

# Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. В. Никулин, Теория лоренцевых алгебр Каца–Муди, *Итоги науки и техн. Сер. Соврем. мат. и ее прил. Темат. обз.*, 1999, том 69, 147–167

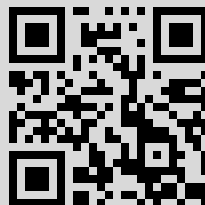
Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 192.168.28.100

17 сентября 2015 г., 17:59:51



УДК 512.554.32

#### IV. ТЕОРИЯ ЛОРЕНЦЕВЫХ АЛГЕБР КАЦА — МУДИ

*В.В. Никулин*

#### СОДЕРЖАНИЕ

|                                                                      |     |
|----------------------------------------------------------------------|-----|
| § 0. Введение . . . . .                                              | 149 |
| § 1. Лоренцевы алгебры Каца — Муди . . . . .                         | 150 |
| 1.1. Некоторые общие результаты по алгебрам Каца —<br>Муди . . . . . | 150 |
| 1.2. Конечный и аффинный случаи . . . . .                            | 152 |
| 1.3. Лоренцев случай. Пример Борчердса . . . . .                     | 152 |
| 1.4. Теория лоренцевых алгебр Каца — Муди . . . . .                  | 156 |
| 1.5. Физические приложения . . . . .                                 | 164 |
| 1.6. Интересная проблема . . . . .                                   | 164 |
| Литература . . . . .                                                 | 164 |

#### § 0. Введение

Лев Семенович Понтрягин был Великим Математиком. Он интересовался многими областями. Одной из них была теория топологических групп, групп Ли и алгебр Ли. Упомяну его классическую книгу “Непрерывные группы” [11], содержащую его результаты.

---

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 97-01-00933).

Я рад представить обзор, который посвящен *лоренцевым* (или *гиперболическим*) алгебрам Ли Каца — Муди, являющимся гиперболическим аналогом классических полупростых конечномерных алгебр Ли. Некоторая теория таких алгебр была недавно развита В.А. Гриценко и автором [4], [24]–[29]. Она тесно связана и существенно использует результаты Р. Борчердса [13]–[17].

## § 1. Лоренцевы алгебры Каца — Муди

**1.1. Некоторые общие результаты по алгебрам Каца — Муди.** Все определения и детали этого пункта можно найти в классической книге Виктора Каца [33].

*Обобщенная матрица Картана*  $A$  — это квадратная целочисленная матрица конечного ранга, имеющая на диагонали только 2 и вне диагонали только неположительные целые числа. Будем рассматривать только *симметризуемые* обобщенные матрицы Картана  $A$ . Это значит, что существует такая диагональная матрица  $D$  с положительными рациональными диагональными коэффициентами, что  $B = DA$  целочисленна и симметрична. Тогда  $B$  называется *симметризацией* матрицы  $A$ . По определению,  $\text{sign}(A) = \text{sign}(B)$ . Предположим, что матрица  $A$  *неразложима*, т. е. не существует такого разбиения  $I = I_1 \cup I_2$  множества  $I$  индексов матрицы  $A$ , что  $a_{ij} = 0$ , если  $i \in I_1$  и  $j \in I_2$ .

Каждая обобщенная матрица Картана определяет алгебру Ли Каца — Муди  $\mathfrak{g}(A)$  над  $\mathbb{C}$ . *Алгебра Каца — Муди*  $\mathfrak{g}(A)$  задается множествами образующих и их определяющих соотношений, предписываемыми обобщенной матрицей Картана  $A$ . Они были найдены В. Кацем и Р. Муди. Фактически, они являются естественным обобщением классических результатов Киллинга, Картана, Г. Вейля, Шевалле и Серра по конечномерным полупростым алгебрам Ли. Следует ввести образующие  $h_i, e_i, f_i$ ,  $i \in I$ , с определяющими соотношениями

$$\begin{cases} [h_i, h_j] = 0, & [e_i, f_i] = h_i, & [e_i, f_j] = 0, & \text{если } i \neq j, \\ [h_i, e_j] = a_{ij}e_j, & [h_i, f_j] = -a_{ij}f_j, \\ (\text{ad } e_i)^{1-a_{ij}}e_j = (\text{ad } f_i)^{1-a_{ij}}f_j = 0, & \text{если } i \neq j. \end{cases} \quad (1.1)$$

Важное свойство алгебры  $\mathfrak{g}(A)$  заключается в том, что она проста или почти проста: проста после факторизации по известному идеалу.

Отметим некоторые общие свойства алгебр Каца — Муди  $\mathfrak{g}(A)$ .

1. Симметризация  $B$  определяет свободный  $\mathbb{Z}$ -модуль  $Q = \sum_{i \in I} \mathbb{Z} \alpha_i$  с образующими  $\alpha_i$ ,  $i \in I$ , с симметрической билинейной формой  $((\alpha_i, \alpha_j)) = B$ , определяемой симметризацией  $B$ .  $Q$  называется *решеткой корней*. Алгебра  $\mathfrak{g}(A)$  градуирована решеткой корней  $Q$  (по определению образующие  $h_i$ ,  $e_i$ ,  $f_i$  имеют веса 0,  $\alpha_i$ ,  $-\alpha_i$  соответственно):

$$\mathfrak{g}(A) = \bigoplus_{\alpha \in Q} \mathfrak{g}_{\alpha} = \mathfrak{g}_0 \oplus \left( \bigoplus_{\alpha \in \Delta_+} \mathfrak{g}_{\alpha} \right) \oplus \left( \bigoplus_{\alpha \in -\Delta_+} \mathfrak{g}_{\alpha} \right), \quad (1.2)$$

где  $\mathfrak{g}_{\alpha}$  являются конечномерными линейными пространствами,  $[\mathfrak{g}_{\alpha}, \mathfrak{g}_{\beta}] \subset \mathfrak{g}_{\alpha+\beta}$ , подалгебра  $\mathfrak{g}_0 \equiv Q \otimes \mathbb{C}$  коммутативна и называется *подалгеброй Картана*. Элемент  $0 \neq \alpha \in Q$  называется *корнем*, если  $\mathfrak{g}_{\alpha} \neq 0$ . Подпространство  $\mathfrak{g}_{\alpha}$  называется *корневым пространством*, соответствующим  $\alpha$ . Размерность  $\text{mult}(\alpha) = \dim \mathfrak{g}_{\alpha}$  называется *кратностью* корня  $\alpha$ . В (1.2)  $\Delta \subset Q$  является множеством всех корней. Оно делится на множество  $\Delta_+ \subset \sum_{i \in I} \mathbb{Z}_+ \alpha_i$  *положительных* и множество  $-\Delta_+$  *отрицательных* корней. Корень  $\alpha \in \Delta$  называется *вещественным*, если  $(\alpha, \alpha) > 0$ . В противном случае (если  $(\alpha, \alpha) \leq 0$ ) он называется *мнимым*. Каждый вещественный корень  $\alpha$  определяет отражение  $s_{\alpha} : x \mapsto x - (2(x, \alpha)/(\alpha, \alpha)) \alpha$ ,  $x \in Q$ . Все отражения  $s_{\alpha}$  в вещественных корнях порождают группу Вейля  $W \subset O(S)$ . Множество корней  $\Delta$  и кратности корней инвариантны относительно  $W$ .

