \cdots)q \\
&\quad + (4r^{18}[-36] + 144r^{16} + 672r^{15} + \cdots)q^{2} + (144r^{20} + 1008r^{19} + \cdots)q^{3} \\
&\quad + (24r^{24} + 288r^{23} + \cdots)q^{4} + (8r^{27}[-9] + 216r^{26} + 3096r^{25} + \cdots)q^{5} \\
&\quad + (72r^{29} + 1584r^{28} + 15720r^{27} + \cdots)q^{6} + (9r^{32}[-16] + 288r^{31} \\
&\quad + 5304r^{30} + \cdots)q^{7} + (672r^{33} + 12096r^{32} + \cdots)q^{8} + O(q^{9}),
\end{aligned}
$$

где

$$
\begin{aligned}
D_{0,6} &= \bigl(\vartheta(\tau,z)/\eta(q)\bigr)^{12} = -\phi_{0,1}^{2}\phi_{0,4} + 9\phi_{0,1}\phi_{0,2}\phi_{0,3} - 8\phi_{0,2}^{3} - 27\phi_{0,3}^{2} \\
&= q(r^{6} - 12r^{5} + 66r^{4} - 220r^{3} + 495r^{2} - 792r + 924 - \cdots) + q^{2}(\dots)
\end{aligned}
$$

– образующая идеала слабых форм Якоби веса 0 без q^0-члена (см. [33]). Имеем

$$
P(\mathscr{M}_0) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 18 & 1 \\ 5 & 27 & 1 \\ 7 & 32 & 1 \end{pmatrix}; \quad G(P(\mathscr{M}_0)) = \begin{pmatrix} 4 & -2 & -72 & -36 & -18 & -8 \\ -2 & 1 & 0 & -18 & -27 & -32 \\ -72 & 0 & 144 & -72 & -288 & -432 \\ -36 & -18 & -72 & 36 & -18 & -72 \\ -18 & -27 & -288 & -18 & 9 & 0 \\ -8 & -32 & -432 & -72 & 0 & 16 \end{pmatrix};
$$

$$
\overline{R} = \begin{bmatrix} 1, & \overline{1} \\ 1, & \overline{17} \\ 4, & \overline{2} \\ 4, & \overline{34} \\ 9, & \overline{27} \\ 16, & \overline{32} \\ 36, & \overline{18} \\ 144, & \overline{0} \end{bmatrix}; \quad \mathrm{Mul}(\overline{R},\xi) = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 12 \\ 3 & 1 & 9 \\ 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.
$$

2.6. Список алгебр теоремы 2.1.1. В приводимой ниже таблице 2 дается список всех лоренцевых алгебр Каца–Муди теоремы 2.1.1. Для каждой алгебры из списка ее бесконечное произведение в тождестве для знаменателя определяется бесконечным произведением теоремы 2.2.1 для некоторой формы ξ из пространства RJ_t, которое описано в таблице 1 из п. 2.5 его базисом. Это бесконечное произведение характеризуется свойством, что его кратности равны 0 или 1 в любом квадратичном дивизоре, ортогональном корню решетки L_t. Так как форма B_ξ рефлективна, это полный дивизор формы B_ξ. Мы обозначаем соответствующую лоренцеву алгебру Каца–Муди как $\mathfrak{g}(\xi)$, так как она определяется формой Якоби ξ.

Также описывается разложение Фурье автоморфной формы B_ξ, которое дает бесконечную сумму в тождестве для знаменателя алгебры $\mathfrak{g}(\xi)$. Для некоторых из этих форм известно только его рациональное выражение через известные разложения Фурье. Эти результаты были получены в [36], [37], [39], [41]. Следует сказать, что эти вычисления очень нетривиальны, так как не существует общего метода для нахождения этих разложений Фурье. В данной статье мы не обсуждаем эти вычисления.

Описывается фундаментальная камера $\mathcal{M}$ и множество $P(\mathcal{M})$ ортогональных корней к $\mathcal{M}$, определяющее группу Вейля и множество вещественных простых корней алгебры $\mathfrak{g}(\xi)$. Также дается подмножество $P(\mathcal{M})_{\overline{1}} \subset P(\mathcal{M})$ нечетных корней. Это означает, что соответствующие образующие e_α, f_α, $\alpha \in P(\mathcal{M})_{\overline{1}}$, должны быть супер-образующими (нечетными). Если множество $P(\mathcal{M})_{\overline{1}}$ не указывается, оно пусто. Также дается обобщенная матрица Картана

$$A = \left(\frac{2(\alpha_i, \alpha_j)}{\alpha_i^2}\right), \qquad \alpha_i, \alpha_j \in P(\mathcal{M}),$$

которая является основным инвариантом алгебры. Многие их этих матриц будут матрицами теоремы 1.5.6 или рассматривались в [41; п. 5.1]. Тогда мы следуем используемым там обозначениям. Дается также вектор Вейля ρ.

Все эти многоугольники $\mathcal{M}$ сложены из фундаментального многоугольника $\mathcal{M}_0$ для $W(S_t)$ с помощью некоторой группы симметрий многоугольника $\mathcal{M}$. Эти симметрии применяются для описания множеств $P(\mathcal{M})$ и $P(\mathcal{M})_{\overline{1}}$, используя множество $P(\mathcal{M}_0)$. Элементы $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ множества $P(\mathcal{M}_0)$ нумеруются согласно таблице 1. Через s_α обозначается отражение в корне α. Оно дается формулой

$$s_\alpha\colon\, x \to x - \frac{2(x,\alpha)}{\alpha^2}\alpha, \qquad x \in S_t^*.$$

Через $[g_1, \dots, g_k]$ обозначается группа, порожденная $g_1, \dots, g_k$.

Таблица 2. Список всех лоренцевых алгебр Каца–Муди с решеткой корней S_t^*, решеткой симметрии L_t^* и группой симметрии $\widehat{O}(L_t)$

Случай $t = 1$

Алгебра $\mathfrak{g}(\xi_{0,1}^{(1)})$. Фундаментальная камера $\mathcal{M} = [s_{\alpha_1}, s_{\alpha_3}](\mathcal{M}_0)$ является правильным треугольником с нулевыми углами. Имеем

$$P(\mathcal{M}) = [s_{\alpha_1}, s_{\alpha_3}](\alpha_2) = \{(0,-1,0),\ (1,1,0),\ (0,1,1)\}$$

с группой симметрий $[s_{\alpha_1}, s_{\alpha_3}]$, которая является группой диэдра D_3 порядка 6 (мы используем то же обозначение и в общем случае для группы диэдра D_n). Обобщенная матрица Картана есть

$$A_{1,II} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -2 \\ -2 & 2 & -2 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Вектор Вейля есть $\rho = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. Автоморфная форма $B_{\xi_{0,1}^{(1)}}$ совпадает с классической автоморфной формой Δ_5 веса 5, которая является произведением (деленным на 64) десяти четных тэта-констант рода 2. Эта автоморфная форма также дает дискриминант алгебраических кривых рода 2. Согласно Маассу [55]

$$\Delta_5 = \sum_{\substack{n,l,m \equiv 1 \bmod 2 \\ n,m>0}} \sum_{d|(n,l,m)} (-1)^{\frac{l+d+2}{2}} d^4 \tau_9\left(\frac{4nm - l^2}{d^2}\right) q^{n/2}\, r^{l/2}\, s^{m/2},$$

где $\eta(\tau)^9 = \sum_{n \geqslant 1} \tau_9(n) q^{n/24}$ (см. §3, (3.4) по поводу $\eta(\tau)$). Это дает бесконечную сумму в тождестве для знаменателя алгебры $\mathfrak{g}(\xi_{0,1}^{(1)})$. Таким образом, тождество для знаменателя алгебры $\mathfrak{g}(\xi_{0,1}^{(1)})$ имеет вид

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{n,l,m \equiv 1 \bmod 2 \\ n,m>0}} \sum_{a|(n,l,m)} (-1)^{\frac{l+a+2}{2}} a^4 \tau_9\left(\frac{4nm - l^2}{a^2}\right) q^{n/2}\, r^{l/2}\, s^{m/2} \\ = (qrs)^{1/2} \prod_{\substack{n,l,m \in \mathbb{Z} \\ (n,l,m)>0}} \left(1 - q^n r^l s^m\right)^{f_1(nm,l)}, \qquad (2.6.1)\end{aligned}$$

где

$$\xi_{0,1}^{(1)}(\tau, z) = \phi_{0,1}(\tau, z) = \sum_{k,l \in \mathbb{Z}} f_1(k,l) q^k r^l$$

– разложение Фурье формы Якоби $\xi_{0,1}^{(1)} = \phi_{0,1}$ из таблицы 1, случай $t = 1$, и $\phi_{0,1}$ описана в §3, (3.13). См. детали для этого случая в [36], [37], [41].

Тождества для знаменателя, подобные (2.6.1), могут быть аналогично выписаны во всех приводимых ниже случаях (так как известны разложения Фурье соответствующих автоморфных форм ξ и B_ξ). Мы оставляем это читателю.

