ГОДОВОЙ ОТЧЕТ (2015)

Лаборатория алгебраической геометрии и ее приложений

РЕФЕРАТ

Ключевые слова: Категории Калаби-Яу, флопы, сферические функторы, соответствие Маккея, DG-категории, кольцо Биттнер, полуортогональные разложения, монады, суперсвязности, многообразия Гушеля-Мукаи, K3 поверхность, пространство модулей, рациональные кривые, голоморфно симплектическое многообразие, кэлерово многообразие, гиперкэлерово многообразие, трианалитическое подмногообразие, многообразия Фано, группа Кремоны, теорема Торелли, отображение периодов, специальное лагранжево подмногообразие, лагранжево слоение, гиперкомплексное многообразие, некэлерово многообразие, накрытие, монодромия, биголоморфизм, эргодическое действие, теорема Торелли, пространство Тэйхмюллера, группа Тэйхмюллера, некоммутативная геометрия, вектора Витта, аддитивные категории, кластерные структуры, пространство Калоджера-Мозера, алгебры Азумаи, заставы Дринфельда, когомологии Горески-Макферсона, аффинная алгебра Каца-Муди, многочлены Шуберта, двойные сферические многообразия флагов, сизигии проективных вложений, топологические хиральные гомологии, стабильная гомотопическая категория, гипотеза о телескопе, категорное разрешение особенностей, алгебра Гельфанда-Цетлина, стабильные расслоения, A_∞-алгебры, исчисление Шуберта, многогранники Ньютона, многогранники Гельфанда--Цейтлина, квазифантомные категории, когомологии Хохшильда, циклические когомологии, многообразия Кэлера-Эйнштейна, рациональные эндоморфизмы, зеркальная симметрия, геометрическое квантование, множество Жюлиа, множество Мандельброта.

Краткая аннотация: Приводятся результаты исследований в области алгебраической геометрии, теории категорий, теории чисел, комплексной геометрии, дифференциальной геометрии, теории динамических систем и геометрической теории представлений.

Основные темы исследования — производные категории в алгебраической геометрии, геометрия производных категорий, некоммутативная геометрия, Зеркальная Симметрия, полуисключительные наборы, гиперкэлерова и гиперкомплексная геометрия, голоморфные лагранжевы расслоения, геометрическое описание кэлерова конуса, программа минимальных моделей, многообразия Фано и группа Кремоны, комплексная геометрия многообразий Фано, модулярные и автоморфные формы, характеры полубесконечных многообразий флагов, многогранники Гельфанда-Цетлина и исчисление Шуберта, изучение асимптотических свойств многообразий над глобальными полями и предельных дзета-функций.

Результаты носят теоретический характер и являются существенно новыми. Возможны приложения к теоретической физике, дифференциальной геометрии, теории чисел и задачам классификации комплексных многообразий.

Оглавление

1. Введение

За отчетный период (2015-й год) Лабораторией алгебраической геометрии и ее приложений было организовано 6 международных конференций в г. Москве и пятая летняя школа “Алгебра и геометрия” в г. Ярославле. Сотрудниками Лаборатории было опубликовано 24 статьи и подготовлено к печати более 25 препринтов; по результатам этой работы сделано более 53 докладов. Всего сотрудники Лаборатории приняли участия более чем в 35 конференциях, семинарах и школах как в России, так и за рубежом. Лаборатория организовала и приняла участие в организации 34 научных мероприятий, в т.ч. 2-х школ.

Сотрудниками лаборатории было прочитано больше 30 курсов лекций, многие курсы читались впервые.

Были получены значительные результаты по основным темам, заявленным на 2015-й год:

1) Производные категории
2) Гомологические и мотивные методы в некоммутативной геометрии
3) Специальные многообразия
4) Классическая геометрия
5) Геометрическая теория представлений
6) Арифметическая геометрия
7) Модулярные формы в алгебраической геометрии и топологии и бесконечномерные алгебры Ли и автоморфные формы в зеркальной симметрии и в теории особенностей

Результаты работ по этим темам составляют содержание настоящего отчета.

2. Производные категории

2.1. Дробные категории Калаби–Яу

Проективные многообразия с тривиальным каноническим классом (многообразия Калаби–Яу) образуют важный класс многообразий в алгебраической геометрии. Их важность подчеркивается особой ролью, которую эти многообразия играют в Зеркальной Симметрии, которая сопоставляет каждому многообразию Калаби–Яу X его зеркального партнера Y, так что числа Ходжа многообразий X и Y связаны соотношением $h^{p,q}(Y) = h^{q,n-p}(X)$, в котором $n = \dim X = \dim Y$. Однако, это соотношение показывает, что ограничиваясь только обычными многообразиями Калаби–Яу мы теряем некоторых зеркальных партнеров. В самом деле, если X — жесткое многообразие Калаби–Яу, то $h^{n-1,1}(X) = 0$, следовательно его зеркальный партнер Y должен удовлетворять условию $h^{1,1}(Y) = 0$, а значит не может быть проективным.

Ожидается, однако, что Зеркальная Симметрия распространяется и на жесткие многообразия Калаби–Яу, но их зеркальными партнерами являются некоммутативные многообразия Калаби–Яу. Иначе говоря, ожидается, что вместо многообразия Y мы сопоставляем многообразию X некую триангулированную категорию $\mathcal{T}$ (рассматриваемую как производную категорию когерентных пучков на “некоммутативном многообразии Y”).

Чтобы выразить определяющее свойство многобразий Калаби–Яу в терминах категории $\mathcal{T}$ естественно воспользоваться функтором Серра $\mathsf{S}_{\mathcal{T}}$. Функтор Серра является одним из важнейших инвариантов триангулированной категории, причем для производных категорий когерентных пучков он равен композиции подкрутки на канонический класс и сдвига на размерность. Таким образом, производные категории многообразий Калаби–Яу характеризуются тем, что их функтор Серра равен сдвигу. Поэтому мы говорим, что триангулированная категория $\mathcal{T}$ является категорией Калаби–Яу размерности n, если ее функтор Серра изоморфен сдвигу на n

$$\mathsf{S}_{\mathcal{T}} \cong [n].$$

Аналогично, триангулированная категория $\mathcal{T}$ является дробной категорией Калаби–Яу размерности p/q, если ее функтор Серра в степени q изоморфен сдвигу на p

$$\mathsf{S}_{\mathcal{T}}^q \cong [p].$$

В работе [29] предлагается новая весьма общая конструкция категорий Калаби–Яу и дробных категорий Калаби–Яу. Для этого рассматривается гладкое проективное многообразие M с прямоугольным лефшецевым разложением. Затем рассматривается сферический функтор $\Phi : \mathbf{D}(X) \to \mathbf{D}(M)$ между ограниченными производными категориями когерентных пучков на многооразиях X и M. Накладывая некоторое условие согласованности на лефшецево разложение категории $\mathbf{D}(M)$ и функтор Φ, мы доказываем, что категория $\mathbf{D}(X)$ обладает полуортогональным разложением, таким что некоторая степень функтора Серра одной из его компонент изоморфна сдвигу.

В работе также приводится множество примеров многообразий, обладающих прямоугольным лефшецевым набором (которые, тем самым, являются источниками построения примеров дробных категорий Калаби–Яу) и несколько классов сферических функторов, удовлетворяющих нужным условиям согласованности. Кроме того, обсуждаются особенно интересные примеры категорий Калаби–Яу, возникающих в этих примеров. Особое внимание при этом уделяется категориям типа K3 и трехмерным категориям Калаби–Яу.

Наконец, в последней главе работы обсуждаются общие свойства категорий Калаби–Яу. В частности, доказывается, что любая связная категория Калаби–Яу неразложима, а также устанавлевается неравенство между размерностью допустимой подкатегории Калаби–Яу в производной категории многообразия и размерностью этого многообразия. Также обсуждаются интересные вопросы и гипотезы, связанные с категориями Калаби–Яу.

2.2. Флопы и сферические функторы

Важной проблемой лежащей на стыке теории категорий и алгебраической геометрии является описание алгебры функторов, связывающих производные категории многообразий, одно из которых получается из другого геометрической операцией, называемой флопом. В соответствии с гипотезой Бондала-Орлова 1995 года [6], [7], производные категории таких многообразий эквивалентны, что является одной из составляющих категорного подхода к программе минимальных моделей бирациональной алгебраической геометрии.

Гипотеза о производной эквивалентности при флопах привлекла значительное внимание, множество результатов было получено в этом направлении для конкретных флопов, однако доказательство для общих флопов отсутствует.

А. Бондал в совместной работе с А. Бодзентой [4] получил целый ряд результатов, касающихся алгебры функторов для флопирующих стягиваний со слоями размерности не больше 1, при которых особенности многообразий, получающихся в результате стягивания, являются горенштейновыми гиперповерхностными особенностями кратности 2. Этот случай включает все терминальные горенштейновы флопы в размерности 3. Эквивалентность производных категорий в этом случае была доказана Мишелем Ван ден Бергом [32]. Подход Ван ден Берга не использовал геометрический функтор, предложенный А. Бондалом и Д. Орловым (который теперь называется функтором флопа), но основывался на идеях некоммутативной алгебраической геометрии.

Бондал и Бодзента доказали, что функтор Ван ден Берга является обратным к функтору флопа. Тем самым функтор флопа так же оказался эквивалентностью. Также была предложена новая конструкция для обоих функторов, основанная на отождествлении производных категорий флопированных многообразий с гомотопическими категориями комплексов проективных объектов в сердцевинах превратных т-структур Бриджлэнда для флопирующих стягиваний.

В тех же предположениях, был исследован функтор флоп-флопа, то есть композиция функтора флопа из производной категории многообразия в производную категорию флопированного многообразия с аналогичным функтором в обратную сторону. Было доказано, что функтор флоп-флопа является функтором котвиста для сферического функтора. Конструкция сферического функтора высветила важность так называемой абелевой нуль-категории морфизма для флопируемого стягивания, то есть, подкатегории когерентых пучков, чьей производный прямой образ равен нулю. Сферический функтор задается отображением производной категории нуль категории в производную категорию когерентных пучков на многообразии.

Было доказано и другое представление для функтора флоп-флопа, точнее, для его сдвига на 2, как котвиста для для другого сферического функтора. Этот другой функтор является производным прямым образом для морфизма композиции флопирующего стягивания с морфизмом вложением стянутого многообразия в качестве дивизора в гладкое многообразие. Были получены различные соотношения в категории всех возникающих функторов.

Недавно Капранов и Шехтман [26] предложили интерпретацию сферических функторов как категорификацию превратных топологических пучков на комплексном диске, стратифицированном точкой центра диска и дополнением к ней. Ими было предложено понятие сферической пары, как набор данных, которые кодифицируют сферический функтор. Этот формализм оказался очень удобен для функторов, связанных с флопами. Бодзента и Бондал построили геометрически сферическую пару, которая связана со сферическим функтором нуль-категории. Тем самым была получена геометрическая интерпретация производной нуль категории как под-фактор категории расслоенного произведения многообразия с флопированным многообразием.

Подход к категорным аспектам теории флопов с точки зрения теории коммутативных и некомиутативных деформаций развивался Ю. Тодой [31] и Донованом-Вимсом [14]. Бондал и Бодзента предложили новый общий подход к самой теории некоммутативных деформаций и вывели следствия для флопов. Идея состоит в том, чтобы категорифицировать подлежащую категорию, на которой определяется деформационный функтор. Вместо категории алгебр предложено рассмотреть категорию категорий с подходяшими свойствами. Была доказана индпредставимость деформационного функтора в случае, когда деформируется простой набор объектов в абелевой категории. Тем самым были заложены основы более естественной категорной теории деформаций в противовес алгебраической.

В качестве подготовительных фактов для приложения новой категорной теории деформаций к флопам, был описан одномерный слой флопированного морфизма, который оказался деревом гладких рациональных кривых, и определены простые объекты в нуль-категории, которые оказались пучками O(-1) на этих рациональных кривых. Было доказано, что нуль категория инд-представляет деформационный функтор для этого набора объектов. Тем самым была выяснена естественная связь теории деформаций с флопами.

Результаты работы докладывались на международной конференции "Апгебраическая геометрия и приложения к физике и динамике" в Санкт-Петербурге, май 2015 г., на Симпозиуме EPSRC в Варвике "Производные категории и бирациональная геометрия", июнь 2015 г., Варвик, Великобритания, на конференции "Производная геометрия", июль 2015 г., Поханг, Южная Корея.

2.3. Производное соответствие Маккея

Пусть G — конечная подгруппа в $SL_2(\mathbb{C})$. Классическое соответствие Маккея устанавливает связь между теорией представлений G и геометрией фактора $\mathbb{C}^2$ по действию G. А именно, оно устанавливает биекцию между нетривиальными неприводимыми представлениями G и исключительными дивизорами минимального разрешения X факторособенности $\mathbb{C}^2/G$. Следуя духу современного языка алгебраической геометрии, соответствие Маккея может быть интерпретировано [21, 27] как эквивалентность производных категорий — производной категории G-эквивариантных когерентных пучков на $\mathbb{C}^2$ и производной категории когерентных пучков на X. В таком виде естественно пытаться обобщить его на высшие размерности. Основная трудность здесь связана с тем, что для особенностей в размерности более двух нет очевидного кандидата на хорошее разрешение особенности. Минимальное разрешение, как правило, уже не единственно. Естественно рассматривать крепантные разрешения, однако они существуют уже не для всех факторов $\mathbb{C}^n/G$ по конечным подгруппам в SL_n, а если существуют, то опять же часто не единственны. Бриджленд, Кинг и Рид построили [12] для конечных подгрупп в $SL_3(\mathbb{C})$ конкрентное крепантное разрешение факторособенности $\mathbb{C}^3/G$ и установили для него требуемую эквивалентность производных категорий. Это разрешение есть G-схема Гильберта для $\mathbb{C}^3$ — пространство модулей нульмерных когерентных пучков на $\mathbb{C}^3$ специального вида.

Развивая методы Бриджленда, Кинга и Рида, сотрудник Лаборатории А.Елагин (совместно с В.Лунцем) построил (в размерности 3) новые многообразия модулей, также дающих производное соответствие Маккея. Это многообразия модулей стабильных представлений колчана Маккея с соотношениями, которые рассматривались ранее Кронхеймером [28] и Сардо Инфирри [23, 24]. Было показано, что для общего выбора параметра стабильности они являются крепантными разрешениями факторособенности $\mathbb{C}^3/G$ и для них также имеется эквивалентность производной категории когерентных пучков с производной категорией G-эквивариантных когерентных пучков на $\mathbb{C}^3$ (см. [17]). Этот метод выглядит особенно перспекивным в размерностях больших 3, так как гипотетически позволяет получить крепантные разрешения особенностей в виде многообразий модулей стабильных представлений в том числе в тех случаях, когда G-схема Гильберта таким разрешением не является.

2.4. Дзета-функция dg-категории

Для многообразия X над конечным полем F дзета-функция Хассе–Вейля определяется так, что её логарифмическая производная это производящая функция для числа точек у многообразия X над всеми конечными расширениями поля F, а в явном виде следующей формулой

$$Z_{HW}(X,t) := \exp\left(\sum_{k\geq 1} \frac{\#X(F_k)}{n} t^n\right),$$

где $F_k \supset F$ это (единственное) расширение поля F степени k.

Эквивалентно, но чуть менее привычно, можно записать ту же функцию как производящую функцию для числа F-точек у последовательности F-многообразий $Sym^n X$:

$$Z_{HW}(X,t) = \sum_{m\geq 0} \#(Sym^m X)(F) t^m.$$

Здесь $Sym^m X$ это алгебраические многообразия, *симметрические степени* алгебраического многообразия X, определенные как фактор-пространства декартовой степени X^m по естественному действию симметрической группы Σ_m перестановками множителей.

В работе [25] Михаил Капранов заметил, что второе определение имеет смысл в гораздо большем контексте произвольных многообразий X над произвольной схемой B и определил то, что сейчас называется (универсальной) дзета-функцией Капранова как

$$Z_{Kap}(X,t) := \sum_{m\geq 0} [Sym^m X] t^m \in 1 + tK_0(Sch/B)[[t]]$$

Дзета-функция Капранова это формальный степенной ряд, коэффициенты которого лежат в так называемом кольце Гротендика многообразий (или схем) над B. Это кольцо по определению порождено классами $[X]$ изоморфизма всех возможных схем над B, с точностью до соотношения

$$[X] = [Z] + [U]$$

где $Z \subset X$ это произвольная замкнутая подсхема в X, а $U = X \backslash Z$ это открытая подсхема в X, полученная как дополнение к Z. Операция декартова умножения схем наделяет абелеву группу Var/B структурой ассоциативного коммутативного кольца с единицей. Если схема B это спектр конечного поля F из кольца $K_0(Vars/F)$ можно построить гомоморфизм в кольцо целых чисел $\mathbb{Z}$, отправляющий многообразие X/F в число точек $\#X(F)$ над полем F. Образ универсальной дзета-функции Капранова при этом гомоморфизме равен дзета-функции Хассе–Вейля.

Цель совместной работы [19] Сергея Галкина с Евгением Шиндером состоит в том, чтобы придумать аналог дзета-функции Капранова в контексте некоммутативной геометрии, совместимый с исходным определнием Капранова в "коммутативном случае". Им удалось придумать подходящее определение в случае если поле F имеет характеристику ноль.

Здесь следует пояснить, что же значит "совместимый". В случае если B это поле характеристики ноль, теорема Биттнер–Лоенги говорит, что кольцо Гротендика многообразий изоморфно *кольцу Биттнер* $K_0^{bl}(Vars/B)$, образующие которого это всевозможные *гладкие проективные* многообразия над F, а вместо соотношений разрезания выступают соотношения раздутия. Если $Z \subset X$ это вложение одного гладкого проективного многообразия в другое, а $Bl_Z X$ это раздутие многообразия X с центром в подмногообразии Z и исключительным дивизором E, то соотношение раздутия это

$$[Bl_Z X] - [E] = [X] - [Z]$$

Достаточно очевидно, что для любой базы B корректно определен тавтологический гомоморфизм из кольца Биттнер в кольцо Гротендика, отсылающий класс $[X] \in K_0^{bl}(Vars/F)$ гладкого проективного многообразия X в кольце Биттнер в класс $[X] \in K_0(Vars/F)$ этого же многообразия уже в кольце Гротендика. Теорема Биттнер говорит, что в случае если база B это спектр поля F характеристики ноль, описанный естественный гомоморфизм является изоморфизмом. Эпиморфность данного гомоморфизма следует из полувековой давности теоремы Хиронаки о разрешении особенностей, а его мономорфность выводится Биттнер из теоремы Абрамовича–Кару–Мацуки–Влодарчика о слабом разложении бирациональных автоморфизмов.

В работе [5] Алексей Бондал, Майкл Ларсен, и Валерий Лунц строят абелеву группу Δ, порожденную классами гладких проективных многообразий над F (так же как и кольцо Биттнер), с соотношениями вида

$$[X] = [Y_1] + \cdots + [Y_n],$$

для всех полуортогональных разложений $\mathcal{D}(X)$, ограниченной производной категории когерентных пучков на гладком проективном многообразии X, полуортогональные слагаемые которых эквивалентны $\mathcal{D}(Y_i)$:

$$\mathcal{D}(X) = \langle \mathcal{D}(Y_1), \ldots, \mathcal{D}(Y_n) \rangle.$$

Так же они заметили, что теорема Дмитрия Орлова и Алексея Бондала о полуортогональном разложении производной категории когерентных пучков на раздутии влечет корректную определенность эпиморфизма абелевых групп $\mu_\Delta : K_0^{bl}(Vars/F) \to \Delta$, отсылающему класс $[X]$ в класс $[X]$. Также это позволяет определить умножение на Δ.

В случае если F это поле характеристики ноль, это позволяет определить операции на кольце Δ:

$$[X] \to \mu_\Delta([Sym^m X]).$$

С другой стороны, в случае если F это поле характеристики взаимно простой с F, в статье [20] Нора Гантер и Михаил Капранов определили понятие симметрической степени от произвольной F-линейной dg-категории $\mathcal{C}$:

$$\mathcal{C} \to Sym^m_{GK}\mathcal{C}$$

В случае, если $\mathcal{C}$ это оснащение $\mathcal{D}(X)$ для гладкого проективного многообразия X, гомотопическая категория от категории $Sym^m_{GK}\mathcal{C}$ эквивалентна ограниченной производной категории Σ_m-эквивариантных когерентных пучков на декартовой степени X^m.

Статья [20] Гантер и Капранова заканчивается вопросом: как связаны симметрические степени и полуортогональные разложения? С ответа на этот вопрос начинается работа [19] Галкина и Шиндера.

Они показывают, что всякое полуортогональное разложение вида

$$\mathcal{D}(X) = \langle \mathcal{D}(Y_1), \ldots, \mathcal{D}(Y_n) \rangle$$

индуцирует полуортогональное разложение для эквивариантной категории $\mathcal{D}^{\Sigma_m} X^m$, слагаемые которого эквивалентны эквивариантным категориям вида $\mathcal{D}^{\Sigma_{m_1} \times \cdots \times \Sigma_{m_n}}(Y_1^{m_1} \times \cdots \times Y_n^{m_n})$ для всех различных неотрицательных целых чисел $(m_1, \ldots, m_n)$ с суммой $m_1 + \cdots + m_n = m$.

Аналогично, для любой достаточно хорошей dg-категории $\mathcal{C}$, полуортогональное разложение вида

$$\mathcal{C} = \langle \mathcal{A}, \mathcal{B} \rangle$$

индуцирует полуортогональное разложение для симметрической степени Гантер–Капранова $Sym^m_{GK}\mathcal{C}$, полуортогональные слагаемые которого Морита-эквивалентны произведениям $Sym^a_{GK}\mathcal{A}\hat{\otimes}Sym^b_{GK}\mathcal{B}$ для различных $a + b = m$:

$$Sym^m\mathcal{C} = \langle Sym^m\mathcal{A}, Sym^{m-1}\mathcal{A}\hat{\otimes}\mathcal{B}, Sym^{m-2}\mathcal{A}\hat{\otimes}Sym^2\mathcal{B}, \ldots, Sym^m\mathcal{B} \rangle$$

Обе леммы используют теоремы Алексея Елагина [15, 16] о полуортогональных разложениях эквивариантных категорий. В доказательстве своих теорем Елагин использует технику монад. В аппендиксе второй версии работы [19] эта теорема будет доказана с использованием 2-категорной техники без применения монад.

Эти леммы показывают, что сопоставление $\mathcal{C} \to Sym^m_{GK}\mathcal{C}$ определяет операцию на кольце dg-категорий. Последнее кольцо также было определено в статье [5] под названием $\mathcal{PT}^+$, а в [19] оно обозначено $K_0(dg - cat)$. Образующие кольца $K_0(dg - cat)$ это достаточно хорошие dg-категории (эквивалентные категории скрученных комплексов над гладкой собственной dg-алгеброй), а соотношения имеют вид $[\mathcal{C}] = [\mathcal{A}] + [\mathcal{B}]$ для полуортогональных разложений $\mathcal{C} = \langle \mathcal{A}, \mathcal{B} \rangle$. Наличие операций Sym^m позволяет рассмотреть их производящий ряд, *наивную дзета-функцию*

$$\hat{Z}(\mathcal{C}, t) = \sum_n [Sym^m\mathcal{C}]t^m \in 1 + tK_0(dg - cat)[[t]]$$

Лемма о связи полуортогональных разложений и симметрических степеней влечет мультипликативность наивной дзета-функции:

$$\hat{Z}(\langle \mathcal{A}, \mathcal{B} \rangle, t) = \hat{Z}(\mathcal{A}, t) \cdot \hat{Z}(\mathcal{B}, t)$$

Тем не менее, определение наивной дзета-функции, несмотря на его естественность имеет ряд недостатков.

Например, единицей в кольце $K_0(dg - cat/F)$ выступает категория (комплексов) векторных пространств, а m-ая симметрическая степень этой категории естественно отождествляется с производной категорией представлений симметрической группы Σ_m. В случае если F это алгебраически замкнутое поле характеристики 0, лемма Шура влечел существование полностью ортогонального разложения производной категории представлений Σ_m в $p(m)$ копий категории векторных пространств, здесь $p(m)$ это число неприводимых представлений симметрической группы Σ_m, то есть число разбиений. Следовательно наивная дзета-функция от единицы равна

$$\hat{Z}(1,t) = \sum_{m\geq 0} p(m)t^m = \prod_{n\geq 1}(1-t^n)^{-1}$$

Этот и другие примеры показывают, что определение наивной категорной дзета-функции следует подправить, и Галкин–Шиндер определяют подправленную категорную дзета-функцию $Z(\mathcal{C},t)$ формулой

$$\prod_{n\geq 1} Z(\mathcal{C},t^n) = \hat{Z}(\mathcal{C},t)$$

или в явном виде с помощью формулы обращения Мёбиуса $Z(\mathcal{C},t) := \prod_{n\geq 1} \hat{Z}(\mathcal{C},t^n)^{\mu(n)}$, где $\mu(n)$ это функция Мёбиуса.

Галкин и Шиндер выдвигают *гипотезу совместимости* поправленной категорной дзета-функции с дзета-функцией Капранова:

$$Z(\mathcal{D}(X),t) = \mu_{\mathcal{PT}^+}\left(Z_{Kap}(X,t)\right)$$
$$\hat{Z}(\mathcal{D}(X),t) = \mu_{\mathcal{PT}^+}\left(\prod_{n\geq 1} Z_{Kap}(X,t^n)\right)$$

Здесь $\mu_{\mathcal{PT}^+}$ это определенный Бондалом, Ларсеном и Лунцом естественный гомоморфизм из $K_0^{bl}(Vars/F)$ в $\mathcal{PT}^+$, отсылающий класс гладкого проективного $[X]$ в класс оснащенной категории $[\mathcal{D}(X)]$.

Также они формулируют аналогичную, но чуть более сильную гипотезу в чисто геометрических терминах.

Они доказывают гипотезу совместимости в разных случаях: когда размерность гладкого проективного X не превосходит 2, по модулю t^3, и в некоторых других случаях.

Вопрос о рациональности поправленной категорной дзета-функции и функциональном уравнении для неё остаётся открытым.

2.5. Производные категории кривых

Сотрудниками лаборатории А. Кузнецовым и А. Фонаревым был исследован вопрос А. Бондала о вложимости ограниченной производной категории когерентных пучков на проективном алгебраическом многообразии в производную категорию гладкого многообразия Фано. Внимание было сосредоточено на гипотезе С. Галкина о вложимости производной категории гладкой проективной кривой C рода больше единицы в производную категорию многообразия модулей стабильных расслоений ранга 2 на C с фиксированным нечетным детерминантом. Производные категории подобных кривых являются простейшими примерами неразложимых геометрических производных категорий, и их реализация в качестве полуортогональных компонент многообразий Фано есть важный случай, позволяющий лучше исследовать вопрос о вложимости в целом.

В работе [18] были получены частичные продвижения в решении данного вопроса, а именно, с использованием описания Дезаля–Раманана соответствующего пространства модулей для гиперэллиптических кривых было показано, что универсальное расслоение Пуанкаре дает положительный ответ в гиперэллиптическом случае. Отсюда следует, что для общей кривой C расслоение Пуанкаре дает строго полный функтор из производной категории нривой в производную категорию многообразия модулей.

2.6. Суперсвязности и классы Черна когерентных пучков на компактных комплексно-аналитических многообразиях

Для классов Черна голоморфных расслоений на комплексных многообразиях (как алгебраических, так и не алгебраических) существуют различные (эквивалентные) определения и/или описания. В любом случае классы Черна определяются как некоторые элементы целочисленных когомологий многообразия или когомологий по модулю кручения, то есть как лежащие в образе целочисленных когомологий при отображении в дерамовские. Так получается, в частности, при построении характеристических классов с помощью формы кривизны произвольной связности (конструкция Черна–Вейля).

Для голоморфных расслоений информацию о таких классах можно уточнить: они представимы формами типа (p, p). Это немедленно следует из того, что голоморфное расслоение можно представлять себе как гладкое (комплексное) векторное расслоение, снабженное плоской $\bar{\partial}$-связностью ∇''. Если выбрать произвольную эрмитову метрику в этом расслоении, то $\bar{\partial}$-связность однозначно достраивается до эрмитовой связности $\nabla = \nabla' + \nabla''$. Форма кривизны последней $F = \nabla^2$ по построению имеет тип (1,1), что и влечет указанные выше свойства классов Черна. Есть и более детальная версия: можно показать, что при изменении эрмитовой метрики инвариантный полином кривизны, например, $\mathrm{tr}F^p$ изменяется на $\bar{\partial}\partial$-точную форму. Поэтому можно определить классы Черна как элементы когомологий Ботта–Черна $H^{p,p}_{BC}(X)$ многообразия X. По определению (см. [2]):

$$H^{p,q}_{BC}(X) = \frac{\{\text{замкнутые } (p,q)\text{-формы}\}}{\{\bar{\partial}\partial\text{-точные}\}}\,.$$

На любом комплексно-аналитическом многообразии имеем естественные гомоморфизмы когомологий Ботта–Черна в когомологии Дольбо и де Рама:

$$H^{p,q}_{BC}(X) \to H^{p,q}_{\bar{\partial}}(X)\,,$$
$$H^{p,q}_{BC}(X) \to H^{p+q}_{dR}(X,\mathbb{C})\,,$$

которые оказываются изоморфизмами, если X кэлерово многообразие [2]. В общем случае, однако, это не так.

В совместной работе А. Бондала и А. Рослого предлагается конструкция, позволяющая перенести описанный формализм на случай когерентных пучков на компактных комплексно-аналитических многообразиях. Следует отметить, что на алгебраических многообразиях, а также на произвольных (гладких) комплексных многообразиях размерности 2 любой когерентный пучок допускает глобально определенную локально-свободную резольвенту конечной длины (случай комплексных поверхностей см. в работе [30]). В этих случаях вопрос о классах Черна когерентного пучка немедленно сводится к случаю голоморфных расслоений. В общем, комплексно-аналитическом случае это не верно [33]. Тем не менее на компактных комплексно-аналитических многообразиях существует описание когерентных пучков в терминах, аналогичных описанию голоморфных расслоений с помощью $\bar{\partial}$-связности. Для этого надо использовать понятие $\bar{\partial}$-суперсвязности.

Рассмотрим $\mathbb{Z}$-градуированное гладкое расслоение $\mathcal{E}^\bullet$ на X, которое является локально свободным модулем над пучком алгебр $(0,q)$-форм

$\mathcal{A}^{(0,\bullet)}$, а также наделено дифференциальным оператором первого порядка D'', действующим в сечениях этого расслоения, имеющим градуировочную степень 1, в квадрате обращающимся в ноль, $(D'')^2 = 0$, и согласованного по правилу Лейбница с умножением на $(0,q)$-формы и оператором Дольбо $\bar{\partial}$. (Иначе говоря, мы имеем дело с dg-модулем $(\mathcal{E}^\bullet, D'')$ над dg-кольцом $(\mathcal{A}^{(0,\bullet)}, \bar{\partial})$.) Эти данные мы называем плоской $\bar{\partial}$-суперсвязностью. Как известно, для любого когерентного аналитического пучка G на компактном комплексно-аналитическом многообразии X найдется такая плоская $\bar{\partial}$-суперсвязность, что ее пучок когомологий степени ноль изоморфен G, а остальные когомологии равны нулю [3, 3]. Теперь можно поступить, как и в случае голоморфных расслоений: введем в $\mathcal{E}$ эрмитову метрику и достроим $\bar{\partial}$-суперсвязность D'' до полной суперсвязности $D = D' + D''$. Тогда инвариантные полиномы кривизны, $\mathcal{F} = D^2$ определяют классы когомологий Ботта–Черна типа (p,p), не зависящие от метрики. В случае, когда когерентный пучок все-таки имеет локально-свободную резольвенту, описанная конструкция согласуется с определением посредством резольвенты. Такое построение/описание классов Черна может быть полезным при аналитических рассуждениях, в стиле доказательства теоремы Римана–Роха с помощью ядра уравнения теплопроводности.

2.7. Многобразия Гушеля–Мукаи

Одним из наиболее интересных типов трехмерным многообразий Фано являются многообразия с числом Пикара 1, индекса 1 и степени 10. Эти многообразия были классифицированы в работах Дж. Фано, В.А. Исковских и Н. Гушеля. Также большой интерес представляют их более многомерные аналоги, изучавшиеся в работах Ш. Мукаи. В статье [13] пересматриваются многочисленные вопросы связанные с геометрией этих многообразий, которые в работе называются многообразиями Гушеля–Мукаи.

Во-первых, в работе найден новый подход к классификации таких многообразий. Он основан на построении важного для геометрии этих многообразий расслоения ранга 2 как избыточного конормального расслоения. Такой подход полностью снимает все вопросы о каноничности данного расслоения, его поле определения и прочие похожие вопросы, которые неизбежно возникали при использовании подходов Гушеля и Мукаи. Кроме того, новый подход позволяет расширить классификационные результаты на особые многообразия того же типа, что весьма важно для общей теории.

Во-вторых, в работе систематизируются и обощаются разнообразные результаты о связи многообразий Гушеля–Мукаи с очень интересным классом четырехмерных гиперповерхностей степени 6, так называемых секстик Айзенбада–Попеску–Уолтера или EPW-секстик. Эти гиперпоферхности обладают рядом удивительных свойств, одним из самых впечатляющих является то, что каждая такая секстика обладает двулистным накрытием, разветвленным только в особом локусе гиперповерхности, которое является гиперкэлеровым многообразием. EPW-секстики были тщательно изучены в работах Кирана О'Грэди, а их связь с многообразиями Гушеля–Мукаи была отмечена в работе А. Илиева и Л. Манивеля [22]. Кау же отмечалось выше, в работе систематизируются и обощаются эти результаты. В частности, описывается слой отображения периодов для многообразий Гушеля–Мукаи в терминах связанной с ним EPW-секстики. Кроме того, вводятся важные понятия период-патрнеров и двойственных многообразий Гушеля–Мукаи и устанавливается связь между введенной двойственностью и проективной двойственностью для квадрик.

Наконец, главный результат работы — новая конструкция бирациональных изоморфизмов между многообразиями Гушеля–Мукаи, обобщающая преобразование в конике и преобразование в прямой, рассматривавшиеся ранее. Новая конструкция основана на изучении двух расслоений на квадрики, ассоциированных с многообразием Гушеля–Мукаи, и описанием их дискриминантных локусов через ассоциированную EPW-секстику. Оказывается, что дискриминант для первого из этих расслоений для всякой период-пары многообразий Гушеля–Мукаи совпадает при ограничении на общую часть базы расслоений. Отсюда следует бирациональность период-партнеров размерности 4. Аналогично, дискриминант для второго из этих расслоений для всякой пары двойственных многообразий Гушеля–Мукаи тоже совпадает при ограничении на общую часть базы расслоений. Отсюда следует бирациональность двойственых многообразий размерности 3. Комбинируя эти две конструкции удается доказать, что любые период-партнеры а также любые двойственные многообразия Гушеля–Мукаи бирационально изоморфны. В частности, ни одно из этих многообразий не является бирационально жестким. Кроме того, в работе представлено новое доказательство рациональности всех гладких многообразий Гушеля–Мукаи размерности 5 и выше.

2.8. Ортогональные пары, взаимно-несмешанные базисы и симплектическая геометрия

Ортогональной парой в алгебре Ли $\mathcal{L}$ называется пара Картановских подалгебр $(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$, ортогональных по отношению к форме Киллинга. Описание всех ортогональных пар в $\mathcal{L}$ — первый шаг в направлении классификации ортогональных разложений $\mathcal{L}$, то есть разложений в прямую сумму попарно ортогональных Картановских подалгебр.

Ортогональные разложения первым ввел Томпсон в начале 60-х годов. Теория ортогональных разложений получила существенный толчок в развитии в конце 70-х – начале 80-х годов в работах Кострикина А.И. и соавторов. Ими были построены ортогональные разложения почти всех простых алгебр Ли, кроме случая $sl(n)$. В случае $sl(n)$ была высказана гипотеза, получившая название гипотезы Винни-Пуха: $sl(n)$ имеет ортогональное разложение тогда и только тогда, когда $n = p^m$ (p — простое). На сегодняшней день неизвестно даже есть ли у $sl(6)$ ($n = 6$ — первое число, не являющееся степенью простого) ортогональное разложение или нет.

