ГОДОВОЙ ОТЧЕТ (2016)

Лаборатория алгебраической геометрии и ее приложений

РЕФЕРАТ

Ключевые слова: Категории Калаби-Яу, модулярные формы, бесконечномерные алгебры Ли, формы Якоби, алгебры Каца-Муди, произведения Борчердса, подмногообразия Бора–Зоммерфельда, алгоритм Арну--Рози--Пуанкаре, автоморфные формы, оскулирующее пространство, многообразия Фано, модели Ландау–Гинзбурга, бирациональная жесткость, альфа–инвариант Тиана, обобщенные модули Вейля, несимметрические многочлены Макдональда, исчисление Шуберта, симплектические многогранники Гельфанда–Цетлина, комплекс Кошуля, множество Мандельброта, исчисление Шуберта, колчанные многообразия, многочлены Костки–Шоджи, диаграмы свертки Люстига, гепнеровская особенность, суперпотенциал Гайотто–Виттена, K3 поверхность, пространство модулей, рациональные кривые, голоморфно симплектическое многообразие, кэлерово многообразие, гиперкэлерово многообразие, трианалитическое подмногообразие, многообразия Фано, группа Кремоны, теорема Торелли, отображение периодов, специальное лагранжево подмногообразие, лагранжево слоение, гиперкомплексное многообразие, некэлерово многообразие, зеркальная симметрия, монодромия, биголоморфизм, эргодическое действие, метрики Кобаяши, теорема Торелли, пространство Тэйхмюллера, группа Тэйхмюллера, некоммутативная геометрия, вектора Витта, аддитивные категории, многообразие Гушеля–Мукаи, двойная EPW-секстика, функтор Серра, стек Делиня–Мамфорда, стандартные гипотезы Гротендика, K-теория Моравы, группа Нерона-Севери, группа Гротендика–Тейхмюллера, p-адическое интегрирование, когомологии Хохшильда, циклические когомологии, многообразия Кэлера-Эйнштейна, геометрическое квантование, когомологии Хохшильда.

Краткая аннотация: Приводятся результаты исследований в области алгебраической геометрии, теории категорий, теории чисел, комплексной геометрии, дифференциальной геометрии, теории динамических систем и геометрической теории представлений.

Основные темы исследования — геометрическая терия представлений, арифметическая алгебраическая геометрия, модулярные формы в алгебраической геометрии и топологии, бесконечномерные алгебры Ли и автоморфные формы в зеркальной симметрии и в теории особенностей, гомологические и мотивные методы в некоммутативной геометрии, производные каытегории, классическая геометрия и специальмые многообразия.

Результаты носят теоретический характер и являются существенно новыми. Возможны приложения к теоретической физике, дифференциальной геометрии, теории чисел и задачам классификации комплексных многообразий.

Оглавление

1. Введение

В течение 2016 года Лаборатория алгебраической геометрии и ее приложений провела 3 школ и школы-конференции, в т.ч. 6-ю летнюю математическую школу "Алгебра и геометрия" в г.Ярославле, а также школу "Введение в бирациональню геометрию", которая предваряла международную школу-конференцию "Группы бирациональных автоморфизмов". Школа была рассчитана на студентов младших курсов бакалаврита и это был первый опыт Лаборатории проведения такого рода мероприятий. Кроме того, лаборатория провела 6 конференций, часть из которых совместно с другими научными центрами - факультетом математики НИУ ВШЭ, Математическим институтом им В.А.Стеклова, Лабораторией Понселе и рядом других. В лабораторию на стажировку приезжал студент магистратуры Эколь Политекник (г.Париж, Франция) Мануэль Жером Голик. Научный руководитель стажировки - С.О.Горчинский. Продолжал свою работу еженедельный семинар факультета математики (руководители семинара: Е.Ю.Америк, М.С.Вербицкий). С докладами на семинаре выступали сотрудники лаборатории, факультета математики, сотрудники российских научных центров, приглашенные специалисты из ведущих мировых научных и учебных центров.

По результатам проводимых в 2016 году научных исследований сотрудниками лаборатории было опубликовано 38 статей в ведущих зарубежных и российских журналах, индексируемых в базах WoS и/или Scopus, а также 4 публикации в иных научных изданиях.