Алгебра $\mathfrak{g}(\xi_{0,1}^{(2)})$. Камера $\mathcal{M} = \mathcal{M}_0$ – треугольник с углами $0, \pi/2, \pi/3$. Множество $P(\mathcal{M}) = P(\mathcal{M}_0)$, $P(\mathcal{M})_{\bar{1}} = \{\alpha_2\}$. Обобщенная матрица Картана равна

$$A_{1,I,\bar{0}} = A_{1,I,\bar{1}} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -4 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Вектор Вейля есть $\rho = (\frac{5}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2})$. Автоморфная форма $B_{\xi_{0,1}^{(2)}}$ совпадает с модулярной формой Игузы $\Delta_{30} = \Delta_{35}/\Delta_5$ веса 30 [46]. См. [39], [41]. Разложение Фурье формы Δ_{35} найдено Игузой в [46]. Другое выражение для разложения Фурье формы Δ_{35} как произведения Гекке формы Δ_5 найдено в [39]. Пусть

$$\begin{aligned}[\Delta_5(z)]_{T(2)} = &\prod_{a,b,c \bmod 2} \Delta_5\left(\frac{z_1 + a}{2}, \frac{z_2 + b}{2}, \frac{z_3 + c}{2}\right) \\ &\times \prod_{a \bmod 2} \Delta_5\left(\frac{z_1 + a}{2}, z_2, 2z_3\right) \Delta_5\left(2z_1, z_2, \frac{z_3 + a}{2}\right) \\ &\times \Delta_5(2z_1, 2z_2, 2z_3) \prod_{b \bmod 2} \Delta_5\left(2z_1, -z_1 + z_2, \frac{z_1 - 2z_2 + z_3 + b}{2}\right).\end{aligned}$$

В [39] показано, что

$$\Delta_{35}(z)=\frac{[\Delta_5(z)]_{T(2)}}{\Delta_5(z)^8}.$$

Таким образом, $\Delta_{30}(z)=[\Delta_5(z)]_{T(2)}/\Delta_5(z)^9$. Это дает разложение Фурье форм Δ_{35} и Δ_{30} как конечных произведений и частных известных разложений Фурье. См. детали в [39] и [41].

Алгебра $\mathfrak{g}(\xi_{0,1}^{(1)}+\xi_{0,1}^{(2)})$. Камера $\mathscr{M}=\mathscr{M}_0$ (та же, что и для $\mathfrak{g}(\xi_{0,1}^{(2)})$), и

$$P(\mathscr{M})=\{\alpha_1,2\alpha_2,\alpha_3\}.$$

Обобщенная матрица Картана равна

$$A_{1,0}=\begin{pmatrix} 2 & -2 & -1\\ -2 & 2 & 0\\ -1 & 0 & 2\end{pmatrix}.$$

Вектор Вейля есть $\rho=(3,1,2)$. Автоморфная форма $B_{\xi_{0,1}^{(1)}+\xi_{0,1}^{(2)}}$ совпадает с модулярной формой Игузы Δ_{35} веса 35 (см. [46]), которая уже рассматривалась.

Случай $t=2$

Алгебра $\mathfrak{g}(\xi_{0,2}^{(1)})$. Камера $\mathscr{M}=[s_{\alpha_1},s_{\alpha_3}](\mathscr{M}_0)$ является правильным четырехугольником с нулевыми углами; множество

$$P(\mathscr{M})=[s_{\alpha_1},s_{\alpha_3}](\alpha_2)=\{(0,-1,0),\ (1,1,0),\ (1,3,1),\ (0,1,1)\}$$

с группой симметрий $[s_{\alpha_1},s_{\alpha_3}]$, равной D_4. Обобщенная матрица Картана равна

$$A_{2,II}=\begin{pmatrix} 2 & -2 & -6 & -2\\ -2 & 2 & -2 & -6\\ -6 & -2 & 2 & -2\\ -2 & -6 & -2 & 2\end{pmatrix}.$$

Вектор Вейля есть $\rho=(\frac{1}{4},\frac{1}{2},\frac{1}{4})$. Автоморфная форма $B_{\xi_{0,2}^{(1)}}$ совпадает с автоморфной формой Δ_2 веса 2, введенной в [36] и [41]. Ее разложение Фурье равно

$$\Delta_2=\sum_{N\geqslant 1}\ \sum_{\substack{n,m>0,l\in\mathbb{Z}\\ n,m\equiv 1 \mod 4\\ 2nm-l^2=N^2}} N\left(\frac{-4}{Nl}\right)\sum_{a|(n,l,m)}\left(\frac{-4}{a}\right)q^{n/4}r^{l/2}s^{m/4}.$$

Здесь $\left(\frac{m}{n}\right)$ – символ Якоби (или обобщенный символ Лежандра).

Алгебра $\mathfrak{g}(\xi_{0,2}^{(2)})$. Камера $\mathscr{M}=[s_{\alpha_3}](\mathscr{M}_0)$ является треугольником с углами $0,0,\pi/2$. Множество

$$P(\mathscr{M})=\{\alpha_1,\alpha_2,s_{\alpha_3}(\alpha_1)=(0,2,1)\},\qquad P(\mathscr{M})_{\overline{1}}=\{\alpha_2\}$$

с группой симметрий $[s_{\alpha_3}]$, равной D_1. Обобщенная матрица Картана равна

$$A_{2,I,\overline{0}}=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0\\ -4 & 2 & -4\\ 0 & -1 & 2\end{pmatrix}.$$

Вектор Вейля есть $\rho=(\frac{3}{4},\frac{1}{2},\frac{3}{4})$. Автоморфная форма $B_{\xi_{0,2}^{(2)}}$ совпадает с автоморфной формой $\Delta_9=\Delta_{11}/\Delta_2$ веса 9 из [41]. Имеются две формулы для разложения Фурье формы Δ_{11}. Эта автоморфная форма является подъемом своего первого коэффициента Фурье–Якоби:

$$\Delta_{11}(z)=\mathrm{Lift}(\eta(z_1)^{21}\vartheta(z_1,2z_2)).$$

Это дает простую точную формулу для коэффициентов Фурье формы Δ_{11} в терминах коэффициентов Фурье формы Якоби $\eta(z_1)^{21}\vartheta(z_1,2z_2)$. Эта формула аналогична приведенной выше формуле для Δ_5 (см. [41; пример 1.15]).

Второе выражение для разложения Фурье формы Δ_{11} дается мультипликативной симметризацией формы Δ_5 для $t=1$. Пусть

$$\mathrm{Ms}_2(\Delta_5)(z_1,z_2,z_3)=\Delta_5(z_1,2z_2,4z_3)\Delta_5(z_1,z_2,z_3)\Delta_5(z_1,z_2,z_3+1).$$

В силу [41; (3.10)],

$$\Delta_{11}(z)=\frac{\mathrm{Ms}_2(\Delta_5)(z)}{\Delta_2(z)^2}.$$

Таким образом, $\Delta_9=\mathrm{Ms}_2(\Delta_5)(z)/\Delta_2(z)^3$. Это дает разложение Фурье формы Δ_9 как конечного произведения и частного известных разложений Фурье. См. детали в [39], [41].

Алгебра $\mathfrak{g}(\xi_{0,2}^{(1)}+\xi_{0,2}^{(2)})$. Многоугольник $\mathscr{M}=[s_{\alpha_3}](\mathscr{M}_0)$ является треугольником с углами $0,0,\pi/2$ (тем же самым, что и для $\xi_{0,2}^{(2)}$); множество

$$P(\mathscr{M})=\{\alpha_1,2\alpha_2,s_{\alpha_3}(\alpha_1)=(0,2,1)\}$$

с группой симметрий $[s_{\alpha_3}]$, равной D_1. Обобщенная матрица Картана равна

$$A_{2,0}=\begin{pmatrix} 2 & -2 & 0\\ -2 & 2 & -2\\ 0 & -2 & 2\end{pmatrix}.$$

Вектор Вейля есть $\rho=(1,1,1)$. Автоморфная форма $B_{\xi_{0,2}^{(1)}+\xi_{0,2}^{(2)}}$ совпадает с формой Δ_{11} веса 11. Ее разложение Фурье уже обсуждалось. См. [39], [41].

Алгебра $\mathfrak{g}(\xi_{0,2}^{(3)})$. Камера $\mathscr{M}=[s_{\alpha_1},s_{\alpha_2}](\mathscr{M}_0)$ является бесконечным многоугольником с углами $\pi/2$, который касается орисферы с центром в $\mathbb{R}_{++}\rho$, где $\rho=(1,0,0)$ – вектор Вейля. Множество

$$P(\mathscr{M})=[s_{\alpha_1},s_{\alpha_2}](\alpha_3)$$

с группой симметрий $[s_{\alpha_1}, s_{\alpha_2}]$, равной D_∞. Обобщенная матрица Картана – симметричная матрица

$$A_{2,\overline{1}} = \left(\frac{(\alpha, \alpha')}{4}\right), \qquad \alpha, \alpha' \in P(\mathscr{M}).$$

Автоморфная форма $B_{\xi^{(3)}_{0,2}}$ есть $\Psi^{(2)}_{12}$ веса 12 из [41].

В [41; замечание 4.4] показано, что $\Psi^{(2)}_{12}$ может быть получена как ограничение (возможно с некоторой мультипликативной константой) автоморфной формы Борчердса Φ из (1.3.7). Автоморфная форма Борчердса Φ определена на эрмитовой симметрической области $\Omega(2H \oplus \mathscr{L})$, где $\mathscr{L}$ – решетка Лича. Нужно ограничить Φ на подобласть $\Omega(2H + \mathbb{Z}v)$, где $v \in \mathscr{L}$ – примитивный элемент с $v^2 = 2t$, где $t = 2$ для этого случая. Таким образом, имеем

$$\Psi^{(2)}_{12} = c\Phi \mid \Omega(2H + \mathbb{Z}v),$$

где c – некоторая константа. Это дает некоторое разложение Фурье формы $\Psi^{(2)}_{12}$. Та же самая конструкция имеет место для автоморфных форм $\Psi^{(t)}_{12}$, которые будут рассмотрены ниже для $t = 3$ и $t = 4$.

Алгебра $\mathfrak{g}(\xi^{(1)}_{0,2} + \xi^{(3)}_{0,2})$. Многоугольник $\mathscr{M} = [s_{\alpha_1}](\mathscr{M}_0)$ является четырехугольником с углами $\pi/2, \pi/2, \pi/2, 0$; множество

$$P(\mathscr{M}) = [s_{\alpha_1}]\{\alpha_2, \alpha_3\} = \{\alpha_2, \alpha_3, (1,4,1), (1,1,0)\}$$

с группой симметрий $[s_{\alpha_1}]$, равной D_1. Обобщенная матрица Картана есть

$$A_{2,II,\overline{1}} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -8 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \\ -2 & -8 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Вектор Вейля $\rho = (\frac{5}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4})$. Автоморфная форма $B_{\xi^{(1)}_{0,2}+\xi^{(3)}_{0,2}}$ совпадает с автоморфной формой $\Delta_{14} = \Delta_2\Psi^{(2)}_{12}$ веса 14. (Мы должны так исправить случай $(2, II, \overline{1})$ в [41; с. 264].) Разложение Фурье формы Δ_{14} является произведением разложений Фурье форм Δ_2 и $\Psi^{(2)}_{12}$.