Параллельно, в 60-х годах 20-го века, физик Швингер сформулировал известную задачу классификации взаимно-несмешанных базисов в конечномерном гильбертовом пространстве, а именно, базисы $\{e_i\}_{i=1}^n$ и $\{f_j\}_{j=1}^n$ называются взаимно-несмешанные, если $(e_i, f_j) = \frac{1}{n}$ для любых $i, j = 1, \ldots, n$. Вопрос Швингера состоял в следующем: сколько существует попарно взаимно-несмешанных базисов в n-мерном пространстве. Несложно показать, что попарно взаимно-несмешанных базисов в n-мерном пространстве не более $n+1$. В случае, когда попарно взаимно-несмешанных базисов ровно $n + 1$ говорят о полном наборе взаимно-несмешанных базисов в n-мерном пространстве. В работах физиков были построены полные наборы взаимно-несмешанных базисов в случае, когда $n = p^m$. До сих пор вопрос о существовании полного набора открыт в случае $n = 6$.

В дальнейшем, взаимно-несмешанные базисы получили большое развитие в квантовой теории информации (в частности, в построении протоколов), квантовой телепортации.

В начале 21-го века в работах Тьепа и соавторов было показано, что понятия ортогональных пар, разложений и взаимно-несмешанных базисов оказались очень близкими. Эту близость можно сформулировать так: задача классификации ортогональных пар — “комплексификация” задачи классификации взаимно-несмешанных базисов. А задача существования ортогональных разложений $sl(n)$ — "комплексификация" задачи существования полного набора попарно взаимно-несмешанных базисов в n-мерном пространстве.

В работе [9] изучаются аспекты симплектической геометрии, появляющиеся в задаче классификации ортогональных пар в $sl(n)$. Понятие ортогональной пары в $sl(n)$ можно эквивалентно переформулировать как задачу классификации ортогональных проекторов $p_1, \ldots, p_n$ и $q_1, \ldots, q_n$, таких что $\mathrm{Tr} p_i q_j = \frac{1}{n}$. Зафиксировав проекторы $q_1, \ldots, q_n$, будем варьировать проекторы $p_i, i = 1, \ldots, n$ в произведении (ко)присоединенных орбит $\mathcal{O}_{p_1} \times \cdots \times \mathcal{O}_{p_n}$. Это произведение орбит, как известно, является симплектическим многообразием. Тогда условие ортогональности нам задаст лагранжево подмногообразие в этом произведении орбит, а условие на следы ($\mathrm{Tr} p_i q_j = \frac{1}{n}$) задаст другое лагранжево подмногообразие в этом произведении орбит. Соответственно, получаем, что многообразие ортогональных пар в $sl(n)$ можно интерпретировать как пересечение лагранжевых подмногообразий в произведении коприсоединенных орбит проекторов.

Используя известные результаты симплектической геометрии, мы получаем описание пересечения, как критических точек функции-потенциала на многообразии ортогональных проекторов. А именно, если $g = \{g_{ij}\}$ — матрица перехода от проекторов $\{q_j\}$ к $\{p_j\}$, то экспонента этой функции является многочленом Лорана от переменных g_{ij} и задается формулой:

$$E = \frac{\det(g_{ij})}{\prod_{i,j=1}^{n} g_{ij}}.$$

Критические точки многочлена Лорана появляются в изучении зеркальной симметрии для торических многообразий и их деформаций. Торическое многобразие, соответствующее потенциалу, задается веером, построенным по многограннику Ньютона потенциала. В случае многочлена E многогранник Ньютона — известен как многогранник Биркгофа. Его вершины задаются как двойные стохастические матрицы, изучаемые в теории вероятностей. Показывается, что соответствующее торическое многообразие X_E является Горенштейн–Фано с терминальными особенностями, кроме случаев $n = 2$ и $n = 3$. В случае $n = 2$ — $X_E = \mathbb{P}^1$ и $n = 3$ — $X_E = \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2$, при $n > 3$ многообразия X_E будут особыми.

Задача классификации ортогональных пар и разложений тесно связана с теорией представлений редуцированных алгебр Темперли–Либа

$B_r(\Gamma)$. Напомним, что редуцированной алгеброй Темперли–Либа $B_r(\Gamma)$ от графа Γ — называется алгебра с порождающими x_v, индексированными вершинами графа Γ и соотношениями:

$$x_v^2 = x_v,$$

в случае если (v, w) — ребро, то

$$x_v x_w x_v = r x_v,$$

в случае когда (v, w) — не ребро, то

$$x_v x_w = x_w x_v = 0.$$

Соответственно, получаем что ортогональные пары задаются n-мерными представлениями алгебры $B_{\frac{1}{n}}(\Gamma_n(2))$, ортогональные разложения — представлениями $B_{\frac{1}{n}}(\Gamma_n(n+1))$. Здесь графы $\Gamma_n(2)$ и $\Gamma_n(n+1)$ — полные двудольные и $n+1$-дольные графы с n вершинами в каждой доле.

Задача классификации ортогональных пар в $sl(6)$ стояла достаточно давно. Была сформулирована гипотеза, что есть 4-хмерное семейство ортогональных пар в $sl(6)$. Описание ортогональных пар как многообразий представлений редуцированных алгебр Темперли–Либа применяется для доказательства существования 4-хмерной компоненты многообразия ортогональных пар в $sl(6)$ и 4-хмерного семейства взаимно-несмешанных базисов в 6-мерном пространстве. В работе [10] дается обзор доказательств этих результатов. Пусть $X(6,6)$ - многообразие, параметризующее ортогональные пары в $sl(6)$. Идея построения состоит в "склеивании" четырех алгебраических торов $(\mathbb{C}^*)^4$ в 4-хмерное компоненту $X(6,6)$. Строится многообразие X, бирациональное $X(6,6)$ на 4-хмерных компонентах. Ключевой идеей в построении 4-мерной компоненты X будет изучение слоев морфизма $(\mathbb{C}^*)^4 \to \mathcal{U}$, где $\mathcal{U}$ — 3-мерное аффинное многообразие. Показывается, что общие слои этого морфизма, после факторизации по конечным симметриям — эллиптические кривые. С помощью этих кривых и некоторых технических утверждений 4 алгебраических тора $(\mathbb{C}^*)^4$ можно "склеить" в 4-хмерную компоненту многообразия X. А значит, существует 4-хмерная компонента $X(6,6)$.

Изучение алгебр Темперли–Либа привело к изучению смежного вопроса о когерентности относительных квази-свободных алгебр. С помощью известных результатов, в работе [11] была получена левая и правая когерентность относительных квази-свободных алгебр.

Также было продолжено изучение связей алгебры и квантовой теории информации. В работе [1] были изучены квантовые каналы с n-кратной суперактивацией квантовой пропускной способности с нулевой ошибкой, предложенных Широковым М.Е. Были построены семейство алгебр, описывающих эти квантовые каналы, и были исследованы начальные гомологические свойства этих алгебр.

Литература

[1] Amosov G., Zhdanovskiy I., On the noncommutative deformation of the operator graph corresponding to the Klein group, Записки научных семинаров ПОМИ, 2015, vol. 436, p.49–75.

[2] J. Bertin, J.-P. Demailly, L. Illusie, C. Peters, *Introduction to Hodge Theory*, SMF/AMS Texts and Monographs, 8. American Mathematical Society, Providence, RI, x+232 pp. (2002)

[3] J. Block, *Duality and equivalence of module categories in noncommutative geometry*, In: CRM Proc. Lecture Notes, 50, Amer. Math. Soc., Providence, RI, pp. 311–339 (2010)

[4] A. Bodzenta and A. Bondal. Flops and spherical functors. *arXiv:1511.00665 [math.AG]*, 2015.

[5] Alexey Bondal, Michael Larsen, Valery Lunts: *Grothendieck ring of pretriangulated categories*, International Mathematics Research Notices, 2004(29), 1461–1495. Также `http://arxiv.org/abs/math/0401009`arXiv:math/0401009.

[6] A. I. Bondal and D. O. Orlov. Semiorthogonal decompositions for algebraic varieties. *arXiv:alg-geom/9506012*, 1995.

[7] A. I. Bondal and D. O. Orlov. Derived categories of coherent sheaves. In *Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. II (Beijing, 2002)*, pages 47–56, Beijing, 2002. Higher Ed. Press.

[8] A. Bondal, A. Rosly, *Derived categories for complex-analytic manifolds*, preprint IPMU11-0117 (Kashiwa, 2011)

[9] Bondal A., Zhdanovskiy I., Symplectic geometry of unbiasedness and critical points of potential, arxiv 1507.00081 - принята в печать в Advanced Studies in Pure Mathematics, 2016

[10] Bondal A., Zhdanovskiy I., Orthogonal pairs and mutually unbiased bases. Записки научных семинаров ПОМИ, 2015, vol. 437, p. 35-61

[11] Bondal A., Zhdanovskiy I., Coherence of relative quasi-free algebras, Eur. Journal of mathematics, December 2015, vol. 1, issue 4, p. 695-703.

[12] T. Bridgeland, A. King, M. Reid, The McKay correspondence as an equivalence of derived categories, Journal of the AMS, Volume 14, Number 3, Pages 535–554 (2001).

[13] O. Debarre, A. Kuznetsov, Gushel-Mukai varieties: classification and birationalities, preprint math.AG/1510.05448.

[14] W. Donovan and M. Wemyss. Noncommutative deformations and flops. *arXiv:1309.0698v3*, 2013.

[15] A. Elagin: *Descent theory for semiorthogonal decompositions*, Sb. Math., 2012, 203 (5), 645–676. Также `http://arxiv.org/abs/1206.2881`arXiv:1206.2881.

[16] A. Elagin: *On equivariant triangulated categories*, `http://arxiv.org/abs/math/1403.7027`arXiv:math/1403.7027.

[17] A. Elagin, V. Lunts,“New examples of derived McKay correspondence”, in preparation.

[18] A. Fonarev, A. Kuznetsov, Derived categories of curves as components of Fano manifolds, preprint.

[19] Sergey Galkin, Evgeny Shinder: *On a zeta-function of a dg-category*, `http://arxiv.org/abs/1506.05831`arXiv:1506.05831

[20] Nora Ganter, Mikhail Kapranov: *Symmetric and exterior powers of categories*, Transform. Groups 19 (2014), no. 1, 57–103. Также `http://arxiv.org/abs/1110.4753`arXiv:1110.4753.

[21] G. Gonzalez-Sprinberg, J.-L. Verdier, Construction geometrique de la correspondance de McKay, Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. 16 (1983) 409–449.

[22] Iliev, A., Manivel, L., Fano manifolds of degree 10 and EPW sextics, *Ann. Sci. École Norm. Sup.* **44** (2011), 393–426.

[23] A. Sardo Infirri, Partial resolutions of orbifold singularities via moduli spaces of HYM type bundles, Preprint arXiv:AG9610004.

[24] A. Sardo Infirri, Resolutions of orbifold singularities and the transportation problem on the McKay quiver, Preprint arXiv:AG9610005.

[25] M. Kapranov. *The elliptic curve in the S-duality theory and Eisenstein series for Kac–Moody groups*, MSRI Preprint 2000-006. Также `http://arxiv.org/abs/math/0001005`arXiv:math/0001005.

[26] M. Kapranov and V. Schechtman. Perverse schobers. *arXiv:1411.2772v1 [math.AG]*, 2014.

[27] M. Kapranov, E. Vasserot, Kleinian singularities, derived categories and Hall algebras, preprint, math.AG 9812016; Math. Ann. 316 (2000) 565–576.

[28] P. Kronheimer, The construction of ALE spaces as hyperKähler quotients, J. Diff. Geom. 29, 665–683 (1989).

[29] A. Kuznetsov, Calabi–Yau and fractional Calabi–Yau categories, preprint math.AG/1509.07657.

[30] H. W. Schuster, *Locally free resolutions of coherent sheaves on surfaces*, J. Reine Angew. Math. **337**, 159-165 (1982)

[31] Y. Toda. On a certain generalization of spherical twists. *Bulletin de la Société Mathématique de France*, 135:119–134, 2007.

[32] M. Van den Bergh. Three-dimensional flops and noncommutative rings. *Duke Math. J.*, 122(3):423–455, 2004.

[33] C. Voisin, *A counterexample to the Hodge conjecture extended to K?hler varieties*, Int. Math. Res. Not. no. **20**, 1057?1075 (2002)

3. Гомологические и мотивные методы в некоммутативной геометрии

За отчетный период, в рамках темы "Гомологические и мотивные методы в некоммутативной геометрии", сотрудники лаборатории работали над следующими вопросами.

3.1. Бирациональные инварианты комплексных алгебраических многообразий

Изучались бирациональные инварианты комплексных алгебраических многообразий, которые можно получить, изучая когомологии их общих точек. Было показано, что эти когомологии становятся *стабильными* бирациональными инвариантами, если их рассматривать "по модулю когомологий общих точек аффинных пространств". В частности, показано [8], что для любого многообразия U над полем k нулевой характеристики и любой рациональной замкнутой дифференциальной формы η на $U \times \mathbb{A}^1$ найдутся аффинное многообразие Y, доминантные морфизмы $\pi : Y \to U \times \mathbb{A}^1$, $\pi_1, \dots, \pi_m : Y \to \mathbb{A}^N_k$ и рациональные замкнутые дифференциальной формы $\eta_1, \dots, \eta_m$ на $\mathbb{A}^N_k$ и η_0 – на U такие, что $\pi^*\eta = (pr_U \circ \pi)^*\eta_0 + \pi_1\eta_1 + \dots + \pi_m\eta_m$.

3.2. Группы точек абелевых многообразий над полем конечной характеристики

Также изучались группы точек абелевых многообразий над полем конечной характеристики. А именно, напомним общую постановку задачи. Пусть дано гладкое проективное многообразие над конечным полем k. У таких многообразий есть важный инвариант — точки многообразия, определенные над k. Их число всегда конечно. В случае, когда многообразие абелево, множество точек является конечной коммутативной группой. Можно попытаться описать группы, которые реализуются как группы точек абелевых многообразий. Для случая эллиптических кривых такая классификация получена Цфасманом, а также независимо Волохом и Рюкком, которые использовали результаты Схофа. Важно отметить, что в этой классификации многообразия сперва были разбиты на классы (классы изогении), а потом внутри класса описаны все возможные группы точек. В случае абелевых многообразий любой размерности, классы изогении можно классифицировать так. По теореме Тейта-Хонды абелевы многообразия изогенны тогда и только тогда, когда у них совпадают характеристические многочлены автоморфизма Фробениуса на первых этальных когомологиях (многочлены Вейля). Для приложений важно, что в малых размерностях множество этих многочленов описано явно.

Ранее была получена классификация групп точек на абелевых многообразиях над конечными полями в терминах многочленов Вейля при условии, что эти многочлены сеперабельны [9]. Неформально говоря, это общий случай. Также удалось получить аналогичную классификацию групп точек на абелевых поверхностях без предположения сепарабельности [10]. В этом году [12] доказана гипотеза из статьи [9], а также получены результаты в некоторых других специальных случаях. На самом деле, этих специальных случаев почти хватает для классификации в размерности три, но есть пара случаев, в которых возникает слишком сложная комбинаторика.

3.3. Когомологические операции в мотивных теориях рационального типа

В работе [13] А. Вишик определил *теории рационального типа* и доказал, что они есть не что иное как $\Omega^* \otimes_{\mathbb{L}} R$, где Ω^* – алгебраические кобордизмы Левина-Мореля, $\mathbb{L} \cong \Omega^*(pt)$ – кольцо Лазара, R – алгебра над $\mathbb{L}$. В той же работе построено алгебраическое и удобное для вычислений описание аддитивных операций между теорией рационального типа и произвольной ориентированной теорией. В работе [14] А. Вишик обобщает это описание на неаддитивные операции.

Используя эти результаты, мы доказываем нижеследующие утверждения о продолжении операций при локализации коэффициентов, и классифицируем аддитивные операции из K_0.

На произвольной теории рационального типа A^* определены операции Адамса ψ_n^A, однозначно определяемые тем, что $\psi_n^A(c_1^A(L)) = [n] \cdot_{F_A} c_1^A(L)$, где F_A – формальный групповой закон.

Предложение. Пусть A^*, B^* – теории рационального типа и пусть $\phi : A^* \to B^*$ – (возможно, неаддитивная) операция, сохраняющая ноль.

Тогда $\phi \circ \psi_n^A = \psi_n^B \circ \phi$.

Следствие. Пусть A^* –теория рационального типа, B^* – ориентирумая теория, т.ч. $S \subset \mathbb{Z}$ является обратимым в $B = B^*(pt)$.

Тогда любая операция $\phi : A^* \to B^*$ единственным образом продолжается до $\phi : A^*[S^{-1}] \to B^*$.

Используя эти два результата, нетрудно также получить следующее

Следствие. Пусть K – теория рационального типа с кольцом коэффициентов $\mathbb{Z}_{(p)}$.

Тогда $\mathbb{Z}_{(p)}$-модуль аддитивных операций $[K, CH^i \otimes \mathbb{Z}_{(p)}]^{\mathrm{add}}$ является одномерным.

Также можно классифицировать неаддитивные операции между различными компонентами групп Чжоу – именно, доказан следующий результат.

Предложение. Абелева группа операций $[CH^i, CH^j]$ свободна и порождена возведением в степень $\frac{j}{i}$, если $i|j$, и равна нулю в противоположном случае.

Кроме того, А. вишиком было сообшено следующее утверждение:

Предложение (Вишик). Пусть A^* – ориентированная градуированная теория. Тогда множество неаддитивных операций из K-теории в A^* свободно порождено классами Черна на каждой компоненте виртуальной размерности:

$$[\tilde{K_0}, A^n] = (A[c_1, \ldots, c_i, \ldots])_{\deg=n},$$

где $\tilde{K_0}$ – компонента K_0 виртуальной размерности 0.

Нами было получено следующее обобщение этого утверждения на полиоперации.

Предложение. Пусть A^* – ориентированная теория. Тогда множество поли-операций из K_0 в A^* свободно порождено внешними произведениями классов Черна на каждой компоненте виртуальной размерности:

$$[(\tilde{K_0})^{\times m}, A^n] = \left((A[[c_1, \ldots c_i, \ldots]])^{\otimes n}\right)_{\deg=n}.$$

Используя эти предложения, мы получаем классификация аддитивных операций из K_0 в ориентируемые теории. Обозначим $P_n(c_1, c_2, \ldots, c_n) \in$

$\mathbb{Z}[c_1, \ldots, c_n]$ многочлен степени n (считая $\deg c_i = i$), равный $n(\log(c_1 + c_2 + \ldots + c_n))_{\deg = n}$, где $\log t = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{t^i}{i}$.

Следствие. Пусть A^* – ориентированная теория, т.ч. $A = A^*(pt)$ является областью целостности.

Тогда аддитивные операции $[\tilde{K}^0, A^*]^{\mathrm{add}}$ свободно порождены над A операциями P_n.

В частности, если $char A = p$, то аддитивная операция $(P_i)^p$ пропорциональна P_{ip} для любого i.

Также были сформулированы гипотезы об обобщении этих предложения и следствия на случай, когда вместо K_0 рассматривается алгебраическая K-теорию Моравы.

3.4. Инварианты многообразий и узлов и топологические хиральные гомологии

Еще одно направление исследований сотрудников лаборатории в прошедшем году — построение инвариантов многообразий и узлов при помощи топологических хиральных гомологий, введенных в работах Дж. Лури и др. Гипотетически, эти инварианты дают LMO инвариант для 3-многообразий и интеграл Концевича для узлов.

Факторизационные методы в последнее время широко используются в различных областях математики и математической физики. В недавних работах таких ученых как J. Francis, D. Alaya, O. Gwilliam, в частности, обсуждалось применение этих методов к инвариантам многообразий. Однако, насколько нам известно, нам впервые удалось произвести какие-то конкретные вычисления.

В препринте "Weyl n-algebras" сотрудник лаборатории Н. Маркарян вводит специальный класс e_n-алгебр, которые названы n-алгебрами Вейля. Этот, в некотором смысле, простейший нетривиальный класс, играет центральную роль в конструкции инвариантов. Показано, что определенный класс в топологических хиральных гомологиях некоторой 3-алгебра Вейля на рациональной гомологической выражается формулой, похожей на формулы, полученные Аксельродом и Зингером в их работе о пертурбативных инвариантах Черна-Саймонса. Этот класс в хиральных топологических гомологиях позволяет построить инвариант многообразия, предположительно равный LMO инварианту.

Затем, в препринте “Weyl n-algebras and Kontsevich integral of unknot”, рассматриваются инварианты узлов. Описано, как при помощи 3-алгебр Вейля построить инвариант узла, который, гипотетически, равен интегралу Концевича. Благодаря работам Бар-Натана и др. известно, что интеграл Концевича тривиального узла равен характеру Дюфло. В тексте дан набросок вычисления нового инварианта для тривиального узла. Он оказывается тоже равен характеру Дюфло, что подтверждает гипотезу о равенстве между новым инвариантом и интегралом Концевича. Показано, как это вычисление связано с изоморфизмом Дюфло.

Само вычисление основано на другом вычислении, которое аккуратно проделано в начале препринта и представляет самостоятельный интерес. Оно связано с гомологиями Хохшильда кольца функций на симплектическом dg-многообразии и по духу связано с классической работой Н. Маркаряна 1999 года о теореме Римана-Роха.

3.5. Гипотеза о вырождении

Продолжает привлекать интерес гипотеза Концевича–Сойбельмана о вырождении некоммутативной спектральной последовательности Ходжа-де Рама от гомологий Хохшильда к циклическим гомологиям для гладких DG категорий. Сотрудниками лаборатории было сформулировано следующее ее обобщение.

Пусть $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ — произвольные малые DG категории над полем k характеристики нуль. Имеем характер Черна из $K_0(\mathcal{A}\otimes\mathcal{B})$ в $HH_0(\mathcal{A}\otimes\mathcal{B})$. По формуле Кюннета гомологии Хохшильда $\mathcal{A}\otimes\mathcal{B}$ отождествляются с тензорным произведением гомологий Хохшильда $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$. Далее, мы имеем граничное отображение из гомологий Хохшильда категории $\mathcal{B}$ в ее отрицательные циклические гомологии. Таким образом, имеем композицию

$$K_0(\mathcal{A}\otimes\mathcal{B}) \to HH_0(\mathcal{A}\otimes\mathcal{B}) \to (HH_\bullet(\mathcal{A})\otimes HH_\bullet(\mathcal{B}))_0 \to (HH_\bullet(\mathcal{A})\otimes HC^-_\bullet(\mathcal{B}))_1.$$

Тогда наша гипотеза утверждает, что эта композиция всегда равна нулю.

Было показано, что гипотеза Концевича и Сойбельмана является частным случаем нашей общей гипотезы. Кроме того, было показано, что гипотеза Концевича и Сойбельмана вместе с гипотезой о гладкой категорной компактификации влекут нашу гипотезу.

Кроме того, при попытке доказательства приведенной выше обобщенной гипотезы о вырождении был обнаружен следующий новый гомологический инвариант DG алгебр. Пусть $\mathcal{E}$ — некоторая (унитальная)

DG алегбра, и A — неунитальная алгебра в моноидальной категории $\mathcal{E}$-$\mathcal{E}$-бимодулей. Для такой алгебры определен $\mathcal{E}$-линейный смешанный комплекс Хохшильда $C_\bullet^{\mathcal{E}}(A)$. Новый инвариант алгебры A строится следующим образом. Обозначим через MC следующую неунитальную dg алгебру: как градуированная алгебра MC совпадает с неунитальными многочленами $tk[t]$ от переменной t степени 1, а дифференциал определяется равенством $dt = -t^2$. Для нас MC представляет интерес как пронильпотентная алгебра, снабженная полной убывающей фильтрацией $F^n = t^n k[t]$, где $n \geq 1$. Новый инвариант определяется как пополненный $\mathcal{E}$-линейный комплекс Хохшильда пополненного тензорного произведения $MC\hat{\otimes}A$. Полученный смешанный комплекс можно обозначить через $\hat{C}_\bullet^{\mathcal{E}}(MC\hat{\otimes}A)$. Имеется естественное отображение смешанных комплексов

$$\hat{C}_\bullet^{\mathcal{E}}(MC\hat{\otimes}A) \to C_\bullet^{\mathcal{E}}(A).$$

Компонируя индуцированное отображение на гомологиях с граничным отображением из циклических гомологий в гомологии Хохшильда мы получаем естественное отображение

$$\hat{HC}_\bullet^{\mathcal{E}}(MC\hat{\otimes}A) \to HH_\bullet^{\mathcal{E}}(A).$$

В случае, если $\mathcal{E}$ — DG алгебра путей конечного направленного DG колчана, мы ожидаем, что последнне отображение равно нулю. Это зануление влечет обобщенную гипотезу о вырождении. В случае, если $\mathcal{E}$ — базовое поле, было показано, что зануление имеет место. Также было показано, что у последнего факта не существует “явного” доказательства.

Отдельно изучалась производная категория D-модулей, рассмотренная как объект некоммутативной алгебраической геометрии. Было показано, что для любой отделимой схемы X конечного типа над полем характеристики нуль производная категория когерентных D-модулей $D^b(\mathfrak{D}_X)$ имеет гомотопически конечный тип (как DG категория). Это отвечает на вопрос В.Г. Дринфельда. Основную трудность представляет случай особых многообразий. Ключевым фактом является утверждение о поведении данных производных категорий при абстрактных раздутиях. А именно, абстрактное раздутие дает коммутативный квадрат DG категорий D-модулей, в котором стрелки — это функторы производного прямого образа. Утверждается, что этот квадрат является гомотопически кодекартовым.

Данное утверждение можно интерпретировать следующим образом. Рассмотрим категорию схем и собственных морфизмов между ними. На этой категории есть топология Гротендика, называемая pcdh-топологией. Сопоставление схеме производной категории когерентных D-модулей дает копредпучок DG категорий. Утверждается, что этот копредпучок является гомотопически копучком (то есть выполнено условие ко-спуска).

3.6. Стабильная гомотопическая категория

Изучалась также и стабильная гомотопическая категория, наиболее нетривиальная существующая триангулированная категория, и ее некоммутативно-геометрическая структура.

Пусть E- некоторый спектр. Тогда можно рассмотреть полную подкатегорию $E - \mathrm{Acycl} \subseteq \mathrm{h\,Sp}$ гомотопической категории от категории спектров, порожденную всеми такими спектрами A, что $E \wedge A = 0$. В своей работе [1] А. Боусфилд доказал, что для любого спектра E имеется полуортогональное разложение

$$\mathrm{h\,Sp} =< E - \mathrm{Acycl}, E - \mathrm{Loc} > .$$

После этого он предложил следующий план изучения категории спектров: понять категории $E - \mathrm{Loc}$ для различных E и склеить их все вместе.

Для понимания того, как склеивать такие категории, в работе [1] Боусфилд ввел определения класса Боусфилда $\langle E \rangle$ для спектра E, который определяется как набор всех спектров A, таких что $E_*(A) = 0$ (без какой-либо структуры категории). Было доказано, что все классы Боусфилда образуют множество, на котором кроме всего прочего можно ввести естественную структуру решета: классы Боусфилда можно сравнивать, у них можно брать верхнию и нижние грани. Более того, для элементов этого решета можно определить смеш-произведение, которое наследуется с категории спектров.

Схожим образом можно определять когомологический класс Боусфилда $\langle E \rangle^*$ для некоторого спектра E, который определяется как набор всех спектров A, таких что $E^*(A) = 0$ (без какой-либо структуры категории). До сих пор открыт вопрос о том, верно ли, что таких классов лишь множества, и образуют ли эти классы решето естественным образом.

Давайте зафиксируем теперь некоторое простое число p и будем в дальнейшем работать в категории p-локальных спектров. Было доказано следующее

Предложение. Пусть F-некоторый конечный спектр. Обозначим за I спектр, получающийся из спектра сфер по двойственности Брауна-Коменетца. Тогда
1) Если $H\mathbb{Q} \wedge F \neq 0$, то $\langle F \rangle^* = \langle I \oplus H\mathbb{Q} \rangle$.
2) Если $H\mathbb{Q} \wedge F = 0$, то $\langle F \rangle^* = \langle I \rangle$.

Отсюда сразу же получаются следующие следствия:

Следствие. Пусть X- спектр, такой что $H\mathbb{Q} \wedge X \neq 0$. Тогда $F^*(X) \neq 0$ для любого конечного спектра F, такого что $H\mathbb{Q} \wedge F \neq 0$.

Следствие. Пусть X- спектр, такой что $H\mathbb{Q} \wedge X = 0$. Тогда следующие три пункта эквивалентны:
1) $F^*(X) = 0$ для некоторого конечного спектра F.
2) $F^*(X) = 0$ для всех конечных спектров F.
3) $X \wedge I = 0$.

Одними из важнейших p-локальных спектров являются K-теории Моравы $K(n)$, $n \in \mathbb{N} \vee \{\infty\}$. Как следствие, одними из важнейших классов Боусфилда являются классы $\langle \bigoplus_{j \in J} K(j) \rangle$, где $J \subseteq N$.

Были доказаны следующие результаты.

Предложение. Пусть X- некоторый спектр. Тогда

$$X \wedge K(j) \neq 0 \Leftrightarrow \langle X \rangle \geq \langle K(j) \rangle.$$

Предложение. Пусть X- некоторый спектр, $J \subseteq \mathbb{N} \vee \{\infty\}$. Тогда
1) Если $\langle X \rangle \leq \langle \bigoplus_{j \in J} K(j) \rangle$ и $X \wedge K(i) \neq 0$ для некоторого n, то $i \in J$.
2) Если $\langle X \rangle \leq \langle \bigoplus_{j \in J} K(j) \rangle$, но $X \wedge K(i) = 0$ для некоторого $i \in J$, то $\langle X \rangle \leq \langle \bigoplus_{j \in J \setminus \{i\}} K(j) \rangle$
3) Если $\langle X \rangle \leq \langle \bigoplus_{j \in J} K(j) \rangle$ и $\langle X \rangle = \langle X \wedge X \rangle$, то имеется равенство $\langle X \rangle = \langle \bigoplus_{n, \in \mathbb{N}\ X \wedge K(n) \neq 0} K(n) \rangle$.

Стоит заметить, что, удивительным образом, пункт 2 предложения выше оказывается неверен, если пытаться формулировать его не для конкретного индекса $j \in J$ (и, как следствие, любого конечного набора), а для бесконечного набора индексов (контрпримером служит $X = I$ как спектр и все $\mathbb{N}$ как подмножество себя же).

Тем не менее, предложение сразу же дает описание всех классов Боусфилда меньше $\langle \bigoplus_{j\in J} K(j)\rangle$ для конечного индекса $J \subseteq \mathbb{N} \vee \{\infty\}$:

Следствие. Если $\langle X\rangle \le \langle \bigoplus_{j\in J} K(j)\rangle$ и J конечно, то $\langle X\rangle = \langle \bigoplus_{i\in I} K(i)\rangle$, где $I \subseteq J$.

Классы Боусфилда так же удобны для изучения одной из важнейших открытых проблем стабильной алгебраической топологии: гипотезе о телескопе, сформулированной в [7]. А именно, в [2] гипотеза о телескопе переформулирована как гипотеза о том, что некоторый класс Боусфилда, называемый $\langle A(n)\rangle$, зануляется.

Было доказано следующее

Предложение.

$$\langle A(n)\rangle \wedge \langle A(m)\rangle = \begin{cases} A(n), n = m \\ \langle 0\rangle, n \ne m \end{cases}$$

$$\langle A(n)\rangle \wedge \langle F(m)\rangle = \begin{cases} A(n), m \le n \\ \langle 0\rangle, m > n \end{cases}$$

$$\langle A(n)\rangle \wedge \langle T(m)\rangle = \begin{cases} A(n), n = m \\ \langle 0\rangle, n \ne m \end{cases}$$

$$\langle A(n)\rangle \wedge \langle I\rangle = \langle 0\rangle.$$

Кроме того, было получено полное описание решет Боусфилда для категорий $\bigoplus_{j\in J}\langle K(j)\rangle$-локальных спектров, где $J \subseteq \mathbb{N}\vee\{\infty\}$ — некоторое подмножество.

3.7. Вопросы конечности в гомологической алгебре

Был подготовлен обзор результатов [3] по теории контрамодулей над коалгебрами и кокольцами, топологическими кольцами, топологическими группами и алгебрами Ли, и полуконтрамодулей над полуалгебрами. Наряду с ранее опубликованными результатами, обзор содержит также следующий новый результат.

Пусть A – локально нетерова абелева категория Гротендика. Тогда существует и единственна абелева категория B с достаточным количеством проективных объектов, такая что полная подкатегория инъективных объектов в A эквивалентна полной подкатегории проективных объектов в B. При этом в категории B существуют произвольные прямые суммы и произведения, и класс проективных объектов в B (так же, как и класс инъективных объектов в A) замкнут относительно бесконечных прямых сумм и произведений.

Далее, были полученые следующие новые результаты [4]..

Пусть R — коммутативное кольцо, и I — конечно-порожденный идеал в R. Тогда

- абелева категория R-модулей содержит, наряду с хорошо известной абелевой подкатегорией R-модулей I-кручения, также абелеву полную подкатегорию I-контрамодульных R-модулей;

- две полные подкатегории в (ограниченной или неограниченной) производной категории комплексов R-модулей, состоящие из комплексов в когомологиями, являющимися R-модулями I-кручения, и из комплексов, когомологии которых являются I-контрамодульными R-модулями, эквивалентны между собой;

- если идеал I в R слабо прорегулярен (например, всякий идеал в нетеровом коммутативном кольце слабо прорегулярен), то полная подкатегория комплексов с когомологиями I-кручения в (ограниченной или неограниченной) производной категории R-модулей эквивалентна производной категории абелевой категории R-модулей I-кручения, а полная подкатегория комплексов с I-контрамодульными когомологиями в производной категории R-модулей эквивалентна производной категории абелевой категории I-контрамодульных R-модулей;

- таким образом, если идеал I слабо прорегулярен, то (ограниченная или неограниченная) производная категория абелевой категории R-модулей I-кручения эквивалентна (соответственно ограниченной или неограниченной) производной категории абелевой категории I-контрамодульных R-модулей; более того, имеется аналогичная эквивалентность между абсолютными производными категориями этих двух абелевых категорий.

Доказательство последнего из упомянутых результатов основано на понятии дедуализирующего комплекса R-модулей I-кручения, мотивированного аналогией между R-модулями I-кручения и комодулями над коалгеброй (соответственно, между I-контрамодульными R-модулями и контрамодулями над коалгеброй). В контексте комодулей и контрамодулей над (не обязательно кокоммутативными) коалгебрами, получен следующий результат:

- задание дедуализирующего комплекса для кокогерентной слева коалгебры C и кокогерентной справа коалгебры D индуцирует эквивалентность между (обычными или абсолютными, ограниченными или неограниченными) производными категориями абелевых категорий левых C-комодулей и левых D-контрамодулей.

Во введении к препринту, классический феномен MGM-двойственности (современной формулировкой которого являются вышеописанные результаты) интерпретируется как проявление феномена "наивного ко-контра соответствия", другим примером которого является эквивалентность между обычными или абсолютными производными категориями квазикогерентных пучков и контрагерентных копучков на квазикомпактной полуотделимой схеме (полученная в одной из предшествующих работ автора).

Кроме того, изучались когерентные кольца, инъективные модули, дуализующие компмлексы и двойственность Серра-Гротендика [5]. Были получены следующие новые результаты.

- всякий конечно-порожденный подмодуль fp-проективного левого модуля над когерентным слева кольцом конечно представим;
- копроизводная категория категории левых модулей над когерентным слева кольцом A, всякий левый идеал в котором имеет счетное множество образующих, компактно порождена; подкатегорией компактных объектов в ней является ограниченная производная категория конечно-представимых левых A-модулей (этот результат в несколько большей общности совсем другими средствами был ранее получен в работе Я. Штовичека);
- задание слабого дуализирующего комплекса для когерентного слева кольца A и когерентного справа кольца B индуцирует антиэквивалентность между ограниченными производными категориями конечно представимых левых A-модулей и конечно-представимых правых B-модулей (этот результат является небольшим обобщением классических результатов Йекутиели, Миячи и др.);
- задание дуализирующего комплекса для когерентного слева кольца A и когерентного справа кольца B, в предположении, что всякий левый

идеал в A имеет счетное множество образующих, индуцирует ковариантную эквивалентность между копроизводной категорией левых A-модулей и контрапроизводной категорией левых B-модулей;

- задание относительного дуализирующего комплекса для пары морфизмов ассоциативных колец $A \to R$ и $B \to S$, где кольцо A когерентно слева, кольцо B когерентно справа, R является плоским правым A-модулем, и S является плоским левым B-модулем, индуцирует эквивалентность между R/A-полукопроизводной категорией левых R-модулей и S/B-полуконтрапроизводной категорией левых S-модулей;

- для любого морфизма коммутативных колец $A \to R$, где кольцо A когерентно и всякий его идеал имеет счетное множество образующих, а кольцо R является плоским -модулем, задание дуализирующего комплекса A-модулей D индуцирует ассоциативную и коммутативную триангулированную тензорную структуру на R/A-полукопроизводной категории R-модулей, единичным объектом которой является комплекс R-модулей $R \otimes_A D$.