2. Имеется *тождество Вейля — Каца для знаменателя*, которое позволяет вычислять кратности корней:

$$e(-\rho) \prod_{\alpha \in \Delta_+} (1 - e(-\alpha))^{\text{mult}(\alpha)} = \sum_{w \in W} \det(w) e(-w(\rho)). \quad (1.3)$$

Здесь  $e(\cdot) \in \mathbb{Z}[Q]$  — формальные экспоненты,  $\rho$  называется *вектором Вейля* и определяется условием  $(\rho, \alpha_i) = -(\alpha_i, \alpha_i)/2$  для любого  $i \in I$ .

Тождество (1.3) является комбинаторным, и формулы для кратностей  $\text{mult}(\alpha)$  в общем случае не известны. Один из подходов к решению этой проблемы заключается в замене формальной функции (1.3) на неформальную (например, заменой формальных экспонент на неформальные), при которой получается

функция с "хорошими" свойствами. Эти хорошие свойства могут помочь найти формулы для кратностей.

**1.2. Конечный и аффинный случаи.** Имеются два случая, когда есть очень ясная картина (или теория) алгебр Каца — Муди.

*Конечный случай.* Обобщенная матрица Картана  $A$  положительно определена,  $A > 0$ . Тогда алгебра  $\mathfrak{g}(A)$  конечномерна, следовательно, получаем классическую теорию *конечномерных полупростых алгебр Ли*.

*Аффинный случай.* Обобщенная матрица Картана полуположительно определена,  $A \geq 0$ . Тогда алгебра  $\mathfrak{g}(A)$  называется *аффинной*.

В обоих случаях имеются три очень хороших свойства:

(I) Имеется классификация всех возможных обобщенных матриц Картана  $A$ . Они классифицируются диаграммами Дынкина в конечном случае и расширенными диаграммами Дынкина в аффинном случае.

(II) В тождестве для знаменателя (1.3) формальные экспоненты могут быть заменены на неформальные, что дает функцию с очень хорошими свойствами. В конечном случае получается полином. В аффинном случае получается автоморфная форма Якоби. Используя эти свойства (или непосредственно), можно вычислить все кратности.

(III) Оба случая чрезвычайно важны в математике и физике.

Хотелось бы построить подобную теорию для *лоренцева (или гиперболического) случая*, когда обобщенная матрица Картана  $A$  *гиперболична*, т. е. имеет ровно один отрицательный квадрат, все ее остальные квадраты являются положительными или нулевыми. Имеется необозримое множество гиперболических обобщенных матриц Картана, найти их все и классифицировать невозможно. С другой стороны, вероятно, не все они дают интересные алгебры Каца — Муди, поэтому следует найти естественные условия на эти матрицы.

**1.3. Лоренцев случай. Пример Борчердса.** Имеется следующий ключевой пример, найденный Р. Борчердсом [13]–[17].

В примере Борчердса решетка корней  $Q = S$ , где  $S$  — гиперболическая четная унимодулярная решетка сигнатуры  $(25, 1)$ . Здесь "четная" означает, что  $(x, x)$  четно для любого  $x \in S$ .

“Унимодулярная” означает, что двойственная решетка  $S^*$  совпадает с  $S$  эквивалентно, для базиса  $e_1, \dots, e_{26}$  решетки  $S$  определитель матрицы Грама  $((e_i, e_j))$  равен  $\pm 1$ . Решетка  $S$  с такими свойствами единственна с точностью до изоморфизма. В примере Борчердса группа Вейля  $W$  порождена отражениями  $s_\alpha : x \mapsto x - (x, \alpha)\alpha$ ,  $x \in S$ , во всех элементах  $\alpha \in S$ , имеющих квадрат  $\alpha^2 = 2$ . Группа  $W$  дискретна в гиперболическом пространстве  $\mathcal{L}(S) = V^+(S)/\mathbb{R}_{++}$ . Здесь  $V^+(S)$  является полый светового конуса  $V(S) = \{x \in S \otimes \mathbb{R} \mid x^2 < 0\}$  решетки  $S$ . Пространство  $\mathcal{L}(S)$  состоит из лучей, лежащих в  $V^+(S)$ .

Фундаментальная камера  $\mathcal{M} \subset \mathcal{L}(S)$  для  $W$  задается множеством  $P$  элементов  $\alpha \in S$  с  $\alpha^2 = 2$ , которые *ортогональны камере*  $\mathcal{M}$ . Множество  $P$  имеет следующее описание, полученное Конвеем [20]. Существует ортогональное разложение  $S = [\rho, e] \oplus L$ , где матрица Грама элементов  $\rho, e$  равна  $U = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$  (в частности,  $(\rho, \rho) = 0$ ), и  $L$  — решетка Лича, т. е. положительно определенная четная унимодулярная решетка ранга 24, не имеющая элементов с квадратом 2. Множество  $P$  корней, ортогональных фундаментальной камере  $\mathcal{M}$  (или множество *простых корней*) группы Вейля  $W$ , равно

$$P = \{\alpha \in S \mid (\alpha, \alpha) = 2 \text{ и } (\rho, \alpha) = -1\}. \quad (1.4)$$

Это значит, что фундаментальная камера  $\mathcal{M} \subset \mathcal{L}(S)$  равна

$$\mathcal{M} = \{\mathbb{R}_{++}x \in \mathcal{L}(S) \mid (x, P) \leq 0\}, \quad (1.5)$$

и  $P$  минимально с этим свойством. Отметим, что фундаментальная камера  $\mathcal{M}$  имеет “*почти конечный*” объем. Это значит, что  $\mathcal{M}$  конечна в любом угле гиперболического пространства  $\mathcal{L}(S)$  с вершиной в бесконечно удаленной точке  $\mathbb{R}_{++}\rho$ .

Матрица

$$A = ((\alpha, \alpha')), \quad \alpha, \alpha' \in P, \quad (1.6)$$

является обобщенной матрицей Картана и  $\rho$  является вектором Вейля

$$(\rho, \alpha) = -(\alpha, \alpha)/2 \quad \forall \alpha \in P. \quad (1.7)$$

Таким образом,  $A$  определяет лоренцеву алгебру Каца — Муди  $\mathfrak{g}(A)$ , градуированную гиперболической решеткой  $S$ . Но алгебра  $\mathfrak{g}(A)$  — не та алгебра, которая рассматривается в примере Борчердса. Алгебру  $\mathfrak{g}(A)$  следует “*откорректировать*”.