Алгебра $\mathfrak{g}(\xi^{(2)}_{0,2}+\xi^{(3)}_{0,2})$. Многоугольник $\mathscr{M} = \mathscr{M}_0$ – треугольник с углами $0, \pi/2, \pi/4$; множество

$$P(\mathscr{M}) = P(\mathscr{M}_0), \qquad P(\mathscr{M})_{\overline{1}} = \{\alpha_2\}$$

с тривиальной группой симметрий и с обобщенной матрицей Картана

$$A_{2,I,\overline{1}} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ -4 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Вектор Вейля $\rho = (\frac{7}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4})$. Автоморфная форма $B_{\xi^{(2)}_{0,2}+\xi^{(3)}_{0,2}}$ совпадает с автоморфной формой $\Delta_9\Psi^{(2)}_{12}$ веса 21. Ее разложение Фурье является произведением разложений Фурье форм Δ_9 и $\Psi^{(2)}_{12}$.

Алгебра $\mathfrak{g}(\xi_{0,2}^{(1)}+\xi_{0,2}^{(2)}+\xi_{0,2}^{(3)})$. Многоугольник $\mathscr{M}=\mathscr{M}_0$ является треугольником с углами $0, \pi/2, \pi/4$ (тем же самым, что и для $\mathfrak{g}(\xi_{0,2}^{(2)}+\xi_{0,2}^{(3)})$); множество

$$P(\mathscr{M})=\{\alpha_1,\, 2\alpha_2,\, \alpha_3\}$$

с тривиальной группой симметрий и с обобщенной матрицей Картана

$$A_{2,0,\overline{1}}=\begin{pmatrix} 2 & -2 & -2\\ -2 & 2 & 0\\ -1 & 0 & 2\end{pmatrix}.$$

Вектор Вейля равен $\rho=(2,1,1)$. Автоморфная форма $B_{\xi_{0,2}^{(1)}+\xi_{0,2}^{(2)}+\xi_{0,2}^{(3)}}$ совпадает с автоморфной формой $\Delta_2\Delta_9\Psi_{12}^{(2)}$ веса 23. Ее разложение Фурье является произведением разложений Фурье форм Δ_2, Δ_9 и $\Psi_{12}^{(2)}$. См. [41].

Случай $t=3$

Алгебра $\mathfrak{g}(\xi_{0,3}^{(1)})$. Камера $\mathscr{M}=[s_{\alpha_1}, s_{\alpha_3}](\mathscr{M}_0)$ – правильный шестиугольник с нулевыми углами,

$$P(\mathscr{M})=[s_{\alpha_1}, s_{\alpha_3}](\alpha_2)=\{(0,-1,0),\ (1,1,0),\ (2,5,1),\ (2,7,2),\ (1,5,2),\ (0,1,1)\}$$

с группой симметрий $[s_{\alpha_1}, s_{\alpha_3}]$, равной D_6. Обобщенная матрица Картана есть

$$A_{3,II}=\begin{pmatrix} 2 & -2 & -10 & -14 & -10 & -2\\ -2 & 2 & -2 & -10 & -14 & -10\\ -10 & -2 & 2 & -2 & -10 & -14\\ -14 & -10 & -2 & 2 & -2 & -10\\ -10 & -14 & -10 & -2 & 2 & -2\\ -2 & -10 & -14 & -10 & -2 & 2\end{pmatrix}.$$

Вектор Вейля равен $\rho=(\frac{1}{6}, \frac{1}{2}, \frac{1}{6})$. Автоморфная форма $B_{\xi_{0,3}^{(1)}}$ совпадает с автоморфной формой Δ_1 веса 1, введенной в [41]. Ее разложение Фурье есть

$$\Delta_1=\sum_{M\geqslant 1}\ \sum_{\substack{n,m>0,l\in\mathbb{Z}\\ n,m\equiv 1 \bmod 6\\ 4nm-3l^2=M^2}}\left(\frac{-4}{l}\right)\left(\frac{12}{M}\right)\sum_{a\mid(n,l,m)}\left(\frac{6}{a}\right)q^{n/6}r^{l/2}s^{m/6}.$$

См. [39], [41].

Алгебра $\mathfrak{g}(\xi_{0,3}^{(2)})$. Камера $\mathscr{M}=[s_{\alpha_3}](\mathscr{M}_0)$ – треугольник с углами $0, 0, \pi/3$. Множества

$$P(\mathscr{M})=\{\alpha_1, \alpha_2, s_{\alpha_3}(\alpha_1)=(0,2,1)\}, \qquad P(\mathscr{M})_{\overline{1}}=\{\alpha_2\}$$

с группой симметрий $[s_{\alpha_3}]$, равной D_1. Обобщенная матрица Картана равна

$$A_{3,I,\overline{0}}=\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1\\ -4 & 2 & -4\\ -1 & -1 & 2\end{pmatrix}.$$

Вектор Вейля равен $\rho = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. Автоморфная форма $B_{\xi^{(2)}_{0,3}}$ совпадает с автоморфной формой D_6 веса 6, введенной в [41]. Форма D_6 – подъем своего первого коэффициента Фурье–Якоби $\eta(z_1)^{11}\vartheta_{3/2}(z_1, z_2)$, где $\vartheta_{3/2}(\tau, z) = \eta(\tau)\vartheta(\tau, 2z)/\vartheta(\tau, z)$. Таким образом, имеется точная формула для коэффициентов Фурье формы D_6 в терминах коэффициентов Фурье даной формы Якоби (см. [41; пример 1.17]).

Разложение Фурье формы $\Delta_1 D_6$ также дается конечным произведением Гекке формы Δ_1 (аналогичным приведенному выше разложению Фурье формы Δ_{35}). Пусть

$$\begin{aligned}[\Delta_1(z)]_{T(2)} = &\prod_{a,b,c \bmod 2} \Delta_1\left(\frac{z_1+a}{2}, \frac{z_2+b}{2}, \frac{z_3+c}{2}\right)\\ &\times \prod_{a \bmod 2} \Delta_1\left(\frac{z_1+a}{2}, z_2, 2z_3\right)\Delta_1\left(2z_1, z_2, \frac{z_3+a}{2}\right)\\ &\times \Delta_1(2z_1, 2z_2, 2z_3) \prod_{b \bmod 2} \Delta_1\left(2z_1, -z_1+z_2, \frac{z_1-2z_2+z_3+b}{2}\right).\end{aligned}$$

В [41] показано, что

$$\Delta_1(z)D_6(z) = \frac{2^{22}[\Delta_1(z)]_{T(2)}}{\Delta_1(z)^8}.$$

Таким образом, разложение Фурье формы $\Delta_1 D_6$ задается конечными произведениями и частными известных разложений Фурье. См. детали в [39], [41].

Алгебра $\mathfrak{g}(\xi^{(1)}_{0,3} + \xi^{(2)}_{0,3})$. Многоугольник $\mathscr{M} = [s_{\alpha_3}](\mathscr{M}_0)$ – треугольник с углами $0, 0, \pi/3$ (тот же самый, что и для $\xi^{(2)}_{0,3}$); множество

$$P(\mathscr{M}) = \{\alpha_1,\ 2\alpha_2,\ s_{\alpha_3}(\alpha_1) = (0, 2, 1)\}$$

с группой симметрий $[s_{\alpha_3}]$, равной D_2. Обобщенная матрица Картана есть

$$A_{3,0} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ -2 & 2 & -2 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Вектор Вейля равен $\rho = (\frac{2}{3}, 1, \frac{2}{3})$. Автоморфная форма $B_{\xi^{(1)}_{0,3}+\xi^{(2)}_{0,3}}$ равна $\Delta_1 D_6$ веса 7. Разложение Фурье формы $\Delta_1 D_6$ уже обсуждалось. См. [39], [41].

Алгебра $\mathfrak{g}(\xi^{(3)}_{0,3})$. Камера $\mathscr{M} = [s_{\alpha_1}, s_{\alpha_2}](\mathscr{M}_0)$ является бесконечным многоугольником с углами $\pi/3$, касающимся орисферы с центром в векторе Вейля $\rho = (1, 0, 0)$. Множество

$$P(\mathscr{M}) = [s_{\alpha_1}, s_{\alpha_2}](\alpha_3)$$

с группой симметрий $[s_{\alpha_1}, s_{\alpha_2}]$, равной D_∞. Обобщенная матрица Картана является симметричной матрицей

$$A_{3,\overline{1}} = \left(\frac{(\alpha, \alpha')}{6}\right), \qquad \alpha, \alpha' \in P(\mathscr{M}).$$

Автоморфная форма $B_{\xi^{(3)}_{0,3}}$ совпадает с автоморфной формой $\Psi^{(3)}_{12}$ веса 12 из [41]. Как и $\Psi^{(2)}_{12}$, автоморфная форма $\Psi^{(3)}_{12}$ и ее разложение Фурье получаются ограничением автоморфной формы Борчердса Φ из (1.3.7). См. [41; замечание 4.4].

Алгебра $\mathfrak{g}(\xi^{(1)}_{0,3}+\xi^{(3)}_{0,3})$. Многоугольник $\mathscr{M}=[s_{\alpha_1}](\mathscr{M}_0)$ – четырехугольник с углами $0, \pi/2, \pi/3, \pi/2$; множество

$$P(\mathscr{M})=[s_{\alpha_1}]\{\alpha_2,\alpha_3\}=\{\alpha_2,\alpha_3,(2,6,1),(1,1,0)\}$$

с группой симметрий $[s_{\alpha_1}]$, равной D_1. Обобщенная матрица Картана равна

$$A_{3,II,\bar{1}}=\begin{pmatrix} 2 & 0 & -12 & -2\\ 0 & 2 & -1 & -1\\ -1 & -1 & 2 & 0\\ -2 & -12 & 0 & 2\end{pmatrix}.$$

Вектор Вейля равен $\rho=(\frac{7}{6},\frac{1}{2},\frac{1}{6})$. Автоморфная форма $B_{\xi^{(1)}_{0,3}+\xi^{(3)}_{0,3}}$ совпадает с $\Delta_1\Psi^{(3)}_{12}$ веса 13. (Мы должны так исправить случай $(3,II,\bar{1})$ в [41; с. 264].) Ее разложение Фурье является произведением разложений Фурье форм Δ_1 и $\Psi^{(3)}_{12}$.