Была также сформулирована более обширная программа исследований в области полубесконечной алгебраической геометрии. Утверждается, в частности, что под полубесконечным алгебраическим многообразием следует понимать инд-схему или инд-стек, плоско или очень плоско расслоенный над инд-схемой инд-конечного типа или инд-нетеровым/инд-когерентным инд-стеком со слоями, являющимися бесконечномерными аффинными схемами, квазикомпактными полуотделимыми схемами или слабо прорегулярными формальными схемами. (Неформально говоря, база сложно склеена из конечномерных афинных кусков, а слои просто склеены из бесконечномерных аффинных кусков.) На базе должен быть задан дуализирующий комплекс.

Наконец, была изучена связь свойства кошулевости, свойста быть комплексом типа $K(\pi, 1)$, и квазиформальности [6]. Были доказаны следующие результаты.

- пусть C – сердцевина t-структуры на триангулированной категории D; предположим, что все объекты абелевой категории C имеют конечную длину, а "большое градуированное кольцо" морфизмов между сдвигами неприводимых объектов абелевой категории C, посчитанных в триангулированной категории D, кошулево. Тогда t-структура с сердцевиной C

на триангулированной категории D является t-структурой производного типа, т.е., группы Ext в абелевой категории C изоморфно отображаются в соответствующие группы Hom в триангулированной категории D;

- бар- и кобар-конструкция являются взаимно-обратными эквивалентностями между категориями положительно когомологически градуированных DG-алгебр с обращенными квазиизоморфизмами и неотрицательно когомологически градуированных конильпотентных DG-коалгебр с обращенными квазиизоморфизмами;

- алгебра когомологий положительно когомологически градуированной DG-алгебры кошулева тогда и только тогда, когда эта DG-алгебра квазиформальна (т.е., некоторые высшие умножения Масси зануляются на ее когомологиях) и имеет тип $K(\pi, 1)$ (т.е., квазиизоморфна кобар-конструкции некоторой конильпотентной коалгебры, рассматриваемой как DG-коалгебра, сосредоточенная в когомологической градуировке ноль);

- DG-алгебра с кошулевой алгеброй когомологий является формальной тогда и только тогда, когда соответствующая ей конильпотентная коалгебра изоморфна своей присоединенной градуированной коалгебре по коаугментационной фильтрации;

- в частности, существует (супер)коммутативная DG-алгебра (над полем любой, напр., нулевой характеристики) с кошулевой алгеброй когомологий, не являющаяся формальной даже в классе некоммутативных DG-алгебр;

- кроме того, существуют некоторые p-адические поля, DG-алгебры коцепей абсолютных групп Галуа которых с коэффициентами в конечных полях $\mathbb{Z}/l\mathbb{Z}$ не являются формальными (хотя имеют кошулевы алгебры когомологий).

Последняя серия примеров позволяет дать отрицательный ответ на вопрос, сформулированный в недавней работе М. Хопкинса и К. Викельгрен.

3.8. Категорное разрешение особенностей

Наконец, изучалось категорное разрешение особенностей — важная недавно введенная конструкция некоммутативной алгебраической геометрии, дающая возможность изучать особые многообразия с некоммутативной точки зрения (что важно, среди прочего, для изучения обобщенного вырождения спектральной последовательности Ходжа-де Рама).

Общая конструкция категорного разрешения была дана ранее Кузнецовым и Лунцем. Конечный разультат ее — полное строго вложение производной категории когерентных пучков на особом алгебраическом многообразии в итерированное расширение категорий гладких компактных многообразий, причем склееных с помощью совершенных функторов склейки. Технически говоря, ключевое место конструкции — альтернированное повторение двух разных конструкций (шаг 1 и шаг 2).

Однако теперь сотрудниками лаборатории было выяснено, что и шаг 1, и шаг 2 в конструкции Кузнецова и Лунца — частные случаи некоторой одновременно более общей и более простой конструкции, названное "высшим раздутием". Высшее, или вернее "уточненное" (refined) раздутие — модификация обычного понятия раздутия, основанная на изучение фильтрованных производных категорий. Высшее раздутия было строго определено, и было показано, что оно всегда является частичным категорным разрешением особенностей. Гипотетически, категорное разрешение особенностей получается простым повторением высших раздутий. Однако это в настоящий момент не доказано, и будет темой дальнейших исследований.

Литература

[1] A. Bousfield. "The Localization of Spectra with Respect to Homology". Topology. Vol. IS. pp. 257-281.

[2] M. Hovey, J. Palmieril. "The Structure of the Bousfield Lattice". ArXiv preprint arXiv:math/9801103v1.

[3] L. Positselski, "Contramodules", arXiv:1503.00991.

[4] L. Positselski, "Dedualizing complexes and MGM duality", arXiv:1503.05523.

[5] L. Positselski, "Coherent rings, fp-injective modules, dualizing complexes, and covariant Serre–Grothendieck duality", arXiv:1504.00700.

[6] L. Positselski, "Koszulity = $K(\pi, 1)$-ness + quasi-formality", arXiv:1507.04691.

[7] D. Ravenel. "Localization with Respect to Certain Periodic Homology Theories". American Journal of Mathematics, Vol. 106, No. 2, (Apr., 1984), pp. 351-414.

[8] M.Rovinsky, "Stable birational invariants with Galois descent and differential forms", принято в Moscow Mathematical Journal.

[9] S. Rybakov. The groups of points on abelian varieties over finite fields. Cent. Eur. J. Math. 8(2), 2010, 282-288. arXiv:0903.0106v4

[10] S. Rybakov. The groups of points on abelian surfaces over finite fields. Arithmetic, Geometry, Cryptography and Coding Theory, Contemporary Mathematics, vol. 574, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2012, pp. 151-158.

[11] S. Rybakov. Finite group subschemes of abelian varieties over finite fields. Finite Fields and Their Applications. 29 (2014), 132-150. arXiv:1006.5959

[12] S. Rybakov. On classification of groups of points on abelian varieties over finite fields. To appear in MMJ, 2015. arXiv:1401.1652

[13] Vishik, Alexander. "Stable and unstable operations in algebraic cobordism." arXiv preprint arXiv:1209.5793 (2012).

[14] Vishik, Alexander. "Operations and poly-operations in Algebraic Cobordism." arXiv preprint arXiv:1409.0741 (2014).

4. Специальные многообразия

4.1. Голоморфно симплектические многообразия

Екатерина Америк и Михаил Вербицкий исследовали пространства Тейхмюллера гиперкэлеровых и симплектических структур на компактном многообразии M . На вторых когомологиях $H^2(M,\mathbb{R})$ многообразия с гиперкэлеровой структурой имеется целочисленная квадратичная форма q топологической природы, сигнатуры $(3, b_2 - 3)$ (форма Бовилля-Богомолова). Из предыдущих работ Вербицкого видно, что пространство Тейхмюллера гиперкэлеровых структур на M вкладывается в грассманниан положительных 3-мерных подпространств в $H^2(M,\mathbb{R})$. В одной из прошлогодних совместных работ Америк и Вербицкого были определены так называемые MBM-классы в вторых когомологиях $H^2(X,\mathbb{R})$ голоморфно симплектического (т.е. гиперкэлерова) комплексного многообразия X - это такие классы типа $(1,1)$, что ортогональные гиперплоскости к ним высекают кэлеров конус в положительном. Оказалось, что свойство быть MBM инвариантно при деформациях, сохраняющих ходжев тип $(1,1)$, так что MBM классы разумно рассматривать как подмножество в $H^2(M,\mathbb{R})$ (таким образом, те из них, что типа $(1,1)$ в данной комплексной структуре X, определят в ней кэлеров конус).

В работе "Teichmuller space for hyperkaehler and symplectic structures" этого года было показано, что каждая связная компонента пространства Тейхмюллера гиперкэлеровых структур открыта в $Gr_{+++}(H^2(M,\mathbb{R}))$ и является дополнением к объединению ортогоналов всех MBM классов. Из этого выводится описание пространства Тейхмюллера симплектических структур кэлерова типа: его связные компоненты изоморфно отображаются на положительный конус в $H^2(M,\mathbb{R})$.

В прошлом году Америк и Вербицкий также получили доказательство гипотезы Моррисона-Каваматы о конусе в гиперкэлеровом случае: группа автоморфизмов гиперкэлерова многообразия имеет лишь конечное число орбит на гранях (максимальной размерности $h^{1,1} - 1$) его кэлерова (а также обильного) конуса, и полиэдральную фундаментальную область на обильном конусе с добавленной рациональной границей $Nef^+(X)$.

В этом году они устранили некоторые неточности, связанные с поведением на границе, в доказательстве последнего факта, во-вторых, интерпретировали наши результаты в терминах гиперболической геометрии, получив таким образом новые, очень простые и наглядные доказательства следующих утверждений: гиперкэлерово многообразие имеет лишь конечное, с точностью до изоморфизма, число гиперкэлеровых бирациональных моделей; у гиперкэлерова многообразия с числом Пикара не менее 5 есть гиперкэлерова бирациональная модель с изотропным численно эффективным обратимым пучком (такие пучки важны, потому что гипотетически они задают лагранжевы расслоения на гиперкэлеровых многообразиях). Результаты работы изложены в статье "Hyperbolic geometry of the ample cone of a hyperkaehler manifold".

Екатерина Америк в совместной работе с Фредериком Кампана продолжила изучение характеристического слоения на гладких дивизорах на симплектических многообразиях; конкретно - работу над классификацией случаев, когда такое слоение является алгебраическим. Они значительно упростили прошлогоднее доказательство, так как поняли, что используемая ими орбифолдная структура на базе расслоения тривиальна. Проективный случай разобран полностью, и есть надежда в ближайшее время закончить изучение более общего кэлерова случая.

В статье Вербицкого [V1] получена классификация орбит действия группы классов отображений на пространстве Тейхмюллера комплексных структур для гиперкэлерова многообразия и тора. Доказано, что все орбиты, кроме счетного числа, плотны (соответствующие комплексные структуры называются "эргодическими"). С помощью этой классификации доказано, что гиперкэлеровы многообразия не могут быть гиперболичны по Кобаяши. Этот результат доказывает важную гипотезу, которая восходит к Кобаяши (начало 1970-х годов) и является одним из ключевых проверочных случаев к гипотезам Кобаяши, Ленга и Грина-Гриффитса. Эргодические комплексные структуры, существование которых доказано Вербицким, уже сейчас имеют широкие приложения в разных областях комплексной и симплектической геометрии.

В работе [V3], Вербицкий обобщил твисторную деформацию гиперкэлерова многообразия на случай, когда база деформации - рациональная кривая, пересекающая "абсолют" пространства Тейхмюллера в одной точке. Такие деформации, которые называются "вырожденными твисторными деформациями", можно строить явно на гиперкэлеровых многообразиях, допускающих лагранжево слоение. Было доказано, что эта деформация не меняет ни слоев, ни базы этого лагранжева расслоения, и таким образом обобщает деформацию Тэйта-Шафаревича.

Вместе с А. Солдатенковым, Вербицкий определил k-симплектические структуры и изучил их базовые свойства ([SV]). Было доказано, что любой комплексный тор в общем гиперкэлеровом многообразии M допускает k-симплектическую структуру, где k есть второе число Бетти M. Также было построено действие алгебры Клиффорда $Cl_0(k)$ на касательном расслоении к k-симплектическому многообразию, что позволяет оценить размерность таких торов (она очень большая) и для одного из двух многообразий О'Гради доказать, что их нет. Понятие k-симплектических многообразий обобщает понятие 3-симплектических многообразий, введенное Вербицким и Жардимом в статье [JV]. Статья "k-symplectic structures and absolutely trianalytic subvarieties in hyperkahler manifolds" опубликована в 2015-м году в журнале "Journal of Geometry and Physics"; результаты Вербицкого и Солдатенкова обобщены на любые симплектические торы в препринте М. Вербицкого [V2].

Результат о размерности симплектических торов, полученный в [V2], является одним из применений трансцендентной алгебры Ходжа, построенной М. Вербицким. Это объединение всех трансцендентных решеток Ходжа во всех размерностях, иначе говоря - минимальная подструктура Ходжа в когомологиях проективного многообразия, содержащая все $(p, 0)$-формы. Вербицкий доказал, что дополнительная к ней структура Ходжа образует идеал, таким образом объединение всех трансцендентных решеток Ходжа обретает структуру алгебры. Используя результаты Ю. Зархина о группе Мамфорда-Тейта K3 поверхности, Вербицкий вычислил трансцендентную алгебру Ходжа для всех гиперкэлеровых многообразий, и применил этот результат, получив k-симплектическую структуру на любом симплектическом торе.

М. Вербицкий, совместно с М. Энтовым ([EV]), вел работу над классификацией симплектических упаковок в гиперкэлеровых многообразиях и торах. Было доказано, что эти многообразия допускают полные симплектические упаковки, что существенно улучшает важный и технически весьма сложный результат Латшефа, Макдафф и Шленка, которые доказали это же для 4-мерного тора. Теорема Латшефа, Макдафф и Шленка была передоказана существенно проще.

Литература

[AC] Ekaterina Amerik and Frédéric Campana. *Characteristic foliation on non-uniruled smooth divisors on projective hyperkaehler manifolds* arXiv:1405.0539.

[AV] E. Amerik, M. Verbitsky, *Teichmüller space of hyperkähler and symplectic structures*, J. Geom. Phys. 97 (2015), 44-50.

[AV2] E. Amerik, M. Verbitsky, *Hyperbolic geometry of the ample cone of a hyperkähler manifold*, preprint arXiv:1511.02403

[EV] Michael Entov and Misha Verbitsky, *Unobstructed symplectic packing for tori and hyper-Kähler manifolds.* Journal of Topology and Analysis, DOI: 10.1142/S1793525316500229.

[JV] Jardim, M., Verbitsky, M., *Trihyperkähler reduction and instanton bundles on CP^3*, arXiv:1103.4431, Compositio Mathematica, Volume 150, Issue 11, November 2014, pp 1836-1868.

[SV] Andrey Soldatenkov, Misha Verbitsky, *k-symplectic structures and absolutely trianalytic subvarieties in hyperkahler manifolds*, J. Geom. Phys. 92 (2015), 147-156.

[V1] M. Verbitsky, *Ergodic complex structures on hyperkahler manifolds*, Acta Mathematica, September 2015, Volume 215, Issue 1, pp 161-182.

[V2] M. Verbitsky, *Transcendental Hodge algebra*, arXiv:1512.01011, 16 pages.

[V3] Misha Verbitsky, *Degenerate twistor spaces for hyperkahler manifolds*, Journal of Geometry and Physics Volume 91, Pages 2-11, 2015.

4.2. Доказательство сбалансированности твисторных пространств гиперкомплексных многообразий

Быстрый прогресс в кэлеровой геометрии в середине XX-го века привел к появлению двух новых направлений исследований в комплексной геометрии: с одной стороны, поиск подходящего кватернионного аналога понятия кэлерова многообразия и, с другой стороны, изучение различных обобщений кэлерового условия $d\omega = 0$ на эрмитовых метриках. Кватернионное обобщение кэлеровых метрик было предложено Э. Калаби введением понятия гиперкэлеровой структуры [C], которая задается на гладком многообразии тройкой интегрируемых почти комплексных структур и римановой метрикой, сохраняющей эти три структуры, и такой что соответствующие эрмитовы формы замкнуты. Если мы забываем о метрике и рассматриваем лишь комплексные структуры, получаемая структура называется гиперкомплексной. Гиперкомплексные многообразия были введены Ч. Бойером в статье [Bo], где дается их полная классификация в кватернионной размерности 1.

Что касается обобщений кэлерового условия $d\omega = 0$, важным классом таких метрик являются сбалансированные метрики, впервые введенные и изученные М. Михельсон в статье [Mi], которые характеризуются условием $d\omega^{n-1} = 0$, где n - комплексная размерность многообразия. Примером области исследований, в которой сбалансированные метрики играют большую роль, является соответствие Кобаяши-Хитчина между стабильными расслоениями и связностями Эрмита-Эйнштейна на разных классах многообразий [LT]. Несмотря на то что это соответствие определено для общих комплексных многообразий, оказывается что условие сбалансированности многообразия необходимо для существования адекватной структуры пространства модулей расслоений [LY].

В статье [KV], это полезное свойство сбалансированных многообразий широко применяется Д. Калединым и М. Вербицким для изучения пространства неэрмитовых связностей Янга-Миллса на гиперкэлеровом многообразии M. В статье показывается, что данные расслоения находятся во взаимно-однозначном соответствии с голоморфными расслоениям на твисторном пространстве $\mathrm{Tw}(M)$, которое является многообразием с комплексной структурой и эрмитовой метрикой, естественным образом заданными гиперкэлеровой структурой на M. Твисторное пространство $\mathrm{Tw}(M)$ никогда не бывает кэлеровым [H], однако оно сбалансировано, что доказывается в статье [KV] и затем используется для изучения структуры пространства модулей стабильных расслоений на $\mathrm{Tw}(M)$.

В работе А. Томберга [T] было доказано обобщение результата Каледина и Вербицкого о сбалансированности твисторного пространства $\mathrm{Tw}(M)$ на случай общего гиперкомплексного многообразия M. В отсутствии заданной метрики на M, сбалансированность $\mathrm{Tw}(M)$ доказывается неявно. Ключевым моментом доказательства является результат о том что произвольную положительную $(n-1, n-1)$-форму на n-мерном комплексном многообразии можно выразить как $(n-1)$-ую степень положительной $(1,1)$-формы, которая задает эрмитову метрику. Замкнутая положительная $(n-1, n-1)$-форма на $\mathrm{Tw}(M)$ тогда задается как сумма плюрилапласиана пулбэка на $\mathrm{Tw}(M)$ некоторой степени произвольной гиперэрмитовой формы на M и соответствующей послойной формы объема.

Эта работа может иметь потенциально интересные следствия в виде обобщения различных результатов для гиперкэлеровых многообразий на случай гиперкомплексной структуры. В данный момент идет работа над таким обобщением для некоторых результатов из статьи [KV]. В частности, хотелось бы понять, верно ли что для гиперкомплексного M, ограничение стабильного расслоения E над $\mathrm{Tw}(M)$ на общий слой проекции $\mathrm{Tw}(M) \to \mathbb{CP}^1$ стабильно.

Литература

[Bo] C. P. Boyer, "A note on hyper-Hermitian four-manifolds", *Proc. Amer. Math. Soc.* **102** (1988), pp. 157-164

[C] E. Calabi, "Métriques kähleriennes et fibrés holomorphes", *Ann. Ecol. Norm. Sup.* **12** (1979), pp. 269-294

[H] N. J. Hitchin, "Kählerian twistor spaces", *Proc. London Math. Soc.* **43** (1981), pp. 133-150

[KV] D. Kaledin, M. Verbitsky, "Non-Hermitian Yang-Mills connections", *Selecta Math. New Series* **4** (1998), pp. 279-320

[LY] J. Li, S. T. Yau, "Hermitian Yang-Mills connections on non-Kähler manifolds", *Mathematical aspects of string theory*, World Scientific Publ., London (1987), pp. 560-573

[LT] M. Lübke, A. Teleman, *The Kobayashi-Hitchin correspondence*, World Scientific Publ., River Edge, NJ (1995)

[Mi] M. L. Michelsohn, "On the existence of special metrics in complex geometry", *Acta Math.* **149** (1982), no. 3-4, pp. 261-295

[T] A. Tomberg, "Twistor spaces of hypercomplex manifolds are balanced", *Advances in Mathematics* **280** (2015), pp.282-300

4.3. О многообразиях, обладающих псевдоторическими структурами

Этот раздел посвящен прогрессу исследований Николая Тюрина в области циклов Бора-Зоммерфельда в геометрии торических и псевдоторических многообразий.

Были продолжены исследования свойств многообразий, обладающих псевдоторическими структурами. Основным результатом является построение иерархии псевдоторических структур на гиперплоском сечении торического многообразия. Комбинаторно эта конструкция основана на следующем наблюдении. Произвольное компактное торическое многообразие X однозначно определяется выпуклым многогранником P_X, при этом всякое компактное торическое многообразие может быть вложено в проективное пространство $\mathbb{CP}^N$. Отсюда выпуклый многогранник P_X естественно вкладывается как подграф в симплекс Δ_N. Рассмотрим сначала случай, когда множество вершин многогранника P_X совпадает с множеством вершин симплекса Δ_N, однако сам многогранник с симплексом не совпадает. В этом случае определены цепочки несвязанных вершин $\{v_0, ..., v_k\}$, то есть вершин, не соединенных ребрами в P_X. На каждую такую цепочку натягивается симплекс Δ_k, который и определяет соответствующую иерархию псевдоторических структур на гиперплоском сечении. В качестве приложения этот результат объясняет существование псевдоторических структур на комплексной квадрике и многообразии флагов F^3.

Из теории систем Гельфанда - Цейтлина известно, что многообразие флагов F^3 со стандартной кэлеровой структурой допускает существование лагранжевой 3 - сферы, описываемый как прообраз 4-валентной вершины в многограннике Гельфанда - Цейтлина. С другой стороне в предыдущих работах нами была построена лагранжева 3 - сфера в том же многообразии флагов, описываемая в терминах псевдоторической структуры. Возникает естественный вопрос о том, являются ли эти две лагранжевы сферы гамильтоново эквивалентными. Положительный ответ на этот вопрос составляет наш следующий результат.

В рамках исследований феномена Зеркальной Симметрии и связи ее с Геометрическим квантованием было введено новое понятие специальности относительно сечения расслоения предквантования, которое накладывается на бор - зоммерфельдовы лагранжевы подмногообразия или циклы. В результате было предложено новое направление исследований, получившее название Специальная Бор - Зоммерфельдова геометрия. Условие специальности определяет “цикл инциденции” $\mathcal{U}_{SBS}$ в прямом произведении $\mathbb{P}(\Gamma(M, L)) \times \mathcal{B}_S$, где превое пространство есть проективизация пространства всех гладких сечений расслоения предквантования, а второе есть многообразие модулей бор - зоммрефельдовых лагранжевых циклов, введенное в 1999 году А.Н. Тюриным и А.Л. Городенцевым. Так как “цикл” $\mathcal{U}_{SBS}$ определен в прямом произведении, то естественно возникают канонические проекции на прямые слагаемые, и нашей первой задачей было исследование свойств первой проекции на бесконечномерное проективное пространство. Первый результат утверждает, что в самом общем случае слои первой проекции дискретны. Во - вторых, мы доказали, что дифференциал первой проекции не имеет ядра в общей точке. Третий результат заключается в том, что образ первой проекции открыт в проективном пространство. Все вместе это влечет следующий важный результат: “цикл инциденции” $\mathcal{U}_{SBS}$ обладает кэлеровой структурой, поднятой с проективного пространства.

Далее мы рассмотрели случай алгебраического многообразия, снабженного кэлеровой метрикой ходжева типа. Такое многообразие можно рассматривать как симплектическое многообразие, снабженное согласованной интегрируемой комплексной структурой. В этом случае бесконечномерное проективное пространство $\mathbb{P}(\Gamma(M, L))$ содержит конечномерное проективное подпространство $\mathbb{P}H^0(M_I, L)$ голоморфных сечений, и мы определили многообразие модулей специальных бор - зоммрефельдовых лагранжевых циклов $\mathcal{M}_{SBS}$ как прообраз при первой проекции от $\mathbb{P}H^0(M_I, L)$. В качестве первых результатов были исследованы свойства таких многообразий модулей в простейших случаях: для проективной прямой $\mathbb{CP}^1$ и расслоения $\mathcal{O}(2)$; для комплексной двумерной квадрики Q и расслоения $\mathcal{O}(1, 1)$. В первом случае было доказано, что многообразие модулей $\mathcal{M}_{SBS}$ естественно изоморфно $\mathbb{CP}^2 \backslash C$, где C — коника, откуда естественно следует, что многообразие модулей допускает компактификацию; во втором случае было доказано, что $\mathcal{M}_{SBS}$ изоморфно $\mathbb{CP}^3 \backslash Q'$, где Q' — проективно двойственная квадрика, откуда также следует существование компактификации.

4.4. Изучение абсолютно трианалитических многообразий в обобщённом многообразии Куммера.

Изучение абсолютно трианалитических подмногообразий, т.е. комплексно-аналитических для любой тройки гиперкэлеровых структур, согласованных с данной комплексной структурой является важным вопросом гиперкэлерой геометрии. Ранее Вербицикй и Каледин показали, что в схеме Гильберта n точек над К3 нет абсолютно трианалитических многообразий. Недавно Вербицкий и Солдатенков, используя k-симплектические структуры, доказали, что в многообразиях О'Грэди нет абсолютно трианалитических торов. Работа arXiv:1504.08010 сотрудника Лаборатории Никона Курносова посвящена доказательству невозможности существования абсолютно трианалитических торов в обобщённом многообразии Куммера.

Таким образом, единственным нетривиальным примером абсолютно трианалитического многообразия является схема Гильберта над К3 половинной размерности, соответствующая инволюции в тора в обобщённом многообразии Куммера. В общем случае есть гипотеза, что в обобщённом многообразии Куммера нет никаких других абсолютно трианалитических многообразий.

Доказательство, предложенное Н.Курносовым, состоит из двух ключевых частей. Во-первых, показано, что абсолютно трианалитические подмногообразия, нормализацией которых является тор Z, изогены некоторому тору в произведении торов T^n. Во-вторых, для гиперкэлеровых многообразий, как показали Вербицкий и Грантчаров, голоморфно сиплектический объём равен кэлерову,а значит отношение объёмов абсолютно трианалитического тора, подсчитанное в схеме Гильберта, соответствующей обобщённому многообразию Куммера и в T^n должно совпадать. Однако, такое оказывается невозможным для абсолютно трианалитического тора, поскольку голоморфно симплектический объём не меняется при разрешении особенностей симметрической произведения $\mathrm{S}^n(T)$, а кэлеров объём меняется, поскольку группа Пикара Z нулевая, что даёт противоречие.

Из доказательства основной теоремы имеется следующее интересное следствие, а именно, в обобщённом многообразии Куммера нет абсолютно трианалитических подмногообразий, нормализация которых имела бы нулевую группу Пикара.

Литература

[1] N.M. Kurnosov, *Absolutely trianalytic tori in the generalized Kummer variety*, arXiv:1504.08010.

4.5. Геометрия симплектических многообразий с инвариантными лагранжевыми подмногообразиями.

Симплектические многообразия играют важную роль в современной алгебраической геометрии. В последнее время было замечено, что структура действия группы G на алгебраическом многообразии, а также структура орбит действия ее борелевской подгруппы непосредственно связана с G-эквивариантной симплектической геометрии их кокасательных расслоений.

В связи с этим, возникает множество вопросов об обобщении результатов об эквивариантной симплектической геометрии кокасательных расслоений на более общие классы симплектических многообразий.

Участником коллектива лаборатории В.С.Жгуном совместно с Д.А.Тимашевым были начаты исследования симплектических многообразий содержащих G-инвариантные лагранжевы многообразия. Напомним, что для многообразия X сложность - это коразмерность типичной орбиты в X борелевской подгруппы B в G, а ранг - это ранг решетки характеров B-полуинвариантных функций на X. В.С.Жгуном совместно с Д.А.Тимашевым была доказана следующая теорема пусть M - симплектическое многообразие, снабженное отображением моментов, тогда все G-инвариантные лагранжевы подмногообразия в M имеют одинаковую сложность и ранг. Более того, сложность и ранг G-инвариантного лагранжева подмногообразия могут быть выражены через симплектические инварианты M, а именно через коранг и дефект. Напомним, что корангом симплектического многообразия M называется ранг ограничения симплектической формы на косоортогональное дополнение к касательному пространству к общей G-орбите в M, а дефектом называется размерность ядра ограничения симплектической формы на касательное пространство к общей G-орбите в M. Отметим также, что эти инварианты могут быть выражены через размерность образа отображения моментов и размерность рационального фактора этого образа по группе G. В работе В.С.Жгуна и Д.А.Тимашева "Симплектические многообразия с инвариантными лагранжевыми подмногообразиями," опубликованной в Докладах Российской Академии наук в 2012 году, мы доказали эту гипотезу в случае, когда инвариантные лагранжевы подмногообразия являются квазиаффинными (или более обще невырожденными в терминологии Ф.Кнопа). В этой статье нами был предложен метод доказательства упомянутой ранее теоремы, базирующийся на деформации симплектической структуры к симплектической структуре на нормальном расслоении к лагранжевому подмногообразию. Это нормальное расслоение естественно отождествляется с кокасательным расслоением, а симплектическая структура оказывается стандартной. Существенным шагом в доказательстве являются результаты Кнопа об эквивариантной структуре кокасательного расслоения для квазиаффинных (или более обще невырожденных по Кнопу многообразий). На основе этих исследований нам также удалось исследовать геометрию отображения моментов симплектических многообразий с инвариантными лагранжевыми подмногообразиями. В частности, было описано замыкание образа отображения моментов. Все это позволяет перейти к дальшейшим обобщениям результатов, известных для кокасательных расслоений на более общий случай симплектических многообразий с инвариантными лагранжевыми подмногообразиями.

Нами была в полной общности доказана теорема о равноразмерности слоев инвариантного-отображения моментов вне множества коразмерности 2.

А именно, для — гамильтоново G-многообразия M, обладающего G-инвариантным лагранжевым квазиаффинным подмногообразием $S \subset M$ было показано, что вне G-инвариантного подмногообразия в M коразмерности $\geqslant 2$ отображение $\Phi_{/\!\!/G}$ равноразмерно. Отметим, что ранее эта теорема была доказана не в полной общности, а лишь в окресности инвариантного лагранжева многообразия. Также получено новое простое доказательство того, что малая группа Вейля не меняется при конечном G-эквивариантном накрытии. Отметим, что в классической работе Кнопа это доказательство очень запутано и не проясняет суть дела. Отсюда мы получили новое доказательство того факта, что малая группа Вейля порождена отражениями. Результаты были доложены на конференции "Algebraic varieties and their Moduli" (Пиза, Италия 24 мая - 6 июня 2015) в докладе "On equidimentionality of the invariant moment maps", а также опубликованы в статье В.С.Жгун "Малая группа Вейля и многообразие вырожденных орисфер”, Чебышевский сборник, т.16(4), 2015.

Литература

[1] Жгун В. С., Тимашев Д. Симплектические многообразия с инвариантными лагранжевыми подмногообразиями // Доклады академии наук. 2012. Т. 443. § 4. С. 418-421.

[2] Zhgoon V. S. On the Local Structure Theorem and equivariant geometry of cotangent bundles // Journal of Lie Theory. 2013. Vol. 23. P. 607-638.

[3] В.С.Жгун Малая группа Вейля и многообразие вырожденных орисфер // Чебышевский сборник. 2015. Т.16 (4).

4.6. О бильярдах в многоугольниках с шпионскими перегородками

Методы динамических систем с каждым годом приобретают все более важное значение в алгебраической геометрии, особенно в областях, пограничных между алгебраической геометрией, дифференциальной геометрией и комплексным анализом. В работе Лаборатории, динамические методы активно применяются Е. Америк и М. Вербицким в изучении гиперкэлеровых многообразий, но основной эксперт лаборатории в области динамических систем - Александра Скрипченко, доцент ВШЭ, принятый на работу в 2015-м по программе international hiring. Александра Скрипченко изучает бильярды и перекладывания отрезков, это область динамики, которая наиболее близка к динамике на пространствах Тейхмюллера.

Основным объектом изучения являются бильярды в многоугольниках с так называемыми шпионскими, или односторонними, перегородками - отрезками прямых, находящимися на границе или внутри бильярдного стола, которые с одной стороны (например, слева) являются прозрачными и бильярдный шар проходит их насквозь, а с другой стороны отражают ударившийся в них шар по закону геометрической оптики - угол падения равен углу отражения.

Впервые такие бильярды были описаны М. Бошерницаном и И. Корнфельдом в 1994 году ([8]) в связи с изучением отображений сдвигов отрезков, которые являются обобщением перекладываний отрезков. В своей предыдущей работе ([SkT1]) мы рассмотрели шпионские бильярды в квадрате и доказали линейную оценку комбинаторной сложности для них.

Работа 2015 года ([SkT2]) состоит из двух частей: в первой части мы рассматриваем общий случай шпионского бильярда в многоугольнике и доказываем, что топологическая энтропия этой динамической системы равна нулю; во второй части мы анализируем вопросы сложности для некоторых специальных видов шпионских бильярдов и доказываем субэкспоненциальные и полиномные оценки на сложность этой системы.

Результат об энтропии обобщает аналогичную теорему, доказанную А. Катком ([K]) для бильярдов в многоугольнике. Ключевое отличие состоит в том, что в случае шпионских бильярдов система не является обратимой.

Оценки сложности опираются на теорему, доказанную для многоугольного стола произвольной формы с любым количеством шпионских зеркал. Эта теорема позволяет получить оценку сверху на сложность через число сторон стола, число зеркал и количество обобщенных диагоналей. В некоторых случаях удается оценить или даже вычислить это последнее слагаемое. В частности, речь идет о столах симметричной формы (оценка полиномиальная - квадратичная) или о треугольнике (в этом случае оценка использует результат [Sg] и является субэкспоненциальной).

Литература

[BK] M. Boshernitzan and I. Kornfeld, *Interval Translation Mappings*, Ergod. Th. & Dynam. Sys., **15** (1995), 821–832.

[K] A. Katok, *The growth rate for the number of singular and periodic orbits of a polygonal billiard*, Commun. Math. Phys. **111** (1987), 151–160.

[Sg] D. Scheglov, *Growth of periodic orbits and generalized diagonals for typical triangular billiards*, JMD, **1** (2013), 31 – 44.

[SkT1] A. Skripchenko and S. Troubetzkoy, *Polygonal billiards with one-sided scattering*, Annales de l'Institut Fourier **65** (5) (2015), 1881–1896.

[SkT2] A. Skripchenko and S. Troubetzkoy, *Entropy and complexity of polygonal billiards with spy mirrors*, Nonlinearity **28** (2015), 3443–3456.

5. Классическая геометрия

5.1. Числа Ходжа моделей Ландау-Гинзбурга

В 2015 году основными направлениями исследований по этой теме было, во первых, продолжение изучения зеркальной симметрии, а, во-вторых, изучение вопроса рациональности двойных пространств с ветвлением в квартике.

Одним из первых численных проявлений феномена зеркальной симметрии являлся следующий. Рассмотрим гладкое многообразие Калаби–Яу Y размерности n. Тогда для него существует зеркально двойственное многообразие Калаби–Яу $Y^\vee$ той же размерности, такое что $h^{p,q}(Y) = h^{n-p,q}(Y^\vee)$. Иными словами, ромбы Ходжа двойственных многообразий получаются друг из друга поворотом на 90° или, что то же самое, зеркальным отражением относительно диагонали; отсюда и сам термин "зеркальная симметрия". Примером такого соответствия является следующий результат Батырева–Борисова (см. [BB96]). Рассмотрим горенштейново торическое многообразие T и неф-разбиение на нем, то есть разбиение антиканонического дивизора

$$-K_T = D_1 + \ldots + D_N = D_{1,1} + \ldots + D_{1,i_1} + \ldots + D_{k,1} + \ldots + D_{k,i_k},$$

где каждая сумма граничных дивизоров $D_{j,1} + \ldots + D_{j,i_j}$ эквивалентна гладкой гиперповерхности Y_j. Рассмотрим полное пересечение $Y = T \cap Y_1 \ldots \cap Y_k$. Рассмотрим двойственное торическое многообразие $T^\vee$, двойственное неф-разбиение и двойственное полное пересечение Калаби–Яу $Y^\vee = T^\vee \cap Y_1^\vee \cap \ldots \cap T_k^\vee$. Положим $n = \dim Y = \dim Y^\vee$. тогда

$$h_{st}^{p,q}(Y) = h_{st}^{n-p,q}(Y^\vee),$$

где $h_{st}^{p,q}(\cdot)$ — струнные числа Ходжа, совпадающие с обычными в гладком случае.