Имеется классическая  $SL_2(\mathbb{Z})$ -модулярная касп форма  $\Delta$  веса 12 на верхней полуплоскости  $\text{im } \tau > 0$

$$\Delta = q \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n)^{24} = \sum_{m \geq 0} \tau(m) q^m, \quad (1.8)$$

где  $q = \exp(2\pi i \tau)$ . Имеем

$$\Delta^{-1} = \sum_{n \geq 0} p_{24}(n) q^{n-1}, \quad (1.9)$$

где  $p_{24}(n)$  — положительные целые числа. Борчердс [14] доказал тождество

$$\begin{aligned} \Phi(z) &= \exp(-2\pi i(\rho, z)) \prod_{\alpha \in \Delta_+} (1 - \exp(-2\pi i(\alpha, z)))^{p_{24}(1 - (\alpha, \alpha)/2)} = \\ &= \sum_{w \in W} \det(w) \sum_{m \geq 0} \tau(m) \exp(-2\pi i(w(m\rho), z)). \end{aligned} \quad (1.10)$$

Здесь  $\Delta_+ = \{\alpha \in S \mid \alpha^2 = 2 \text{ и } (\alpha, \rho) < 0\} \cup (S \cap \overline{V^+(S)} - \{0\})$ . Переменная  $z$  пробегает комплексифицированный конус  $\Omega(V^+(S)) = S \otimes \mathbb{R} + iV^+(S)$  светового конуса  $V^+(S)$ . Кроме того, Борчердс [16], [17] доказал, что функция  $\Phi(z)$  является автоморфной формой веса 12 относительно группы  $O^+(T)$ , где  $T = U \oplus S$  — расширенная решетка сигнатуры  $(26, 2)$ . Группа  $O^+(T)$  естественно действует в эрмитовой симметрической области типа IV

$$\Omega(T) = \{\mathbb{C}\omega \subset T \otimes \mathbb{C} \mid (\omega, \omega) = 0, (\omega, \bar{\omega}) < 0\}_0, \quad (1.11)$$

которая канонически отождествляется с  $\Omega(V^+(S))$  следующим образом:  $z \in \Omega(V^+(S))$  определяет элемент  $\mathbb{C}\omega_z \in \Omega(T)_0$ , где  $\omega_z = ((z, z)/2)e_1 + e_2 \oplus z \in T \otimes \mathbb{C}$  и  $e_1, e_2$  — базис решетки  $U$  с приведенной выше матрицей Грама  $U$ . Здесь “автоморфная форма веса 12” обозначает, что функция  $\tilde{\Phi}(\lambda\omega_z) = \lambda^{-12}\Phi(z)$ ,  $\lambda \in \mathbb{C}^*$ , однородна степени  $-12$  (это очевидно) в однородном конусе  $\widetilde{\Omega(T)}_0$  над  $\Omega(T)_0$ , и  $\tilde{\Phi}(g\omega) = \det(g)\tilde{\Phi}(\omega)$  для любых  $\omega \in \widetilde{\Omega(T)}_0$  и  $g \in O^+(T)$ , где  $O^+(T)$  — подгруппа индекса 2 группы  $O(T)$ , сохраняющая компоненту связности (1.11) (отмеченную 0).

Тождество (1.10) очень похоже на тождество (1.3) для знаменателя алгебры Каца — Муди, но имеется некоторое отличие.

Чтобы проинтерпретировать (1.10) как тождество для знаменателя алгебры Ли, Борчердс определил [13] *обобщенные алгебры Каца — Муди*  $\mathfrak{g}(A')$ , соответствующие более общим матрицам, чем обобщенные матрицы Картана. Назовем их *обобщенными матрицами Картана*. Разница заключается в том, что обобщенная матрица Картана  $A'$  может иметь также неположительные вещественные числа  $a_{ij} \leq 0$  на диагонали и вне диагонали, но все  $a_{ij} \in \mathbb{Z}$ , если  $a_{ii} = 2$ . Определение обобщенной алгебры Каца — Муди  $\mathfrak{g}(A')$ , соответствующей обобщенной матрице Картана  $A'$ , аналогично (1.1). Следует заменить последнюю строку в (1.1) на

$$(\text{ad } e_i)^{1-a_{ij}} e_j = (\text{ad } f_i)^{1-a_{ij}} f_j = 0, \text{ если } i \neq j \text{ и } a_{ii} = 2, \quad (1.12)$$

и добавить соотношение

$$[e_i, e_j] = [f_i, f_j] = 0, \text{ если } a_{ij} = 0. \quad (1.13)$$

Борчердс показал, что обобщенные алгебры Каца — Муди аналогичны обычным алгебрам Каца — Муди. Они также имеют тождество для знаменателя, которое имеет более общую форму, чем (1.3), и содержит (1.10) как частный случай.

Тождество (1.10) является тождеством для знаменателя обобщенной алгебры Каца — Муди  $\mathfrak{g}(A')$ , где  $A'$  — обобщенная матрица Картана, равная матрице Грама  $A' = ((\alpha, \alpha'))$ ,  $\alpha, \alpha' \in P'$ , где

$$P' = P \cup 24\rho \cup 24(2\rho) \cup \dots \cup 24(n\rho) \cup \dots \quad (1.14)$$

— последовательность элементов решетки  $S$ . Здесь  $24(n\rho)$  означает, что при определении матрицы Грама  $A'$  элемент  $n\rho$  берется двадцать четыре раза. Детали см. в [13]–[15].

В (1.14) множество  $P'$ , задающее  $A'$ , называется *множеством простых корней*. Оно делится на множество  $P'^{\text{ге}} = P$ , описанное в (1.4), *простых вещественных корней* (они ортогональны фундаментальной камере  $M$  группы Вейля  $W$  и имеют положительный квадрат) и совпадает с множеством простых корней (все они вещественны) обычной алгебры Каца — Муди  $\mathfrak{g}(A)$ , задаваемой обобщенной матрицей Картана  $A$  в (1.6). Дополнительная последовательность

$$P'^{\text{им}} = 24\rho \cup 24(2\rho) \cup \dots \cup 24(n\rho) \cup \dots \quad (1.15)$$

в  $P'$  (элементы  $P'^{\text{им}}$  имеют нулевые квадраты) задается коэффициентами Фурье суммы в тождестве (1.10). Например, 24 опре-



деляется 24 в (1.10). Вместе  $P'^{\text{ге}}$  и  $P'^{\text{им}}$  определяют обобщенную матрицу Картана  $A'$  и обобщенную алгебру Каца — Муди  $\mathfrak{g}(A')$ .

Пример Борчердса очень фундаментален и красив. Он имеет важные приложения в математике (например, к Монстру) и физике (например, в Теории Струн).

**1.4. Теория лоренцевых алгебр Каца — Муди.** Анализируя пример Борчердса, можно предложить общий класс лоренцевых алгебр Каца — Муди (или автоморфных алгебр Каца — Муди)  $\mathfrak{g}$ , см. [4], [10], [24]–[29].

Берутся приведенные ниже данные (1)–(5):

(1) Гиперболическая решетка  $S$  (т. е. целочисленная симметрическая билинейная форма сигнатуры  $(n, 1)$ ).