Алгебра $\mathfrak{g}(\xi^{(2)}_{0,3}+\xi^{(3)}_{0,3})$. Многоугольник $\mathscr{M}=\mathscr{M}_0$ – трегольник с углами $0,\pi/2,\pi/6$; множество

$$P(\mathscr{M})=P(\mathscr{M}_0),\qquad P(\mathscr{M})_{\bar{1}}=\{\alpha_2\}$$

с тривиальной группой симметрий и с обобщенной матрицей Картана

$$A_{3,I,\bar{1}}=\begin{pmatrix} 2 & -1 & -3\\ -4 & 2 & 0\\ -1 & 0 & 2\end{pmatrix}.$$

Вектор Вейля равен $\rho=(\frac{3}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2})$. Автоморфная форма $B_{\xi^{(2)}_{0,3}+\xi^{(3)}_{0,3}}$ совпадает с $D_6\Psi^{(3)}_{12}$ веса 18. См. [41]. Ее разложение Фурье – произведение разложений Фурье форм D_6 и $\Psi^{(3)}_{12}$.

Алгебра $\mathfrak{g}(\xi^{(1)}_{0,3}+\xi^{(2)}_{0,3}+\xi^{(3)}_{0,3})$. Многоугольник $\mathscr{M}=\mathscr{M}_0$ – треугольник с углами $0,\pi/2,\pi/6$ (тот же, что и для $\mathfrak{g}(\xi^{(2)}_{0,3}+\xi^{(3)}_{0,3})$); множество

$$P(\mathscr{M})=\{\alpha_1,2\alpha_2,\alpha_3\}$$

с тривиальной группой симметрий и с обобщенной матрицей Картана

$$A_{3,0,\bar{1}}=\begin{pmatrix} 2 & -2 & -3\\ -2 & 2 & 0\\ -1 & 0 & 2\end{pmatrix}.$$

Вектор Вейля равен $\rho=(\frac{5}{3},1,\frac{2}{3})$. Автоморфная форма $B_{\xi^{(1)}_{0,3}+\xi^{(2)}_{0,3}+\xi^{(3)}_{0,3}}$ равна $\Delta_1 D_6\Psi^{(3)}_{12}$ веса 19. См. [41]. Ее разложение Фурье – произведение разложений Фурье форм Δ_1, D_6 и $\Psi^{(3)}_{12}$.

Случай $t = 4$

Алгебра $\mathfrak{g}(\xi^{(1)}_{0,4})$. Камера $\mathcal{M} = [s_{\alpha_1}, s_{\alpha_3}](\mathcal{M}_0)$ является бесконечным многоугольником с нулевыми углами, касающимся орисферы с центром в $\mathbb{R}_{++}\rho$, где $\rho = (\frac{1}{8}, \frac{1}{2}, \frac{1}{8})$ – вектор Вейля; множество

$$P(\mathcal{M}) = [s_{\alpha_1}, s_{\alpha_3}](\alpha_2)$$

с группой симметрий $[s_{\alpha_1}, s_{\alpha_3}]$, равной D_∞. Обобщенная матрица Картана равна

$$A_{4,II,\overline{0}} = \big(2(\alpha, \alpha')\big), \qquad \alpha, \alpha' \in P(\mathcal{M}).$$

Автоморфная форма $B_{\xi^{(1)}_{0,4}}$ совпадает с $\Delta_{1/2}$ веса $1/2$, являющейся тэта-константой рода 2. Ее разложение Фурье равно

$$\Delta_{1/2} = \frac{1}{2} \sum_{n,m\in\mathbb{Z}} \left(\frac{-4}{n}\right)\left(\frac{-4}{m}\right) q^{n^2/8} r^{nm/2} s^{m^2/8}.$$

См. [41].

Алгебра $\mathfrak{g}(\xi^{(2)}_{0,4})$. Камера $\mathcal{M} = [s_{\alpha_3}](\mathcal{M}_0)$ – треугольник с углами $0, 0, 0$. Множества

$$P(\mathcal{M}) = \{\alpha_1, \alpha_2, s_{\alpha_3}(\alpha_1) = (0,2,1)\}, \qquad P(\mathcal{M})_{\overline{1}} = \{\alpha_2\}$$

с группой симметрий $[s_{\alpha_3}]$, равной D_1. Обобщенная матрица Картана равна

$$A_{4,I,\overline{0}} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ -4 & 2 & -4 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Вектор Вейля равен $\rho = (\frac{3}{8}, \frac{1}{2}, \frac{3}{8})$. Автоморфная форма $B_{\xi^{(2)}_{0,4}}$ совпадает с $\Delta^{(4)}_5/\Delta_{1/2}$ веса $\frac{9}{2}$, где $\Delta^{(4)}_5 = \Delta_5(z_1, 2z_2, z_3)$ и форма $\Delta_5(z)$ использовалась для $t = 1$. Таким образом, $\Delta^{(4)}_5$ имеет разложение Фурье

$$\Delta^{(4)}_5 = \sum_{\substack{n,l,m\equiv 1 \bmod 2\\ n,m>0}} \; \sum_{d|(n,l,m)} (-1)^{\frac{l+d+2}{2}}\, d^4\, \tau_9\left(\frac{4nm-l^2}{d^2}\right) q^{n/2}\, r\, s^{m/2}$$

и разложение Фурье формы $\Delta^{(4)}_5/\Delta_{1/2}$ является частным разложений Фурье форм $\Delta^{(4)}_5$ и $\Delta_{1/2}$. См. [41].

Алгебра $\mathfrak{g}(\xi^{(1)}_{0,4} + \xi^{(2)}_{0,4})$. Многоугольник $\mathcal{M} = [s_{\alpha_3}](\mathcal{M}_0)$ – треугольник с углами $0, 0, 0$ (тот же, что и для $\xi^{(1)}_{0,1}$ и $\xi^{(2)}_{0,4}$); множество

$$P(\mathcal{M}) = \{\alpha_1, 2\alpha_2, s_{\alpha_3}(\alpha_1) = (0,2,1)\}$$

с группой симметрий $[s_{\alpha_3}]$, равной D_1. Обобщенная матрица Картана равна

$$A_{4,0,\overline{0}} = A_{1,II} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -2 \\ -2 & 2 & -2 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

(та же, что и для $\xi_{0,1}^{(1)}$). Вектор Вейля равен $\rho = (\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2})$. Автоморфная форма $B_{\xi_{0,4}^{(1)}+\xi_{0,4}^{(2)}}$ совпадает с формой $\Delta_5^{(4)}(z_1, z_2, z_3) = \Delta_5(z_1, 2z_2, z_3)$ веса 5 с приведенным выше разложением Фурье. Этот случай эквивалентен случаю $\mathfrak{g}(\xi_{0,1}^{(1)})$. См. [41].

Алгебра $\mathfrak{g}(\xi_{0,4}^{(3)})$. Камера $\mathscr{M} = [s_{\alpha_1}, s_{\alpha_2}](\mathscr{M}_0)$ является бесконечным многоугольником с нулевыми углами, касающимся орисферы с центром в $\mathbb{R}_{++}\rho$, где $\rho = (1, 0, 0)$ – вектор Вейля. Множество

$$P(\mathscr{M}) = [s_{\alpha_1}, s_{\alpha_2}](\alpha_3)$$

с группой симметрий $[s_{\alpha_1}, s_{\alpha_2}]$, равной D_∞. Обобщенная матрица Картана – симметричная матрица

$$A_{4,\overline{1}} = \left(\frac{(\alpha, \alpha')}{8}\right), \qquad \alpha, \alpha' \in P(\mathscr{M}).$$

Автоморфная форма $B_{\xi_{0,4}^{(3)}}$ совпадает с автоморфной формой $\Psi_{12}^{(4)}$ веса 12 из [41]. Как и форма $\Psi_{12}^{(2)}$, автоморфная форма $\Psi_{12}^{(4)}$ и ее разложение Фурье могут быть получены ограничением автоморфной формы Борчердса Φ из (1.3.7). См. [41; замечание 4.4].

Алгебра $\mathfrak{g}(\xi_{0,4}^{(1)}+\xi_{0,4}^{(3)})$. Многоугольник $\mathscr{M} = [s_{\alpha_1}](\mathscr{M}_0)$ – четырехугольник с углами $\pi/2, 0, \pi/2, 0$; множество

$$P(\mathscr{M}) = [s_{\alpha_1}]\{\alpha_2, \alpha_3\} = \{\alpha_2, \alpha_3, (3, 8, 1), (1, 1, 0)\}$$

с группой симметрий $[s_{\alpha_1}]$, равной D_1. Обобщенная матрица Картана равна

$$A_{4,II,\overline{1}} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -16 & -2 \\ 0 & 2 & -2 & -1 \\ -1 & -2 & 2 & 0 \\ -2 & -16 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Вектор Вейля равен $\rho = (\frac{9}{8}, \frac{1}{2}, \frac{1}{8})$. Автоморфная форма $B_{\xi_{0,4}^{(1)}+\xi_{0,4}^{(3)}}$ совпадает с $\Delta_{1/2}\Psi_{12}^{(4)}$ веса $\frac{25}{2}$. (Так мы должны исправить случай $(4, II, \overline{1})$ в [41; с. 264].) Ее разложение Фурье – произведение разложений Фурье форм $\Delta_{1/2}$ и $\Psi_{12}^{(4)}$.