Сотрудники лаборатории принимали участие в научных конференциях, семинарах и воркшопах, где выступили с 57-ю докладами, в которых представили результаты своих исследований в лаборатории.

Сотрудники лаборатории продолжали вести активную педагогическую работу, ими были прочитаны курсы на факультете математики НИУ ВШЭ, в Независимом Московском Университете, НОЦ МИАН, программе Math in Moscow, на школах для студентов, проводимых как лабораторией, так и крупным международными научными и учебными центрами. Часть курсов была прочитана впервые.

В течение 2016 года было сотрудниками лаборатории было защищено 2 кандидатские диссертации:

- Наталья Гончарук "Диффеоморфизмы окружности и комплексная динамика"
- Евгений Македонский "Некоторые классы циклических модулей над алгебрами Ли"

Научная деятельность сотрудников лаборатории была отмечена различными премиями и наградами:

- Ф.А.Богомолову было присвјено почетное звание Silver Professor New York University
- А.Г. Кузнецов избран членом-корреспондентом РАН
- Д.Б. Каледину, А.Г. Кузнецову и Н.А. Тюрину было присвоено звание Профессор РАН
- А.И. Ефимов стал победителем конкурса Московского математического общества
- П.А. Сечин, Р.Ш. Абугалиев и В.В. Крылов стали лауреатами конкурс Мёбиуса (учрежден в 1997 году для выявления лучших студенческих и аспирантских научных работ по математике и для оказания финансовой поддержки их авторам при продолжении их научной работы в России.)
- А.А.Петров стал Арнольдовским стипендиатом НИУ ВШЭ (стипендия назначается на один учебный год, стипендиатом может стать студент 4-го курса бакалавриата факультета математики).
- А. А. Ионов, Б.К. Завьялов, А.А. Петров, Р.Ш. Абугалиев стали Добрушинскими стипендиатами в в 2016 году (присуждаются каждый семестр лучшим студентам старших курсов (начиная с 5-го семестра) московских ВУЗов, показавшим отличную успеваемость и первые научные успехи).
- П.А. Сечин стал одним из победителем конкурсе стипендий Саймонса для студентов и аспирантов математиков 2016 года.

Были получены значительные результаты по основным темам, заявленным на 2015-й год:

1) Производные категории
2) Гомологические и мотивные методы в некоммутативной геометрии
3) Специальные многообразия

4) Классическая геометрия

5) Геометрическая теория представлений

6) Арифметическая геометрия

7) Модулярные формы в алгебраической геометрии и топологии и бесконечномерные алгебры Ли и автоморфные формы в зеркальной симметрии и в теории особенностей

Результаты работ по этим темам составляют содержание настоящего отчета.

2. Производные категории

2.1. Производные категории многообразий Гушеля--Мукаи

Многообразие Гушеля–Мукаи — это трансверсальное пересечение конуса над Грассманианом $\mathrm{Gr}(2,5)$ с линейным пространством и квадрикой. Размерность таких многообразий варьируется от 2 до 6, а их свойства оказываются тесно связанными с четностью размерности.

В работе [13], написанной директором Лаборатории А. Кузнецовым совместно с Э. Перри, изучаются производные категории многообразий Гушеля–Мукаи. Для многообразия X размерности n строится полуортогональное разложение производной категории

$$\mathbf{D}(X) = \langle \mathcal{A}_X, \mathcal{O}_X, \mathcal{U}_X^{\vee}, \dots, \mathcal{O}_X(n-3), \mathcal{U}_X^{\vee}(n-3)\rangle,$$

состоящее из $2(n-2)$ исключительных векторных расслоений ($\mathcal{U}_X$ обозначает ограничение тавтологического расслоения с Грассманиана) и категории $\mathcal{A}_X$, оказывающейся наиболее интересной частью производной категории. Кузнецов и Перри вычисляют функтор Серра категорий $\mathcal{A}_X$ и доказывают, что для четного n категория $\mathcal{A}_X$ является некоммутативной К3-поверхностью, а при нечетном n — некоммутативной поверхностью Энриквеса. Они также вычисляют основные алгебраические инварианты категорий $\mathcal{A}_X$: гомологии и когомологии Хохшильда и численную группу Гротендика.