(2) Группа отражений (или группа Вейля)  $W \subset O(S)$ , порожденная отражениями в корнях решетки  $S$ . Напомним, что  $\alpha \in S$  называется *корнем*, если  $\alpha^2 > 0$  и  $\alpha^2 \mid 2(\alpha, S)$ . Любой корень  $\alpha$  дает отражение  $s_\alpha : x \mapsto x - (2(x, \alpha)/\alpha^2)\alpha$ ,  $x \in S$ , являющееся автоморфизмом решетки  $S$ .

(3) Множество  $P$  ортогональных корней к фундаментальной камере  $M \subset \mathcal{L}(S)$  группы  $W$ . Это означает, что множество  $P$  корней решетки  $S$  должно иметь свойство (1.5) и должно быть минимально с данным свойством. Кроме того, множество  $P$  должно иметь *вектор Вейля*  $\rho \in S \otimes \mathbb{Q}$ , определенный равенством (1.7) (правильнее называть его *решеточным вектором Вейля*).

Основным инвариантом данных (1)–(3) является *обобщенная матрица Картана*

$$A = \left( \frac{2(\alpha, \alpha')}{(\alpha, \alpha)} \right), \quad \alpha, \alpha' \in P. \quad (1.16)$$

Она определяет данные (1)–(3) с точностью до очень ясного отношения эквивалентности и задает множество вещественных корней алгебры  $\mathfrak{g}$ , которую мы хотим построить.

(4) Автоморфная (голоморфная) форма  $\Phi(z)$  на эрмитовой симметрической области типа IV,  $z \in \Omega(V^+(S)) = \Omega(T)$ , относительно подгруппы  $G \subset O^+(T)$  конечного индекса расширенной решетки  $T = U(k) \oplus S$ , где  $U(k) = \begin{pmatrix} 0 & -k \\ -k & 0 \end{pmatrix}$ ,  $k \in \mathbb{N}$ . (Более общее определение см. в [27].) Она должна иметь разложение Фурье, имеющее вид тождества для знаменателя обобщенной

алгебры Каца — Мули с гиперболической обобщенной матрицей Картана, а именно:

$$\Phi(z) = \sum_{w \in W} \det(w) \left( \exp(-2\pi i(w(\rho), z)) - \sum_{a \in S \cap \mathbb{R}_{++} \mathcal{M}} m(a) \exp(-2\pi i(w(\rho + a), z)) \right), \quad (1.17)$$

где все коэффициенты  $m(a)$  должны быть целыми. Автоморфная форма  $\Phi$  определяет множество простых мнимых корней алгебры  $\mathfrak{g}$ .

Как и в примере Борчердса, данные (1)—(4) задают обобщенную алгебру или супералгебру (если некоторые коэффициенты Фурье  $m(a)$  отрицательны) Каца — Мули  $\mathfrak{g}$ . (Определение  $\mathfrak{g}$  смотри ниже.) Используя автоморфные свойства  $\Phi(z)$ , хотелось бы вычислить *бесконечное произведение в тождестве для знаменателя*

$$\Phi(z) = \exp(-2\pi i(\rho, z)) \prod_{\alpha \in \Delta_+} \left( 1 - \exp(-2\pi i(\alpha, z)) \right)^{\text{mult}(\alpha)}, \quad (1.18)$$

которое дает кратности  $\text{mult}(\alpha)$  корней  $\alpha$  алгебры  $\mathfrak{g}$ . В случае супералгебры кратность  $\text{mult}(\alpha) = \dim \mathfrak{g}_{\alpha, \bar{0}} - \dim \mathfrak{g}_{\alpha, \bar{1}}$  является разностью размерностей четной и нечетной частей корневого пространства  $\mathfrak{g}_\alpha$ .

Естественно дополнительно предполагать (по крайней мере, чтобы иметь результаты конечности) следующее дополнительное условие:

(5) Автоморфная форма  $\Phi$  в области  $\Omega(V^+(S)) = \Omega(T)$  должна быть *рефлексивна*. Это означает, что дивизор (нулей) формы  $\Phi$  является объединением квадратичных дивизоров, ортогональных корням расширенной решетки  $T$ . Здесь для корня  $\alpha \in T$  (определение корня решетки  $T$  то же, что и для решетки  $S$ ) *квадратичный дивизор, ортогональный  $\alpha$* , равен

$$D_\alpha = \{C\omega \in \Omega(T) \mid (\omega, \alpha) = 0\}. \quad (1.19)$$

Свойство (5) имеет место в примере Борчердса и во всех известных случаях. Кроме того, оно верно в окрестности каспа, в котором сходится бесконечное произведение (1.18). Таким образом, мы хотим, чтобы оно выполнялось глобально.

Обобщенная супералгебра Каца — Мули  $\mathfrak{g}$ , соответствующая данным (1)—(4), задается последовательностью  $P' \subset S$

простых корней. Эта последовательность делится на множество  $P'^{re}$  простых вещественных корней и последовательность  $P'^{im}$  простых мнимых корней. Последовательность  $P'^{im}$  делится на последовательность  $P'^{im}_0$  четных простых мнимых корней и последовательность  $P'^{im}_1$  нечетных простых мнимых корней. Для примитивного  $a \in S \cap \mathbb{R}_{++}\mathcal{M}$  с  $(a, a) = 0$  нужно найти  $\tau(na) \in \mathbb{Z}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , из тождества с формальной переменной  $t$ :

$$1 - \sum_{k \in \mathbb{N}} m(ka)t^k = \prod_{n \in \mathbb{N}} (1 - t^n)^{\tau(na)}.$$

Множество  $P'^{re} = P$ , где  $P$  определено в данных (3). Множество  $P'^{re}$  является четным:  $P'^{re} = P'^{re}_0$  и  $P'^{re}_1 = \emptyset$ . Полагаем

$$P'^{im}_0 = \{m(a)a \mid a \in S \cap \mathbb{R}_{++}\mathcal{M}, (a, a) < 0 \text{ и } m(a) > 0\} \cup \\ \cup \{\tau(a)a \mid a \in S \cap \mathbb{R}_{++}\mathcal{M}, (a, a) = 0 \text{ и } \tau(a) > 0\};$$

$$P'^{im}_1 = \{-m(a)a \mid a \in S \cap \mathbb{R}_{++}\mathcal{M}, (a, a) < 0 \text{ и } m(a) < 0\} \cup \\ \cup \{\tau(a)a \mid a \in S \cap \mathbb{R}_{++}\mathcal{M}, (a, a) = 0 \text{ и } \tau(a) < 0\}.$$

Обобщенная супералгебра Каца — Муди  $\mathfrak{g}$  является супералгеброй Ли, порожденной  $h_r$ ,  $e_r$ ,  $f_r$ , где  $r \in P'$ . Все образующие  $h_r$  четны, образующие  $e_r$ ,  $f_r$  четны (соответственно нечетны), если  $r$  четно (соответственно нечетно). Они имеют определяющие соотношения 1)–5), приведенные ниже.