Алгебра $\mathfrak{g}(\xi_{0,4}^{(2)} + \xi_{0,4}^{(3)})$. Многоугольник $\mathscr{M} = \mathscr{M}_0$ – треугольник с углами $0, \pi/2, 0$; множества

$$P(\mathscr{M}) = P(\mathscr{M}_0), \qquad P(\mathscr{M})_{\overline{1}} = \{\alpha_2\}$$

с тривиальной группой симметрий и с обобщенной матрицей Картана

$$A_{4,I,\overline{1}} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -4 \\ -4 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Вектор Вейля равен $\rho = (\frac{11}{8}, \frac{1}{2}, \frac{3}{8})$. Автоморфная форма $B_{\xi_{0,4}^{(2)}+\xi_{0,4}^{(3)}}$ совпадает с $\Psi_{12}^{(4)}\Delta_5^{(4)}/\Delta_{1/2}$ веса $\frac{33}{2}$. Ее разложение Фурье – произведение и частное известных разложений Фурье форм $\Psi_{12}^{(4)}$, $\Delta_5^{(4)}$ и $\Delta_{1/2}$. См. [41].

Алгебра $\mathfrak{g}(\xi_{0,4}^{(1)}+\xi_{0,4}^{(2)}+\xi_{0,4}^{(3)})$. Многоугольник $\mathscr{M}=\mathscr{M}_0$ – треугольник с углами $0,\pi/2,0$ (тот же самый, что и для $\mathfrak{g}(\xi_{0,4}^{(2)}+\xi_{0,4}^{(3)})$); множество

$$P(\mathscr{M})=\{\alpha_1,2\alpha_2,\alpha_3\}$$

с тривиальной группой симметрий и с обобщенной матрицей Картана

$$A_{4,0,\bar{1}}=\begin{pmatrix}2&-2&-4\\-2&2&0\\-1&0&2\end{pmatrix}.$$

Вектор Вейля равен $\rho=(\frac{3}{2},1,\frac{1}{2})$. Автоморфная форма $B_{\xi_{0,4}^{(1)}+\xi_{0,4}^{(2)}+\xi_{0,4}^{(3)}}$ совпадает с $\Delta_5^{(4)}\Psi_{12}^{(4)}$ веса 17. Ее разложение Фурье является произведением разложений Фурье форм $\Delta_5^{(4)}$ и $\Psi_{12}^{(4)}$. См. [41].

Случай $t=8$

Алгебра $\mathfrak{g}(\xi_{0,8}^{(2)})$. Камера $\mathscr{M}=[s_{\alpha_3}](\mathscr{M}_0)$ – правильный четырехугольник с нулевыми углами; множество

$$P(\mathscr{M})=[s_{\alpha_3}](\alpha_1,2\alpha_2,\alpha_4)=\{\alpha_1,2\alpha_2,s_{\alpha_3}(\alpha_1)=(0,2,1),\alpha_4\}$$

с группой симметрий $[s_{\alpha_3}]$, равной D_1. Обобщенная матрица Картана равна $A_{2,II}$ (та же, что и для $\mathfrak{g}(\xi_{0,2}^{(1)})$, $t=2$). Вектор Вейля равен $\rho=(\frac{1}{4},1,\frac{1}{4})$. Автоморфная форма $B_{\xi_{0,8}^{(2)}}$ сопадает с $\Delta_2^{(8)}(z_1,z_2,z_3)=\Delta_2(z_1,2z_2,z_3)$ веса 2, где Δ_2 соответствует $\mathfrak{g}(\xi_{0,2}^{(1)})$. Таким образом, разложение Фурье формы $\Delta_2^{(8)}$ есть

$$\Delta_2^{(8)}=\sum_{N\geqslant 1}\sum_{\substack{n,m>0,\,l\in\mathbb{Z}\\ n,m\equiv 1 \bmod 4\\ 2nm-l^2=N^2}}N\left(\frac{-4}{Nl}\right)\sum_{a\mid(n,l,m)}\left(\frac{-4}{a}\right)q^{n/4}r\,s^{m/4}.$$

Этот случай эквивалентен $\mathfrak{g}(\xi_{0,2}^{(1)})$.

Случай $t=9$

Алгебра $\mathfrak{g}(\xi_{0,9}^{(2)})$. Камера $\mathscr{M}=[s_{\alpha_3}](\mathscr{M}_0)$ – многоугольник с углами $0,0,\pi/2,0,\pi/2$; множество

$$P(\mathscr{M})=[s_{\alpha_3}](\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4)=\{\alpha_1,\ \alpha_2,\ s_{\alpha_3}(\alpha_1)=(0,2,1),\ s_{\alpha_3}(\alpha_4)=(1,9,2),\ \alpha_4\},$$
$$P(\mathscr{M})_{\bar{1}}=\{\alpha_2\}$$

с группой симметрий $[s_{\alpha_3}]$, равной D_1. Обобщенная матрица Картана равна

$$\begin{pmatrix}2&-1&-7&-9&0\\-4&2&-4&-18&-18\\-7&-1&2&0&-9\\-4&-2&0&2&-2\\0&-2&-4&-2&2\end{pmatrix}.$$

Вектор Вейля равен $\rho = (\frac{1}{6}, \frac{1}{2}, \frac{1}{6})$. Автоморфная форма $B_{\xi_{0,9}^{(2)}}$ совпадает с автоморфной формой D_2 веса 2 с разложением Фурье

$$D_2 = \sum_{N\geqslant 1} \sum_{\substack{m>0,\, l\in\mathbb{Z}\\ n,m\equiv 1 \bmod 6\\ 4nm-l^2=N^2}} N\left(\frac{-4}{N}\right)\left(\frac{12}{l}\right) \sum_{a|(n,l,m)} \left(\frac{6}{a}\right) q^{n/6} r^{l/2} s^{m/6}.$$

См. [41; (5.1.2)].

Случай $t = 12$

Алгебра $\mathfrak{g}(\xi_{0,12}^{(2)} + \xi_{0,12}^{(3)})$. Камера $\mathscr{M} = [s_{\alpha_3}, s_{\alpha_4}](\mathscr{M}_0)$ является правильным шестиугольником с нулевыми углами; множество

$$\begin{aligned} P(\mathscr{M}) &= [s_{\alpha_3}, s_{\alpha_4}](\alpha_1, 2\alpha_2) \\ &= \{\alpha_1,\ 2\alpha_2,\ s_{\alpha_3}(\alpha_1) = (0,2,1), \\ &\qquad s_{\alpha_4}s_{\alpha_3}(\alpha_1) = (1,10,2),\ s_{\alpha_4}(2\alpha_2) = (2,14,2),\ s_{\alpha_4}(\alpha_1) = (2,10,1)\} \end{aligned}$$

с группой симметрий $[s_{\alpha_3}, s_{\alpha_4}]$, равной D_4. Обобщенная матрица Картана равна $A_{3,II}$ (та же, что и для $\mathfrak{g}(\xi_{0,3}^{(1)})$). Вектор Вейля равен $(\frac{1}{6}, 1, \frac{1}{6})$. Автоморфная форма $B_{\xi_{0,12}^{(2)}+\xi_{0,12}^{(3)}}$ равна $\Delta_1^{(12)}(z_1, z_2, z_3) = \Delta_1(z_1, 2z_2, z_3)$ веса 1, где Δ_1 соответствует $\mathfrak{g}(\xi_{0,3}^{(1)})$. Таким образом, разложение Фурье формы $\Delta_1^{(12)}$ равно

$$\Delta_1^{(12)} = \sum_{M\geqslant 1} \sum_{\substack{n,m>0,\, l\in\mathbb{Z}\\ n,m\equiv 1 \bmod 6\\ 4nm-3l^2=M^2}} \left(\frac{-4}{l}\right)\left(\frac{12}{M}\right) \sum_{a|(n,l,m)} \left(\frac{6}{a}\right) q^{n/6} r\, s^{m/6}.$$

Этот случай эквивалентен рассмотренному случаю $\mathfrak{g}(\xi_{0,3}^{(1)})$.

Случай $t = 16$

Алгебра $\mathfrak{g}(\xi_{0,16}^{(1)})$. Камера $\mathscr{M} = [s_{\alpha_3}, s_{\alpha_4}](\mathscr{M}_0)$ является бесконечным многоугольником с нулевыми углами, касающимся орисферы с центром в $\mathbb{R}_{++}\rho$, где $\rho = (\frac{1}{8}, 1, \frac{1}{8})$ – вектор Вейля. Множество

$$P(\mathscr{M}) = [s_{\alpha_3}, s_{\alpha_4}](\alpha_1, 2\alpha_2, \alpha_5)$$

с группой симметрий $[s_{\alpha_3}, s_{\alpha_4}]$, равной D_∞. Обобщенная матрица Картана равна

$$\left(\frac{(\alpha, \alpha')}{2}\right), \qquad \alpha, \alpha' \in P(\mathscr{M}),$$

– та же, что и для $\mathfrak{g}(\xi_{0,4}^{(1)})$. Автоморфная форма $B_{\xi_{0,16}^{(1)}}$ совпадает с $\Delta_{1/2}^{(16)}(z_1, z_2, z_3) = \Delta_{1/2}(z_1, 2z_2, z_3)$ веса $1/2$, где $\Delta_{1/2}$ соответствует $\mathfrak{g}(\xi_{0,4}^{(1)})$. Разложение Фурье формы $\Delta_{1/2}^{(16)}$ есть

$$\Delta_{1/2}^{(16)} = \frac{1}{2} \sum_{n,m\in\mathbb{Z}} \left(\frac{-4}{n}\right)\left(\frac{-4}{m}\right) q^{n^2/8} r^{nm} s^{m^2/8}.$$

Этот случай эквивалентен $\mathfrak{g}(\xi_{0,4}^{(1)})$.