Конструкция полных пересечений, описанная выше, принадлежит Гивенталю (см. [Gi98]). Если брать не все граничные дивизоры, а только часть, то такая конструкция приводит к двойственности между многообразиями Фано и моделями Ландау–Гинзбурга — одномерными семействами многообразий Калаби–Яу. Однако до недавнего времени числа Ходжа для таких моделей были не определены. В конце 2014 года

Кацарков, Концевич и Пантев дали три определение трех наборов чисел $f^{p,q}(Y,f)$, $h^{p,q}(Y,f)$ и $i^{p,q}(Y,f)$ для семейств $f\colon Y \to \mathbb{C}$ с некоторыми (довольно слабыми) условиями. Они выдвинули гипотезы, гласящие, что, во-первых, $f^{p,q}(Y,f) = h^{p,q}(Y,f) = i^{p,q}(Y,f)$, а во-вторых, что если (Y,f) — модель Ландау–Гинзбурга для многообразия Фано X, $\dim X = \dim Y = n$, то $h^{p,q}(X) = h^{n-p,q}(Y,f)$.

Проверка этой гипотезы для поверхностей дель Пеццо и была целью совместной работы В. Пржялковского с В. Лунцем. Напомним, что для поверхности дель Пеццо S_d степени d числа Ходжа задаются следующими равенствами: $h^{0,0}(S_d) = h^{2,2}(S_d) = 1$, $h^{1,1} = 10 - d$, $h^{p,q} = 0$ для $p \neq q$. Поверхности дель Пеццо были изначально определены как проективно нормальные поверхности степени d в $\mathbb{P}^d$, которые не являются конусами. (В частности, это исключает случаи $d = 1$ и $d = 2$.) Такие поверхности естественно связаны между собой: если спроектировать поверхность степени d в $\mathbb{P}^d$ из точки на ней, мы получим (возможно особую) поверхность степени $d - 1$ в $\mathbb{P}^{d-1}$. Таким образом, выбирая общие центры проекций, мы получим обычное описание поверхностей дель Пеццо как раздутий плоскости. С другой стороны, воспользовавшись тем, что поверхность дель Пеццо наибольшей степени, то есть проективная плоскость, является торической, и выбирая торические центры проекций, можно построить торические вырождения поверхностей дель Пеццо. Рассмотрим веерный многоугольник Δ_d такого торического вырождения T_d поверхности дель Пеццо S_d. Это многоугольник с единственной строго внутренней целой точкой — центром координат — и с $12 - d$ целыми точками на границе. Торические модели Ландау–Гинзбурга для S_d описываются как многочлены Лорана с носителями в Δ_d. (В частности, число параметров по модулю действия тора, от которых они зависят, равно $10 - d$, то есть размерности пространства симплектических форм на S_d; координаты форм и являются параметрами многочлена Лорана.) Для проверки гипотез Кацаркова–Концевича–Пантева необходимо построить компактификации Калаби–Яу торических моделей Ландау–Гинзбурга. Такие компактификации были построены как раздутия компактификаций в двойственных торических поверхностях $T_d^\vee$, определяемых двойственным многоугольником $\Delta_d^\vee$. Это позволило получить детальное описание когомологий и относительных когомологий моделей Ландау–Гинзбурга и доказать гипотезы Кацаркова–Концевича–Пантева.

В заключение заметим, что гипотезы Кацаркова–Концевича–Пантева в многомерном случае гораздо более сложны. Однако в ряде случаев возможно доказать некоторые их следствия. А именно, для пучка многообразий Y (определенного с точностью до изоморфизма в коразмерности 1) определим число k_Y как разность числа компонент приводимых слоев (без кратностей) и числа самих приводимых слоев. Из гипотез следует, что если Y — модель Ландау–Гинзбурга многообразия Фано X, $\dim X = \dim Y = n$, то $k_Y = h^{1,n-1}(X)$. Совместно с Шрамовым было доказано это следствие для моделей Ландау–Гинзбурга гивенталевского типа для полных пересечений.

Литература

[BB96] V. V. Batyrev, L. A. Borisov, *Mirror duality and string-theoretic Hodge numbers*, Invent. Math. 126 (1996), no. 1, 183–203.

[Gi98] A. Givental, *A mirror theorem for toric complete intersections*, Topological field theory, primitive forms and related topics (Kyoto, 1996), 141–175, Progr. Math., 160, Birkhдuser Boston, Boston, MA, 1998.

[KKP14] L. Katzarkov, M. Kontsevich, T. Pantev, *Bogomolov–Tian–Todorov theorems for Landau–Ginzburg models*, arXiv:1409.5996.

5.2. Вопросы рациональности двойных пространств с ветвлением в квартике

Вторым вопросом, рассматривающимся в этом году, был вопрос рациональности трехмерных двойных пространств (то есть двойных накрытий проективного пространства) с ветвлением в квартике. Вопрос рациональности — один из центральных в бирациональной геометрии, и наиболее естественным и изученным нетривиальным случаем для него является случай трехмерных многообразий Фано. Рациональность или нерациональность гладких трехмерных многообразий Фано была установлена в 70 – 80-х годах прошлого века, во многом Исковских и его школой. Поэтому следующим естественным вопросом стал вопрос рациональности многообразий, имеющих обыкновенные двойные точки. Идеологически он заключается в том, “сколько простейших условий на нерациональное многообразие надо поставить, чтобы оно стало рациональным”. Одним из наиболее популярных многообразий для изучения этого вопроса и является двойное пространство с ветвлением в квартике.

Методом промежуточного якобиана нерациональность гладких двойных пространств была доказана Тихомировым и Вуазен. В случае одной особой точки нерациональность была установлена Бовилем, а в случае не более, чем четырех точек, или в случае пяти общих точек — Дебаром. Другой подход к проблеме рациональности принадлежит Артину и Мамфорду. В своей знаменитой статье 1972 года они доказали нерациональность некоторых конкретных двойных пространств с 10 особыми точками, что привело к (одному из трех) решению проблемы Люрота. Прорыв в использовании их результата был достигнут Вуазен в статье [Vo15], опубликованной в этом году, в связи с ее новым подходом, использующим группы Чжоу и разложение диагонали. Используя этот подход она показала, что очень общее имеющее не более чем семь особых точек двойное пространство стабильно нерационально. Однако для конкретных особых многообразий вопрос рациональности оставался открытым. В работе [CPSh15] В. Пржялковским совместно с Чельцовым и Шрамовым была доказана нерациональность всех двойных пространств, имеющих не более, чем шесть особых точек. Идея доказательства следующая. Проектируя такое двойное пространство из особой точки, можно бирационально представить его как (возможно особое) расслоение на коники. Разрешив его особенности, его можно представить как гладкое расслоение на коники. К сожалению, обычно оно не является стандартным. Однако сделав определенные бирациональные перестройки, его можно бирационально представить как стандартное. Кривая ветвления исходного расслоения на коники имеет сильные ограничения на особенности; за этими ограничениями можно проследить и после бирациональных перестроек. Наконец, нерациональность гарантируется знаменитым результатом Шокурова (см. [Sh83]), утверждающим, что при некоторых условиях примиан кривой ветвления стандартного расслоения на коники, который является промежуточным якобианом этого расслоения, не является суммой якобианов кривых, а, значит, само расслоение не может быть рациональным. Можно проверить, что эти условия выполнены для рассматриваемого нами расслоения на коники.

Что известно про (не)рациональность двойных пространств с большим числом особых точек? Можно показать, что таких точек не больше 16. Прохоровым была доказана рациональность для случая 15 и 16 особых точек. Нами было показано, что за одним конкретным исключением не-$\mathbb{Q}$-факториальность влечет рациональность. Вместе с результатом Клеменса о том, что не-$\mathbb{Q}$-факториальность эквивалентна тому, что особое множество накладывает независимые линейные условия на квадрики, это дает то, что двойные пространства с по крайней мере одиннадцатью особыми точками нерациональны (так как пространство квадрик десятимерно). Эти результаты, наряду с некоторыми другими соображениями, позволяют выдвинуть гипотезу о том, что для двойных пространств с ветвлением в квартике $\mathbb{Q}$-факториальность эквивалентна нерациональности. Мы также показываем, что эта гипотеза следует из знаменитой гипотезы Шокурова о $|2K_S + \Delta|$.

Литература

[CPSh15] I. Cheltsov, V. Przyjalkowski, C. Shramov, *Which quartic double solids are rational?*, arXiv:1508.07277.

[Sh83] V. Shokurov, *Prym varieties: theory and applications*, Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. 47 (1983), 785–855.

[Vo15] C. Voisin, *Unirational threefolds with no universal codimension 2 cycle*, Invent. Math. 201 (2015), 207–237.

5.3. Многообразия Фано с большими группами автоморфизмов

В 2015 году К. Шрамовым совместно с И. Чельцовым была закончена работа над $\mathfrak{A}_5$-эквивариантной бирациональной жесткостью многообразия дель Пеццо V_5, а также над описанием его $\mathfrak{A}_5$-эквивариантной геометрии. По определению, многообразие V_5 является гладким трехмерным многообразием Фано с рангом Пикара 1, индекса 2 и антиканонической степени 40. Известно, что многообразие с такими свойствами единственно с точностью до изоморфизма, и оно может быть получено как сечение Грассманиана $\mathrm{Gr}(2, 5)$ в плюккеровом вложении в $\mathbb{P}^9$ при помощи линейного подпространства коразмерности 3. Также известно, что группа автоморфизмов многообразия V_5 содержит единственную с точностью до сопряженности подгруппу, изоморфную группе вращений икосаэдра $\mathfrak{A}_5$. Изучение $\mathfrak{A}_5$-эквивариантной геометрии многообразия V_5 представляет интерес с двух точек зрения. Во-первых, это многообразие по причине своей единственности имеет достаточно простую структуру (в частности, содержит конечное число орбит относительно полной группы автоморфизмов). Во-вторых, в то время как действие группы $\mathfrak{A}_5$ допускают многие трехмерные многообразия Фано, V_5 является единственным гладким трехмерным рациональным многообразием Фано, которое $\mathfrak{A}_5$-бирационально жестко. Таким образом, это первый случай, когда методами теории бирациональной жесткости удается построить несопряжённые вложения группы $\mathfrak{A}_5$ в группу Кремоны ранга 3.

В процессе работы над этим вопросом была получена классификация $\mathfrak{A}_5$-инвариантных подмногообразий многообразия V_5 малой степени. Были классифицированы все $\mathfrak{A}_5$-орбиты длины меньше 60 (то есть все нетривиальные $\mathfrak{A}_5$-орбиты). Выяснилось, что орбит длины 5, 10, 12 и 15 на V_5 конечное количество, замыкание объединения орбит длины 20 состоит из объединения 10 коник и одной изолированной орбиты, а замыкание объединения орбит длины 30 состоит из объединения 15 прямых и 15 скрученных кубик. Были описаны $\mathfrak{A}_5$-инвариантные кривые малых степеней. Выяснилось, что для степени меньше 18 полный список $\mathfrak{A}_5$-неприводимых кривых на V_5 таков: две нормальные рациональные кривые степени 6, объединение 6 прямых, объединение 10 прямых, объединение 12 прямых, объединение 15 прямых, рациональная кривая степени 16 и гиперэллиптическая кривая степени 16 рода 5. Также была получена частичная классификация $\mathfrak{A}_5$-инвариантных кривых степени 18, в частности, было изучено (единственное) вложение кривой Бринга рода 4 в качестве $\mathfrak{A}_5$-инвариантной кривой степени 18 в V_5. Были полностью описаны $\mathfrak{A}_5$-инвариантные поверхности в V_5, линейно эквивалентные антиканоническому классу, то есть классу $2H$, где H — образующая группы Пикара многообразия V_5. Также была описана единственная $\mathfrak{A}_5$-инвариантная поверхность в V_5, линейно эквивалентная $3H$; выяснилось, что разрешение особенностей этой поверхности является поверхностью общего типа, были вычислены ее геометрический род, иррегулярность и получена оценка на ранг Пикара. На основании этих геометрических результатов была доказана $\mathfrak{A}_5$-бирациональная жесткость многообразия V_5 и описана его группа $\mathfrak{A}_5$-эквивариантных бирациональных автоморфизмов. Она оказалась изоморфна $\mathfrak{S}_5 \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Как следствие из бирациональной жесткости было построено три несопряжённых вложения группы $\mathfrak{A}_5$ в группу Кремоны ранга 3. Результаты исследования были изложены в монографии [2].

В другой К. Шрамовым совместной работе с И. Чельцовым была построена явная конструкция рациональности двух специальных особых трехмерных квартик. Известно, что все трехмерные квартики, допускающие точное действие группы $\mathfrak{S}_6$, образуют одномерное семейство. Это семейство содержит такие классические многообразия, как квартика Бурхардта (имеющая максимально возможное количество изолированных особых точек) и квартика Игусы (проективно двойственная к кубике Сегре, имеющей максимально возможное количество изолированных особых точек). Недавно А. Бовилем в [1] было доказано, что любая квартика из этого семейства, за исключением квартик Бурхардта и Игусы, а также еще двух специальных квартик X_{36} и X_{40} с 36 и 40 особыми точками, является нерациональной. С другой стороны, имеются старые (и порядком подзабытые) конструкции А. Тодда, см. [3] и [4]: первая из них строит трехмерную квартику с 36 особыми точками как бирациональный образ $\mathbb{P}^3$ при отображении, заданном семейством квартик, проходящих через общую шестерку прямых; вторая строит трехмерную квартику с 40 особыми точками как бирациональный образ $\mathbb{P}^3$ при отображении, заданном семейством квартик, проходящих через общую десятку прямых, которая образует конфигурацию типа "двойная пятерка". Однако обе эти конструкции работают при (неконструктивных) условиях общности, и применение их к конкретным многообразиям вызывает затруднения. Совместно с И. Чельцовым удалось доказать, что на самом деле квартика X_{36} получается как в результате частного случая первой конструкции Тодда, а квартика X_{40} получается в качестве вырождения второй конструкции Тодда. Более того, бирациональное отображение из $\mathbb{P}^3$ в X_{36} оказалось эквивариантным относительно действия группы $\mathfrak{A}_6$, а бирациональное отображение из $\mathbb{P}^3$ в X_{40} — эквивариантным относительно действия группы $\mathfrak{S}_5$. Обе конструкции удалось провести, не используя оригинальных теорем Тодда, а вместо этого построив соответствующие отображения в явном виде с использованием действия групп.

Литература

[1] A. Beauville, Non-rationality of the $\mathfrak{S}_6$-symmetric quartic threefolds, Rend. Sem. Mat. Univ. Politec. Torino **71** (2013), 385–388.

[2] I. Cheltsov, C. Shramov, Cremona groups and the icosahedron, CRC Press, 2015.

[3] J. Todd, Configurations defined by six lines in space of three dimensions, Math. Proc. of the Cambridge Phil. Soc. **29** (1933), 52–68.

[4] J. Todd, A note on two special primals in four dimensions, Q. J. Math. **6** (1935) 129–136.

5.4. Проекции гладких и нодальных кривых

Пусть $C \subset \mathbb{P}^2$ "— нодальная кривая степени d (основное поле здесь и далее "— поле комплексных чисел) и $\nu\colon \hat{C} \to C$ "— ее нормализация. Если $p \notin C$ "— точка на плоскости, можно рассмотреть «обобщенную проекцию» $\mathrm{pr}_p \circ \nu : \hat{C} \to \mathbb{P}^1$; ее множество ветвления совпадает с пересечением $p^\perp \cap C^*$, где $C^* \subset (\mathbb{P}^2)^*$ "— двойственная кривая а $p^\perp$ "— прямая в $(\mathbb{P}^2)^*$, соответствующая точке p. Обобщенная проекция имеет простое ветвление тогда и только тогда, когда $p^\perp$ трансверсальна к C^*.

Пусть теперь $\pi\colon C' \to p^\perp$, где C' "— гладкая проективная кривая, "— голоморфное отображение с простым ветвлением и теми же точками ветвления, что у обобщенной проекции из точки p. Давайте найдем критерий того, что π изоморфно обобщенной проекции из точки p.

Пусть для начала C гладкая. Простой подсчет параметров показывает, что точки ветвления проекции не могут быть произвольными. Именно, множество точек ветвления проекции такой кривой является точкой в $\mathrm{Sym}^{d(d-1)}\mathbb{P}^1 = \mathbb{P}^{d(d-1)}$, в то время как пространство проекций гладких кривых степени d имеет размерность всего лишь $d(d+3)/2-3$.

Интересно рассмотреть случай малых d. Случаи $d=1$ и $d=2$ тривиальны. При $d=3$ любая шестерка точек является точками ветвления проекции кубической кривой. Если $d=4$, то подсчет параметров показывает, что ветвления общих проекций образуют гиперповерхность V в $\mathbb{P}^{12}$, являющемся пространством всех наборов из $12 = d(d-1)$ точек на прямой. Пусть $a \in V$ "— общая точка; тогда количество пар (C', π), где C' "— гладкая кривая рода 3 и a "— множество ветвления отображения $\pi\colon C \to \mathbb{P}^1$, равно $255N$, где $N = 12(3^{10}-1)$ (это следует из общей формулы для чисел Гурвица, см. [3]). Как показал Р.Вакил [4], для $120N$ таких пар кривая C' является плоской квартикой, а для остальных $135N$ пар она гиперэллиптична.

При $d>4$ нетрудно вывести из [2, Proposition 1], что если C гладка, то всякое отображение степени d из C в $\mathbb{P}^1$ изоморфно проекции; если d нодальна, то аналогичное утверждение неверно.

Будем далее предполагать, что рассматриваемые нами «обобщенные проекции» имеют простое ветвление, а нодальные кривые являются достаточно общими в том смысле, что все точки ветвления просты, а бикасательных нет.

Основной результат, опубликованный в совместной работе [1] сотрудника лаборатории С.М.Львовского и сотрудника факультета математику ВШЭ Ю.М.Бурмана, заключается в следующем. Пусть точка $p \in \mathbb{P}^2 \setminus C$ такова, что обобщенная проекция из p имеет простое ветвление. Пусть также C' "— гладкая проективная кривая и $\pi\colon C' \to p^{\perp}$ "— голоморфное отображение с простым ветвлением, для которого множество точек ветвления совпадает с множеством точек ветвления обобщенной проекции из p. Мы предполагаем, что $d = \deg C > 2$, а если $\deg C = 3$, то мы предполагаем дополнительно, что либо C имеет точку самопересечения, либо $\deg \pi \neq 4$. Тогда следующие два условия равносильны.

(а) Проекция π изоморфна обобщенной проекции из точки p: существует такой изоморфизм $\varphi\colon C \to C'$, что $(\mathrm{pr}_p \circ \nu) \circ \varphi = \pi$.

(б) Существует гладкая проективная поверхность X, конечный морфизм $f\colon X \to (\mathbb{P}^2)^*$, разветвленный в точности над C^*, и изоморфизм $\varphi\colon C' \to f^{-1}(p^{\perp})$, для которых $f|_{f^{-1}(p^{\perp})} \circ \varphi = \pi$.

Импликация (а) $\Rightarrow$ (б) верна и без предположений общности.

Условие гладкости поверхности X отбросить нельзя, по крайней мере если $d = \deg X = 3$ или 4: в работе [1] показано, что для таких d существует гладкая кривая $C \subset \mathbb{P}^2$ степени d, удовлетворяющая условиям общности, прямая $p^{\perp} \subset (\mathbb{P}^2)^*$, трансверсальная к C^*, и морфизм $p\colon C' \to p^{\perp}$ с простым ветвлением над $p^{\perp} \cap C^*$, не изоморфный обобщенной проекции, но удовлетворяющий условию (а) выше, за исключением гладкости поверхности X.

Литература

[1] Yu. Burman, Serge Lvovski, *On projections of smooth and nodal plane curves*, Moscow Math. J. **15** (2015), no. 1, 31–48.

[2] David Eisenbud, Mark Green, and Joe Harris, *Cayley-Bacharach theorems and conjectures*, Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) **33** (1996), no. 3, 295–324.

[3] M. E. Kazarian and S. K. Lando, *An algebro-geometric proof of Witten's conjecture*, J. Amer. Math. Soc. **20** (2007), no. 4, 1079–1089.

[4] Ravi Vakil, *Twelve points on the projective line, branched covers, and rational elliptic fibrations*, Math. Ann. **320** (2001), no. 1, 33–54.

5.5. Двойственность и регулярность стратов экви-классической стратификации пространств плоских кривых

Начиная с 19-го века, классическая теория двойственности плоских алгебраических кривых используется для изучения экви-классических стратов $V_{d,g,c}$, параметризующих неприводимые кривые степени d, рода g и класса c (степени двойственных кривых). Однако, все предыдущие исследования геометрии экви-классических стратов (см. [1, 2]) не принимали во внимание изоморфизмы двойственности между стратами экви-классических стратов.

Используя изоморфизмы двойственности и теорию деформаций алгебраических многообразий, в результате исследований В. Куликовым совместно с Е. Шустиным были получены новые результаты, относящиеся к проблемам регулярности экви-классических стратов, т.е. к проблемам нахождения необходимых и достаточных условий, при выполнении которых исследуемые страты являются соответственно локально полными пересечениями, неприводимыми многообразиями, многообразиями, содержащими нодально-каспидальные кривые в качестве общего члена, и т. п. В частности, нами было доказано, что страт $V_{d,g,c}$ является локально полным пересечением тогда и только тогда, когда $V_{c,g,d}$ также обладает этим свойством. Также было доказано, что если $c \geq 2g + \left[\frac{d+1}{2}\right] + 1$, то страт $V_{d,g,c}$, $d, c \geq 2$, не пуст и если $V_{d,g,c} \neq \emptyset$ и либо $c \geq 2g + 2d - 5$, либо $c \geq 3g + \frac{3d-5}{2}$, либо $c \geq g + \frac{d^2-2d-1}{2}$, то страт $V_{d,g,c}$ неприводим.

Результаты исследований опубликованы в статье [3].

Литература

[1] S. Diaz and J. Harris. Ideals associated to deformations of singular plane curves. *Trans. Amer. Math. Soc.* **309** (1988), no. 2, 433–468.

[2] E. Shustin. Equiclassical deformation of plane algebraic curves. In: *Singularities*, Progress in Math., **162**, Birkhäuser, Basel, 1998, pp. 195–204.

[3] Viktor S. Kulikov and Eugenii Shustin, Duality of planar and spacial curves: new insight, *European Journal of Mathematics.* **1** (2015), no. 3, 462–482.

5.6. Исследование факторов рациональных поверхностей над незамкнутыми полями

Пусть $\Bbbk$ — поле характеристики 0. Рассмотрим $\Bbbk$-рациональное многообразие X, на котором действует конечная группа G. Мы исследуем вопрос, является ли фактормногообразие X/G рациональным?

Если X — кривая, то по теореме Люрота её фактор всегда является рациональным. Как следствие из теоремы Кастельнуово получается, что если поле $\Bbbk$ алгебраически замкнуто, то фактор всякой рациональной поверхности также является рациональным. В случае размерности 3 и выше ответ на вопрос о рациональности фактора не известен даже для проективного пространства с действием линейной группы.

В случае алгебраически незамкнутого поля $\Bbbk$ ответ, в каких случаях фактор не является рациональным, не известен даже для рациональных поверхностей. Текущее исследование призвано дать ответ на этот вопрос. Существование нерациональных факторов рациональных поверхностей следует из классических конструкций. Например, всякая поверхность дель Пеццо степени 4 является 2-унирациональной, а значит бирационально эквивалентна фактору $\Bbbk$-рациональной поверхности по группе порядка 2. С другой стороны по критерию рациональности Исковских минимальная поверхность дель Пеццо степени 4 не является $\Bbbk$-рациональной.

Ранее в работе [1] были доказаны следующие утверждения.

Теорема 5.1 ([1, Theorem 1.3]). *Пусть $G \subset \mathrm{PGL}_3(\Bbbk)$ — конечная подгруппа. Тогда фактор $\mathbb{P}^2_{\Bbbk}/G$ является $\Bbbk$-рациональным.*

Теорема 5.2 ([1, Corollary 1.4]). *Пусть X поверхность дель Пеццо степени 6 над полем $\Bbbk$, такая что $X(\Bbbk) \neq \varnothing$, а G — конечная группа автоморфизмов X. Тогда факторповерхность X/G является $\Bbbk$-рациональной.*

В работе [2] исследуются факторы расслоений на коники. Для формулировки основного результата нам понадобится следующее определение.

Определение 5.1. *Класс $\mathfrak{V}$ многообразий называется $\Bbbk$-бирационально ограниченным, если существует морфизм $\varphi : \mathcal{X} \to \mathcal{S}$ алгебраических схем конечного типа такой, что каждый член $\mathfrak{V}$ $\Bbbk$-бирационально эквивалентен одному из геометрических слоёв φ. Класс $\mathfrak{V}$ называется $\Bbbk$-бирационально неограниченным, если он не является $\Bbbk$-бирационально ограниченным.*

Теорема 5.3 ([2, Theorem 1.8]). *Пусть $\Bbbk$ поле характеристики 0 такое, что не все элементы $\Bbbk$ являются квадратами, а G — конечная группа автоморфизмов $\mathbb{P}^1_{\Bbbk}$. Тогда класс G-факторов $\Bbbk$-рациональных расслоений на коники $\Bbbk$-бирационально неограничен в следующих случаях:*

- *Если $\Bbbk$ содержит $\xi_k = e^{\frac{2\pi i}{k}}$ и G циклическая группа $\mathfrak{C}_{2k}$ порядка $2k$;*
- *Если $\Bbbk$ содержит $\cos\frac{2\pi}{k}$ и G диэдральная группа $\mathfrak{D}_{2k}$ порядка $2k$;*
- *Если $\Bbbk$ содержит i и G знакопеременная группа $\mathfrak{A}_4$ степени 4;*
- *Если $\Bbbk$ содержит i или $i\sqrt{2}$, и G симметрическая группа $\mathfrak{S}_4$ степени 4;*
- *Если $\Bbbk$ содержит i и $\sqrt{5}$, и G знакопеременная группа $\mathfrak{A}_5$ степени 5.*

Другим важным результатом является следующий.

Предложение 5.2 ([2, Proposition 1.6]). *Если X — $\Bbbk$-рациональное G-эквивариантное расслоение на коники и $K_X^2 \geqslant 5$, то факторповерхность X/G является $\Bbbk$-рациональной.*

Другой случай G-минимальных $\Bbbk$-рациональных поверхностей — это поверхности дель Пеццо. Их исследованию посвящены препринт [3] и статья [4].

Основной результат препринта [3] усиливает результаты статьи [1].

Теорема 5.4 ([3, Theorem 1.1]). *Пусть $\Bbbk$ — поле характеристики 0, X — поверхность дель Пеццо над $\Bbbk$, такая что $X(\Bbbk) \neq \varnothing$, а G — конечная группа автоморфизмов X. Если $K_X^2 \geqslant 5$, то факторповерхность X/G является $\Bbbk$-рациональной. Если $K_X^2 = 4$ и порядок G не равен 1, 2 или 4, то факторповерхность X/G является $\Bbbk$-рациональной.*

В качестве непосредственного следствия этой теоремы получаем следующее.

Следствие 5.3 ([3, Corollary 1.2]). *Пусть $\Bbbk$ — поле характеристики 0, X — гладкая рациональная поверхность над $\Bbbk$, такая что $X(\Bbbk) \neq \varnothing$, а G — конечная группа автоморфизмов X. Если $K_X^2 \geqslant 5$, то факторповерхность X/G является $\Bbbk$-рациональной.*

Для групп порядка 2 и 4 построены примеры нерациональных факторов $\mathbb{k}$-рациональных поверхностей (см. [3, Section 6]).

В статье [4] исследуются факторы кубических поверхностей. Основной её результат следующий

Теорема 5.5 ([4, Theorem 1.3]). *Пусть* $\mathbb{k}$ *— поле характеристики* 0, X *— поверхность дель Пеццо над* $\mathbb{k}$ *степени* 3, *такая что* $X(\mathbb{k}) \neq \varnothing$, *а* G *— подгруппа в* $\mathrm{Aut}_{\mathbb{k}}(X)$. *Предположим, что* G *не тривиальная и* G *не является группой порядка* 3, *не имеющей кривых, состоящих из неподвижных точек. Тогда факторповерхность* X/G *является* $\mathbb{k}$-*рациональной.*

При этом для группы порядка 3, не имеющей кривых, состоящих из неподвижных точек, построены примеры нерациональных факторов $\mathbb{k}$-рациональных кубических поверхностей (см. [4, Section 6]).

Литература

[1] A. S. Trepalin, Rationality of the quotient of $\mathbb{P}^2$ by finite group of automorphisms over arbitrary field of characteristic zero, Cent. Eur. J. Math., 2014, 12(2), 229–239

[2] A. Trepalin, Quotients of conic bundles, Transformation Groups, 2015, DOI: 10.1007/s00031-015-9342-9

[3] A. Trepalin, Quotients of Del Pezzo surfaces of high degree, Препринт, доступен по адресу http://arxiv.org/abs/1312.6904

[4] A. Trepalin, Quotients of cubic surfaces European Journal of Mathematics, 2015, DOI: 10.1007/s40879-015-0075-z

5.7. Особенности экстремальных трехмерных терминальных окрестностей.

Продолжалась работа над долгосрочным проектом по классификации аналитических типов экстремальных стягиваний трехмерных терминальных стягиваний со слоями размерности ≤ 2. Это долгосрочный проект разрабатываемый сотрудником лаборатории Ю. Прохоровым и С. Мори (RIMS, Kyoto University). Более точно, *экстремальный росток* (X, C) – это росток трехмерного нормального комплексного пространства X с терминальными особенностями вдоль компактной неприводимой кривой C. При этом имеется морфизм-стягивание $f : X \to Z \ni o$ такой, что $C = f^{-1}(o)$ и антиканонический дивизор $-K_X$ относительно обилен. Классификация экстремальных ростков очень важна для эффективного применения трехмерной программы минимальных моделей, для изучения структуры бирациональных отображений и для проблем рациональности.

Изучение экстремальных ростков было начато в фундаментальной работе Мори [Mor88] и продолжено в серии работ [KM92], [MP14], [MP11], [MP09], [MP08a], [MP08b]. В течение последнего года велась работа над классификацией экстремальных ростков, содержащих исключительную особенность типа (IIA), т.е. особенность индекса 4 исключительного типа в терминологии Мори-Рида и такую, что прообраз кривой C на каноническом накрытии неособ. В этом случае классификация естественным образом распадается в две части, в зависимости от того является ли нормальным общее гиперплоское сечение $H \subset X$, проходящее через C, или нет. Первая часть работы, относящееся к нормальному гиперплоскому сечению H, закончена. Готовится публикация.

Литература

[Mor88] Sh. Mori. Flip theorem and the existence of minimal models for 3-folds. *J. Amer. Math. Soc.*, 1(1):117–253, 1988.

[KM92] J. Kollár and Sh. Mori. Classification of three-dimensional flips. *J. Amer. Math. Soc.*, 5(3):533–703, 1992.

[MP08a] Sh. Mori and Yu. Prokhorov. On **Q**-conic bundles. *Publ. Res. Inst. Math. Sci.*, 44(2):315–369, 2008.

[MP08b] Sh. Mori and Yu. Prokhorov. On **Q**-conic bundles. II. *Publ. Res. Inst. Math. Sci.*, 44(3):955–971, 2008.

[MP09] Sh. Mori and Yu. Prokhorov. On **Q**-conic bundles, III. *Publ. Res. Inst. Math. Sci.*, 45(3):787–810, 2009.

[MP11] Sh. Mori and Yu. Prokhorov. Threefold extremal contractions of type IA. *Kyoto J. Math.*, 51(2):393–438, 2011.

[MP14] Sh. Mori and Yu. Prokhorov. Threefold extremal contractions of types (IC) and (IIB). *Proc. Edinburgh Math. Soc.*, 57(1):231–252, 2014.

5.8. Цилиндрические подмножества в многообразиях Фано

Сотрудником лаборатории Ю. Прохоровым совместно с М. Зайденбергом (университет г. Гренобль, Франция) исследовались многомерные многообразия Фано с числом Пикара 1, содержащие цилиндр – открытое в топологии Зарисского подмножество, являющееся произведением аффинной прямой с другим многообразием. Проблема интересна в связи с изучением групп автоморфизмов аффинных конусов над многообразиями Фано (в частности, с изучением действий связных унипотентных групп на таких конусах). Работа была сконцентрирована на случае многообразий Фано размерности 4 и индекса Фано 2 и 3. Построены новые примеры цилиндров. Более точно, доказано, что любое четырехмерное многообразие Фано с числом Пикара 1 индекса 3 (многообразие дель Пеццо) и степени ≥ 4 содержит цилиндр. Аналогично, любое четырехмерное многообразие Фано с числом Пикара 1 индекса 2 (многообразие Мукая) и рода ≥ 6 содержит цилиндр. Все примеры связаны со специальными бирациональными перестройками (линками Саркисова). Они позволяют сводить вопрос о существовании цилиндра к “более простым” многообразиям Фано. Результаты содержатся в двух препринтах [PZ15] и [PZ14].

Литература

[PZ14] Yu. Prokhorov and M. Zaidenberg. Examples of cylindrical Fano fourfolds. *ArXiv e-print*, 1406.6339, 2014. to appear in European Journal of Mathematics.

[PZ15] Yu. Prokhorov and M. Zaidenberg. New examples of cylindrical Fano fourfolds. *ArXiv e-print*, 1507.01748, 2015.

5.9. Логканонические пороги (И. Чельцов)

В работе [Che15] были исследованы наименьшие логканонические пороги (приведенных) плоских кривых. Хорошо известно, что наименьший логканонический порог плоской кривой степени d равен $\frac{2}{d}$. Это было показано И. Чельцовым и Дж. Парком (POSTECH) в 2001 году. В различных приложениях необходимо знать значение следующего логканонического порога. Например это необходимо для получения строгого неравенства для α-инварианта Тиана гладких поверхностей в $\mathbf{P}^3$. В работе [Che15] показано, что $\frac{2}{d}$, $\frac{2d-3}{(d-1)^2}$, $\frac{2d-1}{d(d-1)}$, $\frac{2d-5}{d^2-3d+1}$ и $\frac{2d-3}{d(d-2)}$ суть наименьшие логканонические пороги (приведенных) плоских кривых степени $d \geqslant 3$. Более того, все кривые с данными логканоническими порогами явно описаны. В качестве применения показано, что $\frac{2}{d}$, $\frac{2d-3}{(d-1)^2}$, $\frac{2d-1}{d(d-1)}$, $\frac{2d-5}{d^2-3d+1}$ и $\frac{2d-3}{d(d-2)}$ суть наименьшие значения α-инварианта Тиана гладких поверхностей в $\mathbf{P}^3$ степени $d \geqslant 3$. В случае $d = 3$ этот результат получен Чельцовым в 2008 году. Используемые методы позволили также доказать следующий (внешне не связанный с рассматриваемой задачей) результат: каждая приведенная плоская кривая степени $d \geqslant 4$, чей логканонический порог меньше чем $\frac{5}{2d}$ является GIT-нестабильной (не GIT-полустабильной) для естественного действия группы $\mathrm{PGL}_3(\mathbf{C})$ $\mathbf{P}(H^0(\mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}(d)))$. Более того, все GIT-полустабильные кривые с лог каноническим порогом $\frac{5}{2d}$ явно описаны.

В совместной с Я. Рубинштейном (University of Maryland) работе [CR15] преложен новый метод доказательства несуществования экстремальных метрик на логмногообразиях Фано. Идея работы состоит в обобщении конструкции Дж. Росса (University of Cambridge) и Р. Томаса (Imperial College) с помощью простейших бирациональных перестроек известных как флоп Атьи. Показано как применять предложенную конструкцию в двумерном случае. А именно, пусть S — гладкая поверхность, а C — гладкая кривая на поверхности S. Предположим, что дивизор $-(K_S+(1-\beta)C)$ обилен для всех достаточно малых положительных чисел β. Тогда дивизор $-(K_S+C)$ является численно эффективен. Можно показать, что имеет одна из следующих ситуаций: либо дивизор $-(K_S+C)$ тривиален, либо дивизор $-(K_S+C)$ объёмен, либо линейная система $|-(K_S+C)|$ свободна и задает расслоение на коники $S \to \mathbf{P}^1$. Известно, что в первом случае поверхность S всегда содержит метрику Кэлера–Эйнштейна, которая имеет конические особенности с углом $2\pi\beta$ вдоль кривой C при всех достаточно малых $\beta > 0$. Это показано Р. Берманом (Gotteburgh). С другой стороны, в последнем случае известно много примеров когда поверхность S содержит метрику Кэлера–Эйнштейна, имеющую конические особенности с углом $2\pi\beta$ вдоль кривой C при всех достаточно малых $\beta > 0$. Гипотетически последнее должно быть верным всегда. В работе [CR15], показано что в оставшемся случае (когда $(K_S+C)^2 > 0$) поверхность S не содержит метрики Кэлера–Эйнштейна, имеющей конические особенности с углом $2\pi\beta$ вдоль кривой C при всех достаточно малых $\beta > 0$. Данный результат был сформулирован как гипотеза И. Чельцовым и Я. Рубинштейном в 2012 году. Недавно К. Фуджита (RIMS, Kyoto) обобщил его для на все размерности. В работе [CR15] также разобраны много явных примеров, которые иллюстрируют область применения предложенного метода. Например, показано как с помощью этого метода доказать отсутствие метрик Кэлера–Эйнштейна на раздутие $\mathbf{P}^2$ в двух точках. Несмотря на то что это хорошо известный результат, данный пример важен, поскольку классическое препятствие Дж. Росса и Р. Томаса (slope instability) в данной ситуации не применимо (это показано Дм. Пановым (Kings College) и Дж. Россом).