1) Отображение  $r \mapsto h_r$  для  $r \in P'$  задает вложение  $S \otimes \mathbb{C}$  в  $\mathfrak{g}$  как абелевой подалгебры (она четна).

$$2) [h_r, e_{r'}] = (r, r')e_{r'} \text{ и } [h_r, f_{r'}] = -(r, r')f_{r'}.$$

$$3) [e_r, f_{r'}] = h_r, \text{ если } r = r', \text{ и равно } 0, \text{ если } r \neq r'.$$

$$4) (\text{ad } e_r)^{1-2(r, r')/(r, r)} e_{r'} = (\text{ad } f_r)^{1-2(r, r')/(r, r)} f_{r'} = 0, \\ \text{если } r \neq r' \text{ и } (r, r) > 0 \\ (\text{эквивалентно, } r \in P'^{re}).$$

$$5) \text{ Если } (r, r') = 0, \text{ то } [e_r, e_{r'}] = [f_r, f_{r'}] = 0.$$

По поводу деталей см. [13], [24], [25], [27], [40]. Отметим, что это определение эквивалентно определению из п. 1.3, использующему обобщенную матрицу Картана, задаваемую последовательностью  $P'$ .

Обобщенные супералгебры Каца — Муди  $\mathfrak{g}$ , задаваемые данными (1)–(5), составляют теорию лоренцевых алгебр Каца —

*Муди (или автоморфных лоренцевых алгебр Каца — Муди), которые мы рассматриваем.*

В силу (4) они имеют свойство, аналогичное свойству (II) для конечных или аффинных алгебр: их тождество для знаменателя дает автоморфную форму. Для лоренцева случая это автоморфная форма на эрмитовой симметрической области типа IV.

Что можно сказать по поводу аналога свойства (I) для конечных и аффинных алгебр Каца — Муди? Как много имеется данных (1)—(5)?

Далее предположим, что  $\text{rk } S \geq 3$ . Это условие можно понимать как рассмотрение лоренцевых аналогов нетривиальных конечномерных полупростых алгебр Ли. Если  $\text{rk } S = 1, 2$ , то классификация данных (1)—(5) другая и, по-видимому, более проста.

**Теорема 1.** *Если  $\text{rk } S \geq 3$ , то множество возможных данных (1)—(3) в данных (1)—(4) конечно, если  $(\rho, \rho) < 0$ , и “в существенном конечно”, если  $(\rho, \rho) = 0$ . Неравенство  $(\rho, \rho) > 0$  невозможно.*

Здесь “в существенном конечно” означает, что множество может быть бесконечно, но имеется очень ясное его описание. Например, множество возможных диаграмм Дынкина типа  $A_n$  бесконечно, но мы очень ясно себе его представляем.

Ключевой момент в доказательстве теоремы 1 заключается в том, что данные (1)—(4) дают  $(\rho, \rho) \leq 0$  и фундаментальная камера  $M$  имеет конечный, если  $(\rho, \rho) < 0$ , и “почти конечный”, если  $(\rho, \rho) < 0$ , объем (см. [10], [27]). (Здесь “почти конечный” обозначает то же, что в примере Борчердса.) Тогда число возможных решеток корней  $S$  конечно. Это следует из результатов автора [7], [8], [10] и Э.Б. Винберга [1]. Если дополнительно существует вектор Вейля  $\rho$  для  $P$ , то имеется конечность, если  $(\rho, \rho) < 0$ , и в существенном конечность, если  $(\rho, \rho) = 0$ , множеств групп Вейля  $W$ , фундаментальных камер  $M$  (с точностью до действия  $W$ ) и множеств ортогональных коней  $P$  к  $M$ , см. [10]. Это дает конечность и в существенном конечность соответственно множества возможных обобщенных матриц Картана  $A$  в (1.16), соответствующих простым вещественным корням.

Отсюда следует, что в принципе можно классифицировать все возможные данные (1)—(3) в данных (1)—(4). (Для  $\text{rk } S = 1, 2$  подобная классификация тривиальна.) Это делает теорию

лоренцевых алгебр Каца — Мули очень похожей на теории конечных и аффинных алгебр Каца — Мули.

Было бы хорошо иметь результаты конечности также для данных (4), (5). Недавно были получены некоторые частные результаты конечности [27], [39], которые показывают, что автоморфные формы  $\Phi(z)$  в (4) и (5) чрезвычайно редки. Это делает очень вероятным следующее утверждение.

**Гипотеза 2.** Если  $\text{rk } S \geq 3$ , то множество возможных данных (4), (5) в существенном конечно.

Причина, по которой ожидается утверждение гипотезы 2, основана на *принципе Кэлера* (например, см. [12]): Любая голоморфная автоморфная форма на эрмитовой симметрической области  $\Omega$  должна иметь нули в  $\Omega$ , если  $\dim \Omega - \dim \Omega_\infty \geq 2$ .

Применяя этот принцип к ограничению  $\Phi|_{\Omega(T_1)}$  рефлексивной автоморфной формы  $\Phi$  решетки  $T$  на все подобласти  $\Omega(T_1) \subset \Omega(T)$ , где  $T_1 \subset T$  — подрешетка сигнатуры  $(k, 2)$ , получаются очень сильные условия на решетку  $T$ , если она имеет рефлексивную автоморфную форму  $\Phi$ . Это было продемонстрировано в [39].

Предполагаем, что гипотеза 2 очень интересна. С нашей точки зрения, теория рефлексивных автоморфных форм на областях  $\Omega(T)$  типа IV, где  $T$  — решетка сигнатуры  $(n, 2)$ , “аналогична” (Зеркально Симметрична) теории групп отражений  $W$  с фундаментальной камерой конечного или почти конечного объема гиперболических решеток  $S$ , см. [26]–[29], [39].

Было бы интересно классифицировать (или описать) гипотетически “конечное множество” данных (1)–(5). Даже конечное множество может иметь очень интересную структуру. В результате получим некоторую теорию лоренцевых алгебр Каца — Мули, которую можно рассматривать как гиперболический аналог теорий конечных и аффинных алгебр Каца — Мули.

В заключение опишем небольшой фрагмент этой классификации, полученный в [4], [27], [28].

Имеется ровно 12 обобщенных матриц Картана данных (1)–(3) в (1)–(4), которые симметричны, имеют ранг 3, имеют вектор Вейля  $\rho$  с  $(\rho, \rho) < 0$  и некомпактный фундаментальный многогранник  $\mathcal{M}$  (имеется еще 4 матрицы с компактным  $\mathcal{M}$ ). Эти двенадцать матриц приведены ниже.