Случай $t = 36$

Алгебра $\mathfrak{g}(\xi_{0,36}^{(2)})$. Камера $\mathcal{M} = [s_{\alpha_3}, s_{\alpha_4}](\mathcal{M}_0)$ является бесконечным периодическим многоугольником с углами $\dots, 0, \pi/2, 0, 0, 0, 0, \pi/2, 0, \dots$ с центром $\mathbb{R}_{++}\rho$ на бесконечности, где $\rho = (\frac{1}{24}, \frac{1}{2}, \frac{1}{24})$ – вектор Вейля. Множество

$$P(\mathcal{M}) = [s_{\alpha_3}, s_{\alpha_4}](\alpha_1, \alpha_2, \alpha_5, \alpha_6), \qquad P(\mathcal{M})_{\overline{1}} = [s_{\alpha_3}, s_{\alpha_4}](\alpha_2)$$

с группой симметрий $[s_{\alpha_3}, s_{\alpha_4}]$, равной D_∞. Обобщенная матрица Картана равна

$$\left(\frac{2(\alpha, \alpha')}{(\alpha, \alpha)}\right), \qquad \alpha, \alpha' \in P(\mathcal{M}).$$

Автоморфная форма $B_{\xi_{0,36}^{(2)}}$ совпадает с $D_{1/2}$ веса $1/2$ с разложением Фурье

$$D_{1/2} = \frac{1}{2} \sum_{m,n \in \mathbb{Z}} \left(\frac{12}{n}\right)\left(\frac{12}{m}\right) q^{n^2/24} r^{nm/2} s^{m^2/24}.$$

См. [41; (5.1.3)].

§ 3. Приложение: Модулярные формы Якоби с целыми коэффициентами Фурье

Мы концентрируемся здесь на вычислительных аспектах модулярных форм Якоби (или просто форм Якоби), которые используются в данной статье. Мы стараемся избежать сложных аспектов теории модулярных форм и сделать изложение как можно более кратким. Мы следуем [41], [33], [34].

Рассматриваются формы Якобы относительно группы Якоби Γ^J, которая является полупрямым произведением $\Gamma^J = SL_2(\mathbb{Z}) \ltimes H(\mathbb{Z})$, где $H(\mathbb{Z})$ – целочисленная группа Гейзенберга. Группа $H(\mathbb{Z})$ – центральное расширение $\mathbb{Z}^2$ с помощью $\mathbb{Z}$, которая является центром Γ^J. Через (λ, μ) обозначается элемент $\mathbb{Z}^2$ и через κ – элемент группы $\mathbb{Z}$. Группа Якоби Γ^J может быть отождествлена с $\Gamma_\infty / \{\pm E_4\}$, где Γ_∞ – максимальная параболическая подгруппа группы $Sp_4(\mathbb{Z})$, совпадающая со всеми элементами, сохраняющими прямую.

Бинарный (в $\{\pm 1\}$) характер v_H на $H(\mathbb{Z})$, равный

$$v_H([\lambda, \mu; \kappa]) := (-1)^{\lambda + \mu + \lambda\mu + \kappa},$$

может быть расширен до бинарного характера v_J группы Якоби, если положить $v_J|_{SL_2(\mathbb{Z})} = 1$.

Определение 3.1. Пусть $k \in \mathbb{Z}/2$, $t \in \mathbb{Z}/2$, $t \geqslant 0$ и $v\colon SL_2(\mathbb{Z}) \to \mathbb{C}^*$ – характер (или мультипликативная система) конечного порядка группы $SL_2(\mathbb{Z})$. Голоморфная функция $\phi(\tau, z)$ на $\mathbb{H} \times \mathbb{C}$ (где $\mathbb{H}$ – верхняя полуплоскость $\operatorname{Im}\tau > 0$) называется *слабой формой Якоби* веса k и индекса t относительно группы Γ^J с характером (или мультипликативной системой) v, если

$$\phi\biggl(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}, \frac{z}{c\tau+d}\biggr) = v\biggl(\Bigl(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\Bigr)\biggr)(c\tau+d)^k e^{\frac{2\pi i t c z^2}{c\tau+d}}\phi(\tau, z) \quad \biggl(\Bigl(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\Bigr) \in SL_2(\mathbb{Z})\biggr) \tag{3.1}$$

и

$$\phi(\tau, z+\lambda\tau+\mu) = (-1)^{2t(\lambda+\mu)} e^{-2\pi i t(\lambda^2\tau + 2\lambda z)}\phi(\tau, z) \qquad (\lambda, \mu \in \mathbb{Z}), \tag{3.2}$$

и имеет разложение Фурье типа

$$\phi(\tau, z) = \sum_{n\geqslant 0,\, l\in t+\mathbb{Z}} f(n, l)\exp\left(2\pi i(n\tau + lz)\right). \tag{3.3}$$

Через $J_{k,t}(v)$ обозначается пространство всех слабых форм Якоби веса k и индекса t с v.

Далее $q = \exp(2\pi i\tau)$ и $r = \exp(2\pi i z)$. Таким образом, $\exp\left(2\pi i(n\tau + lz)\right) = q^n r^l$.

Напомним, что η-функция Дедекинда равна

$$\eta(\tau) = q^{\frac{1}{24}} \prod_{n\geqslant 1}(1-q^n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \left(\frac{12}{n}\right) q^{n^2/24}, \tag{3.4}$$

где

$$\left(\frac{12}{n}\right) = \begin{cases} 1, & \text{если } n \equiv \pm 1 \bmod 12, \\ -1, & \text{если } n \equiv \pm 5 \bmod 12, \\ 0, & \text{если } (n, 12) \neq 1. \end{cases}$$

Функция $\eta(\tau)$ является $SL_2(\mathbb{Z})$-модулярной формой веса $1/2$ с некоторой мультипликативной системой v_η, которая принимает значения в корнях 24-й степени из единицы. Функцию $\Delta_{12} = \eta^{24}$ (функцию Рамануджана) можно рассматривать как слабую форму Якоби $\Delta_{12}(\tau, z) = \Delta_{12}(\tau)$ веса 12 и индекса 0, т.е. $\Delta_{12} \in J_{12,0}$. Она использовалась в (1.3.5). Функция Δ_{12} равна нулю только на бесконечности $q = 0$.

Напомним классические ряды Эйзенштейна

$$E_4(\tau) = 1 + 240\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_3(n)q^n, \qquad E_6(\tau) = 1 - 504\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_5(n)q^n, \tag{3.5}$$

где $\sigma_k(n) = \sum_{m|n} m^k$. Они являются $SL_2(\mathbb{Z})$-модулярными формами веса 4 и 6 соответственно. Они дают слабые формы Якоби $E_4 \in J_{4,0}$ и $E_6 \in J_{6,0}$ индекса 0. Имеем $\Delta_{12} = (E_4^3 - E_6^2)/1728$, что дает другую формулу для Δ_{12}. Модулярные формы E_4, E_6 и Δ_{12} порождают над $\mathbb{Z}$ кольцо $SL_2(\mathbb{Z})$-модулярных форм Якоби с целыми коэффициентами. Над $\mathbb{Q}$ аналогичное кольцо имеет две свободные образующие E_4 и E_6.

Функция $\phi(\tau, z)$ называется *почти голоморфной формой Якоби*, если $\Delta^N\phi(\tau, z)$ является слабой формой Якоби для некоторого $N \geqslant 0$ ($\Delta^N\phi(\tau, z) \in J_{k,t}(v)$ для некоторых k, t). Почти голоморфные формы Якоби – наиболее общий класс форм Якоби, которые мы здесь рассматриваем. Они могут иметь полюсы в бесконечности $q = 0$. Их коэффициенты Фурье $f(n, l)$ зависят только от нормы $4tn - l^2$ и $\pm l \bmod 2t$; норма $4tn - l^2$ ненулевых коэффициентов Фурье $f(n, l)$ ограничена снизу. Почти голоморфная форма Якоби голоморфна на бесконечности, если и только если ее ненулевые коэффициенты Фурье имеют неотрицательную норму. Через $J^{nh}_{k,t}$ обозначается пространство всех почти голоморфных форм Якоби веса $k \in \mathbb{Z}/2$ и индекса $t \in \mathbb{Z}/2$, $t \geqslant 0$, с тривиальным $SL_2(\mathbb{Z})$-характером. Соответственно $J_{k,t}$ обозначает подпространство всех слабых форм Якоби.

Опишем образующие кольца $J^{\mathbb{Z}}_{0,*}$ слабых форм Якоби нулевого веса с целыми коэффициентами Фурье.

Тэта-ряд Якоби

$$\begin{aligned}\vartheta(\tau, z) &= \sum_{n\equiv 1 \bmod 2} (-1)^{\frac{n-1}{2}} \exp\left(\frac{\pi i\, n^2}{4}\tau + \pi i\, nz\right) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} \left(\frac{-4}{m}\right) q^{m^2/8}\, r^{m/2} \\ &= -q^{1/8} r^{-1/2} \prod_{n\geqslant 1} (1 - q^{n-1}r)(1 - q^n r^{-1})(1 - q^n) \qquad (3.6)\end{aligned}$$

является голоморфной формой Якоби веса $1/2$ и индекса $1/2$ с мультипликативной системой v_η^3, где

$$\left(\frac{-4}{n}\right) = \begin{cases} \pm 1, & \text{если } n \equiv \pm 1 \bmod 4, \\ 0, & \text{если } (n, 4) \neq 1. \end{cases}$$

Используя $\vartheta(\tau, z)$, получаем слабые формы Якоби

$$\begin{aligned}\phi_{0,\frac{3}{2}}(\tau, z) &= \frac{\vartheta(\tau, 2z)}{\vartheta(\tau, z)} \\ &= r^{-\frac{1}{2}} \prod_{n\geqslant 1} (1 + q^{n-1}r)(1 + q^n r^{-1})(1 - q^{2n-1}r^2)(1 - q^{2n-1}r^{-2}) \in J_{0,\frac{3}{2}}, \qquad (3.7)\end{aligned}$$

$$\phi_{-1,\frac{1}{2}}(\tau, z) = \frac{\vartheta(\tau, z)}{\eta(\tau)^3} = -r^{-\frac{1}{2}} \prod_{n\geqslant 1} (1 - q^{n-1}r)(1 - q^n r^{-1})(1 - q^n)^{-2} \in J_{-1,\frac{1}{2}} \qquad (3.8)$$