В совместной с Х. Ахмадинежадом (University of Bristol) и Й. Шико (RICAM, Linz) работе [ACS15] построек контр-пример к одной гипотезе Г. Тиана (University of Princeton). Для гладкого многообразия X и обильного дивизора L на нем, Г. Тиан определил α-инвариант

$$\alpha\big(X,L\big) = \sup\left\{\lambda \in \mathbf{Q}\ \middle|\ \begin{array}{l}\text{логпара } (X,\lambda D) \text{ логканонична}\\ \text{для каждого } \mathbf{Q}\text{-дивизора } D \sim_{\mathbf{Q}} L\end{array}\right\} \in \mathbf{R}_{>0}.$$

Как правило, это число трудно явно вычислить. С другой стороны, его можно приблизить числами, которые несложно посчитать. А именно, если линейная система $|nL|$ не пуста, положим

$$\alpha_n\big(X,L\big)=\sup\left\{\lambda\in\mathbf{Q}\ \middle|\ \text{пара}\left(X,\frac{\lambda}{n}D\right)\text{ логканонична для каждого } D\in|nL|\right\}\in\mathbf{Q}_{>0}.$$

Если же линейная система $|nL|$ пуста, положим $\alpha_n(X,L)=+\infty$. В этом случае, мы имеем $\alpha(X,L)\leqslant\alpha_n(X,L)$ и

$$\alpha\big(X,L\big)=\inf_{n\geqslant 1}\Big\{\alpha_n\big(X,L\big)\Big\}.$$

В 2012, Г. Тиан предположил, что на самом деле всегда выполнено равенство $\alpha(X,L)=\alpha_1(X,L)$ если выполнено следующее условие: дивизор L очень обилен и градуированная алгебра

$$\bigoplus_{n\geqslant 0}H^0\Big(X,\mathcal{O}_X\big(nL\big)\Big)$$

порождена элементами в $H^0(X,\mathcal{O}_X(L))$. В работе [ACS15], эта гипотеза исследована для гладких гиперповерхностей в $\mathbf{P}^3$. А именно, пусть S_d — гладкая поверхность в $\mathbf{P}^3$ степени $d\geqslant 1$, и пусть H — ее гиперплоское сечение. В этом случае дивизор H очень обилен и градуированная алгебра

$$\bigoplus_{n\geqslant 0}H^0\Big(S,\mathcal{O}_S\big(nH\big)\Big)$$

порождена элементами в $H^0(S,\mathcal{O}_S(H))$. Более того, если $d=1$ или $d=2$, то $\alpha(S_d,H)=\alpha_1(S_d,H)=1$. В 2008, И. Чельцов показал, что $\alpha(S_d,H)=\alpha_1(S_d,H)$ в случае когда $d=3$. В работе [ACS15] показано, что $\alpha(S_d,H)=\alpha_1(S_d,H)$ в случае когда $d=4$, но $\alpha(S_d,H)<\alpha_1(S_d,H)$ в случае когда поверхность S_d достаточно общая и $d\geqslant 8$. В частности, гипотеза Г. Тиана не верна. В работе также строятся поверхности степени 6 и 7, дающие контр-примеры к этой гипотезе.

В совместной работе с Дж. Парком и Дж. Воном (KAIST, Daejeon) [CPW15] изучаются поляризованные цилиндры на гладких поверхностях дель Пеццо. Напомним, что *цилиндром* принято называть открытое по Зарисскому множество, которое изоморфно произведению $\mathbf{C}^1\times Z$ для некоторого аффинного многообразия Z. Легко видеть, что любая *гладкая* рациональная поверхность содержит цилиндры. Под поляризованным цилиндром принято понимать следующее. Пусть S — гладкая поверхность, а H — обильный $\mathbf{R}$-дивизор на ней. Открытое подмножество

$U \subset S$ принято называть H-поляризованным цилиндром если U является цилиндром, и существует эффективный $\mathbf{R}$-дивизор D на поверхности S, такой что

$$D \equiv H$$

и $U = S \setminus \mathrm{Supp}(D)$. Хорошо известно, что если S является поверхностью дель Пеццо и $H = -K_S$, то S содержит H-поляризованный цилиндр $\iff K_S^2 \geqslant 4$. Это показано М. Зайденбергом (University of Grenoble), Т. Кашимото, Ю. Прохоровым (Москва) [KPZ14], И. Чельцовым, Дж. Парком и Дж. Воном [CPW13]. В работе [CPW15] исследован вопрос существования H-поляризованных цилиндров на поверхности S. А именно, пусть $\mathrm{Amp}(S)$ — конус обильных $\mathbf{R}$-дивизоров поверхности S. Обозначим символом $\mathrm{Amp}^{cyl}(S)$ подконус, состоящий из всех обильных дивизоров H для которых существует H-поляризованный цилиндр на поверхности S. В работе [CPW15] показано, что если $K_S^2 \geqslant 4$

$$\mathrm{Amp}^{cyl}(S) = \mathrm{Amp}(S).$$

В случае когда $K_S^2 = 3$, показано, что

$$\mathrm{Amp}^{cyl}(S) = \mathrm{Amp}(S) \setminus \mathbf{R}_{>0}[-K_S].$$

В случае когда $K_S^2 \leqslant 2$, поставленная задача оказалась слишком сложной и полное описание конуса $\mathrm{Amp}^{cyl}(S)$ пока не известно. В этом случае получены только частичные результаты. Чтобы описать их, необходимо ввести несколько дополнительных понятий. А именно, положим

$$\mu_H := \inf\left\{\lambda \in \mathbf{R}_{>0} \;\middle|\; \mathbf{R}\text{-дивизор } K_S + \lambda H \text{ псевдо-эффективен}\right\}.$$

Пусть Δ_H — наименьшая грань конуса Мори $\overline{\mathbf{N}E}(S)$, которая содержит дивизор $K_S + \mu_H H$. Положим $r_H = \dim(\Delta_H)$. Пусть $\phi_H\colon S \to Z$ — стягивание грани Δ_H. Тогда ϕ_H является либо бирациональным морфизмом либо расслоением на коники. В первом случае, мы скажем что H является дивизором типа $B(r_H)$, а в последнем случае мы скажем что H является дивизором типа $C(r_H)$. Предположим, что $K_S^2 = 1$ или $K_S^2 = 2$. Напомним, что в этом случае конус Мори $\overline{\mathbf{N}E}(S)$ полиэдрален и порожден всеми (-1)-кривыми на S. Поэтому, если H имеет тип $B(r_H)$, то грань Δ_H порождена r_H несвязными (-1)-кривыми, которые стягиваются бирациональным морфизмом ϕ_H, где $r_H \leqslant 9 - K_S^2$. Если H имеет тип $C(r_H)$, то грань Δ_H порождена (-1)-кривыми в $8-K_S^2$ приводимых слоях расслоения на коники ϕ_H. Обозначим символом $\mathrm{Amp}_{r_H}^B(S)$ множество всех обильных $\mathbf{R}$-дивизоров типа $B(r_H)$ на поверхности S. Тогда $\mathrm{Amp}_0^B(S)=\mathbf{R}_{>0}[-K_S]$. В случае когда H имеет тип $C(r_H)$, имеет место численная эквивалентность

$$K_S+\mu_H H\equiv aC+\sum_{i=1}^{8-d}a_iE_i$$

для некоторого положительного вещественного числа $a>0$, и некоторых неотрицательных вещественных чисел $a_1,\ldots,a_{8-d}<1$, где C — общий слой расслоения на коники ϕ_H, а $E_1,E_2,E_3,\ldots,E_{8-d}$ — несвязные кривые, которые содержаться в слоях расслоения на коники ϕ_H. В этом случае положим

$$\ell_H=\Big|\big\{a_i\mid a_i\neq 0\big\}\Big|$$

и скажем что $\mathbf{R}$-дивизор H имеет длину ℓ_H. Обозначим символом $\mathrm{Amp}_{\ell_H}^C(S)$ множество всех обильных $\mathbf{R}$-дивизоров типа $C(r_H)$ длинны ℓ_H на поверхности S. По определению, имеем

$$\mathrm{Amp}(S)=\bigcup_{\ell=0}^{8-d}\mathrm{Amp}_\ell^C(S)\cup\bigcup_{r=0}^{9-d}\mathrm{Amp}_r^B(S).$$

В работе [CPW15] доказаны следующие результаты, частично описывающие конус $\mathrm{Amp}^{cyl}(S)$ в случае когда $K_S^2\leqslant 2$. Если $K_S^2\leqslant 2$, то

$$\mathrm{Amp}^{cyl}(S_d)\bigcap\left\{\bigcup_{r=0}^{3-d}\mathrm{Amp}_r^B(S_d)\right\}=\emptyset.$$

Если $K_S^2=2$, то

$$\mathrm{Amp}^{cyl}(S)\supset\bigcup_{r=3}^{7}\mathrm{Amp}_r^B(S),$$

$$\mathrm{Amp}^{cyl}(S)\bigcap\mathrm{Amp}_2^B(S)\neq\emptyset,$$

$$\mathrm{Amp}^{cyl}(S)\supset\bigcup_{\ell=3}^{6}\mathrm{Amp}_\ell^C(S).$$

Если $K_S^2 = 2$, то для каждого $0 \leqslant \ell \leqslant 6$ выполнено

$$\mathrm{Amp}^{cyl}(S) \bigcap \mathrm{Amp}^C_\ell(S) \neq \emptyset.$$

Если $K_S^2 = 2$ и существует такнодальная кривая в линейной системе $|-K_S|$, то

$$\mathrm{Amp}^{cyl}(S) \supset \bigcup_{\ell=0}^{6} \mathrm{Amp}^C_\ell(S).$$

Если $K_S^2 = 1$, то для каждого $3 \leqslant r \leqslant 8$ выполнено

$$\mathrm{Amp}^{cyl}(S) \bigcap \mathrm{Amp}^B_r(S) \neq \emptyset.$$

Если $K_S^2 = 1$, то для каждого $0 \leqslant \ell \leqslant 7$ выполнено

$$\mathrm{Amp}^{cyl}(S) \bigcap \mathrm{Amp}^C_\ell(S) \neq \emptyset.$$

Литература

[ACS15] Hamid Ahmadinezhad, Ivan Cheltsov, and Josef Schicho. On a conjecture of Tian. *ArXiv e-print*, 1508.04090, 2015.

[Che15] Ivan Cheltsov. Worst singularities of plane curves of given degree. *ArXiv e-print*, 1409.6186, 2015.

[CPW13] I. Cheltsov, J. Park, and J. Won. Affine cones over smooth cubic surfaces. *ArXiv e-print*, 1303.2648, 2013. to appear in J. of EMS.

[CPW15] Ivan Cheltsov, Jihun Park, and Joonyeong Won. Cylinders in del Pezzo surfaces. *ArXiv e-print*, 1508.06375, 2015.

[CR15] Ivan Cheltsov and Yanir Rubinstein. On flops and canonical metrics. *ArXiv e-print*, 1508.04634, 2015.

[KPZ14] Takashi Kishimoto, Yuri Prokhorov, and Mikhail Zaidenberg. Unipotent group actions on del Pezzo cones. *Algebraic Geometry*, 1(1):46–56, 2014.

5.10. Научно-педагогическая деятельность

Научно-педагогическая деятельность Ю. Прохорова и его группы.

- И. Чельцов и Ю. Прохоров прочитали курс лекций о конечных подгруппах в группах Кремоны на летней школе "*School on finite subgroups of Cremona groups*", Trento (Italy), August 24-29, 2015.

  К. Шрамов провел на этой школе серию семинаров.

- В течение всего года активно работал научный семинар "Геометрия алгебраических многообразий им В. А. Исковских" (МИАН-МГУ) в работе которого принимали участие многие сотрудники лаборатории. Руководители семинара: Ю. Г. Прохоров, Д. О. Орлов, В. В. Пржиялковский, К. А. Шрамов.

- В течение всего года работал учебный семинар "Алгебраическая геометрия" (НОЦ МИАН) в работе которого принимали участие многие студенты и аспиранты факультета математики. Руководители семинара: Ю. Г. Прохоров, Д. О. Орлов, К. А. Шрамов

- В осеннем семестре Ю. Прохоров прочитал специальный курс "Классическая алгебраическая геометрия" (НОЦ МИАН).

- В весеннем семестре Ю. Прохоров прочитал вводный курс по алгебраической геометрии "Алгебраические кривые" (мех-мат МГУ)

- Ю. Прохоровым опубликованы записки курса лекций "Рациональные поверхности", Лекц. курсы НОЦ **24**, МИАН, М., 2015, 76 с. Материалы курса доступны в Интернете на следующей странице: `http://dx.doi.org/10.4213/lkn24`.

6. Геометрическая теория представлений

6.1. Кластерная структура на пространстве модулей тригонометрических монополей

Согласно [7], пространство модулей евклидовых G_c-монополей топологического заряда α с максимальным нарушением симметрии на бесконечности отождествляется с пространством модулей M^α базированных отображений степени α из проективной прямой в пространство флагов G/B. Здесь G_c максимальная компактная подгруппа комплексной полупростой группы Ли G. Возникающая из гиперкэлеровой структуры в левой части голоморфная симплектическая структура была явно вычислена в естественных координатах на правой части в работе [5]. Согласно [1], это пространство модулей вкладывается в качестве открытого подмножества в трансверсальные срезы к многообразиям Шуберта на аффинном Грассманниане Gr_G. Естественная пуассонова структура на этих срезах (возникающая из рациональной r-матрицы на алгебре петель алгебры Ли G) в ограничении на пространство модулей монополей совпадает с вышеописанной симплектической структурой. Это первый важный результат работы [4], доказывающий гипотезу из [8].

Основная часть работы [4] посвящена изучению тригонометрического варианта пространства базированных отображений: некого пространства модулей расслоений с флагом на неприводимой нодальной кривой арифметического рода 1. Эта кривая является вырождением эллиптической, и наше пространство модулей является вырождением пространства, введённого Б. Фейгиным и А. Одесским в [2]. Их целью было изучение естественной пуассоновой структуры, квантованием которой получаются эллиптические алгебры Склянина. Наше вырожденное пространство модулей P^α тоже снабжено естественной скобкой Пуассона. Более того, оно вкладывается в M^α в качестве открытого подмножества, но ограничение скобки с M^α на P^α *не* равно вышеописанной скобке на P^α. Оказывается, P^α можно отождествить с многообразиями Ричардсона (пересечениями стратов противоположных стратификаций Шуберта) в аффинном пространстве флагов Fl_G, и естественная пуассонова структура на этих многообразиях (возникающая из тригонометрической r-матрицы на алгебре петель алгебры Ли G) совпадает с вышеописанной симплектической структурой на P^α. Это второй важный результат работы [4].

Скобку Пуассона на P^α можно вычислить в естественных координатах из [5], и в случае $G = SL_2$ она совпадает со скобкой Кокстера-Тоды из [6], согласованной с изученной в этой работе кластерной структурой на пространстве рациональных функций на прямой. Третий важный результат [4] отождествляет эту кластерную структуру с кластерной структурой [9] на многообразиях Ричардсона в аффинном пространстве флагов группы SL_2. Более общо, кластерная структура Леклерка на многообразиях Ричардсона для произвольной полупростой группы G индуцирует кластерную структуру на P^α, и тем самым результаты работы [6] обобщаются на случай произвольной группы G.

6.2. Компактификации Гизекера и Уленбек фазового пространства Калоджеро-Мозера

Фазовое пространство M_τ^n рациональной системы Калоджеро-Мозера было введено почти 40 лет назад в пионерской работе Каждана-Костанта-Стернберга. Оно является частичным замыканием фазового пространства, изначально определённого вне диагоналей по координатам, но симплектическая структура и интегрируемая система чудесным образом продолжаются на пополнение Каждана-Костанта-Стернберга. Это пополнение является аффинным симплектическим многоообразием, деформацией (по параметру τ) точечной схемы Гильберта M_0^n аффинной плоскости. Как и схема Гильберта, строится M_τ^n с помощью геометрической теории инвариантов; это архетипический пример колчанного многообразия.

Как это ни парадоксально, естественный вопрос построения компактификации M_τ^n, на которую продолжалась бы пуассонова скобка, не был решён до недавних пор. 8 лет назад в работе [10] была построена гладкая компактификация Гизекера $\tilde{M}_\tau^n$, являющаяся деформацией точечной схемы Гильберта $\tilde{M}_0^n$ проективной плоскости. Эта схема Гильберта является полумалым разрешением симметрической степени $\mathrm{Sym}^n\,\mathbb{P}^2$ (морфизм Гильберта-Чжоу). В работе [3] строится "более экономная" компактификация Уленбек $\hat{M}_\tau^n$, являющаяся деформацией $\mathrm{Sym}^n\,\mathbb{P}^2$, для которой компактификация Гизекера $\tilde{M}_\tau^n$ служит малым разрешением особенностей. Обе компакификации — и Гизекера, и Уленбек — строятся с помощью геометрической теории инвариантов как пространства модулей представлений вспомогательного колчана с квадратичными соотношениями (но с разными условиями стабильности). Эти пространства модулей имеют естественную интерпретацию в рамках некоммутативной алгебраической геометрии как пространства модулей когерентных пучков на некоммутативной проективной плоскости.

Наличие малого разрешения Гизекера позволяет вычислить слои пучков Горески-Макферсона особой компактификации Уленбек. Ответ согласуется с известными ответами для компактификации Уленбек пространств модулей G-расслоений на (коммутативной) проективной плоскости для полупростой комплексной группы G. В рамках геометрической теории Ленглендса, эти компактификации играют роль срезов в аффинном грассманиане соответствующей аффинной алгебры Ли $\mathfrak{g}_{\mathrm{aff}}$ (двойном аффинном грассманниане G). Сравнение слоёв пучков Горески-Макферсона позволяет заключить, что $\widehat{M}^n_\tau$ играет роль среза в аффинном грассманниане гейзенберговой алгебры Ли.

6.3. Элементы кручения в группах Брауэра симплектических разрешений в характеристике p

Одним из новых и многообещающих направлений теории представлений является изучение производных категорий симплектических разрешений. Примером могут служить такие работы как ([11], [12], [18], [13]) и множестве других. В продолжающемся проекте [17] Дмитрий Кубрак в соавторстве с Романом Травкиным изучают вопрос спуска некоторых элементов группы Брауэра на базу разрешения, естественным образом возникающий при изучении квантований симплектических разрешений (см. [15], [16], [18], и др.). А именно, следуя [14], в случае гладкого многообразия по любой глобально определенной на нем форме можно построить алгебру Адзумаи, заданную соответствующей центральной редукцией пучка алгебр дифференциальных операторов. Авторы доказывают, что такие классы спускаются на базу локально этально по базе при условии, что $R^{1,2}\pi_*\mathcal{O}_X = 0$, а также глобальный спуск для определенных ими особенностей с коническими срезами. Особенность с коническими срезами - это коническая особенность, такая, что у любой нецентральной точки есть коническая этальная окрестность. Это определение оказывается очень удобным и включает много примеров, но для того чтобы с ним работать авторам пришлось разработать некоторую технику. Была определена категория этальных ростков разрешений, для категории разрешений с отмеченной точкой на базе было доказано, что класс этальных морфизмов удовлетворяет правому условию Оре, таким образом позволяя определить локализацию. Далее авторы доказывают, что в этой категории две особенности изоморфны после умножения на $\mathbb{A}^1$ тогда и только тогда когда они изоморфны. Таким образом, после некоторых нетривиальных манипуляций с действиями торов, авторы что в любой нецентральной точке особенности с коническими срезами есть конический срез, оправдывая таким образом данное ими определение. Далее для доказательства спуска, авторы переформулируют исходный вопрос в терминах келеровых дифференциалов. Они обобщают отображение из [14] на случай келеровых диффенциалов на особых аффинных многообразий, после чего переформулируют исходное утверждение в некоторый вопрос о дифференциальных формах на разрешении и келеровых дифференциалах на базе. Далее, доказывается, что существование спуска не зависит от умножения на $\mathbb{A}^1$, после чего индукция по размерности позволяет свести вопрос к случаю изолированной особенности и центрального слоя, которые разбираются отдельно.

Кроме этого Дмитрием Кубраком был сделан доклад "Rational maps to abelian varieties and the theorem of the cube" на семинаре "STAGE" и два доклада на тему "Soergel's endomorphism theorem" на студенческом "Geometric Representation Theory Seminar" в Массачусетском Технологическом Университете.

6.4. Представления нильпотентных алгебр и алгебраические многообразия

Алгебры и группы Ли играют центральную роль в разнообразных конструкциях современной математики. В частности, имеется глубокая взаимосвязь между задачами алгебраической геометрии и теорией Ли. Структурная теория и теория представлений групп и алгебр Ли позволяет описывать группы автоморфизмов алгебраических многообразий, находить и классифицировать особенности, вычислять размерности и характеры когомологий векторных расслоений. При этом оказывается важным использование как геометрическую теорию представлений (многообразия флагов, действия групп, извращённые пучки), так и алгебраические теоремы и конструкции (структура неприводимых представлений, формулы для характеров, конструкции мономиальных базисов). Классическим примером описанной выше взаимосвязи являются обобщённые многообразия флагов, а также многообразия Шуберта. Обобщённые многообразия флагов являются гладкими однородными пространствами относительно действия группы Ли, а многообразия Шуберта, вложенные в многообразия флагов, вообще говоря, могут иметь особенности. Важным обстоятельством является возможность реализовать многообразия флагов внутри проективизации пространств неприводимых представлений соответствующей алгебры Ли в качестве орбиты прямой старшего веса. Это позволяет связать алгебраические свойства неприводимых представлений алгебр Ли с алгебро-геометрическими свойствами многообразий флагов. Для многообразий Шуберта аналогичную роль играют модули Демазюра – конечномерные подпространства в представлениях алгебр Каца-Муди. Имеющиеся формулы для размерностей и характеров модулей Демазюра позволяют изучать геометрию многообразий Шуберта и расслоений на них. Отметим, что всё вышесказанное относится не только к простым алгебрам Ли, но и к их аффинным версиям. В аффинном случае необходимо рассматривать бесконечномерные инд-многообразия и интегрируемы – тоже бусконечномерные – представления для аффинных алгебр. Важно заметить, что многообразия Шуберта при этом остаются конечномерными и, таким образом, играют роль аппроксимации соответствующих инд-многообразий (флагов).

Как уже отмечалось выше, многообразия флагов для простых групп Ли являются однородными пространствами относительно действия соответствующей группы. В частности, всё многообразие реализуется в виде одной орбиты. Если рассматривать многообразия Шуберта, то они определяются как замыкания орбиты борелевской (или унипотентной) подгруппы в группе Ли. Таким образом, для построения многообразий Шуберта необходимо рассматривать замыкания открытой клетки – так называемой, клетки Шуберта. Если говорить о реализации в проективных пространствах неприводимых представлений, то конструкция сводится к замыканию орбиты унипотентной группы, проходящей через прямую старшего веса. На уровне алгебры Ли это сводится к действию нильпотентнйо алгебры на пространстве представлений; нильпотентная группа при этом реализуется экспонентами операторов, действующих на представлении. Отметим, что эта конструкция применима как к многообразиям Шуберта (здесь это единственно возможное определение), так и к многообразиям флагов (для которых можно рассматривать всю группу Каца-Муди целиком и реализовать всё многообразие флагов как одну орбиту).

В работах Е.Фейгина в 2015 году изучались циклические представления нильпотентных алгебр Ли и алгебраических многообразий, снабжённых действием унипотентных групп, действующих с открытой орбитой. В работе [40] был рассмотрен случай модулей Вейля для супералгебры Ли $osp(1,2)$. Эти представления важны в связи с гипотезой Чередника-Орра [25, 26, 39], выражающая специализации несимметрических полиномов Макдональда в $t = \infty$ через ПБВ характеры модулей Демазюра. Согласно классическому результату Б.Иона, характеры модулей Демазюра для двойственных нескрученных аффинных алгебр равен специализации в $t = 0$ несимметрических полиномов Макдональда. Пользуясь результатми Фурье-Литтелманна, эти характеры могут быть отождествлены с характерами модулей Вейля. В работе Фейгина и Македонского впервые рассмотрен случай супералгебры. Показано, что в этом случае гипотеза Чередника-Орра о структуре ПБВ градуированного характера модулей Вейля верна. Это позволяет связать полученные результаты с теорей несимметрических полиномов Макдональда для скрученных аффинных алгебр типа A_2. Отметим, что важную роль в работе играет техника альковных путей, разработанная Орром и Шимозоно [47].

В работе [31] изучены так называемые колчанные грассманианы шубертового типа. Колчанные грассманианы образуют широкий класс алгебраических проективных многообразий [27]. Они обобщают классические грассманианы и многообразия флагов и играют центральную роль в теории представлений алгебр путей колчанов. Известно, что теория колчанов тесно связана с теорией Ли. В недавних работах [28, 29, 30] было показано, что колчанные грассманианы тесно связаны с вырождениями многообразий флагов [33, 38, 37]. Эти вырождения снабжены действием унипотентной абелевой группы, действующей с открытой орбитой [19, 20, 44]. Основная конструкция со стороны теории представлений заключается в использовании фильтрации Пуанкаре-Биркгофа-Витта на пространствах неприводимых циклических представлений [34, 35, 22, 23]. Эта фильтрация индуцируется ПБВ фильтрацией на универсальной обёртывающей алгебре нильпотентной алгебры Ли. Так как присоединённая градуированная алгебра является коммутативной, то и унипотентная группа, действующая на многообразии флагов, вырождается в абелеву. В работе [32] было показано, что вырожденные многообразия флагов типов A и C изоморфны многообразиям Шуберта для алгебр Ли больших рангов (отметим, что в работах [21, 41] рассматривается аналогичное вырождение многообразий Шуберта). Таким образом, возникает естественный вопрос об описании колчанных грассманианов, изоморфных многообразиям Шуберта. В работе [31] определён класс колчанных грассманианов, обобщающих вырожденные многообразия флагов типа A. Показано, что каждая неприводимая компонента рассматриваемых колчанных грассманианов изоморфна некоторому многообразию Шуберта. При этом стоит отметить, что все получаемые таки образом многообразия Шуберта лежат в многообразиях флагов для групп SL_N, однако число N зависит от грассманиана и на обязано совпадать с количеством вершин изначального колчана. В работе также приведено полное описание всех неприводимых компонент и найдены элементы групп Вейля, соответствующие возникающим многообразиям Шуберта. Кроме того, явно вычислены числа Бетти и полиномы Пуанкаре рассматриваемых колчанных грассманианов.

В работе [24] изучена связь несимметрических полиномов Макдональда и представлений бесконечномерных алгебр токов. Рассмотрена специализация в точке $t = \infty$ несимметрических полиномов Макдональда. Эта специализация, согласно гипотезе Чередника-Орра, должна выражаться через подкрученные относительно фильтрации Пуанкаре-Биркгофа-Витта характеры модулей Демазюра уровня один для аффинных алгебр Каца-Муди. В работе доказана эта гипотеза для экстремальных весов. Подпространство в модуле Демазюра, соответствующее таким весам, линейно порождено экстремальными векторами в неприводимом представлении, лежащем на нулевом уровне соответствующего модуля Демазюра. При этом экстремальные вектора нумеруются элементами конечной группы Вейля. Таким образом, задача сводится к нахождению ПБВ степени экстремальных векторов в неприводимых представлениях простых алгебр Ли и вычислению экстремальной части специализированных в $t = \infty$ несимметрических полиномов Макдональда. Первая задача решается с помощью свойства аддитивности. Точнее, используя фильтрацию Винберга, доказывается, что ПБВ степень экстремального вектора линейно зависит от старшего веса соответствующего неприводимого представления. Таким образом, достаточно вычислить ПБВ степени экстремальных векторов для фундаментальных неприводимых представлений. Это можно проделать используя явную реализацию неприводимых фундаментальных модулей. С другой стороны, используя теори представлений двойных аффинных алгебр Гекке, можно показать, что для каждого экстремального веса коэффициентом при соответствующем мономе в специализированном полиноме Макдональда является чистая степень. Кроме того, можно также доказать свойство аддитивности и вычислить эти степени для фундаментальных весов. Таким образом, гипотеза Чередника-Орра доказана для экстремальных весов произвольных простых алгебр Ли.

Пусть $\mathfrak{g}$ – простая конечномерная алгебра Ли. Рассмотрим соответствующую нескрученную аффинную алгебру Каца-Муди. Пусть B – ее борелевская подалгебра. Она изоморфна алгебре полиномиальных токов $\mathfrak{g} \otimes \mathbb{K}[t]$. Пусть λ – некоторых доминантный вес алгебры $\mathfrak{g}$. Определим модуль Вейля $W(\lambda)$ как циклический модуль над алгеброй токов с образующим v и следующим набором соотношений.

$$e_\alpha \otimes t^i v = 0, i \geq 0;$$
$$h \otimes t^i = 0, i \geq 1;$$
$$(f_\alpha \otimes 1)^{\langle \alpha^\vee, \lambda \rangle + 1} = 0.$$

Этот модуль, с одной стороны, является градуированным по степени t. С другой стороны, этот модуль, как и любой конечномерный модуль над простой алгеброй Ли, градуирован корневой решеткой X. Относительно этих градуировок для модуля Вейля можно записать его характер как многочлен от элементов корневой решетки и элемента t. Обозначим этот характер как $chW(\lambda)$.

Изучается характер этого модуля.

Несимметрические многочлены Макдональда $E_\lambda(X, q, t)$ – это рациональные функции от элементов решетки и двух дополнительных параметров, которые являются ортогональными относительно некоторого скалярного произведения (скалярное произведение Чередника). Многие их сециализации совпадают с некоторыми классами симметрических функций, таких как многочлены Шура, Джека, Холла-Литлвуда. В работах Б. Иона и Сандерсон доказано, что характер модуля Вейля совпадает со специализацией несимметрического многочлена Макдональда, соответствующий антидоминантному весу, при $t = 0$, $chW(\lambda) = E_\lambda(X, q, 0)$ для алгебр Ли типов A, D, E. Гипотеза Чередника-Орра состоит в том, что специализация $E_\lambda(X, q^{-1}, \infty)$ для антидоминантного веса λ совпадает с характером модуля Вейля, подкрученным на фильтрацию Пуанкаре-Биркгоффа-Витта. В работе Е. Фейгина и Е. Македонского [39] эта гипотеза в случае алгебр Ли типа A доказана для весов, кратных некоторому фундаментальному, и для весов, равных линейной комбинации первого и последнего фундаментального. В частности это значит, что гипотеза доказана для алгебры Ли A_2.

Кроме того, в работе [40] исследуется связь многочленов Коорнвиндера (то есть несимметрических многочленов Макдональда, соответствующих неприведенным корневым системам) с представлениями супералгебры Ли $osp(1,2)$. В частности, доказано, что характеры модулей Вейля над такими супералгебрами совпадают со специализациями некоторых многочленов Коорнвиндера при $t = 0$, а специализации при $t = \infty$ совпадают с характерами многочленов Макдональда, подкрученными на некоторые фильтрации.

6.5. Аналоги многочленов Шуберта в кобордизмах

В [57] построены аналоги многочленов Шуберта для алгебраических кобордизмов и изучены их свойства. Напомним, что классические многочлены Шуберта и Гротендика были определены в [59] через операторы разделённых разностей и изобарные операторы разделённых разностей, соответственно. Эти многочлены лежат в $\mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_n]$ и имеют прозрачный геометрический смысл, а именно, задают классы многообразий Шуберта в представлении Бореля для кольца когомологий (или кольца Чжоу) и K_0-теории, соответственно, полного многообразия флагов X для GL_n [49, 48]. В [50] обобщённые операторы разделённых разностей были определены в контексте алгебраической топологии. Они использовались для вычисления классов разрешений Ботта-Самельсона в кольце комплексных кобордизмов многообразия X. Заметим, что в отличие от случая когомологий и K-теории многообразия Шуберта сами по себе не задают классов кобордизмов, так как не всегда являются гладкими. Поэтому нет канонического способа сопоставить многообразию Шуберта класс кобордизмов, результат будет зависеть от выбора разрешения многообразия Шуберта. Попытки найти канонического представителя для некоторых теорий когомологий предпринимались в [54, 56]. Однако с геометрической точки зрения представляется более мотивированным изучать классы всех разрешений Ботта–Самельсона одновременно, хотя они не являются независимыми образующими в теориях, отличных от когомологий и K-теории.

В [51, 55] результаты [50] были перенесены в контекст алгебраической геометрии. В частности, *обобщённые операторы разделённых разностей* были определены алгебраически для любой алгебраической ориентированной теории когомологий $\mathtt{h}$ с кольцом коэффициентов $R := \mathtt{h}^*(pt)$ и формальным групповым законом $F(u, v) \in R[[u, v]]$. Для каждого

$i = 1,\ldots, (n-1)$ можно определить i-тый *обобщённый оператор разделённых разностей* $\partial^{\mathtt{h}}{}_i$, действующий на кольце формальных степенных рядов $R[[x_1,\ldots,x_n]]$ по формуле

$$\partial^{\mathtt{h}}{}_i = (1+\sigma_i)\frac{1}{F(x_{i+1},\chi(x_i))},$$

где σ_i — это автоморфизм кольца $R[[x_1,\ldots,x_n]]$, переставляющий x_i and x_{i+1}. Здесь $\chi(u) \in R[u]$ обозначает обратный элемент к u для формального группового закона F, то есть, χ однозначно определяется уравнением $F(u,\chi(u)) = 0$ (используются обозначения [60, 2.5]). Например, если $\mathtt{h} = CH$ кольцо Чжоу, то $R = \mathbb{Z}$ и F аддитивен, то есть, $F(u,v) = u+v$. В этом случае $\partial^{\mathtt{h}}{}_i$ совпадает с классическим оператором разделённых разностей

$$\partial_i^{CH}(f) = \frac{f-\sigma_i(f)}{x_i - x_{i+1}}.$$

В случае K-теории $\mathtt{h} = K_0$, имеем $R = \mathbb{Z}$ и $F(u,v) = u+v-uv$ (мульпликативный групповой закон). В этом случае $\partial^{\mathtt{h}}{}_i$ совпадает с изобарным оператором разделённых разностей после замены координат $(x_1,\ldots,x_n) \mapsto (1-x_1),\ldots,(1-x_n)$.

$$\partial_i^{K_0} = \frac{x_i f - \sigma_i(x_i f)}{x_i - x_{i+1}}.$$

Более общо, если F — любой мультипликативный групповой закон, то есть, $F(u,v) = u+v-\beta uv$, то $\partial^{\mathtt{h}}{}_i$ совпадает с *оператором β-разделённых разностей*, рассмотренным в [53]. В общем случае оператор $\partial_i^{\mathtt{h}}$ можно записать как

$$\partial_i^{CH} \circ f(x_i)$$

для формального степенного ряда $f(u) = (1 + a_1 u + a_2 u^2 + \ldots) \in R[u]$. Например, для аддитивного и мультипликативного групповых законов, имеем $f(u) = 1+\beta u$ (см. [52, Lemma 2.5]).