Они обсуждают связь свойств категории $\mathcal{A}_X$ с бирациональными свойствами сногообразий Гушеля–Мукаи, которые особенно интересны в размерностях 3 и 4, а также связь между категориями $\mathcal{A}_X$ разных многооборазий Гушеля–Мукаи. В частности, Кузнецов и Перри формулируют гипотезу о двойственности, утверждающую, что категории $\mathcal{A}_X$ соответствующие обобщенно двойственным многооборазиям Гушеля–Мукаи (то есть многообразиям, которые задаются двойственными лагранжевыми попространствами в $\Lambda^3\mathbb{C}^6$ и имеют одинаковую четность размерности) эквивалентны. Гипотеза о рациональности утверждает, что гладкое четырехмерное многообразие Гушеля–Мукаи рационально тогда и только тогда, когда некоммутативная К3-поверхность $\mathcal{A}_X$ на самом деле коммутативна. Эта гипотеза аналогична гипотезе о рациональности четырехмерной кубики и является частным случаем более общей гипотезы о категорной компоненте Клеменса–Гриффитса.

Значительная часть работы посвящена анализу двух интересных семеств четырехмерных многооборазий Гушеля–Мукаи. Первое — это семейство многообразий X обобщенно двойственных к поверхностям S Гушеля–Мукаи. Гипотеза двойственности предсказывает для таких многообразий эквивалентность категории $\mathcal{A}_X$ и производной категории соответствующей поверхности S, а гипотеза рациональности — их рациональность. Они проверяют, что для общего такого многообразия оба предсказания выполнены, получая тем самым некоторое подтверждение наших гипотез.

Для проверки рациональности Кузнецов и Перри строют на X структуру расслоения на поверхности дель Пеццо степени 5 над проективной плоскостью — рациональность X следует из теоремы Энриквеса о рациональности поверхности дель Пеццо степени 5 над любым полем. Для описания категории $\mathcal{A}_X$ они изучают проективизацию расслоения $\mathcal{U}_X$ на X. Оно обладает структурой расслоения на поверхности дель Пеццо степени 5 над $\mathbb{P}^3$. Производя послойную проективную двойственность, получаем пятилистное накрытие $\mathbb{P}^3$, которое оказывается изоморфно проективизации тавтологического расслоения над S. Пользуясь гомологической проективной двойственностью для $\mathrm{Gr}(2,5)$, они устанавливают связь между производными категориями этих двух многообрязий. Выполняя некоторую последовательность перестроек, мы в результате отождествляем категорию $\mathcal{A}_X$ с производной категорией поверхности S.

Второе семейство — четырехменые многообразия Гушеля–Мукаи содержащие плоскость определенного вида. Кузнецов и Перри доказывают, что такие многообразия бирациональны четырехмерным кубикам, а их категории $\mathcal{A}_X$ эквивалентны аналогичным категориям для кубик. Тем самым, устанавлвается связь между гипотезами рациональности для многообразий Гушеля–Мукаи и четырехмерных кубик.

2.2. Линейные пространства на многооборазиях Гушеля–Мукаи и их периоды

В работе [6], написанной Оливье Дебарром в соавторстве с директором Лаборатории Алексaндом Кузнецовым изучаются схемы Гильберта прямых $F_1(X)$, плоскостей $F_2(X)$ и трехмерных пространств $F_3(X)$ на многообразиях Гушеля–Мукаи. Всякое многооборазие Гушеля–Мукаи X задается так называемыми лагранжевыми данными

$$A \subset \Lambda^3 V_6, \qquad V_5 \subset V_6,$$

где V_6 — фиксированное шестимерное пространство, A — лагранжево подпространство, а V_5 — гиперплоскость. Оказывается, схемы Гильберта $F_k(X)$ тесно связаны со стратификациями Айзенбада–Попеску–Уолтера (EPW-stratifications) $Y_A^{\geq \ell} \subset \mathbb{P}(V_6)$ и $Z^{\geq \ell} \subset \mathrm{Gr}(3, V_6)$ и их пересечениями с $\mathbb{P}(V_5)$ и $\mathrm{Gr}(3, V_5)$ соответсвенно. В частности, если X — обыкновенное четырехмерное многообразие Гушеля–Мукаи (с некоторыми явными условиями общности), то существует малое разрешение особенностей

$$F_1(X) \to \widetilde{Y}_A^{\geq 1} \times_{\mathbb{P}(V_6)} \mathbb{P}(V_5),$$

где $\widetilde{Y_A^{\geq 1}}$ — двойная EPW-секстика, расслоенное произведение имеет две обыкновенные двойные точки, а при разрешении над каждой из них вклеивается проективная прямая.