и слабые формы Якоби

$$\phi_{0,3}(\tau, z) = \phi_{0,\frac{3}{2}}(\tau, z)^2 = \frac{\vartheta(\tau, 2z)^2}{\vartheta(\tau, z)^2} \in J_{0,3}, \qquad (3.9)$$

$$\phi_{-2,1}(\tau, z) = \phi_{-1,\frac{1}{2}}(\tau, z)^2 = \frac{\vartheta(\tau, z)^2}{\eta(\tau)^6} \in J_{-2,1}. \qquad (3.10)$$

Можно определить две другие слабые формы Якоби с целыми коэффициентами Фурье

$$\phi_{0,2}(\tau,z)=\frac{1}{2}\eta(\tau)^{-4}\sum_{m,n\in\mathbb{Z}}(3m-n)\left(\frac{-4}{m}\right)\left(\frac{12}{n}\right)q^{\frac{3m^2+n^2}{24}}r^{\frac{m+n}{2}}\in J_{0,2}, \tag{3.11}$$

$$\begin{aligned}\phi_{0,4}(\tau,z)=\frac{\vartheta(\tau,3z)}{\vartheta(\tau,z)}&=r^{-1}\prod_{m\geqslant 1}(1+q^{m-1}r+q^{2m-2}r^2)(1+q^mr^{-1}+q^{2m}r^{-2})\\&\times\prod_{\substack{n\equiv 1,2 \bmod 3\\ n\geqslant 1}}(1-q^nr^3)(1-q^nr^{-3})\in J_{0,4}.\end{aligned} \tag{3.12}$$

Слабая форма Якоби $\phi_{0,1}\in J_{0,1}$ с целыми коэффициентами Фурье определяется соотношением

$$4\phi_{0,4}=\phi_{0,1}\phi_{0,3}-\phi_{0,2}^2. \tag{3.13}$$

Используя другое определение, формы Якоби $\phi_{0,1}$ и $\phi_{-2,1}$ были введены в [24]. Формы Якоби $\phi_{0,\frac{1}{2}}$, $\phi_{-1,\frac{1}{2}}$, $\phi_{0,2}$, $\phi_{0,3}$, $\phi_{0,4}$ введены в [41].

В силу [33], кольцо $J_{0,*}^{\mathbb{Z}}$ всех слабых форм Якоби веса 0, целого инекса $*$ и с целыми коэффициентами Фурье порождено над $\mathbb{Z}$ слабыми формами Якоби $\phi_{0,1}$, $\phi_{0,2}$, $\phi_{0,3}$ и $\phi_{0,4}$ с соотношением (3.13).

Ряды Эйзенштейна–Якоби $E_{4,1}\in J_{4,1}$, $E_{4,2}\in J_{4,2}$, $E_{6,1}\in J_{6,1}$, $E_{6,2}\in J_{6,2}$, $E_{6,3}\in J_{6,3}$ (см. общие результаты о рядах Эйзенштейна–Якоби в [24]), имеющие целые коэффициенты Фурье и коэффициент Фурье 1 при q^0r^0, могут быть найдены из соотношений

$$E_4\phi_{0,1}-E_6\phi_{-2,1}=12E_{4,1}, \tag{3.14}$$

$$E_6\phi_{0,1}-E_4^2\phi_{-2,1}=12E_{6,1}, \tag{3.15}$$

$$E_{4,1}\phi_{0,1}-E_{6,1}\phi_{-2,1}=12E_{4,2}, \tag{3.16}$$

$$E_{6,1}\phi_{0,1}-E_4E_{4,1}\phi_{-2,1}=12E_{6,2}, \tag{3.17}$$

$$E_{4,1}\phi_{0,2}-E_4\phi_{0,3}=2E_{4,3}, \tag{3.18}$$

$$E_{6,1}\phi_{0,2}-E_6\phi_{0,3}=2E'_{6,3}, \tag{3.19}$$

$$E'_{6,3}=E_{6,3}+\frac{22}{61}\Delta_{12}\phi_{-2,1}^3. \tag{3.20}$$

В силу [34], кольцо $J_{*,*}^{\mathbb{Z}}$ слабых форм Якоби целого веса и целого индекса с целыми коэффициентами Фурье порождено над $\mathbb{Z}$ слабыми формами Якоби E_4, E_6, Δ_{12}, $E_{4,1}$, $E_{4,2}$, $E_{4,3}$, $E_{6,1}$, $E_{6,2}$, $E'_{6,3}$, $\phi_{0,1}$, $\phi_{0,2}$, $\phi_{0,3}$, $\phi_{0,4}$ и $\phi_{-2,1}$. В [24] доказано, что аналогичное кольцо $J_{*,*}^{\mathbb{Q}}$ над $\mathbb{Q}$ имеет свободные образующие E_4, E_6, $\phi_{0,1}$ и $\phi_{-2,1}$.

Используя $\phi_{0,\frac{3}{2}}(\tau,z)\in J_{0,\frac{3}{2}}$ и $\phi_{-1,\frac{1}{2}}(\tau,z)\in J_{-1,\frac{1}{2}}$, можно получить аналогичные результаты для полуцелого индекса. Используя Δ_{12}, можно обобщить эти результаты на почти голоморфные формы Якоби с целыми коэффициентами. Например, любая голоморфная форма Якоби $\phi_{0,t}\in J_{0,t}^{nh}$, $t\in\mathbb{N}$, с целыми коэффициентами Фурье, подходящая для теоремы 2.2.1, может быть записана как

$$\phi_{0,t}=\frac{P(E_4,E_6,\Delta_{12},E_{4,1},E_{4,2},E_{4,3},E_{6,1},E_{6,2},E'_{6,3},\phi_{0,1},\phi_{0,2},\phi_{0,3},\phi_{0,4},\phi_{-2,1})}{\Delta_{12}^N},$$

где P – полином с целыми коэффициентами и $N\geqslant 0$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] W. L. Baily. Fourier–Jacobi series // Algebraic Groups and Discontinuous Subgroups / ed. A. Borel, G.D. Mostow. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1966. P. 296–300. (Proc. Sympos. Pure Math. V. IX.)

[2] R. Borcherds. Vertex algebras, Kac–Moody algebras, and the monster // Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. 1986. V. 83. №10. P. 3068–3071.

[3] R. Borcherds. Generalized Kac–Moody algebras // J. Algebra. 1988. V. 115. №2. P. 501–512.

[4] R. Borcherds. The monster Lie algebra // Adv. Math. 1990. V. 83. №1. P. 30–47.

[5] R. Borcherds. The monstrous moonshine and monstrous Lie superalgebras // Invent. Math. 1992. V. 109. №2. P. 405–444.

[6] R. Borcherds. Sporadic groups and string theory // Proceedings of the First European Congress of Mathematics, Paris, 1992 / ed. A. Joseph et al. V. I. Basel: Birkhäuser, 1994. P. 411–421. (Progr. Math. V. 119.)

[7] R. Borcherds. Automorphic forms on $O_{s+2,2}(\mathbb{R})$ and infinite products // Invent. Math. 1995. V. 120. №1. P. 161–213.

[8] R. Borcherds. The moduli space of Enriques surfaces and the fake monster Lie superalgebra // Topology. 1996. V. 35. №3. P. 699–710.

[9] R. Borcherds. Automorphic forms with singularities on Grassmanians // Invent. Math. 1998. V. 132. №3. P. 491–562; alg-geom/9609022.

[10] R. Borcherds. What is moonshine? // Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Berlin, 1998. V. I. P. 607–616. (Doc. Math. Extra Volume I.); math.QA/9809110.

[11] R. Borcherds. Vertex algebras // Topological Field Theory, Primitive Forms and Related Topics / ed. M. Kashiwara et al. Boston: Birkhäuser, 1998. P. 35–77. (Progr. Math. V. 160.); q-alg/9706008.

[12] R. Borcherds. Reflection groups of Lorentzian lattices // Duke Math. J. 2000. V. 104. №2. P. 319–366; math.GR/9909123.

[13] R. Borcherds, L. Katzarkov, T. Pantev, N. I. Shepherd-Barron. Families of K3 surfaces // J. Algebraic Geom. 1998. V. 7. №1. P. 183–193; alg-geom/9701013.

[14] J. H. Bruinier. Borcherdsprodukte und Chernsche Klassen von Hirzebruch-Zagier-Zykeln // Dissertation. Universität Heidelberg, 1998.

[15] J. H. Bruinier. Borcherds products and Chern classes of Hirzebruch–Zagier divisors // Invent. Math. 1999. V. 138. №1. P. 51–83.

[16] J. H. Bruinier. Borcherds products on $O(2, l)$ and Chern classes of Heegner divisors // Habilitationsschrift. Universität Heidelberg, 2000.

[17] G. L. Cardoso. Perturbative gravitational couplings and Siegel modular forms in $D = 4$, $N = 2$ string models // Nuclear Phys. B. Proc. Suppl. 1997. V. 56. P. 94–101; hep-th/9612200.

[18] G. L. Cardoso, G. Curio, D. Lüst. Perturbative coupling and modular forms in $N = 2$ string models with a Wilson line // Nuclear Phys. B. 1997. V. 491. №1–2. P. 147–183; hep-th/9608154.

[19] J. H. Conway. The automorphism group of the 26-dimensional even unimodular Lorentzian lattice // J. Algebra. 1983. V. 80. P. 159–163.

[20] J. H. Conway, S. P. Norton. Monstrous moonshine // Bull. London Math. Soc. 1979. V. 11. P. 308–339.

[21] R. Dijkgraaf. The mathematics of fivebranes // Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Berlin, 1998. V. III. P. 133–142. (Doc. Math. Extra Volume III.); hep-th/9810157.

[22] R. Dijkgraaf, G. Moore, E. Verlinde, H. Verlinde. Elliptic genera of symmetric products and second quantized strings // Comm. Math. Phys. 1997. V. 185. №1. P. 197–209; hep-th/9608096.

[23] R. Dijkgraaf, E. Verlinde, H. Verlinde. Counting dyons in $N = 4$ string theory // Nuclear Phys. B. 1997. V. 484. №3. P. 543–561; hep-th/9607026.