Если $\mathtt{h} = \Omega$ — теория алгебраических кобордизмов Левина–Мореля [60], то $R = \mathbb{L}$ кольцо Лазара, а F — универсальный формальный групповой закон. Для $\Omega^*(X)$ есть аналог представления Бореля [55, Theorem 3.2], а именно, $\Omega^*(X) \simeq \mathbb{L}[x_1,\ldots,x_n]/S$, где идеал S порождается однородными симметрическими многочленами строго положительной полиномиальной степени. С другой стороны, у кольца $\Omega^*(X)$

есть естественное порождащее множество, заданное классами кобордизмов $[R_I \to X]$ разрешений Ботта–Самельсона, занумерованных наборами $I = (\alpha_1, \ldots, \alpha_\ell)$ простых корней группы GL_n. Эти классы представляются многочленами в $\mathbb{L}[x_1, \ldots, x_n]$ по [55, Theorem 3.2] таким образом:

$$[R_I \to X] = \partial_l^\Omega \ldots \partial_1^\Omega (x_1^{n-1} x_2^{n-2} \ldots x_{n-1}) \pmod S.$$

Заметим, что $x_1^{n-1} x_2^{n-2} \ldots x_{n-1}$ представляет класс точки.

Аналогичная формула справедлива для любой ориентируемой алгебраической теории когомологий в силу универсальности Ω. В частности, для CH и K_0 левая часть сводится к циклу Шуберта и не зависит от выбора разрешения Ботта–Самельсона. Также для CH и K_0 многочлены в правой части не содержат переменную x_n, и более общо, содержат только мономы $x_1^{k_1} x^{k_2} \ldots x_n^{k_n}$ такие что $k_i \leq (n-i)$ для всех $i = 1, \ldots, n$. Это в точности многочлены Шуберта и Гротендика, соответственно.

Для алгебраических кобордизмов есть по крайней мере два разных способа определить *многочлен Ботта-Самельсона* $\mathcal{BS}_I$, то есть, многочлен в $\mathbb{L}[x_1, \ldots, x_n]$, класс которого в $\Omega^*(X)$ равен $[R_I \to X]$.

(A) Определим $\mathcal{BS}_I$ как $\partial_l^\Omega \ldots \partial_1^\Omega (x_1^{n-1} x_2^{n-2} \ldots x_{n-1})$.

(B) Через $H \subset \mathbb{L}[x_1, \ldots, x_n]$ обозначим $\mathbb{L}$-подмодуль, порождённый мономами $x_1^{k_1} x^{k_2} \ldots x_n^{k_n}$ такими что $k_i \leq (n-i)$ для всех $i = 1, \ldots, n$. Имеется изоморфизм $\mathbb{L}$-модулей $H \simeq \mathbb{L}[x_1, \ldots, x_n]/S$ (доказательство повторяет [61, Corollary 2.5.6]). Определим $\mathcal{BS}_I$ как единственного представителя $[R_I \to X]$ в H.

Для CH и K_0 оба определения дают один и тот же многочлен. Для кобордизмов мы пока работали с определением (A). В [57] получены частичные продвижения в следующих задачах, которые естественно возникают при обобщении многочленов Шуберта:

1) Соотношения между многочленами Ботта–Самельсона.

2) Аналог теоремы Кириллова–Фомина [61, Theorem 2.4.1] для многочленов Ботта–Самельсона.

3) Комбинаторное правило, свободное от сокращений, перечисляющее все мономы в многочлене Ботта–Самельсона, обобщающее митоз для многочленов Шуберта [58, 62] и недавно построенный митоз для многочленов Гротендика [63].

6.6. Двойные сферические многообразия флагов и орбитальные многообразия

Сферические многообразия представляют собой важный класс алгебраических многообразий с действием редуктивной алгебраической группы G. Многообразие X называется сферическим, если алгебра функций $\mathbb{C}[X]$ на нём разлагается в прямую сумму представлений группы G без кратностей. Это эквивалентно тому, что борелевская подгруппа $B \subset G$ имеет на X лишь конечное число орбит. Так, например, все многообразия флагов G/P, где P — параболическая подгруппа в G, являются сферическими. B-орбиты в них — это клетки Шуберта $BwP/P \subset G/P$. Замыкания этих орбит называются многообразиями Шуберта. Их комбинаторные и геометрические свойства хорошо изучены; так, например, известно, что эти многообразия нормальны, коэн-маколеевы и обладают рациональными особенностями.

В работе рассматривается обобщение этой ситуации: *двойные* сферические многообразия флагов, т.е. прямые произведения двух многообразий флагов $G/P_1 \times G/P_2$, для которых число орбит диагонального действия борелевской подгруппы конечно. В случае, когда группа G является классической (т.е. имеет тип A, B, C или D), а оба многообразия флагов являются комикровесовыми, имеется комбинаторная классификация B-орбит. (Для случая A, когда многообразие есть прямое произведение двух грассманианов $Gr(k, V) \times Gr(l, V)$, это было сделано в работе [64]). Геометрия замыканий B-орбит для двойных комикровесовых многообразий флагов изучалась в работе П. Ахингера и Н. Перрена [65]; было показано, что для группы G типа ADE эти замыкания также являются нормальными, коэн-маколеевыми, а их особенности рациональны.

Установлена связь между замыканиями B-орбит в двойных комикровесовых многообразиях флагов типа A (т.е. в прямых произведениях двух грассманианов), орбитальными многообразиями и матричными многообразиями Шуберта. Так, каждая B-орбита в прямом произведении двух грассманианов содержится в соответствующей $(B \times B)$-орбите, т.е. в прямом произведении двух клеток Шуберта. В каждой такой $(B \times B)$-орбите имеется наименьшая (замкнутая) B-орбита. К этой орбите можно построить трансверсальный срез S, который можно вложить в орбитальное многообразие в пространстве $N_2 = \mathfrak{n} \cap \{X \in \mathrm{Mat}(n), X^2 = 0\}$ строго верхнетреугольных матриц с нулевым квадратом. Структура B-орбит присоединённого действия группы $GL(n)$ на последнем многообразии изучалась в работах А. Мельниковой [66], [67]. Оказывается, что при этом вложении пересечения B-орбит со срезом S соответствуют присоединённым B-орбитам на N_2. Более того, замыкания этих пересечений являются матричными многообразиями Шуберта, отвечающими инволюциям в симметрической группе. Данные результаты, полученные совместно с А. Кнутсоном, готовятся к публикации.

6.7. Сизигии проективных вложений однородных пространств

Сотрудник лаборатории И. Нетай занимался вычислением резольвент некоторых модулей над алгебрами многочленов, имеющих геометрическое происхождение. Рассматриваемый класс многообразий имеет вид G/P, где G является редуктивной алгебраической группой, P является её параболической подгруппой. Хорошо известна классификация таких многообразий и их проективных вложений. Такие многообразия получаются как проективизации орбит вектора старшего веса в неприводимых представлениях группы G.

Обозначим через λ доминантный вес группы G, через V_λ — соответствующее весу λ неприводимое представление. Тогда $G/P \simeq X = G \cdot [v_{hw}] \subseteq \mathbb{P}(V_\lambda)$, где v_{nw} — вектор старшего веса. Пусть U — однородное векторное расслоение на G/P. Рассматривается класс модулей вида

$$M_U = \bigoplus_{n \geqslant 0} \Gamma(X, U(n)).$$

Построение резольвент таких модулей приводит к построению резольвент пучков с носителем на X в $\mathbb{P}(V_\lambda)$.

Главным используемым инструментом является теория представлений группы G. В частности, комплекс Кошуля $\Bbbk[V_\lambda]$-модуля M_U и все пространства сизигий как его когомологии оказываются предствлениями группы G. Здесь $\Bbbk$ обозначает основное поле, которое предполагается алгебраически замкнутым характеристики нуль.

Оказывается возможным развалить комплекс Кошуля в сумму изотипических компонент, для каждой из которых вычислять когомологии отдельно. Далее структура компонент изучается комбинаторными методами, используя методы теории представлений. При этом описание требует решения следующих задач:

- разложение представления $V \otimes W$ в сумму неприводимых, где V и W — неприводимые представления группы G,
- разложение представления $\Lambda^k V$ в сумму неприводимых, где W — неприводимое представление G, $k \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$,
- описание морфизмов, индуцированных дифференциалом в комплексе Кошуля, между компонентами, на которые распадается комплекс Кошуля.

Первые две задачи являются известными трудными задачами теории представлений, что ограничивает возможности вычислений даже в алгоритмическом смысле. Третья задача существенно упрощается, если в первых двух задачах наложить условие отсутствия кратных подпредставлений в некоторых тензорных произведениях и внешних степенях. Относительно этих условий произведена классификация, включающая полученные ранее результаты в случае вложения Сегре, а также результаты в случае квадратичного вложения Веронезе. Здесь рассматриваются случаи, когда U является обратимым пучков на образе вложения. Статья «Сизигии квадратичного вложения Веронезе» подготовлена к публикации и находится на рецензии.

Оказывается, что даже при наложенных условиях отсутствия кратных подпредставлений комбинаторное описание не для всех случаев влечёт описание когомологий комплекса Кошуля. В этих и прочих случаях исследуются такие идеи, как

- наличие естественной структуры алгебры на прямой сумме всех пространств сизигий,
- наличие естественной двойственности на сумме пространств сизигий.

Обе структуры уважают действие группы G и таким образом позволяют не только исследовать отдельно различные изотипические компоненты комплекса Кошуля, но также связывать их между собой. Ожидается, что наличие таких дополнительных структур приведёт к описанию резольвент более широкого класс проективных вложений однородных пространств и однородных расслоений на них.

6.8. Геометрия одномерных комплексных срезов пространства кубических многочленов

В совместной работе В.Тиморина с А.Блохом, Л.Оверстигеном и Р.Птачеком [68] изучается геометрия одномерных комплексных срезов пространства кубических многочленов. Как нетрудно видеть, любой кубический многочлен аффинно сопряжен многочлену вида

$$f_{\lambda,b}(z) = \lambda z + bz^2 + z^3, \quad \lambda \in \mathbb{C}, \quad b \in \mathbb{C}$$

для некоторых комплексных чисел λ, b. Множество всех многочленов такого вида мы обозначим через $\mathcal{F}$, а множество всех многочленов $f_{\lambda,b}$ с фиксированным λ — через $\mathcal{F}_\lambda$. Заметим, что λ — это мультипликатор неподвижной точки 0 многочлена $f_{\lambda,b}$. Таким образом, одномерные срезы $\mathcal{F}_\lambda$ двумерного пространства $\mathcal{F}$ имеют динамический смысл.

Главная кубиоида — это центральная часть пространства параметров кубических многочленов. Мы скажем, что класс $[f]$ аффинной сопряженности кубического многочлена f принадлежит главной кубиоиде CU, если выполнены следующие динамические условия: f имеет неотталкивающую неподвижную точку, у f нет отталкивающих периодических точек, разделяющих множество Жюлиа $J(f)$, и все неотталкивающие периодические точки отображения f, за исключением максимум одной неподвижной точки, имеют мультипликатор 1. Эти условия обобщают динамические условия, определяющие (заполненную) главную кардиоиду — центральную часть множества Мандельброта. Ниже перечислены результаты Тиморина, Блоха, Оверстигена и Птачека, полученные за счет финансирования лаборатории Алгебраической Геометрии и ее Приложений. Эти результаты дают описание параметрических срезов $\mathcal{F}_\lambda$, аналогичное представлению множества Мандельброта в виде объединения главной кардиоиды и кильватерных струй множества Мандельброта, допускающих явное динамическое описание.

Точки θ единичной окружности мы будем отождествлять с точками множества $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Обозначим через $L(\theta)$ дугу единичной окружности с концами $\theta \pm \frac{1}{3}$, содержащую точку θ. Определим подмножество $\mathfrak{Q}$ единичной окружности как замыкание множества точек θ со следующим свойством: все элементы $3^k\theta$ орбиты точки θ относительно отображения утроения угла принадлежат дуге $L(\theta)$. Под *дырками* множества $\mathfrak{Q}$ мы имеем в виду компоненты дополнения до этого множества в единичной окружности. Напомним, что *внешние лучи* компактного подмножества

K сферы Римана $\mathbb{C}P^1$, дополнение до которого односвязно, определяются как образы прямых радиальных интервалов при конформном изоморфизме между единичным диском и $\mathbb{C}P^1 \setminus K$. Внешние лучи параметризуются углами или, что эквивалентно, точками единичной окружности. Мы говорим, что внешний луч множества K *заканчивается* в точке z, если z — единственная точка множества K, лежащая в замыкании внешнего луча. *Параметрическими лучами* в $\mathcal{F}_\lambda$ мы будем называть внешние лучи множества $\mathcal{C}_\lambda$, состоящего из всех многочленов $f \in \mathcal{F}_\lambda$ со связным множеством Жюлиа.

Теорема. *Пусть λ — комплексное число, такое, что $|\lambda| \leqslant 1$. Для всякой дырки (θ_1, θ_2) множества $\mathfrak{Q}$, параметрические лучи $\mathcal{R}_\lambda(\theta_1)$ и $\mathcal{R}_\lambda(\theta_2)$ заканчиваются в одной и той же точке.*

Таким образом, пара параметрических лучей $\mathcal{R}_\lambda(\theta_1)$ и $\mathcal{R}_\lambda(\theta_2)$, вместе с точкой, в которой они оба заканчиваются, делит плоскость на две открытые части. Пусть (θ_1, θ_2) — дырка множества $\mathfrak{Q}$, и пусть $\mathcal{W}_\lambda(\theta_1, \theta_2)$ — компонента множества $\mathbb{C} \setminus \overline{\mathcal{R}_\lambda(\theta_1) \cup \mathcal{R}_\lambda(\theta_2)}$, содержащая параметрические лучи с аргументами в (θ_1, θ_2). Множество $\mathcal{W}_\lambda(\theta_1, \theta_2)$ называется*(параметрической) кильватерной струей* (среза $\mathcal{F}_\lambda$). Точка, в которой заканчиваются оба луча $\mathcal{R}_\lambda(\theta_1)$ и $\mathcal{R}_\lambda(\theta_2)$, называется *корневой точкой* параметрической кильватерной струи $\mathcal{W}_\lambda(\theta_1, \theta_2)$. Определим *период* параметрической кильватерной струи$\mathcal{W}_\lambda(\theta_1, \theta_2)$ как период точки $\theta_1 + \frac{1}{3}$ относительно отображения утроения угла. Следующая теорема дает динамическое описание параметрических кильватерных струй. *Динамические лучи* многочлена f — это внешние лучи его заполненного множества Жюлиа (их можно определить динамическим способом в том числе и в случае, когда заполненное множество Жюлиа несвязно).

Теорема. *Зафиксируем дырку (θ_1, θ_2) множества $\mathfrak{Q}$ и параметрическую кильватерную струю $\mathcal{W}_\lambda(\theta_1, \theta_2)$ среза $\mathcal{F}_\lambda$. Тогда, для всякого $f \in \mathcal{W}_\lambda(\theta_1, \theta_2)$, динамические лучи $R_f(\theta_1 + \frac{1}{3})$, $R_f(\theta_2 + \frac{2}{3})$ заканчиваются в одной и той же точке, которая либо отталкивает для всех $f \in \mathcal{W}_\lambda(\theta_1, \theta_2)$, либо совпадает с точкой 0 для всех $f \in \mathcal{W}_\lambda(\theta_1, \theta_2)$. Если f_{root} — корневая точка параметрической кильватерной струи $\mathcal{W}_\lambda(\theta_1, \theta_2)$, то динамические лучи $R_{f_{root}}(\theta_1 + \frac{1}{3})$, $R_{f_{root}}(\theta_2 + \frac{2}{3})$ заканчиваются в одной и той же параболической периодической точке.*

Теорема. *Множество $\mathcal{C}_\lambda$ лежит в объединении среза CU_λ главной кубиоиды и параметрических кильватерных струй.*

Перечисленные результаты готовятся к публикации. В рамках международной конференции "Conference of Complex Analysis in China 2015", организованной Китайской академией наук в Пекине с 12.10.2015 по 16.10.2015, В.А. Тиморин выступил с приглашенным докладом “Slices of the parameter space of cubic polynomials", в котором были изложены, в частности, описанные выше результаты.

Литература

[1] A. Braverman, M. Finkelberg, *Semi-infinite Schubert varieties and quantum K-theory of flag manifolds*, J. Amer. Math. Soc. **27** (2014), 1147–1168.

[2] B. Feigin, A. Odesskii, *Vector bundles on Elliptic Curves and Sklyanin Algebras*, Topics in quantum groups and finite-type invariants, Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2, **185**, Amer. Math. Soc., Providence, RI (1998), 65–84.

[3] M. Finkelberg, V. Ginzburg, A. Ionov, A. Kuznetsov, *Intersection cohomology of the Uhlenbeck compactification of the Calogero-Moser space*, arXiv:1506.05205.

[4] M. Finkelberg, A. Kuznetsov, L. Rybnikov, *Towards a cluster structure on trigonometric zastava*, arXiv:1504.05605.

[5] M. Finkelberg, A. Kuznetsov, N. Markarian, I. Mirković, *A note on a symplectic structure on the space of G-monopoles*, Commun. Math. Phys. **201** (1999), 411–421. *Erratum*, Commun. Math. Phys. **334** (2015), 1153–1155; arXiv:math/9803124, v6.

[6] M. Gekhtman, M. Shapiro, A. Vainshtein, *Generalized Bäcklund-Darboux transformations for Coxeter-Toda flows from a cluster algebra perspective*, Acta Math. **206** (2011), no. 2, 245–310.

[7] S. Jarvis, *Euclidean monopoles and rational maps*, Proc. Lond. Math. Soc. (3) **77** (1998), no.1, 170–192.

[8] J. Kamnitzer, B. Webster, A. Weekes, O. Yakobi, *Yangians and quantizations of slices in the affine Grassmannian*, Algebra Number Theory **8** (2014), no. 4, 857–893.

[9] B. Leclerc, *Cluster structures on strata of flag varieties*, arXiv:1402.4435.

[10] T. A. Nevins, J. T. Stafford, *Sklyanin algebras and Hilbert schemes of points*, Adv. Math. **210** (2007), 405–478.

[11] R. Bezrukavnikov, D. Kaledin, *Fedosov quantization in positive characteristic*, arXiv:0501247

[12] R. Bezrukavnikov, D. Kaledin, *McKay equivalence for symplectic resolutions of singularities*, arXiv:0401002

[13] R. Bezrukavnikov, I. Losev, *Etingof conjecture for quantized quiver varieties*, arXiv:1309.1716v2

[14] R. Bezrukavnikov, I. Mirković, D. Rumynin, *Localization of modules for a semi-simple Lie algebra in prime characteristic*, Ann. of Math. (2) **167** (2008), no. 3, pp. 945–991; arXiv:math.RT/0205144

[15] T. Braden, N. Proudfoot, B. Webster, *Quantizations of conical symplectic resolutions I: local and global structure*, arXiv:1208.3863

[16] T. Braden, A. Licata, N. Proudfoot, B. Webster, *Quantizations of conical symplectic resolutions II: category $\mathcal{O}$ and symplectic duality*, arXiv:1407.0964

[17] D. Kubrak, R. Travkin. *On some p-torsion elements in Brauer group of symplectic resolution in characteristic p*, in preparation

[18] K. McGerty, T. Nevins, *Derived equivalence for quantum symplectic resolutions*, arXiv:1108.6267

[19] I. Arzhantsev, *Flag varieties as equivariant compactifications of $\mathbb{G}_a^n$*, Proceedings of the American Mathematical Society, vol. 139 (2011), no. 3, pp. 783–786.

[20] I.Arzhantsev, E.Sharoyko, *Hassett-Tschinkel correspondence: Modality and projective hypersurfaces*, Journal of Algebra, vol. 348 (2011), no. 1, pp. 217–232, arXiv:1003.2358.

[21] R.Biswal, G.Fourier, *Minuscule Schubert varieties: Poset polytopes, PBW-degenerated Demazure modules, and Kogan faces*, arXiv:1410.1126

[22] T. Backhaus, C. Desczyk, *PBW filtration: Feigin-Fourier-Littelmann modules via Hasse diagrams*. arXiv:1407.7366.

[23] T.Backhaus, L.Bossinger, C.Desczyk, G.Fourier, *The degree of the Hilbert-Poincare polynomial of PBW-graded modules*, arXiv:1408.0901.

[24] I. Cherednik, E.Feigin, *Extremal part of the PBW-filtration and E-polynomials*, Advances in Mathematics (2015) vol. 282, pp. 220-264.

[25] I. Cherednik, D. Orr, *Nonsymmetric difference Whittaker functions*, arXiv:1302.4094 (2013).

[26] I. Cherednik, D. Orr, *One-dimensional nil-DAHA and Whittaker functions*, Transformation Groups 18:1 (2013), 23–59.

[27] G. Cerulli Irelli, E. Feigin, M. Reineke, *Quiver Grassmannians and degenerate flag varieties*, Algebra & Number Theory, 6-1 (2012), 165–194.

[28] G. Cerulli Irelli, E. Feigin, M. Reineke, *Homological approach to the Hernandez-Leclerc construction and quiver varieties*, Representation Theory 2014, no. 18, pp.1–14..

[29] G. Cerulli Irelli, E. Feigin, M. Reineke, *Desingularization of quiver Grassmannians for Dynkin quivers*, Advances in Mathematics (2013), no. 245, pp. 182–207.

[30] G. Cerulli Irelli, E. Feigin, M. Reineke, *Degenerate flag varieties: moment graphs and Schröder numbers*, Journal of Algebraic Combinatorics, Volume 38, Issue 1 (2013), pp. 159–189.

[31] G. Cerulli Irelli, E. Feigin, M. Reineke, *Schubert Quiver Grassmannians*, arxiv:1508.00264.

[32] G. Cerulli Irelli, M. Lanini, *Degenerate flag varieties of type A and C are Schubert varieties*, arXiv:1403.2889.

[33] E. Feigin, $\mathbb{G}_a^M$ *degeneration of flag varieties*, Selecta Mathematica: Volume 18, Issue 3 (2012), pp. 513–537.

[34] E. Feigin, G. Fourier, P. Littelmann, *PBW–filtration over $\mathbb{Z}$ and compatible bases for $V_{\mathbb{Z}}(\lambda)$ in type $\mathtt{A}_n$ and $\mathtt{C}_n$*, Symmetries, Integrable Systems and Representations, vol. 40, Springer, 2013, pp. 35–63.

[35] E. Feigin, G. Fourier, P. Littelmann, *Favourable modules: Filtrations, polytopes, Newton-Okounkov bodies and flat degenerations*, arXiv:1306.1292.

[36] E.Feigin and M.Finkelberg, *Degenerate flag varieties of type A: Frobenius splitting and BW theorem*, Mathematische Zeitschrift (2013), vol. 275, no. 1-2, pp. 55–77.

[37] E.Feigin, M.Finkelberg, P.Littelmann, *Symplectic degenerate flag varieties*, Canadian Journal of Mathematics, vol.66 (2014), no. 6, pp. 1250–1286

[38] E.Feigin, M. Finkelberg and M. Reineke, *Degenerate affine Grassmannians and loop quivers*, arXiv:1410.0777.

[39] E.Feigin, I.Makedonskyi, *Nonsymmetric Macdonald polynomials, Demazure modules and PBW filtration*, arXiv:1407.6316.

[40] Feigin E., Makedonskyi I. *Weyl modules for $osp(1,2)$ and nonsymmetric Macdonald polynomials*, arxiv:1507.01362.

[41] G.Fourier, *PBW-degenerated Demazure modules and Schubert varieties for triangular elements*, arXiv:1408.6939.

[42] G.Fourier, P.Littelmann, *Tensor product structure of affine Demazure modules and limit constructions*, Nagoya Math. Journal 182 (2006), 171–198.

[43] G.Fourier, P.Littelmann, *Weyl modules, Demazure modules, KR-modules, crystals, fusion products and limit constructions*, Advances in Mathematics 211 (2007), no. 2, 566–593.

[44] B. Hassett, Yu. Tschinkel, *Geometry of equivariant compactifications of $\mathbb{G}_a^n$*, Int. Math. Res. Notices **20** (1999), 1211–1230.

[45] M. Haiman, and J. Haglund, and N. Loehr, *A combinatorial formula for non-symmetric Macdonald polynomials*, Amer. J. Math. 130:2 (2008), 359–383.

[46] B. Ion, *Nonsymmetric Macdonald polynomials and Demazure characters*, Duke Mathematical Journal 116:2 (2003), 299–318.

[47] D.Orr, M.Shimozono, *Specializations of nonsymmetric Macdonald-Koornwinder polynomials*, arXiv:1310.0279.

[48] I. N. Bernstein, I. M. Gelfand, S. I. Gelfand, *Schubert cells, and the cohomology of the spaces G/P*, Russian Math. Surveys **28** (1973), no. 3, 1–26.

[49] M. Demazure, *Désingularisation des variétés de Schubert généralisées*, Collection of articles dedicated to Henri Cartan on the occasion of his 70th birthday, I. Ann. Sci. École Norm. Sup. 4 **7** (1974), 53–88.

[50] P. Bressler, S. Evens, *Schubert calculus in complex cobordism*, Trans. Amer. Math. Soc., **331** (1992), no. 2, 799–813

[51] B. Calmès, V. Petrov, K. Zainoulline, *Invariants, torsion indices and oriented cohomology of complete flags*, Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. (4) **46** (2013), no.3, 405–448

[52] S.Fomin, A.N.Kirillov, *The Yang-Baxter equation, symmetric functions, and Schubert polynomials*, Discrete Mathematics **153** (1996), no. 1-3, 123–143

[53] S.Fomin, A.N.Kirillov, *Grothendieck polynomials and the Yang-Baxter equation*, Proc. 6th Intern. Conf. on Formal Power Series and Algebraic Combinatorics, DIMACS, 1994, 183–190.

[54] N. Ganter, A. Ram, *Generalized Schubert calculus*, J. of Ramanujan Mathematical Society 28A (Special Issue-2013), 1–42

[55] J. Hornbostel, V. Kiritchenko, *Schubert calculus for algebraic cobordism*, J. Reine Angew. Math., **656** (2011), 59–85

[56] C. Lenart, K. Zainoulline, *A Schubert basis in equivariant elliptic cohomology*, arXiv:1508.03134 [math.AG]

[57] V. Kiritchenko, *Bott–Samelson polynomials in algebraic cobordism*, in preparation

[58] A. Knutson and E. Miller, *Gröbner geometry of Schubert polynomials*, Ann. of Math. (2), **161** (2005), 1245–1318

[59] A. Lascoux, M.-P. Schützenberger, *Polynômes de Schubert,* C.R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math., **294** (1982), no. 13, 447–450

[60] M. Levine, F. Morel, *Algebraic cobordism*, Springer Monographs in Mathematics. Springer, Berlin, 2007.

[61] L. Manivel, *Fonctions symétriques, polynômes de Schubert et lieux de dégénérescence,* Société Mathématique de France, Paris, 1998.

[62] Ezra Miller, *Mitosis recursion for coefficients of Schubert polynomials*, J. Comb. Theory A, **103** (2003), no. 2, 223–235

[63] Dimitry Tyurin, *Mitosis algorithm for Grothendieck polynomials*, arXiv:1508.01472 [math.CO]

[64] Е. Ю. Смирнов, *Разрешения особенностей для многообразий Шуберта в двойных грассманианах*, Функц. анализ и его прил., 42:2, 56–67 (2008).

[65] Piotr Achinger, Nicolas Perrin, *Spherical multiple flags*, `arXiv:1307.7236` (2013).

[66] Anna Melnikov, B-orbits in solutions to the equation $X^2 = 0$ in triangular matrices, Journal of Algebra 223:1, pp 101–108 (2000).

[67] Anna Melnikov, Description of B-orbit closures of order 2 in upper-triangular matrices, Transformation Groups 11:2, pp 217–247 (2006).

[68] A. Blokh, L. Oversteegen, R. Ptacek, V. Timorin,“Slices of the Parameter Space of Cubic Polynomials”, in preparation.

7. Арифметическая геометрия

7.1. Модули поляризованных поверхностей Энриквеса

На основании теории автоморфных произведений В. А. Гриценко с соавторами (см. [GHS1]–[GHS3]) был разработан мощный метод, позволяющий доказывать общий тип пространств модулей поляризованных $K3$ поверхностей и других поляризованных неприводимых голоморфных симплектических (гиперкэлеровых) многообразий.

В 2014 году В. Гриценко и К. Хулек предложили совершенно новый трансцендентный метод, который позволяет находить модулярные многообразия со специальной геометрией (см. [GH2]). Первый метод ([GHS1]–[GHS3]) использует параболические модулярные формы малого веса (меньшего, чем размерность многообразия) с большим дивизором, содержащим дивизор ветвления соответсвующего пространства модулей. Второй метод использует совершенно противоложные объекты, а именно, модулярные формы большого веса (строго большего размерности многообразия) с маленьким дивизором, содержащимся в дивизоре ветвления, т.е. рефлективные модулярные формы, использующиеся в теории Лоренцевых алгебр Каца-Муди.

В 2015 году оба этих метода были успешно применены для исследования 10-мерных модулярных многообразий, а именно, пространств модулей поляризованных поверхностей Энриквеса. Такие классические многообразия изучались многими авторами (И. Долгачев, С. Кондо, А. Верра и другими), однако стройной теории до настоящего времени не существовало. Общепринятая рабочая гипотеза (ҷтеорема«), формулировшаяся разными авторами, состояла в том, что все пространства модулей поляризованных поверхностей Энриквеса унирациональны. Основной итог работы Гриценко, выполненной в 2015 г., состоит в том, что это не так.

Первая половина полученных результатов изложена в его совместной работе [GH1] с К. Хулеком, принятой к публикации в Birkhauser Progress in Mathematics. Во-первых, в [GH1] доказано, что существует только конечное число различных типов пространств модулей поляризованных поверхностей Энриквеса. Во-вторых, устновлено, что для поляризаций небольших степеней размерность Кодаиры таких пространств модулей равна минус бесконечности. Доказательство теоремы использует метод Гриценко–Хулека из [GH2] и приемы работы с рефлективными формами, предложенными Гриценко в статье [GC]. В-третьих, доказано, что при росте степени поляризации почти все пространства модулей совпадают с пространством модулей $\mathcal{M}_{Enr}^{(2)}$ поверхностей Энриквеса со структурой уровня 2. Последнее пространство является накрытием рационального пространства модулей всех поверхностей Энриквеса с группой накрытия $O^{+}(\mathbb{F}_2^{10})$. Определение его геометрического типа является известной проблемой Кондо. В 2015 году, Гриценко доказал, что $\mathcal{M}_{Enr}^{(2)}$ имеет общий тип. Доказательство опирается на 23 новых представления знаменитой формы Борчердса Φ_{12} от 26 переменных, предложенные Гриценко в 2012 г. Это дает не только решение проблемы Кондо, но и совершенно неожиданную теорему о том, почти все пространства модулей поляризованных поверхностей Энриквеса имеют общий тип.

7.2. Новые конструкции модулярных форм Зигеля и гипотеза Брюмера

Модулярные формы Зигеля рода 2 и парамодулярного уровня N, соответствующие модулям $(1, N)$-поляризованных абелевых поверхностей, появляются в гипетезе Брюмера–Крамера ([BK]), которая обобщает гипотезу Таниямы–Вейля на случай абелевых поверхностей и предсказывает явное соответствие Ленглендса между L-функциями зигелевых модулярных форм веса 2 для парамодулярных групп уровня N и L-функциями Хассе–Вейля классов изогений абелевых поверхностей кондуктора N. Первый такой класс, с тривиальным кручением, существует для простого уровня $N = 587$.

Основной вопрос, поставленный Гриценко совместно с американскими математиками Кр. Поор и Д. Юэн, состоит в нахождении эффективного метода построения параболических форм Зигеля наименьшего возможного веса 2 при помощи тета-блоков, произведений Борчердса и парамодулярного подъема Гриценко. В [GPY] ими доказана теорема о том, что по любому естественному произведению тета-функций Якоби можно построить голоморфное автоморфное произведение. Этот результат, доказательство которого использует методы выпуклого анализа в гиперболическом пространстве, позволяет установить новые типы формул между бесконечными автоморфными произведениями и подъемами Гриценко. Более того, эта теорема позволила найти наилучшие на сегодняшний день примеры голоморфных тета-блоков типа $\frac{n-theta}{k-eta}$. Первые такие тета-блоки, тета-кварки

$$\frac{3-theta}{1-eta}=\frac{\vartheta(\tau,az)\vartheta(\tau,bz)\vartheta(\tau,(a+b)z)}{\eta(\tau)},$$

были открыты Гриценко в 2003 г. В частности, новые тета-блоки типа $\frac{22-theta}{18-eta}$ дают возможность построить первую антисимметричную зигелеву модулярную форму веса 2 для поляризации 587, что дает автоморфное подтверждение гипотезы Брюмера.

7.3. Границы на число классов функциональных полей

Из работ Вейля известно, что для числа классов h (т.е. для количества $\mathbb{F}_q$-точек якобиана) гладкой проективной абсолютно неприводимой кривой X рода g, определенной над $\mathbb{F}_q$, имеются следующие границы:

$$(\sqrt{q}-1)^{2g}\leq h\leq(\sqrt{q}+1)^{2g}\,.$$

Значительные усилия были направлены различными авторами на уточнение этих границ. Лашо и Мартин-Дешан [18] получили одно из первых уточнений нижней границы:

$$h\geq h_{LMD}=q^{g-1}\frac{(q-1)^2}{(q+1)(g+1)},$$

используя комбинаторную формулу, следующую из функционального уравнения для дзета-функции X.

В серии работ [3], [4] Балле, Роллан и Тюдер использовали подобный подход для получения весьма замысловатых границ на h. Некоторые из них оказываются асимптотически оптимальными, в том смысле, что при $g\to\infty$, они сходятся к нижней границе из обобщенной теоремы Брауэра–Зигеля для функциональных полей [21], утверждающей, что для асимптотически точного семейства с инвариантами Цфасмана–Влэдуца ϕ_{q^r} имеет место:

$$\lim_{i\to\infty}\frac{\log h(X_i)}{g_i}=\log q+\sum_{r=1}^{\infty}\phi_{q^r}\log\left(\frac{q^r}{q^r-1}\right).$$

Лучшая из полученных ими границ описывается следующей теоремой:

Теорема 7.1. *Пусть* Φ_{q^r} *— число точек степени* r *на* X. *Пусть* D_1, D_2 *— конечные множества целых чисел,* $(\ell_r)_{r\in D_1}$, $(m_r)_{r\in D_2}$ *такие семейства целых чисел, что*

1) $D_1 \subseteq \{1,\ldots,g-1\}$;

2) $D_2 \subseteq \{1,\ldots,g-2\}$;

3) *для любого* $r \in D_1$, $\Phi_{q^r} \geq 1$;

4) *для любого* $r \in D_2$, $\Phi_{q^r} \geq 1$;

5) $l_r \geq 0$ *и* $\sum_{r\in D_1} r\ell_r \leq g-1$;

6) $m_r \geq 0$ *и* $\sum_{r\in D_2} rm_r \leq g-2$.

Тогда $h \geq h_{BRT}$, *где*

$$h_{BRT} = \frac{(q-1)^2}{(g+1)(q+1)-\Phi_q}\left(\prod_{r\in D_1}\binom{\Phi_{q^r}+\ell_r}{\ell_r}+\right.$$
$$\left.+\,q^g\prod_{r\in D_2}\left[\left(\frac{q^r}{q^r-1}\right)^{\phi_{q^r}}-\Phi_{q^r}\binom{\Phi_{q^r}+m_r}{m_r}\int_0^{q^{-r}}\frac{(q^{-r}-t)^{m_r}}{(1-t)^{\Phi_{q^r}+m_r+1}}\,dt\right]\right).$$

Другие нижние границы были получены в недавней статье Обри, Алуи и Лашо [2]. Они оказываются особенно хорошими, если кривая имеет много точек по сравнению с родом, но плохими с асимптотической точки зрения, когда $g \to \infty$:

Теорема 7.2. *1)* $h \geq M(q)^g\left(q+1+\dfrac{\Phi_q-(q+1)}{g}\right)^g$, *где* $M(q) = \dfrac{e\log x^{\frac{1}{x}-1}}{x^{\frac{1}{x}}-1}$ *и*
$x = \left(\dfrac{\sqrt{q}+1}{\sqrt{q}-1}\right)^2$.

2) $h \geq \dfrac{q-1}{q^g-1}\left[\dbinom{\Phi_q+2g-2}{2g-1}+\displaystyle\sum_{r=2}^{2g-1}\Phi_{q^r}\dbinom{\Phi_q+2g-2-r}{2g-1-i}\right]$.