Аналогично, если X — общее (опять же с явными условиями общности) шестимерное многооборазие Гушеля–Мукаи, то существует локально тривиальное в этальной топологии $\mathbb{P}^1$-расслоение

$$F_2^\sigma(X) \to \widetilde{Y}_A^{\geq 1} \times_{\mathbb{P}(V_6)} \mathbb{P}(V_5),$$

где $F_2^\sigma(X) \subset F_2(X)$ — связная компонента, параметризующая так называемые σ-плоскости.

Пользуясь универсальными семествами над схемами Гильберта $F_1(X)$ и $F_2^\sigma(X)$ мы доказываем, что целочисленная поляризованная структура Ходжа в примитивных средних когомологиях четырех и шестимерного многообразия Гушеля–Мукаи изоморфна (с точностью до подкрутки на знак) целочисленной структуре Ходжа во вторых примитивных когомология двойной EPW-секстики $\widetilde{Y}_A^{\geq 1}$ с поляризацией заданной формой Бовиля–Богомолова.

Полученные результаты используются для описания отображения периодов из многообразия модулей четномерных многообразий Гушеля–Мукаи в пространство периодов, совпадающее с пространством периодов двойных EPW-секстик. В частности, Кузнецов и Дебарр проверяют, что отображение периодов четномерных многообразий Гушеля–Мукаи пропускается через отображение периодов двойных EPW-секстик. Ввиду теоремы Торелли для гиперкэлеровых многообразий, доказанной сотрудником Лаборатории М. Вербицким (а двойные EPW-секстики гиперкэлеровы), отсюда получается описание слоев отображения периодов для многообразий Гушеля–Мукаи.

2.3. Размерность Серра конечномерных алгебр

Как хорошо известно, неособое прооективное алгебраическое многообразие не всегда однозначно восстанавливается по ограниченной производной категории когерентных пучков на многообразии. Однако размерность многообразия однозначно определяется по производной категории. Один из способов вычислить размерность $\dim(X)$ многообразия X, исходя из категории $D^b(coh(X))$, — воспользоваться итерациями функтора Серра . Действительно, функтор Серра S_X на $D^b(coh(X))$ задается подкруткой на канонический пучок и сдвигом на $\dim(X)$. Поэтому итерации S_X^n сдвигают любой комплекс влево со "скоростью", равной $\dim(X)$. Это наблюдение можно формализовать, определив для любой триангулированной категории с функтором Серра соответствующую величину, которая и называется размерностью Серра. На языке размерности Серра можно переформулировать различные вопросы. Так, например, гипотеза о том, что производная категория многообразия большей размерности не может быть допустимой подкатегорией в производной категории многообразия меньшей размерности допускает обобщение: триангулированная категория большей размерности Серра не может быть допустимой подкатегорией в триангулированной категории меньшей размерности Серра.

Сотрудник Лаборатории А. Елагин (совместно с В. Лунцем) занимался изучением размерности Серра для производных категорий модулей над конечномерными алгебрами. Были определены верхняя и нижняя размерности Серра, что соответствует скорости движения влево левого и правого концов бимодуля Серра соответственно. В отличие от геометрической ситуации, вообще говоря, эти размерности не равны. Было показано, что для нижней размерности Серра утверждение о монотонности размерности в полуортогональных разложениях неверно. Была установлена связь между размерностью Серра и энтропией функтора Серра, определенной Димитровым, Хайденом, Кацарковым и Концевичем. Благодаря этому было доказано существование размерности Серра, а также вычислена размерность Серра для алгебр путей упорядоченных колчанов. Изучалась связь между размерностью Рукье и размерностью Серра, в связи с чем была вычислена размерность Рукье для ряда конечномерных алгебр: в том числе для колчана Бондала и для проективных прямых с орбифолдной структурой.