Список всех симметричных гиперболических обобщенных матриц Картана ранга 3 с некомпактным  $M$  и  $\text{vol}(M) < \infty$ , имеющих решеточный вектор Вейля  $\rho$

$$A_{1,0} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -2 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix}, \quad A_{1,I} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ -2 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad A_{1,II} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -2 \\ -2 & 2 & -2 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix},$$

$$A_{1,III} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -6 & -6 & -2 \\ -2 & 2 & 0 & -6 & -7 \\ -6 & 0 & 2 & -2 & -6 \\ -6 & -6 & -2 & 2 & 0 \\ -2 & -7 & -6 & 0 & 2 \end{pmatrix}; \quad A_{2,0} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -2 \\ -2 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

$$A_{2,I} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -4 & 0 \\ -2 & 2 & 0 & -4 \\ -4 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & -4 & -2 & 2 \end{pmatrix}, \quad A_{2,II} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -6 & -2 \\ -2 & 2 & -2 & -6 \\ -6 & -2 & 2 & -2 \\ -2 & -6 & -2 & 2 \end{pmatrix},$$

$$A_{2,III} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -8 & -16 & -18 & -14 & -8 & 0 \\ -2 & 2 & 0 & -8 & -14 & -18 & -16 & -8 \\ -8 & 0 & 2 & -2 & -8 & -16 & -18 & -14 \\ -16 & -8 & -2 & 2 & 0 & -8 & -14 & -18 \\ -18 & -14 & -8 & 0 & 2 & -2 & -8 & -16 \\ -14 & -18 & -16 & -8 & -2 & 2 & 0 & -8 \\ -8 & -16 & -18 & -14 & -8 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & -8 & -14 & -18 & -16 & -8 & -2 & 2 \end{pmatrix};$$

$$A_{3,0} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -2 \\ -2 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad A_{3,I} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -5 & -1 \\ -2 & 2 & -1 & -5 \\ -5 & -1 & 2 & -2 \\ -1 & -5 & -2 & 2 \end{pmatrix},$$

$$A_{3,II} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -10 & -14 & -10 & -2 \\ -2 & 2 & -2 & -10 & -14 & -10 \\ -10 & -2 & 2 & -2 & -10 & -14 \\ -14 & -10 & -2 & 2 & -2 & -10 \\ -10 & -14 & -10 & -2 & 2 & -2 \\ -2 & -10 & -14 & -10 & -2 & 2 \end{pmatrix},$$

$$A_{3,III} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -11 & -25 & -37 & -47 & -50 & -46 & -37 & -23 & -11 & -1 \\ -2 & 2 & -1 & -11 & -23 & -37 & -46 & -50 & -47 & -37 & -25 & -11 \\ -11 & -1 & 2 & -2 & -11 & -25 & -37 & -47 & -50 & -46 & -37 & -23 \\ -25 & -11 & -2 & 2 & -1 & -11 & -23 & -37 & -46 & -50 & -47 & -37 \\ -37 & -23 & -11 & -1 & 2 & -2 & -11 & -25 & -37 & -47 & -50 & -46 \\ -47 & -37 & -25 & -11 & -2 & 2 & -1 & -11 & -23 & -37 & -46 & -50 \\ -50 & -46 & -37 & -23 & -11 & -1 & 2 & -2 & -11 & -25 & -37 & -47 \\ -46 & -50 & -47 & -37 & -25 & -11 & -2 & 2 & -1 & -11 & -23 & -37 \\ -37 & -47 & -50 & -46 & -37 & -23 & -11 & -1 & 2 & -2 & -11 & -25 \\ -23 & -37 & -46 & -50 & -47 & -37 & -25 & -11 & -2 & 2 & -1 & -11 \\ -11 & -25 & -37 & -47 & -50 & -46 & -37 & -23 & -11 & -1 & 2 & -2 \\ -1 & -11 & -23 & -37 & -46 & -50 & -47 & -37 & -25 & -11 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Во всех этих случаях фундаментальная камера  $M$  является замкнутым многоугольником на гиперболической плоскости с углами соответственно:

$$A_{1,0}: \pi/2, 0, \pi/3; \quad A_{1,I}: 0, \pi/3, \pi/3; \quad A_{1,II}: 0, 0, 0;$$

$$A_{1,III}: 0, \pi/2, 0, \pi/2, 0;$$

$$A_{2,0}: 0, \pi/2, 0; \quad A_{2,I}: 0, \pi/2, 0, \pi/2; \quad A_{2,II}: 0, 0, 0, 0;$$

$$A_{2,III}: 0, \pi/2, 0, \pi/2, 0, \pi/2, 0, \pi/2;$$

$$A_{3,0}: 0, \pi/3, 0; \quad A_{3,I}: 0, \pi/3, 0, \pi/3; \quad A_{3,II}: 0, 0, 0, 0, 0, 0;$$

$$A_{3,III}: 0, \pi/3, 0, \pi/3, 0, \pi/3, 0, \pi/3, 0, \pi/3, 0, \pi/3.$$

Все эти многоугольники касаются окружности с центром  $\mathbb{R}_{++}\rho$ ,

где  $\rho$  — вектор Вейля. Это показывает геометрический смысл вектора Вейля.

Для 9 обобщенных матриц Картана  $A_{i,j}$ , соответствующих  $i = 1, 2, 3$  и  $j = 0, I, II$ , построены автоморфные формы  $\Phi$  для данных (4), (5) и, в частности, построены соответствующие (автоморфные) лоренцевы алгебры Каца — Мууди, найдены их разложения в бесконечное произведение (1.18). См. [4], [24], [25], [27], [28]. Интересно, что некоторые из этих автоморфных форм были хорошо известны. Например, автоморфная форма  $\Phi$  для  $A_{1,II}$  является классической. Она имеет вес 5 и является произведением всех четных тэта-констант рода два (их десять). Она автоморфна относительно  $Sp_4(\mathbb{Z})$  с некоторым квадратичным характером и дает дискриминант модулей кривых рода 2. Автоморфная форма  $\Phi$  для  $A_{1,0}$  имеет вес 35 и автоморфна относительно  $Sp_4(\mathbb{Z})$ . Эта автоморфная форма была найдена Игузой более 30-ти лет назад и является  $Sp_4(\mathbb{Z})$ -автоморфной формой наименьшего нечетного веса. Для обеих этих автоморфных форм были найдены разложения в бесконечные произведения (1.18), которые не были известны. Здесь мы используем изоморфизм области типа IV и размерности три с верхней полуплоскостью Зигеля рода 2.

Все другие автоморфные формы  $\Phi$  для обобщенных матриц Картана  $A_{1,0} - A_{3,II}$  не были известны. Приведем одну из них.