3) Если $\Phi_q \geq g(\sqrt{q}-1)+1$, то

$$h \geq \binom{\Phi_q + g - 1}{g} - q\binom{\Phi_q + g - 3}{g-2}.$$

4) $$h \geq \frac{(q-1)^2}{(g+1)(q+1)-\Phi_q}\left[\binom{\Phi_q + g - 2}{g-2} + \sum_{r=0}^{g-1} q^{g-1-1}\binom{\Phi_q + r - 1}{r}\right].$$

А. Зыкин в совместной работе с Ф. Лебаком показал, как теорема Мертенса и явная теорема Брауэра–Зигеля [19] приводят во многих случаях к улучшением вышеупомянутых границ, особенно в случае, когда род g велик. А именно, мы получаем следующие результаты:

Теорема 7.3. *Для любого натурального N число классов h удовлетворяет неравенствам $h_{min}(N) \leq h \leq h_{max}(N)$, где*

$$h_{min}(N) = q^g \exp\left(\sum_{f=1}^{N} \frac{1}{fq^f}|X(\mathbb{F}_{q^f})| - \sum_{n=1}^{N}\frac{1+q^{-n}}{n} - \frac{2g}{(\sqrt{q}-1)(N+1)q^{\frac{N}{2}}}\right),$$

$$h_{max}(N) = q^g \exp\left(\sum_{f=1}^{N} \frac{1}{fq^f}|X(\mathbb{F}_{q^f})| - \sum_{n=1}^{N}\frac{1+q^{-n}}{n} + \frac{2g}{(\sqrt{q}-1)(N+1)q^{\frac{N}{2}}}\right).$$

Заметим, что мы получаем не только нижнюю, но и дополнительную к ней верхнюю границу на h. Знание заданного (небольшого) количества $X(\mathbb{F}_{q^f})$, тем не менее позволяет применить эту теорему для любого N, ограничивая Φ_{q^f} выражениями, происходящими из границ Вейля. Полученные границы оказываются весьма точными и, в примерах рекурсивных асимптотически хороших башен Гарсии–Штихтенота, Ван дер Геера–Ван дер Влюгта и других, улучшают ранее известные границы.

Доказательство использует асимптотическую теорию глобальных полей и, более точно, технику явных формул.

7.4. Геометрические свойства алгебраических многообразий

Пусть X — неприводимое аффинное многообразие. Пусть $SAut(X)$ — подгруппа его автоморфизмов, порожденная действиями унипотентных групп, $MAut(X)$ — подгруппа автоморфизмов, порожденная торическими действиями. В статье [1] доказано, что из транзитивности действия группы $SAut(X)$ на регулярных точках многообразия X следует бесконечная транзитивность данного действия. Последнее условие означает, что любой набор различных регулярных точек на X можно перевести в любой другой набор различных регулярных точек той же мощности подходящим автоморфизмом из $SAut(X)$. В случае, если для многообразия выполнено свойство $SAut(X)$-транзитивности на регулярных точках, оно называется гибким.

Р. Будылин в совместной работе с С. Гайфуллиным исследовал вопрос о том в какой степени аналогичная теорема справедлива для действия группы $MAut(X)$, т.е. в каком случае можно утверждать, что из транзитивности действия $MAut(X)$ вытекает бесконечная транзитивность.

Одномерный тор является примером многообразия X, для которого есть $MAut(X)$-транзитивность, но нет бесконечной $MAut(X)$-транзитивности. Обобщая, можно заметить, что очевидным препятствием к эквивалентности $MAut(X)$-транзитивности и бесконечной $MAut(X)$-транзитивности является наличие обратимых функций на X. Любой тор действует на обратимые функции характером, поэтому при наличии тора нет даже 2-транзитивности для действия группы $MAut(X)$.

Р. Будылин и С. Гайфуллин доказали теорему о том, что 2-транзитивность действия группы $MAut(X)$ равносильна бесконечной $Maut(X)$-транзитивности, и при этом многообразие является еще и гибким.

Ф. Богомолов совместно с Е. Пирюткой и А. Силберштейном [6] доказали, что если число непересекающихся дивизоров Вейля на нормальном проективном многообразии на двойку превышает ранг соответствующей подгруппы в группе когомологий, то они лежат в пучке слоев морфизма на некоторую кривую. С другой стороны была дана конструкция семейств непересекающихся дивизоров Вейля на аффинном многообрзии над счетным полем которые покрывают все точки многобразия, но не лежат ни в каком пучке дивизоров. Мы также показали, что таких семейств не существует над несчетным полем.

Ф. Богомолов совместно с В. Куликовым [5] получил асимптотическое число связных компонент многообразий Гурвица для проекций на кривую с различным группами Галуа.

7.5. Неприводимые представление конечно порожденных нильпотентных групп

Хорошо известно, что все комплексные неприводимые представления нильпотентных конечных групп мономиальны, т.е. индуцированы с характеров подгрупп. А. А. Кириллов [24] и Ж. Диксмье [9, теорема 2] независимо доказали аналогичное утверждение для унитарных неприводимых представлений связных нильпотентных групп Ли.

Позже в статье [7] Я. Браун привел утверждение о том, что унитарные неприводимые представления нильпотентых (дискретных) конечно порожденных групп мономиальны тогда и только тогда, когда они являются представлениями с конечным весом. Напомним, что представление π группы G называется представлением с конечным весом, если существуют подгруппа $H \subset G$ и характер χ группы H, для которых векторное пространство $\mathrm{Hom}_H(\chi, \pi|_H)$ ненулевое и конечномерное. К сожалению, в доказательстве Брауна содержался существенный пробел.

На пленарном докладе на Международном конгрессе математиков в 2010 году А. Н. Паршин [20, § 5.4(i)] (см. также [22, стр. 296]) сформулировал в качестве гипотезы следующее утверждение: критерий Брауна верен для всех комплексных неприводимых представлений нильпотентных конечно порожденных групп, без какой-либо топологической структуры на представлениях. В данном контексте под мономиальным представлением подразумевается представление, конечно индуцированное с характера некоторой подгруппы.

С. Горчинский совместно с И. Белошапкой [23] доказал гипотезу Паршина, а также исправили ошибку в доказательстве Брауна. Кроме того, ими получен следующий новый критерий неприводимости для индуцированных представлений, использованный при доказательстве данной гипотезы. Пусть H — нормальная подгруппа произвольной не более чем счетной группы G, а ρ — комплексное неприводимое представление группы H. Тогда конечно индуцированное представление $\mathrm{ind}_H^G(\rho)$ неприводимо тогда и только тогда, когда $\mathrm{End}_G\Big(\mathrm{ind}_H^G(\rho)\Big) = \mathbb{C}$.

7.6. Категорные меры для действий конечных групп

Бондал, Ларсен и Лунц построили категорную меру для многообразий над полем характеристики нуль, т.е. гомоморфизм колец $\mu\colon K_0(Var) \to \Delta$, где $K_0(Var)$ является стандартно определенной группой Гротендика алгебраических многообразий, а Δ обозначает группу Гротендика насыщенных dg-категорий. При этом классу гладкого проективного многообразия X сопоставляется класс производной категории когерентных пучков на нем $D^b(\operatorname{coh} X)$. Аналогично можно определить эквивариантный категорный класс $\mu_G(X) \in \Delta$ для многообразия X с действием конечной группы G.

Хорошо известные результаты Атьи и Сегала об орбифолдных когомологиях мотивируют следующий вопрос: имеется ли равенство между $\mu_G(X)$ и $\mu(X/^{ex}G)$ в кольце Δ? Здесь $X/^{ex}G$ обозначает расширенный фактор, т.е. фактор по группе G многообразия, состоящего из пар (x, g), где $x \in X$ и $g \in G$ такие, что $g(x) = x$.

С. Горчинский совместно с Д. Бергом, М. Ларсеном и В. Лунцем доказали, что имеется равенство $\mu_G(X) = \mu(X/^{ex}G)$ при выполнении ряда достаточно явно проверяемых условий на G и X. В частности, данные условия выполнены для действия симметрической группы Σ_n на $X^{\times n}$ для любого многообразия X. Как следствие получается доказательство гипотезы совместимости Галкина–Шиндера о сравнении дзета-функции Капранова с категорной дзета-функции.

Кроме того, Горчинским с соавторами был построен контрпример, утверждающий, что в общем случае равенство $\mu_G(X) = \mu(X/^{ex}G)$ не выполняется. Для этого была построена схема Севери–Брауэра $X \to B$, для которой геометрические слои изоморфны $\mathbb{P}^n$, но при этом кручение в топологической K-группе $K_1^{top}(X)$ отличается от кручения в группе $K_1^{top}(B)^{\oplus(n+1)}$. Более того, такая схема Севери–Брауэра получается при помощи естественного обобщения на случай многообразий известной конструкции циклических центральных простых алгебр и связанных с ними многообразий Севери–Брауэра.

Литература

[1] I. V. Arzhantsev, H. Flenner, S. Kaliman, F. Kutzschebauch, M. Zaidenberg, *Flexible varieties and automorphism groups*, Duke Math. J., **162**:4 (2013), 767–823.

[2] Y. Aubry, S. Haloui, G. Lachaud, *On the number of points on abelian and Jacobian varieties over finite fields*, Acta Arithmetica, **160**:3 (2013), pp. 201–241.

[3] S. Ballet, R. Rolland, *Lower bounds on the class number of algebraic function field defined over any finite field*, Journal de Théorie des Nombres de Bordeaux, **24**:3 (2012), 505–540.

[4] S. Ballet, R. Rolland, S. Tutdere, *Lower Bounds on the number of rational points of Jacobians over finite fields and application to algebraic function fields in towers*, arXiv:1303.5822.

[5] F. Bogomolov, V. Kulikov, *The ambiguity index of an equipped finite group*, Eur. J. Math., **1**:2 (2015), 260–278.

[6] F. Bogomolov, A. Silberstein, *The Disjoint Divisors Theorem for Complete Varieties*, preprint available at arXiv:1504.05534.

[7] I. D. Brown, *Representation of finitely generated nilpotent groups*, Pacific J. Math., **45**:1 (1973), 13–26.

[8] A. Brumer, K. Kramer, *Paramodular abelian varieties of odd conductor*, Trans. of AMS, **366** (2014), 2463–2516.

[9] J. Dixmier, *Sur les representations unitaires des groupes de Lie nilpotents. I*, Amer. J. Math., **81** (1959), 160–170.

[10] I. Dolgachev, *A brief introduction to Enriques surfaces*, preprint available at arXiv:1412.7744.

[11] V. Gritsenko, F. Cléry, *The Siegel modular forms of genus 2 with the simplest divisor*, Proc. of London Math. Society, **102** (2011), 1024–1052.

[12] V. Gritsenko, K. Hulek, *Uniruledness of orthogonal modular varieties*, J. Algebraic Geometry, **23** (2014), 711–725.

[13] V. Gritsenko, K. Hulek, *Moduli of polarized Enriques surfaces*, preprint available at arXiv:1502.02723.

[14] V. Gritsenko, K. Hulek, G.K. Sankaran, *The Kodaira dimension of the moduli of K3 surfaces*, Inventiones Mathematicae, **169** (2007), 519–567.

[15] V. Gritsenko, K. Hulek, G.K. Sankaran, *Moduli spaces of K3 surfaces and holomorphic symplectic varieties*, Handbook of Moduli(ed. G. Farkas and I. Morrison), vol. 1, 459–526; Adv. Lect. in Math, Intern. Press, MA (2012).

[16] V. Gritsenko, C. Poor, D. Yuen, *Borcherds Products Everywhere*, Journal of Number Theory, **148** (2015), 164–195.

[17] S. Kondo, *The moduli space of Enriques surfaces and Borcherds products*, J. Algebraic Geom, **11** (2002), 601–627.

[18] G. Lachaud, M. Martin-Deschamps, *Nombre de points des jacobiennes sur un corps fini*, Acta Arithmetica, **56**:4 (1990), 329–340.

[19] P. Lebacque, *Generalised Mertens and Brauer–Siegel theorems*, Acta Arithmetica, **130**:4 (2007), 333–350.

[20] A. N. Parshin, *Representations of higher adelic groups and arithmetic*, Proceedings of the International Congress of Mathematicians, **I** (2010), 362–392, Hindustan Book Agency, New Delhi.

[21] M. A. Tsfasman, S. G. Vladuts, D. Nogin, *Algebraic geometric codes: basic notions*, Mathematical Surveys and Monographs, **139**, American Mathematical Society, Providence, RI (2007).

[22] С. А. Арналь, А. Н. Паршин, *О неприводимых представлениях дискретных групп Гейзенберга*, Матем. заметки, **92**:3 (2012), 323–330.

[23] И. В. Белошапка, С. О. Горчинский, *Неприводимые представления нильпотентных конечно порожденных групп*, Матем. сб., **207**:1 (2016).

[24] А. А. Кириллов, *Индуцированные представления нильпотентных групп Ли*, ДАН СССР, **128** (1959), 886–889.

8. Модулярные формы в алгебраической геометрии и топологии и бесконечномерные алгебры Ли и автоморфные формы в зеркальной симметрии и в теории особенностей

В 2015 годы В. А. Гриценко сделал восемь докладов (**15 часов**) на научных семинарах лаборатории, прочитал два спецкурса "*Модулярные формы Якоби: 30 лет спустя*" (**16 часов**, апрель-май 2015) и "*Модулярные формы Якоби от многих переменных*" (**18 часов**) (сентябрь- декабрь 2015) и один мини-курс "*Арифметика квадратичных форм*" (**8 часов**) в рамках традиционной летней математической школы Лаборатории алгебраической геометрии в Ярославле в августе 2015 года.

8.1. Модулярные формы в алгебраической геометрии и топологии.

Модулярные формы имеют многочисленные приложения в алгебраической и дифференциальной геометрии, в топологии, в математической и теоретической физике. Работы, выполненные В. Гриценко в последние годы в соавторстве с Klaus Hulek (Hannover) и Gregory Sankaran (Bath) (см. [GHS1]–[GHS4]), показали, что теория автоморфных форм является очень сильным трансцендентным методом в теории пространств модулей $K3$ поверхностей и неприводимых голоморфных симплектических многообразий, который позволяет находить решения очень трудных проблем в алгебраической геометрии. В частности ими был решен последний открытый вопрос программы А. Вейля (1959) о $K3$ поверхностях. Основными используемыми методами теории модулярных форм, являлись подъемы модулярных форм (в частности, так называемый "*подъем Гриценко*") и автоморфные произведения Борчердса.

Краткое описание результатов, полученных В. А. Гриценко в 2015 году по указанной теме:

1. Используя свои новые результаты про квазиограничения функции Борчердса Φ_{12} от 26 переменных и идеи теории форм Якоби от многих переменных, Гриценко **получил решение проблемы Кондо** из теории пространств модулей поверхностей Энриквеса (см. **Теорема 7** сформулированную ниже).

2. В. Гриценко получил новые результаты в теории автоморфных форм и автоморфных произведений, в частности, доказал новые важные теоремы о квазиограничениях автоморфных форм на ортогональных группах сигнатуры $(2, n)$ (см. **Теоремы 1 и 2**).

3. Доказал, что очень широкий класс модулярных многообразий размерности 9 имеет общий тип, т.е., многообразия этого семейства имеют максимальную размерность Кодаиры (см. **Теорему 3**).

4. Предложил (совместно с K. Hulek) новую концепцию в теории поляризованных поверхностей Энриквеса (см. **Теоремы 4, 5 и 6**). Используя мультипликативную симметризацию рефлективных модулярных форм они получили наилучшие на сегодняшний день результаты о геометрическом типе таких модулей (см. краткий отчет работы В. А. Гриценко, выполненной по теме лаборатории).

5. В. Гриценко представил теорию модулярных форм Якоби от многих переменных, которая пока не изложена в литературе, в спецкурсе "*Модулярные формы Якоби от многих переменных*". Основной результат спецкурса – это описание *новых приложений теории модулярных форм Якоби в алгебраической геоеметрии и топологии* и привлечение к исследовательской работе по этой теме студентов ВШЭ. В частности, из качестве нового приложений модулярных форм Якоби в топологии В. Гриценко доказано в 2015 году, что производящая функция, связанная с полиномами Ходжа от (гладких) симметрических степеней 3 поверхностей, является формой Якоби от двух абелевых переменных (**Теорема 8**), которая определяет рефлективное произведение Борчердса, аналогично второму квантованию голоморфного эллиптического рода $K3$ поверхностей в теории струны (см. [CDHK], [HKK] и [G4]).

6. Для поддержки новых исследований по теории автоморфных форм Валерием Гриценко совместно с Сергеем Галкиным был организован новый еженедельный научный семинар **Автоморфные формы и их приложения** (см. http://ag.hse.ru/automorphic). В осеннем семестре 2015 года состоялось **15 заседаний** семинара, одно из которых было проведено совместно с Московским Математическом Обществом (20 октября 2015 г.). Основная научная тематика семинара в 2015/16 годах связана с приложениями автоморфных форм на ортогональных и унитарных группах к алгебраической и дифференциальной геометрии, топологии и теории бесконечномерных алгебр Ли.

Первые научно-исследовательские результаты нового семинара:

1) В рамках семинара В. А. Гриценко и В.В. Никулиным начаты новые исследования по классификации автоморфных дискримиантов и Лоренцевых алгебр Каца-Муди (см. вторую часть отчета В. Гриценко).

2) В. Гриценко найдены несколько автоморфных форм и дискриминант пространства квинтик в $\mathbb{C}P^3$, существование которых было доказано в докладе Э. Б. Винберга 13 октября 2015 г.

3) Вопросам применения автоморфных форм в теории кубических поверхностей, будет посвящена работа студента *Василия Болбачана* под руководством В. А. Гриценко. Его доклад на эту тему запланирован на февраль 2016.

4) По просьбе студентов спецкурс Гриценко по формам Якоби многих переменных был дополнен учебным семинаром по приложениям автоморфных форм (Малый автоморфный семинар), на котором было прочитано *пять докладов* (см. http://ag.hse.ru/automorphic), в частности, доклад студента *Дениса Терешкина*, которым начата курсовая работа *Дениса Терешкина*. В рамках семинара начата научная работа со студентом магистратуры *Дмитрием Адлером*.

Кратко описание основных рабочих объектов научного проекта. Пусть L целая четная квадратичная решетка сигнатуры $(2, n)$ и

$$\mathcal{D}(L) = \{[Z] \in \mathbb{P}(L \otimes \mathbb{C}) \mid (Z, Z) = 0,\ (Z, \overline{Z}) > 0\}^+$$

– соответствующая связная n-мерная ограниченная симметрическая эрмитова область типа IV, изоморфная $SO_0(L \otimes \mathbb{R})/SO(n) \times SO(2)$. Через $\mathrm{O}^+(L)$ обозначается подгруппа индекса 2 целочисленной ортогональной группы $\mathrm{O}(L)$, сохраняющая $\mathcal{D}(L)$, а $\Gamma \subset \mathrm{O}^+(L)$ произвольная подгруппа конечного индекса. Модулярное многообразие ортогонального типа

$$M_\Gamma^{(n)} = \Gamma \setminus \mathcal{D}(L)$$

является важнейшим объектом в теории модулей. Таким обрзом мы получаем

• пространства модулей эллиптических кривых ($n = 1$) и Гильбертовых поверхностей ($n = 2$);

• модули поляризованных абелевых и куммеровых поверхностей ($n = 3$, см. [G3], [GH3]);

• модули поляризованных $K3$ поверхностей степени $2d$ ($n = 19$) и модули решетчато-поляризованных $K3$ поверхностей $0 < n < 19$;
• модули поляризованных неприводимых голоморфных симплектических многообразий типа $K3^{[m]}$ ($n = 20$), обобщенных многообразий Куммера ($n = 4$) или исключительных многообразий O'Grady ($n = 5$ и $n = 21$);
• модули поверхностей Энриквеса и модули поляризованных поверхностей Энриквеса ($n = 10$).

Исследования геометрии различных многообразий, в частности пространств модулей, находится в центре научных интересов лаборатории. Отметим, что классическая работа научного руководителя лаборатории Ф.А. Богомолова "*Разложения Кэлеровых многообразий с тривиальным каноническим классом*" (Матем. Сборник **93** (1974)) явилась основой для создания теории неприводимых голоморфных симплектических многообразий, которая является сегоня активно развивающейся сегодня математической областью, находящейся на стыке алгебрической геометрии, дифференциальной геометрии и физики. Отметим, что одним из самых ярких результатов мирового уровня, полученных в Лаборатории алгебраической геометрии, является теорема типа Торелли для таких многообразий, доказанная Вербицким.

Основой для применения авторимофных форм в теории модулярных многообразий ортогонального типа являются следующие два важнейших критерия, полученные в работах В. Гриценко. Первый автоморфный принцип позволяет доказывать, что многобразия имеет оообщий тип, а второй – находить многобразия со специальной геометрией, имеющие размерности Кодаиры равную минус бесконечности.

Первый автоморфный принцип (см. [GHS1] и [GHS4]). Пусть $n \geq 9$. Модулярное многообразие $M_\Gamma^{(n)}$ имеет общий тип (т.е. его размерность Кодаиры рана n), если существует параболическая модулярная форма F относительно группы Γ малого веса $k < n$, такая что ее дивизор $\operatorname{div} F$ больше или равен дивизору ветвления $\mathrm{R.div}(\pi_\Gamma)$ модулярной проекции $\pi_\Gamma : \mathcal{D}(L) \to \Gamma \setminus \mathcal{D}(L)$.

Оказывается, что дивизор ветвления индуцирован всеми $\pm$-

отражениями в арифметической группе Γ

$$\mathrm{R.div}(\pi_\Gamma) = \bigcup_{\substack{\pm r \in L \\ r \text{ is primitive} \\ \sigma_r \in \Gamma \text{ or } -\sigma_r \in \Gamma}} \mathcal{D}_r(L),$$

где $\mathcal{D}_r(L) = \{Z \in \mathcal{D}(L) \,|\, (Z, r) = 0\}$, поэтому модулярные формы, носитель дивизора которых содержится в дивизоре ветвления называются **рефлективными**. Такие автоморфные формы могут быть построены как авторморфные произведения Борчердса, поэтому современная теория модулярных форм так востребованна в геометрических исследованиях и в *теории Лоренцевых алгебр Каца-Муди*, работа над которой проводилась В. А. Гриценко совместно В. В. Никулиным в 2015 году (см. *раздел II отчета*).

Второй автоморфный принцип (см. [G2]). 1. Пусть $n \geq 3$. Модулярное многообразие $M_\Gamma^{(n)}$ имеет размерность Кодаиры равную минус бесконечности, если существует рефлективная модулярная форма F относительно группы Γ большого веса $k > n$.

2. Если в последнем случае $k = n$ и модулярная форма F параболическая(этот случай является "граничным" между двумя автоморфными принципами), то размерность Кодаиры многообразия $M_\Gamma^{(n)}$ равна 1.

В недавней работе, опубликованной в 2014 г. в J. of Algebraic Geometry (см. [GH2]) Гриценко и Hulek доказали, что в первом случае второго автоморфного принципа модулярное многообразие $M_\Gamma^{(n)}$ является по крайней мере *унилинейчатым.*

Мы используем следующее очень удобное для алгебраической геометрии "проективное" определение автоморфные форм, которое позволяет естественно переходить к органичениям или, в более общем случае, к квазиограночения модулярных форм на дивизоры и подобласти однородной области $\mathcal{D}(L)$. *Метод квазиограничения* (см. его описание и Теорему 1 ниже) является одним из основных в исследованиях 2015 г.

Определение. *Пусть* $\mathrm{sign}(L) = (2, n)$ *и* $n \geq 3$. *Модулярная форма веса* k *и характера* $a\chi\colon \Gamma \to \mathbb{C}^*$ *относительно* Γ *есть голоморфная функция* $F\colon \mathcal{D}(L)^\bullet \to \mathbb{C}$ *на аффинном конусе* $\mathcal{D}(L)^\bullet$ *над* $\mathcal{D}(L)$ *такая, что*

$$F(tZ) = t^{-k} F(Z) \quad \forall\, t \in \mathbb{C}^*,$$

$$F(gZ) = \chi(g)F(Z) \quad \forall\, g \in \Gamma.$$

Пространство всех таких модулярных форм обозначается как $M_k(\Gamma, \chi)$. Модулярная форма называется параболической, если она обращается в ноль на каждой компоненте границы компактификации Бейли-Бореля многообразия $M_\Gamma^{(n)}$.

Важные новые теоремы, связанные с методом квазиграночения, были доказаны В. Гриценко в 2015 году. Опишем кратко эту естественную конструкцию.

Пусть Λ четная решетка сигнатуры $(2, n)$ with $n \geq 3$ и F есть модулярная форма *с рациональным квадратичным дивизором*

$$F \in M_k(\mathrm{O}^+(L), \chi), \quad \mathrm{div}_{\mathcal{D}(L)} F = \bigcup_{v \in L^\vee/\pm 1} m_v \mathcal{D}_v(L), \quad m_v \geq 0.$$

Кратности $m_v = m_{-v}$ зависят только от $\mathrm{O}^+(L)$-орбит вектров $\pm v$ и формула содержит только конечное число орбит. Мы обозначим через $V(F)$ множество примитивных векторов v с $m_v > 0$, определяющих компоненты $\mathrm{div}_{\mathcal{D}(L)} F$. Пусть $M \hookrightarrow L$ примитивное вложение невырожденной решетки сигнатуры $(2, n)$, $n \geq 3$, и пусть $\mathcal{D}(M) \hookrightarrow \mathcal{D}(L)$ соответствующее вложение однородных областей. Мы определим конечное множество "дивизориальных" векторов формы F в негативно определенной решетки $(L_M^\perp)^\vee$ и ее вес

$$V(F, M^\perp) = \{v \in V(F) \mid \ (v, M) = 0\}, \quad k(M) = \sum_{v \in V(F, M^\perp)/\pm 1} m_v.$$

Определим следующую функцию на $\mathcal{D}(M)$

$$F|_M = \frac{F(Z)}{\prod_{v \in V(F, M^\perp)_+} (v, Z)^{m_v}} \Bigg|_{\mathcal{D}(M)}$$

где в произведение по v мы фиксируем конечную систему "положительных" представителей в $V(F, {}^\perp)/\pm 1$ (как в теории систем корней). Если $V(F, L^\perp)$ пусто, то $F|_L$ обычное ограничение F на $\mathcal{D}(L)$. Далее мы определим

$$\mathrm{O}_L^+(M) = \{g \in \mathrm{O}^+(M) \,|\, \exists\, g_L \in \mathrm{O}^+(L) \ : \ g_L|_M = g\}.$$

Следующие две теоремы обобщают результаты, полученные в Теореме 1.2 [BKPS] и Теоремах 8.3 и 8.18 [GHS4].

Теорема 1. (`О модулярных свойствах общего квазиограничения.`) *Пусть F и $M \hookrightarrow L$ модулярная форма и вложения решеток, как это описано выше. Тогда*

$$F|_M \in M_{k+k(M)}(\mathrm{O}^+_L(M),\, \chi|_M).$$

Модулярная форма $F|_M$ обращается в ноль только на рациональных квадратичных дивизорах $\mathcal{D}_u(M)$, где $u \in M^\vee$ ненулевая проекция дивизориальных векторов $v \in V(F)$ на $M^\vee$ и $(u,u) < 0$. Более того, $F|_M$ параболическая форма, если $V(F, M^\perp)$ не пусто.

По сравнению с теоремой из [GHS4] данный результат применим к максимально широкому классу автоморфных форм и позволяет полностью определять максимальную группу, относительно которой квазиограничение является модулярной формой. Это особенно важно для доказательства общего типа пространств модулей поляризованных неприводимых симплектических многообразий, так как во многих случаях (см., например, [GHS3]) их модулярная группа строго больше стабильной ортогональной группы, рассмотренной в [GHS1]–[GHS2].

Теорема 1 составляет основу для построения рефлективных модулярных форм (см. определение данное выше), задающих так называемую автоморфную коррекцию гиперболических алгебр Каца-Муди (см. вторую часть отчета В. Гриценко). Для приложений к алгебраической геометрии важен следующий удивительный факт: в некоторых случаях казиограничение является не просто параболической формой, но *имет ноль высокого порядка на границе квазипроективного модулярного многообразия!*

Пусть

$$\Phi_{12} \in M_{12}(O^+(II_{2,26}), \det)$$

модулярная форма Борчердса (см. [B1]), где $II_{2,26}$ обозначает четную унимодулярную решетку сигнатуры $(2,26)$. Доказана следующая очень важная теорема

Теорема 2. (`О порядке нуля в бесконечности квазиограничения.`) *Квазиограничения*

$$\Phi_{132} = \Phi_{12}|_{2U\oplus 2E_8(-1)\hookrightarrow II_{2,26}} \in S_{132}(O^+(II_{2,18}, \det),$$

$$\Phi_{252} = \Phi_{12}|_{2U\oplus E_8(-1)\hookrightarrow II_{2,26}} \in S_{252}(O^+(II_{2,10}, \det)$$

являются (-2)-рефлективными формами, **имеющими ноль порядка 30** *на границе модулярных многообразий $O^+(II_{2,18}) \setminus \mathcal{D}(II_{2,18})$ и $O^+(II_{2,10}) \setminus \mathcal{D}(II_{2,10})$.*

Эта теорема имеет несколько очень сильных геометрических следствий. Методы работ [GHS1]–[GHS4] позволяли устанавливать общий тип модулярных многообразий размерности большей или равной 19 и строго меньшей 26. **Теорема 2** позволяет существенно расширить границы этого метода. Мы сформулируем только новую теорему, связанную с формой Φ_{252}.

Теорема 3. `(Об общем типе широкого класса модулярных многообразий размерности 9.)` *Пусть M подрешетка $II_{2,10}$ сигнатуры $(2,9)$ и Γ арифметическая подгруппа $\widetilde{O}^+(M)$, не содержащая $(\pm)$-отражений, сохраняющих решетку . Тогда модулярное многообразие $\Gamma \setminus \mathcal{D}(M)$ имеет общий тип.*

С некоторыми модификациями верна аналогичная теорема, основанная на свойствах модулярной формы Φ_{132}, отмечающая за общий тип модулярных многообразий размерности меньшей 18. Следовательно, **Теорема 2** существенно расширяет метод, предложенный Gritsenko-Hulek-Sankaran.

Теоремы 2 имеет другое важное приложение к теории модулей поверхностей Энриквеса. Это классическое пространство модулей совпадает (с точностью до некоторого дивизора) с 10-мерным модулярным многообразием

$$\mathcal{M}_{Enr} = O^+(U \oplus U(2) \oplus E_8(-2)) \setminus \mathcal{D}(U \oplus U(2) \oplus E_8(-2)).$$

В 1986 году S. Kondo доказал, что пространство модулей поверхностей Энриквеса рационально. S. Kondo поставил следующую проблему: *определить геометрический тип модулярного многообразия*

$$\mathcal{M}^{(2)}_{Enr} = \widetilde{O}^+(U \oplus U(2) \oplus E_8(-2)) \setminus \mathcal{D}(U \oplus U(2) \oplus E_8(-2)),$$

где тильда обозначает стабильную ортогональную группу (т.е. некоторую конгруэнц-подгруппу уровня 2), действующую тривиально на дискриминантной форме решетки, и

$$O^+(U \oplus U(2) \oplus E_8(-2)) \,/\, \widetilde{O}^+(U \oplus U(2) \oplus E_8(-2)) \cong O^+(\mathbb{F}_2^{10}).$$

Эта проблема очень интересна, так как она связана со многими классическими вопросами теории поверхностей Энриквеса и $K3$ поверхностей. В последней совместной работе В. Гриценко с K. Hulek ([GH1]), написанной в 2015 году, они описали пространства модулей поляризованных поверхностей Энриквеса как *модулярные многообразия ортогонального типа* размерности 10.

Теорема 4. (`О конечности числа пространств модулей поляризованных поверхностей Энриквеса.`) *Любое пространство модулей* $\mathcal{M}_{Enr;h_d}$ *поляризованных поверхностей Энриквеса с вектором поляризации* h_d *является модулярным многообразием, которое накрывает многообразие* $\mathcal{M}_{Enr}$ *и накрывается многообразием* $\mathcal{M}^{(2)}_{Enr}$. *В частности, для бесконечного числа векторов поляризаций имеется только конечное (!) число типов пространств модулей.*

Модулярной группой многообразия поляризованных поверхностей Энриквеса с поляризацией $h \in U \oplus E_8(-1)$ будет группа Γ^+_h, заключенная между полной ортогонально группы решетки Энриквеса и ее стабильной подгруппой

$$\widetilde{O}^+(U \oplus U(2) \oplus E_8(-2)) < \Gamma < O^+(U \oplus U(2) \oplus E_8(-2)).$$

Выполняется следующая теорема

Теорема 5. (`О специальных пространствах модулей.`) *Пусть* Γ^+ *любая группа типа, описанного выше. Предположим, что* Γ^+ *содержит по крайней мере* 26 *отражений, не сопряженных относительно* $\widetilde{O}^+(U \oplus U(2) \oplus E_8(-2))$. *Тогда размерность Кодаиры модулярного многообразия* $\Gamma^+\backslash\mathcal{D}(U \oplus U(2) \oplus E_8(-2))$ *равна* $-\infty$. *В частности, пространство модулей поляризованных поверхностей Энриквеса*

$$\mathcal{M}_{Enr,h} := \Gamma^+_h\backslash\mathcal{D}(U \oplus U(2) \oplus E_8(-2))$$

имеет отрицательную размерность Кодаиры для всех векторов поляризаций $h \in U \oplus E_8(-1)$ *степени* $h^2 \leq 32$.

Эта теорема доказывается в [GH1] с использованием обобщения метода мультипликативной симметризации из [GC] для автоморфных форм построенных в **Теореме 2** и в работе [G2].

Другая важная теорема, доказанная в [GH1] методами арифметической теории квадратичных форм, описывает модулярное пространство Конды как пространство модулей поляризованных поверхностей Энриквеса.

Теорема 6. (`Пространство Конды` $\mathcal{M}^{(2)}_{Enr}$ `как пространство модулей поляризованных поверхностей Энриквеса.`) *Если степень d поляризации стремиться к бесконечности, то для почти всех векторов поляризаций h_d пространство модулей поляризованных поверхностей Энриквеса $\mathcal{M}_{Enr;h_d}$ совпадает с $\mathcal{M}^{(2)}_{Enr}$.*

Используя **Теорему 2** и описание рефлективной формы Борчердса-Энриквеса $\Phi_4 \in M_4(O^+(II_{2,10}), \chi_2)$ из своей работы [G2], В. А. Гриценко **получил решение проблемы Кондо**.

Теорема 7. (`Решение проблемы Кондо.`) *Пространство $\mathcal{M}^{(2)}_{Enr}$ имеет общий тип.*

Доказательство Теоремы 6 подготавливается к печати. Необходимо продолжить исследование по теории 10-мерных модулярных многообразий в 2016 году, т.к. эта размерность является в некотором смысле ключевой в теории пространств модулей решетчато-поляризованных $K3$ поверхностей, *в теории унимодулярных особенностей Арнольда* (см. второй раздел отчета В. А. Гриценко) и в теории суперструн.

Приложения к топологии. В изложенных выше конструкциях, связанных с автоморфными формами, большую роль играют параболические формы Якоби от нескольких переменных (см [G1]). Почти голоморфные формы Якоби веса 0 являются основным блоком для построения автоморфных произведений Борчердса. Эти функции успешно применяются в теории многообразий Фробениуса, в топологии (теория родов и эллиптические когомологии) и в теории струн. С целью привлечения студентов ВШЭ к исследованиям в этих перспективных направлениях В. Гриценко прочел вводный курс по теории форм Якоби и модулярных форм Зигеля в в весеннем семестре 2015 года и курс по форма Якоби многих переменных в осеннем семестре 2015 года. Уровень подготовки некоторых студентов по топологии и геометрии на факультете очень высок, поэтому во время спецкурса была начата исследовательская работа по приложениям форм Якоби в топологии. Например, была доказана следующая теорема, которая обобщает второе квантование голоморфного эллиптического рода симметрических степеней 3 поверхностей (см. [CDHK], [HKK] и [G4]).

Теорема 8. *Производящая функция многочленов Ходжа симметрических степеней $K3$ поверхностей является слабой формой Якоби веса* 0 *для решетки $A_1(2) \oplus A_1(2)$. Эта форма Якоби определяет рефлективное произведения Борчердса от четырех переменных.*

Это только первый результат исследований в данном направлении. которые будут обязательно продолжены в 2016 году. По просьбе студентов мой спецкурс превратился в учебный семинар по приложениям автоморфных форм (“малый автоморфный семинар”), на котором было прочитано пять докладов. *Первый студенческий доклад подготовил Денис Терешкин.*

Научная тематика, затронутые в **Теореме 8**, имеет прямое отношение к теории струн и теории Лоренцевых алгебр Кац-Муди, которая рассмотрена во втором исследовательском проекте В. Гриценко (см. ниже).