[24] M. Eichler, D. Zagier. The Theory of Jacobi Forms. Boston: Birkhäuser, 1985. (Progr. Math. V. 55.)

[25] I. B. Frenkel, J. Lepowsky, A. Meurman. Vertex Operator Algebras and the Monster. Boston: Academic Press, 1988. (Pure Appl. Math. V. 134.)

[26] H. Garland, J. Lepowsky. Lie algebra homology and the Macdonald–Kac formulas // Invent. Math. 1976. V. 34. P. 37–76.

[27] P. Goddard. The work of Richard Ewen Borcherds // Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Berlin, 1998. V. I. P. 99–108. (Doc. Math. Extra Volume I.)

[28] P. Goddard, C. B. Thorn. Compatibility of the dual Pomeron with unitarity and the absence of ghosts in the dual resonance model // Phys. Lett. B. 1972. V. 40. №2. P. 235–238.

[29] В. А. Гриценко. Функции Якоби n переменных // Зап. науч. семин. ЛОМИ. 1988. Т. 168. С. 32–45.

[30] V. A. Gritsenko. Arithmetical lifting and its applications // Number Theory. Proceedings of Paris Seminar 1992–93 / ed. S. David. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1995. P. 103–126. (London Math. Soc. Lecture Note Ser. V. 215.)

[31] В. А. Гриценко. Модулярные формы и пространства модулей абелевых и K3 поверхностей // Алгебра и анализ. 1994. Т. 6. №6. С. 65–102.

[32] V. A. Gritsenko. Irrationality of the moduli spaces of polarized Abelian surfaces // Internat. Math. Res. Notices. 1994. V. 6. P. 235–243. Полная версия опубликована в сб.: Abelian Varieties. Proceedings of the International Conference, Egloffstein, 1993 / ed. W. Barth et al. Berlin: de Gruyter, 1995. P. 63–81.

[33] В. А. Гриценко. Эллиптический род многообразий Калаби–Яо и модулярные формы Якоби и Зигеля // Алгебра и анализ. 1999. Т. 11. №5. С. 100–125; math.AG/9906190.

[34] V. A. Gritsenko. Complex vector bundles and Jacobi forms // Preprint № 76. Bonn: Max Planck Institute of Mathematics, 1999; math.AG/9906191.

[35] V. A. Gritsenko, K. Hulek. Minimal Siegel modular threefolds // Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. 1998. V. 123. №3. P. 461–485; alg-geom/9506017.

[36] V. A. Gritsenko, V. V. Nikulin. Siegel automorphic form corrections of some Lorentzian Kac–Moody Lie algebras // Amer. J. Math. 1997. V. 119. №1. P. 181–224; alg-geom/9504006.

[37] V. A. Gritsenko, V. V. Nikulin. Automorphic correction of a Lorentzian Kac–Moody algebra // C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 1995. V. 321. №9. P. 1151–1156.

[38] V. A. Gritsenko, V. V. Nikulin. K3 surfaces, Lorentzian Kac–Moody algebras and mirror symmetry // Math. Res. Lett. 1996. V. 3. №2. P. 211–229; alg-geom/9510008.

[39] В. А. Гриценко, В. В. Никулин. Модулярные формы Игузы и “самые простые” лоренцевы алгебры Каца–Муди // Матем. сб. 1996. Т. 187. №11. С. 27–66; alg-geom/9603010.

[40] V. A. Gritsenko, V. V. Nikulin. Automorphic forms and Lorentzian Kac–Moody algebras. I // Internat. J. Math. 1998. V. 9. №2. P. 153–199; alg-geom/9610022.

[41] V. A. Gritsenko, V. V. Nikulin. Automorphic forms and Lorentzian Kac–Moody algebras. II // Internat. J. Math. 1998. V. 9. №2. P. 201–275; alg-geom/9611028.

[42] V. A. Gritsenko, V. V. Nikulin. The arithmetic mirror symmetry and Calabi–Yau manifolds // Comm. Math. Phys. 2000. V. 210. №1. P. 1–11; alg-geom/9612002.

[43] V. A. Gritsenko, V. V. Nikulin. A lecture about classification of Lorentzian Kac–Moody algebras of the rank three // Preprint NI00036-SGT. Cambridge: Isaak Newton Institute for Mathematical Sciences, 2000; alg-geom/0010329.

[44] V. A. Gritsenko, V. V. Nikulin. On the classification of meromorphic automorphic products and related Lorentzian Kac–Moody algebras with respect to the extended paramodular group (to appear).

[45] J. Harvey, G. Moore. Algebras, BPS-states, and strings // Nuclear Phys. B. 1996. V. 463. №2–3. P. 315–368; hep-th/9510182.

[46] J. Igusa. On Siegel modular forms of genus two. II // Amer. J. Math. 1964. V. 86. №2. P. 392–412.

[47] V. Kac. Infinite Dimensional Lie Algebras. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1990.

[48] V. Kac. Infinite-dimensional algebras, Dedekind's η-function, classical Möbius function and the very strange formula // Adv. Math. 1978. V. 30. P. 85–136.

[49] V. Kac. Vertex Algebras for Beginners. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1998. (Univ. Lecture Ser. V. 10.)

[50] V. Kac, M. Wakimoto. Integrable highest weight modules over affine superalgebras and number theory // Lie Theory and Geometry / ed. J.-L. Brylinski et al. Boston: Birkhäuser, 1994. P. 415–456. (Progr. Math. V. 123.)

[51] T. Kawai. $N = 2$ heterotic string threshold correction, K3 surfaces and generalized Kac–Moody superalgebra // Phys. Lett. B. 1996. V. 371. №1–2. P. 59–64; hep-th/9512046.

[52] T. Kawai. String duality and modular forms // Phys. Lett. B. 1997. V. 397. P. 51–62; hep-th/9607078.

[53] T. Kawai, K. Yoshioka. String partition functions and infinite products // Adv. Theor. Math. Phys. 2000. V. 4. №2. P. 397-485; hep-th/0002169.

[54] Sh. Kondō. On the Kodaira dimension of the moduli space of K3 surfaces. II // Compositio Math. 1999. V. 116. №2. P. 111–117.

[55] H. Maaß. Über ein Analogon zur Vermutung von Saito–Kurokawa // Invent. Math. 1980. V. 60. P. 85–104.

[56] G. Moore. String duality, automorphic forms, and generalized Kac–Moody algebras // Nuclear Phys. B. Proc. Suppl. 1998. V. 67. P. 56–67; hep-th/9710198.

[57] В. В. Никулин. Целочисленные симметрические билинейные формы и некоторые их геометрические приложения // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1979. Т. 43. №1. С. 111–177.

[58] В. В. Никулин. О фактор-группах групп автоморфизмов целочисленных гиперболических форм по подгруппам, порожденным 2-отражениями. Алгебро-геометрические приложения // Совр. пробл. матем. Т. 18. М.: ВИНИТИ, 1981. С. 3–114.

[59] В. В. Никулин. Об арифметических группах, порожденных отражениями в пространствах Лобачевского // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1980. Т. 44. №3. С. 637–669.

[60] В. В. Никулин. О классификации арифметических групп, порожденных отражениями, в пространствах Лобачевского // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1981. Т. 45. №1. С. 113–142.

[61] V. V. Nikulin. Discrete reflection groups in Lobachevsky spaces and algebraic surfaces // Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Berkeley, 1986. V. 1, 1987. P. 654–669.

[62] V. V. Nikulin. A lecture on Kac–Moody Lie algebras of the arithmetic type // Preprint № 1994-16. Kingston: Queen's University, 1994; alg-geom/9412003.

[63] V. V. Nikulin. Basis of the diagram method for generalized reflection groups in Lobachevsky spaces and algebraic surfaces with nef anticanonical class // Internat. J. Math. 1996. V. 7. №1. P. 71–108.

[64] В. В. Никулин. Группы отражений в пространствах Лобачевского и тождество для знаменателя лоренцевых алгебр Каца–Муди // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1996. Т. 60. №2. С. 73–106; alg-geom/9503003.

[65] V. V. Nikulin. The remark on discriminants of moduli of K3 surfaces as sets of zeros of automorphic forms // J. Math. Sci. 1996. V. 81. №3. P. 2738–2743; alg-geom/9512018.

[66] V. V. Nikulin. K3 surfaces with interesting groups of automorphisms // J. Math. Sci. 1999. V. 95. №1. P. 2028–2048; alg-geom/9701011.

[67] В. В. Никулин. Теория лоренцевых алгебр Каца–Муди // Труды межд. конф., посвящ. 90-летию со дня рожд. Л. С. Понтрягина. Т. 8: Алгебра. М.: ВИНИТИ, 1999. С. 148–167 (Итоги науки и техники. Совр. матем. и ее прил. Темат. обзоры. Т. 69.); math.AG/9810001.

[68] В. В. Никулин. О классификации гиперболических систем корней ранга три // Труды МИАН. 2000. Т. 230. С. 1–241; alg-geom/9711032; alg-geom/9712033; math.AG/9905150.

[69] U. Ray. A character formula for generalized Kac–Moody superalgebras // J. Algebra. 1995. V. 177. №1. P. 154–163.

[70] U. Ray. Generalized Kac–Moody algebras and some related topics // Bull. Amer. Math. Soc. 2001. V. 38. №1. P. 1–42.

[71] Э. Б. Винберг. Отсутствие кристаллографических групп отражений в пространствах Лобачевского большой размерности // Труды ММО. 1984. Т. 47. С. 68–102.
[72] Э. Б. Винберг. Гиперболические группы отражений // УМН. 1985. Т. 40. № 1. С. 29–66.
[73] É. B. Vinberg. Discrete reflection groups in Lobachevsky spaces // Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Warsaw, 1983. V. 1, 1984. P. 593–601.

Université Lille 1, UFR de Mathématiques, France,
С.-Петербургское отделение Математического института РАН;
The University of Liverpool, UK,
Математический институт им. В. А. Стеклова РАН
E-mail: `Valery.Gritsenko@agat.univ-lille1.fr`;
`vnikulin@liv.ac.uk`, `slava@nikulin.mian.su`

Поступила в редакцию
17.01.2002