Дадим автоморфную форму  $\Phi$  для  $A_{3,II}$ . Для этого случая  $T = 2U(12) \oplus \langle 2 \rangle = U(12) \oplus S$ , где  $S = U(12) \oplus \langle 2 \rangle$  дает данное (1). Используем базис  $f_2, \hat{f}_3, f_{-2}$  решетки  $S$  с матрицей Грама

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -12 \\ 0 & 2 & 0 \\ -12 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

и с соответствующими координатами  $z_1, z_2, z_3$  в пространстве  $S \otimes \mathbb{C}$ . Группа Вейля  $W$  в данных (2) порождена отражениями во всех элементах с квадратом 2 решетки  $S$ . Множество  $P$  в данных (3) равно

$$P = \{\alpha_1 = (0, 1, 0), \alpha_2 = (0, -1, 1), \alpha_3 = (1, -5, 2), \alpha_4 = (2, -7, 2), \\ \alpha_5 = (2, -5, 1), \alpha_6 = (1, -1, 0)\}.$$

Оно имеет матрицу Грама  $A_{3,II}$ . Вектор Вейля  $\rho = (\frac{1}{6}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{6})$ . Автоморфная форма  $\Phi$  является автоморфной касп формой  $\Delta_1$

относительно группы  $G = O^+(T)$  с некоторым характером порядка 6. Она имеет наименьший возможный вес 1, разложение Фурье и разложение в бесконечное произведение

$$\begin{aligned} \Delta_1(z_1, z_2, z_3) &= \\ &= \sum_{M \geq 1} \sum_{\substack{m > 0, l \in \mathbb{Z} \\ n, m \equiv 1 \pmod{6} \\ 4nm - 3l^2 = M^2}} \left(\frac{-4}{l}\right) \left(\frac{12}{M}\right) \sum_{a|(n, l, m)} \left(\frac{6}{a}\right) q^{n/6} r^{l/2} s^{m/6} = \\ &= q^{1/6} r^{1/2} s^{1/6} \prod_{\substack{n, l, m \in \mathbb{Z} \\ (n, l, m) > 0}} (1 - q^n r^l s^m)^{f_3(nm, l)}, \end{aligned} \quad (1.20)$$

где  $q = \exp(24\pi i z_1)$ ,  $r = \exp(4\pi i z_2)$ ,  $s = \exp(24\pi i z_3)$  и

$$\left(\frac{-4}{l}\right) = \begin{cases} \pm 1, & \text{если } l \equiv \pm 1 \pmod{4}, \\ 0, & \text{если } l \equiv 0 \pmod{2}; \end{cases}$$

$$\left(\frac{12}{M}\right) = \begin{cases} 1, & \text{если } M \equiv \pm 1 \pmod{12}, \\ -1, & \text{если } M \equiv \pm 5 \pmod{12}, \\ 0, & \text{если } (M, 12) \neq 1; \end{cases}$$

$$\left(\frac{6}{a}\right) = \begin{cases} \pm 1, & \text{если } a \equiv \pm 1 \pmod{6}, \\ 0, & \text{если } (a, 6) \neq 1. \end{cases}$$

Кратности  $f_3(nm, l)$  бесконечного произведения определяются слабой формой Якоби  $\phi_{0,3}(\tau, z) = \sum_{n \geq 0, l \in \mathbb{Z}} f_3(n, l) q^n r^l$  веса 0 и индекса 3 с целыми коэффициентами Фурье:

$$\begin{aligned} \phi_{0,3}(\tau, z) &= \\ &= r^{-1} \left( \prod_{n \geq 1} (1 + q^{n-1} r) (1 + q^n r^{-1}) (1 - q^{2n-1} r^2) (1 - q^{2n-1} r^{-2}) \right)^2, \end{aligned} \quad (1.21)$$

где  $q = \exp(2\pi i \tau)$ ,  $\text{im } \tau > 0$ , и  $r = \exp(2\pi i z)$ . Дивизор формы  $\Delta_1$  является суммой с кратностями один всех квадратичных дивизоров, ортогональных элементам решетки  $T$  с квадратом 2. Эти данные  $S$ ,  $W$ ,  $P$  и  $\Delta_1$  определяют обобщенную лоренцеву супералгебру Каца — Муди  $\mathfrak{g}$  с тождеством для знаменателя (1.20).



Для построения автоморфной формы  $\Delta_1$  используется *арифметический подъем форм Якоби на эрмитовы симметрические области типа IV*, построенный в [4], [24]–[26] (это дает построение формы  $\Delta_1$  в виде разложения Фурье в (1.20)). Для разложения  $\Delta_1$  в бесконечное произведение (1.20) используется *подъем Борчердса* [17], который является экспоненциальным аналогом арифметического подъема. Детали см. в [28].

**1.5. Физические приложения.** Рассмотренные выше лоренцевы алгебры Каца — Муди и соответствующие автоморфные формы  $\Phi$  нашли очень интересные приложения в физике: Теории Струн, Зеркальной Симметрии и др. Отошлем читателя к хорошему обзору [36] и имеющимся в нем ссылкам. Например, см. [18], [19], [21], [30], [31], [34], [35]. Грубо говоря, лоренцевы алгебры Каца — Муди связаны с симметриями фундаментальных физических теорий.

**1.6. Интересная проблема.** В приведенных выше данных (1)–(5) очень важно существование вектора Вейля  $\rho \in S \otimes \mathbb{Q}$  (или решеточного вектора Вейля). Это эквивалентно рассмотрению автоморфных форм  $\Phi$  на эрмитовых симметрических областях типа IV. Было бы интересно расширить данную теорию лоренцевых алгебр Каца — Муди на случаи, когда решеточный вектор Вейля  $\rho$  не существует. По-видимому, в более общем случае следует рассматривать автоморфные формы в некотором более общем смысле. С другой стороны, эта более общая теория потеряет некоторые свойства конечности. Это было бы жалко.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Винберг Э.Б. Отсутствие кристаллографических групп отражений в пространствах Лобачевского большой размерности// Тр. Моск. мат. об-ва. — 1984. — 47. — С. 68 – 102 (РЖМат, 1985, 4А530)
2. Гриценко В.А. Функции Фурье — Якоби  $n$  переменных// Зап. науч. семин. ЛОМИ. Анал. теория чисел и теория функций. — 1988. — № 9. — С. 32–44 (РЖМат, 1989, 5А328)
3. Гриценко В. А. Модулярные формы и пространства модулей абелевых и  $K3$  поверхностей// Алгебра и Анал. — 1994. — 6, № 6. — С. 65–102 (РЖМат, 1995, 7А265).
4. Гриценко В.А., Никулин В.В. Модулярные формы Игузы и “самые простые” лоренцевы алгебры Каца — Муди// Мат. сб. — 1996. — 187, № 11. — С. 27–66 (РЖМат, 1997, 5А271)