Литература

[BKPS] R.E. Borcherds, L. Katzarkov, T. Pantev, N.I. Shepherd-Barron, *Families of K3 surfaces.* J. Algebraic Geom. **7** (1998), 183–193.

[CDHK] M. Cheng, J. Duncan, S. Harrison, Sh. Kachru, *Equivariant K3 Invariants* `arXiv:1508.02047`, 26 pp.

[Dol] I. Dolgachev, *A brief introduction to Enriques surfaces.* `arXiv:1412.7744`, 31 pp.

[GC] V. Gritsenko, F. Cléry, *Siegel modular forms with the simplest divisor.* Proc. London Math. Soc. **102** (2011), 1024–1052.

[G1] V. Gritsenko 24 *faces of the Borcherds modular form* Φ_{12}. `ArXiv:1203.6503` (2012), 14 pp.

[G2] V. Gritsenko, *Reflective modular forms in algebraic geometry.* `arXiv:1005.3753`, 28 pp.

[G3] V. Gritsenko, *Irrationality of the moduli spaces of polarized Abelian surfaces.* Internat. Math. Res. Notices **6** (1994), 235–243.

[G4] V. Gritsenko, *Elliptic genus of Calabi–Yau manifolds and Jacobi forms.* St. Petersburg Math. Journal **11** (2000), pp. 781–804

[GH1] V. Gritsenko, K. Hulek, *Moduli of polarized Enriques surfaces.* `arXiv:1502.02723` , 20 pp. (To appear in the Birkh"auser **Progress in Math** volume “K3 Surfaces and their Moduli” (2016) pp. 55–72.)

[GH2] V. Gritsenko, K. Hulek, *Uniruledness of orthogonal modular varieties.* J. Algebraic Geometry **23** (2014), 711–725.

[GH3] V. Gritsenko, K. Hulek, *Commutator coverings of Siegel threefolds.* Duke Math. J. **94** (1998), 509–542.

[GHS1] V. Gritsenko, K. Hulek, G.K. Sankaran, *The Kodaira dimension of the moduli of K3 surfaces.* Invent. Math. **169** (2007), 519–567.

[GHS2] V. Gritsenko, K. Hulek, G.K. Sankaran, *Moduli spaces of irreducible symplectic manifolds.* Compos. Math. **146** (2010), 404–434.

[GHS3] V. Gritsenko, K. Hulek, G.K. Sankaran, *Moduli spaces of polarised symplectic O'Grady varieties and Borcherds products.* J. of Differential Geometry **88** (2011), 61–85.

[GHS4] V. Gritsenko, K. Hulek, G.K. Sankaran, *Moduli spaces of K3 surfaces and holomorphic symplectic varieties.* Handbook of Moduli(ed. G. Farkas and I. Morrison), vol. 1, 459–526; Adv. Lect. in Math, Intern. Press, MA, 2012.

[HKK] M. Huang, Sh. Katzy, A. Klemm, *Topological String on elliptic CY 3-folds and the ring of Jacobi forms.* `arXiv:1501.04891`, 81 pp.

[Kon] S. Kondō, *The moduli space of Enriques surfaces and Borcherds products.* J. Algebraic Geom. **11** (2002), 601–627.

8.2. Бесконечномерные алгебры Ли и автоморфные формы в зеркальной симметрии и в теории особенностей.

Соотношения между автоморфными формами (1), пространствами модулей (2) и Лоренцевыми алгебрами Каца-Муди (3) инициируют и мотивируют исследования по всем трем направлениям. Ниже мы дадим краткое описание нашего подхода к проблеме, чтобы показать ее актуальность в рамках перспективных исследований, выполняемых в Лаборатории алгебрической геометрии ВШЭ.

Конечномерные алгебры Ли классифицируются положительно определенными матрицами Картана. Если мы изменим условие на эти матрицы на полуопределенные, то получим важнейший класс *аффинных алгебр Ли*, открытых в 1968 году. Этот класс бесконечномерных алгебр имеет четкую и ясную классификацию в терминах систем корней A-B-C-D-E-F-G. Следующий важнейший класс – *гиперболические алгебры Каца-Муди* с гиперболической матрицей Картана, имеет совершенно другую природу. Открытие в 1995 году Р. Борчердсом новой замечательной алгебры Ли, так называемой "Fake Monster Lie Algebra", стало новым революционным этапом изучения таких алгебр. Построение Лоренцевых алгебр Каца-Муди состоит из нескольких взаимосвязанных этапов.

Важнейшими объектами построения являются *группы, порожденные отражениями* в гиперболической решетке, *автоморфные формы* на областях четвертого типа, определенных в первой части отчета В. Гриценко, и *модулярные формы Якоби многих переменных* (см. [GN2]).

Во-первых, для опеределения Лоренцевой (супер)-алгебры Каца-Муди необходимо задать множество простых вещественных корней алгебры Ли, определяемых стенками фундаментальной области гиперболической группы Вейля, действующей в конусе "будущего" гиперболической решетки сигнатуры $(1, n)$. Во-вторых, задать взвешенное множество простых мнимых корней, лежащих внутри или на границе конуса, которое определяется коэффициентами Фурье в некотором фиксированном 0-мерном каспе строго рефлективной модулярной формы относительно ортогональной группы $(2, n+1)$-расширения исходной гиперболической решетки. Эта рефлективная модулярная форма является *формулой знаменателя Борчердса-Каца-Вейля* рассматриваемой алгебры, а ее разложение в произведение Борчердса, задаваемое в подходе Гриценко-Никулина модулярной формой Якоби веса 0, определяет кратности всех положительных корней построенной алгебры (см. [GN2]).

Краткое описание результатов, полученных В. А. Гриценко в 2015 году по указанной теме.

1. Совместно с В. В. Никулин (МИАН) описан большой класс 2-рефлективных Лоренцевой (супер)-алгебр Каца-Муди с конечным числом простых вещественных корней, т.е. с гиперболическими группами Вейля эллиптического типа. Это третий большой полностью расклассифицированный класс Лоренцевой алгебры Каца-Муди, известный в настоящее время (см. **Теорему 9**).

2. Найдены условия при которых квазиограничение формы Борчердса Φ_{12} имеет простой легко контролируемый дивизор (см. **Теорема 10**) и найдены много новых рефлективных "дочерних" модулярных форм рефлективной формы Борчердса (**Теорема 11**).

3. В качестве приложения предыдущей теоремы найдены рефлективные дискриминанты версальных дефомаций девяти (из четырнадцати) исключительных унимодулярных особенностей Арнольда (**Теорема 12**).

4. Для трех исключительных унимодулярных особенностей Арнольда построены Лоренцевы алгебры Каца-Муди (это три базисные алгебры из нового класса, полученного Гриценко-Никулиным в **Теореме 10**), отвечающие конструкции арифметической зеркальной симметрии для соответствующих решетчато-поляризованных $K3$ поверхностей (**Теорема 13**). Для этих Лоренцевых алгебр Каца-Муди найдены модулярные формы Якоби, являющиеся производящими функциями кратностей положительных корней этих бесконечномерных алгебр Ли.

5. Дана конструкция (типа квазиограничения) автоморфного дискриминанта пространства модулей $K3$ поверхностей степени 4 (пространства квартик в $\mathbb{C}P^3$). Это дает ответ на вопрос, поставленный в докладе Э. Б. Винберга на семинаре “Автоморфные формы и их приложения” (13.10.2015) и дает подход к описанию арифметической зеркальной симметрии для квартик (**Теорема 14**).

6. Часть методов по построению рефлективных квазиограничений строго рефлективных модулярных форм носит чисто арифметический характер. Для привлечение студентов ВШЭ к этим исследования В. Гриценко прочитал специальный курс *Арифметика квадратичных форм* (8 часов) в рамках традиционной летней математической школы Лаборатории алгебраической геометрии в Ярославле в августе 2015 года.

Уникальность Лоренцевой алгебры Каца-Муди можно объяснить тем, что у нее происходит “большой взрыв” (blow up) группы симметрий. Точнее, исходная гиперболическая группа Вейля заменяется в формуле знаменателя на арифметическую ортогональную группу ранга 2, т.е. на модулярную группу некоторого пространства модулей. Общие результаты теории Винберга-Никулина групп отражений гиперболических решеток позволяет предполагать, что существует только конечное число Лоренцевых алгебр Каца-Муди.

В настоящее время известно два полностью расклассифицированного класса Лоренцевых алгебр Каца-Муди: класс Гриценко-Никулина алгебр ранга 3 (см. [GN7]) и класс N. Scheithauera параболических алгебр сингулярного веса. Новый класс, предложенный в совместной работе В.А. Гриценко и В. В. Никулина (препринт [GN1] будет готов в конце декабря 2015 или в январе 2016) дает алгебры разного гиперболического ранга. Лоренцевой алгебры Каца-Муди этого класса удовлетворяют следующим условиям.

1) Группа Вейля $W^2(L)$ четной гиперболической решетки L сигнатуры $(1, n)$, $n \geq 2$, порождена отражениями во всех -2- векторах решетки L;

2) Группа Вейля $W^2(L)$ имеет конечный индекс в целочисленной орто-

гональной группе решетки L;

3) Система простых корней, задаваемой камерой Вейля группы $W^2(L)$ имеет решетчатый вектор Вейля.

Тогда имеет место следующая теорема (см. [GN1]).

Теорема 9. A) *Системы корней, типа описанного выше в условиях 1)– 3) существуют только в размерностях* $2 \le n \le 18$.

B) *Всего имеется* 43 *таких систем корней в размерностях от* 3 *до* 18 *включительно.*

C) *Для* 34 *из них построены автоморфные формы, определяющие соответствующие автоморфные коррекции гиперболических алгебр Каца-Муди данных систем корней.*

D) *Ниже мы дает список гиперболических решеток для которых построена Лоренцеву алгебру Каца-Муди. Первая серия* (1) *отвечает "простейшим" (в смысле [GN4]) алгебрам Каца-Муди и состоит из* 22 *гиперболических решеток вида* $U \oplus S(-1)$, *где*

$$(1) \quad S = 2E_8,\ E_8,\ D_8,\ 2D_4;\ \ E_7,\ D_7,\ A_7;\ \ E_6,\ D_6,\ A_6,\ 2A_3,\ 3A_2;$$

$$(1) \quad S = D_5,\ A_5;\ D_4,\ A_4,\ 2A_2,\ 4A_1;\ \ A_3,\ 3A_1;\ \ A_2,\ 2A_1;$$

$$(2) \quad <-2> \oplus 3A_1,\ \ <-2> \oplus 4A_1,\ \ <-2> \oplus 5A_1,$$

$$(2) \quad <-2> \oplus 6A_1,\ \ <-2> \oplus 7A_1,\ \ <-2> \oplus 8A_1;$$

$$(3) \quad U(3) \oplus\ 2A_2,\ U(3) \oplus\ A_2;$$

$$(4) \quad U(4) \oplus\ 3A_1,\ U(4) \oplus\ 2A_1;$$

$$(5) \quad U(2) \oplus 2D_4,\ U(2) \oplus D_4,$$

где $2S = S \oplus S$ *и* $U(m) = \begin{pmatrix} 0 & m \\ m & 0 \end{pmatrix}$.

Рефлективные модулярные формы, используемые в **Теореме 9** строятся как квазиограничения других рефлективных модулярных форм, например, функции Борчердса Φ_{12} от 26 переменных или рефлективных форм с простейшими дивизорами, полученными методом подъема Якоби (см. [G10]). Ниже мы изложим подробнее случай формы $\Phi_{12} \in M_{12}(II_{2,26}, det)$.

В [G1] Гриценко предложил двадцать четыре конструкции формы Φ_{12} по числу одномерных компонент границы компактификкации Бейли-Бореля модулярного многообразия $\mathrm{O}^+(II_{2,26})\setminus\mathcal{D}(II_{2,26})$. Эти компоненты соответствуют 24 классам четных положительно определенных унимодулярных решеток, а именно, 23 решеткам Нимейера $N(R)$ однозначно определенных своими ситемами корней R ранга 24

$$3E_8,\ E_8\oplus D_{16},\ D_{24},\ 2D_{12},\ 3D_8,\ 4D_6,\ 6D_4,$$
$$A_{24},\ 2A_{12},\ 3A_8,\ 4A_6,\ 6A_4,\ 8A_3,\ 12A_2,\ 24A_1,$$
$$E_7\oplus A_{17},\ 2E_7\oplus D_{10},\ 4E_6,\ E_6\oplus D_7\oplus A_{11},$$
$$A_{15}\oplus D_9,\ 2A_9\oplus D_6,\ 2A_7\oplus D_5,\ 4A_5\oplus D_4$$

и решерке Лича Λ_{24}, не имеющей корней. Следующая теорема описывает, когда квазиограничение, исследованное в **Теореме 1** первой части отчета, имеет легко описываемые дивизоры.

Теорема 10. Формула для дивизора квазиограничения. *Пусть S будет примитивной подрешеткой решетки Нимейера N и $L = 2U \oplus S(-1)$. Мы предполагаем, что S удовлетворяет следующим двум условиям:*

$$(N_{1/2})\qquad \max_{0\neq v\in S^\vee} v^2 \geq \frac{1}{2},$$

$$(N_2)\qquad \forall\, \bar c\in S^\vee/S\ \ (\bar c^2\not\equiv 0 \bmod 2\mathbb{Z})\ \ \exists\, h_c\in\bar c\,:\, 0<h_c^2<2.$$

Тогда выполняется следующая формула для дивизоров квазиограничения of $\Phi_{24}|_L$

$$\operatorname{div}_{\hat{\mathrm{O}}^+(L)\setminus\mathcal{D}(L)}\Phi|_L = \sum_{r\in\hat{\mathrm{O}}^+(L)\setminus R_{-2}(L)} H_r + \sum_{\substack{\bar c\in D(S)/\pm\mathrm{id}\\ \bar c^2\not\equiv 0\ (2\mathbb{Z})}} mult(\bar c)\, H_{h_c}$$

где

$$mult(\bar c) = \#\left\{b\in (S_N^\perp)^\vee \mid h_c+b\in R_{-2}(N)\right\}$$

и $H_r = \hat\pi(\mathcal{D}_r(L))$ образ при модулярной проекции $\hat\pi : \mathcal{D}(L)\to \hat{\mathrm{O}}^+(L)\setminus\mathcal{D}(L)$ рационального квадратичного дивизора $\mathcal{D}_r(L)$.

Условие $(N_{1/2})$ не является обременительным. Оно выполняется, например, для всех систем корней A_n $(n\geq 1)$, D_n $(n\geq 3)$, E_6, E_7, E_8. Если $h\in\bar c = a+S$, то (h,h) однозначно определено по модулю 2. Условие (N_2)

утверждает, что в каждом классе $\bar{c}$ существует элемент h_c с наименьшей возможной для класса нормой.

Во многих случаях дивизор квазиограничения не содержит дополнительных дивизоров H_{h_c}. Например, это верно, если решетка S есть прямая компонента системы корней решетки Нимейера. В частности, выполняется следующая теорема.

Теорема 11. *Пусть S является прямым слагаемым системы корней R решетки Нимейера $N(R)$. Мы предполагаем, что S удовлетворяет условию (N_2). Тогда*

$$\operatorname{div}_{\hat{\mathrm{O}}^+(L)\backslash\mathcal{D}(L)} \Phi|_L = \sum_{r\in\hat{\mathrm{O}}^+(L)\backslash R_{-2}(L)} H_r$$

является строго (-2)-рефлективной модулярной формой.

В таких случаях квазиограничение оказывается (-2)-рефлективной модулярной формой, определяющей соответствующую Лоренцеву алгебру Каца-Муди из серии (1) **Теоремы 9**. Для оставшихся систем корней из пункта **B)** построение автоморфных форм будет использовать конгруэнц-подгруппы по аналогии с формулами из [GN5]. Гриценко и Никулин планируют завершить рассмотрение оставшихся классов в 2016 году.

Формула знаменателя Лоренцевой алгебры Каца-Муди является строго рефлективной модулярной формой (см. определение в начале первой части отчета Гриценко) и является автоморфным дискриминантом соответствующего модулярного многообразия, которое почти во всех случаях оказывается пространством модулей некоторых решетчато-поляризованных $K3$ поверхностей. В силу второго автоморфного принципа (см. первую часть отчета Гриценко) все эти пространства модулей являются по крайней мере унилинейчатыми. Это объясняет тесную связь этих исследований с алгебраической геометрией и теорией особенностей, точнее с пространством версальных деформаций 14 исключительных особенностей Арнольда. Список таких особенностей образует пирамиду из $9+4+1$ особенностей. Модули особенностей первого уровня (первые 9 особенностей) отвечают решеткам $2U \oplus S(-1)$, где S одна из следующих систем корней

$$\begin{pmatrix} E_8 & E_8\oplus A_1 & E_8\oplus A_2 \\ E_7 & E_7\oplus A_1 & E_7\oplus A_2 \\ E_6 & E_6\oplus A_1 & E_6\oplus A_2 \end{pmatrix}$$

Теорема 12. Об автоморфных дискриминатах. *Для всех девяти решеток, указанных выше, существует рефлективный автоморфных дискриминат пространства версальных деформаций соответствующих исключительных особенностей Арнольда.*

Эта теорема доказывается с использованием **Теоремы 10**, примененной к одномерным граням модулярной формы Борчердса, описанным в [G12]. Только в трех случаях из девяти автоморфный дискриминант является строго рефлективной формой, т.е. имеет кратность 1 вдоль всех дивизоров. Тот факт, что автоморфный дискриминант задает Лоренцеву алгебру Каца-Муди находит свое применение в расширении понятия зеркальной симметрии для $K3$ поверхностей до понятия *арифметической зеркальной симметрии* (см. [GN3] и [GN6]). Для трех исключительных особенностей Арнольда отвечающих гиперболическим решеткам $U \oplus E_8(-1)$, $U \oplus E_7(-1)$ и $U \oplus E_6(-1)$ такое расширение существует! В качестве приложения **Теоремы 9** и конструкции [G1] мы приведем формулу произведения для автоморфного дискриминанта и ее первого коэффициентов Фурье-Якоби для в случае $U \oplus E_6(-1)$. Интересно, что первый коэффициентов Фурье-Якоби выражается в терминах *формулы знаменателя аффинной алгебры Ли* $\hat{\mathfrak{g}}(E_6)$.

Пусть

$$\vartheta(\tau, z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \left(\frac{-4}{n}\right) q^{\frac{n^2}{8}} r^{\frac{n}{2}} = -q^{1/8} r^{-1/2} \prod_{n\geqslant 1} (1-q^{n-1}r)(1-q^n r^{-1})(1-q^n),$$

где $q = e^{2\pi i\tau}$, $r = e^{2\pi i z}$, $z \in \mathbb{C}$ и $\left(\frac{-4}{n}\right)$ символ Кронекера. Тогда функция знаменателя аффинной алгебры Ли $\hat{\mathfrak{g}}(E_6)$ может быть записано как произведения тета-функций

$$\psi_\varphi(\tau, \mathfrak{z}) = \eta(\tau)^6 \prod_{v\in R(E_6)^+} \frac{\vartheta(\tau, (v, \mathfrak{z}))}{\eta(\tau)},$$

где произведение берется по всем положительным корням системы корней E_6 и $\mathfrak{z} \in E_6 \otimes \mathbb{C}$. Введем тета-ряд Якоби решетки Нимейера $N(3E_6)$ (см. [GC] о формах Якоби многих переменных)

$$\vartheta_{N(3E_6)}(\tau, \mathfrak{z}) = \sum_{\ell\in N(3E_6)} \exp\left(\pi i(\ell,\ell)\tau + 2\pi i(\ell, \mathfrak{z})\right) \in J_{12, N(3E_6)},$$

где $\mathfrak{z} \in E_6 \otimes \mathbb{C}$. Определим форму Якоби веса 0 для решетки E_6, как ограничение тета-ряд Якоби решетки Нимейера $N(3E_6)$ на подрешетку E_6

$$\phi_{0,E_6}(\tau, \mathfrak{z}) = \Delta(\tau)^{-1}\vartheta_{N(3E_6)}(\tau, \mathfrak{z})|_{E_6} =$$
$$q^{-1} + 168 + \sum_{n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, \ell \in E_6^*} a(n, \ell) \exp(2\pi i(n\tau + (\ell, \mathfrak{z}))).$$

Эта форма будет производящей функцией для кратностей корней Лоренцевой алгебры Каца-Муди решетки $U \oplus E_6(-1)$.

Теорема 13. *Произведение Борчердса*

$$B(\phi_{0,E_6})(\tau, \mathfrak{z}, \omega) \in S_{84}(O^+(2U \oplus E_6(-1)), det),$$

определяемое формой Якоби ϕ_{0,E_6} (см. [G1]), является строгой -2-рефлективной формой, начинающаяся с двенадцатого коэффициента Фурье-Якоби ($h(E_6) = 12$!):

$$\mathcal{B}_{\varphi_{0,N}}(\tau, \mathfrak{z}, \omega) = \Delta(\tau)^7 \prod_{v \in R_+(E_6)} \frac{\vartheta(\tau, (v, \mathfrak{z}))}{\eta(\tau)} e^{2\pi i(12\omega)} + \dots .$$

Модулярная форма $B(\phi_{0,E_6})(\tau, \mathfrak{z}, \omega)$ имеет ноль порядка 12 на границе модулярного многообразия.

Теорема 10 о формуле для дивизора квазиограничения позволяет очень просто строить и другие автоморфные дискриминанты. Мы представим (без деталей) возможности метода в следующей теореме.

Теорема 14. *Квазиограничение позволяет получить формулы для дискриминантов поляризованных $K3$ поверхностей степени 2, 4, 6, 8, ... В частности, можно очень просто получить функции, построенные Тодоровым и Йоргенсом в [JT]. Квазиограничение дает некоторые дискриминанты и образующие колец модулярных форм, представленные в докладе Э. Б. Винберга, прочитанном на новом автоморфном семинаре лаборатории.*

Работа по построению автоморфных дискриминантов, в частности для всех 14 исключительных особенностей Арнольда будет продолжена в 2016 году.

Литература

[B1] R.E. Borcherds, *Automorphic forms on $O_{s+2,2}(R)$ and infinite products.* Invent. Math. **120** (1995), 161–213.

[CG] F. Cléry, V. Gritsenko *Modular forms of orthogonal type and Jacobi theta-series.* Abh. Math. Semin. Univ. Hamburg **83** (2013), 187–217.

[G1] V. Gritsenko 24 *faces of the Borcherds modular form* Φ_{12}. `ArXiv:1203.6503` (2012), 14 pp.

[GN1] V.A. Gritsenko and V.V. Nikulin, *Automorphic forms and Lorentzian Kac–Moody algebras. Part III* in preparation (it will be finished in December 2015).

[GN2] V.A. Gritsenko and V.V. Nikulin, *Siegel automorphic form correction of some Lorentzian Kac–Moody Lie algebras*, Amer. J. Math.**119** (1997), 181–224.

[GN3] V.A. Gritsenko and V.V. Nikulin, *K3 surfaces, Lorentzian Kac–Moody algebras and mirror symmetry*, Math. Res. Lett. **3** (1996) (2), 211–229.

[GN4] V.A. Gritsenko and V.V. Nikulin, *Igusa modular forms and "the simplest" Lorentzian Kac–Moody algebras*, Sb. Math. **187** (1996), no. 11, 1601–1641.

[GN5] V.A. Gritsenko and V.V. Nikulin, *Automorphic forms and Lorentzian Kac–Moody algebras. Part II*, Intern. J. Math. **9** (1998), 201–275.

[GN6] V.A. Gritsenko and V.V. Nikulin, *The arithmetic mirror symmetry and Calabi–Yau manifolds*, Comm. Math. Phys. **210** (2000), no. 1, 1–11.

[GN7] V.A. Gritsenko and V.V. Nikulin, *On the classification of Lorentzian Kac–Moody algebras*, Russian Math. Surveys. **57** (2002), no. 5, 921–979.

[JT] J. Jorgenson, A. Todorov, *Enriques Surfaces, Analytic Discriminants, and Borcherds's* Φ *Function.* Comm. in Mathem. Physics **191** (1998), 249-264

9. Заключение: публикации лаборатории

В заключение отчета, мы приводим список публикаций лаборатории, и список препринтов, подготовленных к печати.

9.1. Статьи в международных журналах

1) Aminov G., Levin A. M., Olshanetsky M., Zotov A., *Classical integrable systems and Knizhn ik-Zamolodchikov-Bernard equations*, Journal of Experimental and Theoretical Physics Letters (JETP Letters) (2015) Vol. 101. No. 9. P. 648-655.

2) Amosov G., Zhdanovskiy I. *On the noncommutative deformation of the operator graph corresponding to the Klein group*, Записки научных семинаров ПОМИ. 2015. Vol. 436. P. 49-75.

3) F. A. Bogomolov, Vik. S. Kulikov, *The ambiguity index of an equipped finite group*, European Journal of Mathematics. 2015. Vol. 1. No. 4. P. 260-278.

4) Alexey Bondal, Ilya Zhdanovskiy, *Coherence of relatively quasi-free algebras*, European Journal of Mathematics. 2015. Vol. 1. No. 4. P. 695-703.

5) Bondal A. I., Zhdanovskiy I. *Orthogonal pairs and mutually unbiased bases,* Записки научных семинаров ПОМИ. 2015. Vol. 437. P. 35-61.

6) Cheltsov I., Przyjalkowski V. V., Shramov K. A., *Quartic double solids with icosahedral s ymmetry*, European Journal of Mathematics. 2015. P. 1-24.

7) Cheltsov I., Rubinstein Y. *Asymptotically log Fano varieties*, Advances in Mathematics, 2015, Volume 285, Page 1241, DOI:10.1016/j.aim.2015.08.001

8) Cherednik I., Feigin E. *Extremal part of the PBW-filtration and nonsymmetric Macdonald polynomials*, Advances in Mathematics. 2015. Vol. 282. P. 220-264.

9) Efimov A. I., Positselski L., *Coherent analogues of matrix factorizations and relative s ingularity categories*, Algebra and Number Theory. 2015. Vol. 9. No. 5. P. 1159-1292.

10) Ingalls C., Kuznetsov A. G., *On nodal Enriques surfaces and quartic double solids,* Mathematische Annalen. 2015. Vol. 361. No. 1-2. P. 107-133.

11) Кубрак Д. В., Финкельберг М. В. *Исчезающие циклы на пуассоновых многообразиях*, Функциональный анализ и его приложения. 2015. Т. 49. No. 2. С. 70-78.

12) Alexander Kuznetsov, Valery A. Lunts, *Categorical resolutions of irrational singularities,* Int. Math. Res. Not. IMRN, 2015:13 (2015), 4536-4625.

13) Yuri Prokhorov, Mikhail Zaidenberg, *Examples of cylindrical Fano fourfolds*, European Journal of Mathematics, DOI 10.1007/s40879-015-0051-7.

14) Rovinsky M. Stable birational invariants with Galois descent and differential forms, Moscow Mathematical Journal. 2015. No. 4. P. 1-16.

15) Rybakov S. DG-modules over de Rham DG-algebra, European Journal of Mathematics. 2015. Vol. 1. P. 25-53.

16) Soldatenkov A., Verbitsky M., *Holomorphic Lagrangian Fibrations on Hypercomplex Manifolds*, International Mathematics Research Notices, (2015), vol 1, no. 4. P. 981-984.

17) Trepalin A. *Quotients of conic bundles,* Transformation Groups. 2015. Vol. 20. No. 4. P. 1-21.

18) Zykin A. I. *Asymptotic properties of zeta functions over finite fields,* Finite Fields and Their Applications. 2015. Vol. 35. P. 247-283.

19) Philippe Lebacque, Alexey Zykin, *On the number of rational points of Jacobians over finite fields,* Acta Arithmetica 169(2015), 373-384.

9.2. Прочие публикации сотрудников Лаборатории

1) Bogomolov F. A., McQuillan M., *Rational curves on foliated varieties,* in: Proceedings of the Simons Conference "Foliation theory in Algebraic Geometry", Springer International Publishing, 2015, pp. 1-22.

2) Bogomolov F. A., De Oliveira B., *Local structure of closed symmetric 2-differentials*, in: Proceedings of the Simons Conference "Foliation theory in Algebraic Geometry", Springer International Publishing, 2015.

3) Cheltsov I., Shramov K. A. *Cremona Groups and the Icosahedron*, 527 pages, CRC Press, 2015, ISBN 9781482251593

4) Курносов Н. М. *Абсолютно трианалитические торы в обобщённом многообразии Куммера,* В кн.: V школа-конференция по алгебраической геометрии и комплексному анализу для молодых математиков России. Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, 2015. С. 57-58.

5) Прохоров Ю. Г. *Рациональные поверхности*, Лекц. курсы НОЦ, 2015, выпуск 24, страницы 3-76.

9.3. Статьи сотрудников Лаборатории, подготовленных в рамках проведения научно-исследовательских работ по гранту РНФ (Соглашение 14-21-00053 от 11.08.2014):

1) Altmann K., Kiritchenko V. A., Petersen L. *Merging divisorial with colored fans*, Michigan Mathematical Journal. 2015. Vol. 64. P. 3-38.

2) E. Amerik, M. Verbitsky, *Teichmüller space of hyperkähler and symplectic structures*, J. Geom. Phys. 97 (2015), 44-50.

3) Michael Entov and Misha Verbitsky, *Unobstructed symplectic packing for tori and hyper-Kähler manifolds.* Journal of Topology and Analysis, DOI: 10.1142/S1793525316500229.

4) E. Feigin, Gh. Fourier, P. Littelmann, *PBW filtration and base s for irreducible modules in type A_n*, Transform. Groups 165 (2011), no. 1, 71–89.

5) Kaledin D. B., Lowen W., *Cohomology of exact categories and (non-)additive sheaves*, Advances in Mathematics. 2015, Vol. 272, pp. 652-698.

6) Курносов Н. М., *О неравенстве для чисел Бетти гиперкэлеровых многоообразий размерности 8*, Математические заметки (accepted, to appear in 2016).

7) Prokhorov Y. *On stable conjugacy of finite subgroups of the plane Cremona group, II,* Michigan Mathematical Journal. 2015. Vol. 64. No. 2. P. 293-318

8) Andrey Soldatenkov, Misha Verbitsky, *k-symplectic structures and absolutely trianalytic subvarieties in hyperkahler manifolds*, J. Geom. Phys. 92 (2015), 147-156.

9) Тюрин Н. А. *Псевдоторические структуры на гиперплоском сечении торического многообразия,* Теоретическая и математическая физика (2015) vol. 182, pp. 195-212.

10) Тюрин Н. А., *О лагранжевых сферах в многообразии флагов F3*, Матем. заметки, 2015, том 9 8, выпуск 2, 314-317

11) M. Verbitsky, *Ergodic complex structures on hyperkahler manifolds*, Acta Mathematica, September 2015, Volume 215, Issue 1, pp 161-182

12) Misha Verbitsky, *Degenerate twistor spaces for hyperkahler manifolds*, Journal of Geometry and Physics Volume 91, Pages 2-11, 2015.

10. Препринты лаборатории

10.1. Препринты, за исключением работ по гранту РНФ

1) Beloshapka I., Gorchinskiy S. O. *Irreducible representations of finitely generated nilpo tent groups*, arXiv:1508.06808, 28 pages.

2) Blokh A., Oversteegen L., Ptacek R., Timorin V. *The combinatorial Mandelbrot set as the quotient of the space of geolaminations*, arXiv:1503.00351, 28 pages.

3) Blokh A., Oversteegen L., Ptacek R., Timorin V. *The parameter space of cubic laminations with a fixed critical leaf*, arXiv:1501.05568, 40 pages; 2 figures.

4) Bogomolov F. A., Silberstein A. M., *The Disjoint Divisors Theorem for Complete Varieties*, arXiv:1504.05534

5) Bondal A. I., Bodzenta A., *Flops and spherical functors*, arXiv:1511.00665.

6) Cheltsov I., Park J., Won J., *Cylinders in del Pezzo surfaces,* arXiv:1508.06375

7) Cheltsov I., Przyjalkowski V. V., Shramov K. A., *Quartic double solids with icosahedral symmetry*, arXiv:1508.07282, 19 pages

8) Cheltsov I., Przyjalkowski V. V., Shramov K. A., *Which quartic double solids are rational?*, 30 pages, arXiv:1508.07277.

9) Cheltsov I., Shramov K. A. *Two rational nodal quartic threefolds*, arXiv:1511.07508, 28 pages.

10) Cherulli Irelli G., Feigin E., Reineke M., *Schubert Quiver Grassmannians*, arXiv:1508.00264

11) Debarre O., Kuznetsov A. G., *Gushel–Mukai varieties: classification and birationalities*, arXiv:1510.05448.

12) Finkelberg M. V., Ginzburg V., Ionov A., Kuznetsov A. G., *Intersection cohomology of the Uhlenbeck compactification of the Calogero-Moser space*, arXiv:1506.05205, 37 pages.

13) Finkelberg M. V., Kuznetsov A. G., Rybnikov L. G., Dobrovolska G., *Towards a cluster structure on trigonometric zastava*, arXiv:1504.05605.

14) Gritsenko V., Hulek K., *Moduli of polarized Enriques surfaces*, arXiv:1502.02723

15) Efimov, A., *Mac Lane (co)homology of the second kind and Wieferich primes*, arXiv:1506.00257, 67 pages.

16) Viktor S. Kulikov, E. Shustin, *On rigid plane curves*, arXiv:1501.03777, 19 pages.

17) Kuznetsov A. G., *Derived categories view on rationality problems*, arXiv:1509.09115, Lecture notes for the CIME-CIRM summer school, Levico Terme, June 22–27, 2015; 26 pages

18) Kurnosov N., *Absolutely trianalytic tori in the generalized Kummer variety*, arXiv:1504.08010.

19) Levin A. M., Olshanetsky M., Zotov A. *Yang-Baxter equations with two Planck constants*, 20 pages, arXiv:1507.02617

20) A. Levin, M. Olshanetsky, A. Zotov *Geometry of Higgs bundles over elliptic curves related to automorphisms of simple Lie algebras, Calogero-Moser systems and KZB equations*, 35 pages + 2 tables, arXiv:1507.04265

21) Prokhorov Y., Zaidenberg M., *New examples of cylindrical Fano fourfolds,* arXiv:1507.01748.

22) Rovinsky M., *An analogue of Hilbert's Theorem 90 for infinite symmetric group,* arXiv:1508.02267.

23) Tyurin N. A. *Special Bohr - Sommerfeld geometry*, arXiv:1508.06804, 19 pages.

24) Sakharova N., *Convergence of the Zagier type series for the Cauchy kernel*, arXiv:1503.05503.

25) Soukhanov L. *An operad from the secondary polytope*, arXiv:1505.08157, 10 figures.

10.2. Препринты сотрудников Лаборатории, подготовленные в рамках проведения научно-исследовательских работ по гранту РНФ (Соглашение 14-21-00053 от 11.08.2014)

1) E. Amerik, M. Verbitsky, *Hyperbolic geometry of the ample cone of a hyperkähler manifold*, preprint arXiv:1511.02403

2) A. Golota, *Stable bundles on irregular Vaisman manifolds*, arXiv:1509.05787.

3) D. Kaledin, *Bokstein homomorphism as a universal object*, arXiv:1510.06258.

4) D. Kaledin, *Co-periodic cyclic homology*, arXiv:1509.08784.

5) V. Kiritchenko, *Newton–Okounkov polytopes of flag varieties*, arXiv:1506.00362.

6) V. Kleptsyn, E. Smirnov, *Ribbon graphs and bialgebra of Lagrangian subspaces*, arXiv:1401.6160.

7) Nikon Kurnosov *Boundness of b_2 for hyperkahler manifolds with vanishing odd-Betti numbers*, arXiv:1511.02838, 10 pages.

8) Ornea L., Verbitsky M., Vuletescu V. *Weighted Bott-Chern and Dolbeault cohomology for LCK-manifolds with potential*, arXiv:1504.01501, 17 pages.

9) Ornea L., Verbitsky M., *Compact pluricanonical manifolds are Vaisman,* arXiv:1512.00968, 32 pages

10) Papayanov G., *Cohomological properties of Hermitian symplectic threefolds*, arXiv:1506.07421, 8 pages.

11) Y. Prokhorov, *Singular Fano threefolds of genus 12*, arXiv:1508.04371

12) Skripchenko A., Troubetzkoy S., *On the Hausdorff dimension of minimal interval exchange transformations with flips,* arXiv:1510.02362.

13) M. Verbitsky, *Transcendental Hodge algebra*, arXiv:1512.01011, 16 pages.