5. *Никулин В.В.* Целочисленные симметрические билинейные формы и некоторые их геометрические приложения// Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1979. — 43, № 1. — С. 111-177 (РЖМат, 1979, 6A484)
6. *Никулин В.В.* О факторгруппах групп автоморфизмов гиперболических форм по подгруппам, порожденным 2-отражениями. Алгебро-геометрические приложения// Итоги науки и техн. ВИНТИ. Соврем. пробл. мат. — 1981. — 18. — С. 3-114
7. *Никулин В.В.* Об арифметических группах, порожденных отражениями в пространствах Лобачевского// Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1980. — 44, № 3. — С. 637-669 (РЖМат, 1980, 11A489)
8. *Никулин В.В.* О классификации арифметических групп, порожденных отражениями в пространствах Лобачевского// Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1981. — 45, № 1. — С. 113-142 (РЖМат, 1981, 6A182)
9. *Никулин В.В.* Поверхности типа  $K3$  с конечной группой автоморфизмов и группой Пикара ранга три// Тр. Мат. ин-та АН СССР. — 1984. — 165. — С. 119-142 (РЖМат, 1984, 10A425)
10. *Никулин В.В.* Группы отражений в пространствах Лобачевского и тождество для знаменателя лоренцевых алгебр Каца — Мули// Изв. РАН. Сер. мат. — 1996. — 60, № 2. — С. 73-106 (РЖМат, 1998, 5A321)
11. *Понтрягин Л.С.* Непрерывные группы. 4 изд. — М.: Наука, 1984. — 520 с.
12. *Baily W.L.* Fourier-Jacobi series. Algebraic groups and discontinuous subgroups// Proc. Symp. Pure Math. Vol. IX (A. Borel, G.D. Mostow, eds). — Providence: Amer. Math. Soc., 1966. — С. 296-300
13. *Borcherds R.* Generalized Kac-Moody algebras// J. Algebra. — 1988. — 115, № 2. — С. 501-512 (РЖМат, 1988, 10A431)
14. *Borcherds R.* The monster Lie algebra// Adv. Math. — 1990. — 83, № 1. — С. 30-47 (РЖМат, 1991, 6A514)
15. *Borcherds R.* The monstrous moonshine and monstrous Lie superalgebras// Invent. math. — 1992. — 109. — С. 405-444
16. *Borcherds R.* Sporadic groups and string theory// 1st. Eur. Congr. Math., Paris, July 6-10, 1992. Vol.1. Pt 1.— Basel etc., 1994. — С. 411-421 (РЖМат, 1995, 12A111)
17. *Borcherds R.* Automorphic forms on  $O_{s+2,2}\mathbb{R}$  and infinite products// Invent. math. — 1995. — 120, № 1. — С. 161-213 (РЖМат, 1996, 10A312)
18. *Cardoso G. L.* Perturbative gravitational couplings and Siegel modular forms in  $D = 4$ ,  $N = 2$  string models// Nucl. Phys. Proc. Suppl. — 1997. — 56B. — С. 94-101
19. *Cardoso G.L., Curio G., Lust D.* Perturbative coupling and modular forms in  $N = 2$  string models with a Wilson line// Nucl. Phys. — 1997. — B491. — С. 147-183
20. *Conway J.H.* The automorphism group of the 26 dimensional even unimodular Lorentzian lattice// J. Algebra. — 1983. — 80, № 1. — С. 159-163 (РЖМат, 1983, 8A221)
21. *Dijkgraaf R., Verlinde E., Verlinde H.* Counting dyons in  $N = 4$  string theory// Nucl. Phys. — 1997. — B484. — С. 543-561

22. *Gritsenko V.A.* Arithmetical lifting and its applications// Number Theory. Proc. Paris Semin., 1992–1993 (S. David, ed.). — Cambridge Univ. Press, 1995. — C. 103–126
23. *Gritsenko V.A.* Irrationality of the moduli spaces of polarized Abelian surfaces// Int. Math. Res. Notices. — 1994. — 6. — C. 235–243
24. *Gritsenko V.A., Nikulin V.V.* Siegel automorphic form correction of some Lorentzian Kac–Moody Lie algebras// Amer. J. Math. — 1997. — 119, № 1. — C. 181–224
25. *Gritsenko V.A., Nikulin V.V.* Siegel automorphic form correction of a Lorentzian Kac–Moody algebra// C. r. Acad. sci. Sér. 1. — 1995. — 321. — C. 1151–1156
26. *Gritsenko V.A., Nikulin V.V.*  $K3$  surfaces, Lorentzian Kac–Moody algebras and mirror symmetry// Math. Res. Lett. — 1996. — 3, № 2. — C. 211–229
27. *Gritsenko V.A., Nikulin V.V.* Automorphic forms and Lorentzian Kac–Moody algebras. I // Int. J. Math. — 1998. — 9, № 2. — C. 153–199
28. *Gritsenko V.A., Nikulin V.V.* Automorphic forms and Lorentzian Kac–Moody algebras. II // Int. J. Math. — 1998. — 9, № 2. — C. 201–275
29. *Gritsenko V.A., Nikulin V.V.* A lecture on arithmetic mirror symmetry and Calabi–Yau manifolds (Препринт покрывается следующими опубликованными работами:  
*Gritsenko V.A., Nikulin V.V.*  $K3$  surfaces, Lorentzian Kac–Moody algebras and mirror symmetry// Math. Res. Lett. — 1996. — 3, № 2. — C. 211–229  
*Gritsenko V.A., Nikulin V.V.* Automorphic forms and Lorentzian Kac–Moody algebras. I // Int. J. Math. — 1998. — 9, № 2. — C. 153–199  
*Gritsenko V.A., Nikulin V.V.* Automorphic forms and Lorentzian Kac–Moody algebras. II // Int. J. Math. — 1998. — 9, № 2. — C. 201–275)
30. *Harvey J., Moore G.* Algebras, BPS-states, and strings// Nucl. Phys. — 1996. — B463. — C. 315–368
31. *Harvey J., Moore G.* On the algebras of BPS-states// Prepr., 1996
32. *Igusa J.* On Siegel modular forms of genus two. II // Amer. J. Math. — 1964. — 84, № 2. — C. 392–412 (ПЖМат, 1965, 4A213)
33. *Kac V.* Infinite dimensional Lie algebras. — Cambridge Univ. Press, 1990
34. *Kawai T.*  $N = 2$  heterotic string threshold correction,  $K3$  surfaces and generalized Kac–Moody superalgebra// Phys. Lett. — 1996. — B372. — C. 59–64
35. *Kawai T.* String duality and modular forms// Phys. Lett. — 1997. — B397. — C. 51–62
36. *Moore G.* String duality, automorphic forms, and generalized Kac–Moody algebras// Nucl. Phys. Proc. Suppl. — 1998. — 67. — C. 56–67
37. *Nikulin V.V.* Discrete reflection groups in Lobachevsky spaces and algebraic surfaces// Proc. Int. Congr. Math., Berkeley, Calif., Aug.

- 3-11, 1986. Vol. 1. — Providence, 1987. — С. 654-671 (PЖМат, 1988, 9A542)
38. *Nikulin V. V.* A lecture on Kac-Moody Lie algebras of the arithmetic type// Prepr./ Queen's Univ., Canada. — 1994. — № 16
39. *Nikulin V. V.* The remark on discriminants of moduli of  $K3$  surfaces as sets of zeros of automorphic forms// J. Math. Sci. — 1996. — 81, № 3. — С. 2738-2743
40. *Ray U.* A character formula for generalized Kac-Moody superalgebras// J. Algebra. — 1995. — 177. — С. 154-163

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ ИМ. СТЕКЛОВА РАН, УЛ. ГУБКИНА 8,  
МОСКВА ГСП-1, 177966, РОССИЯ