2.4. Тилтинг генераторы для бирациональных морфизмов относительной размерности 1

Сотрудник Лаборатории Алексей Бондал занимался вопросами описания производных категорий когерентных пучков гладких многообразий при помощи некоммутативных разрешений и бирациональной геометрии. Подход основан на интерпретации бирациональных раздутий многообразий при помощи пучков некоммутативных алгебр на раздуваемом многообразии. Подходящий пучок алгебр, построенный по бирациональному морфизму, позволяет описывать производную категорию раздутого многообразия как производную категорию модулей над этим пучком алгебр. Чтобы построить пучок алгебр, необходимо найти относительный тилтинг-генератор на раздутом многообразии, который порождает категорию локально по раздуваемой базе.

Такой подход был реализован для бирациональных флопирующих стягиваний М. Ван ден Бергом в случае стягиваний со слоями размерности не более 1. Для начала Ван ден Берг строил локальный тилтинг-генератор в окрестности каждой точки базы, а затем склеивал по базе полученные генераторы. Проблема заключалась в том, что конструкция локального генератора Ван ден Берга была неканонической, что вызвала различные затруднения при склеивании генераторов по базе в единый относительный тилтинг-генератор и ряд ограничений применимости конструкции.

А. Бондал в совместной работе с А. Бодзентой рассмотрели морфизмы гладких многообразий со слоями размерности не более 1. Благодаря известной теореме Данилова, такой морфизм особенно хорошо устроен с точки зрения программы минимальных моделей — он разлагается в композицию раздутий гладких подмногообразий коразмерности 2. Используя этот факт, А. Бондал и А. Бодзента построили канонический относительный генератор для таких морфизмов и тем самым получили описание производной категории в терминах алгебры эндоморфизмов генератора, спущенной на базу. Замечательной особенностью конструкции является то, что построенный генератор имеет неожиданно простую форму — он является прямой суммой канонического пучка и его ограничений на дивизоры дискрепантности для промежуточных раздутий.

Доказательство того, что такой объект является тилтинг-генератором, основано на детальном изучении частично упорядоченного множества промежуточных раздутий. Эти раздутия позволяют определить фильтрацию в производной категории основного раздутого многообразия, которая обладает рядом замечательных свойств, в частности доказано, что она является строгой в смысле ортогональности несравнимых элементов фильтрации по модулю их пересечений.

Так как с относительным тилтинг-генератором непосредственно связана определенная t-структура на производной категории многообразия, то необходимо было понять происхождение t-структуры построенного канонического генератора. Ван ден Берг строил свой генератор так, чтобы он был связан с одной из t-структур, построенных ранее Томом Бриджлэндом при доказательстве производной гипотезы о флопах Бондала-Орлова в размерности 3.

Используя операцию склеивания t-структур при помощи строгой фильтрации построена t-структура, для сердцевины которой канонический тилтинг-генератор является локальным инъективным генератором. Эта t-структура не является ни одной из t-структур Бриджлэнда, но тем не менее обладает рядом замечательных свойств. Она ограничивается до t-структуры на нуль-категории морфизма, что позволяет построить канонический относительный тилтинг-генератор этой нуль-категории. Кроме того, t-структура хорошо согласована с двойственностью Гротендика и допускает альтернативную конструкцию склейки при помощи другой строгой фильтрации. Построенная теория и достигнутое в работе Бодзенты–Бондала понимание для бирациональных морфизмов гладких многообразий со слоями размерности не более 1 дают твердую основу и позволяют двигаться дальше в построении относительных тилтинг-генераторов для морфизмов более высокой относительной размерности.

2.5. Производные категории однородных пространств

Этот раздел посвящен работам сотрудника Лаборатории И. Ждановского, который изучает геометрию однородных многообразий в связи с производной геометрией и геометрической теорией представлений.

В классической теории представлений хорошо известны и изучены полупростые алгебраические группы серии C, т.е. группы линейных преобразований векторного пространства, наделенного невырожденной сиплектической формой. Напомним, что алгебраическая геометрия позволяет строить неприводимые представления полупростых алгебраических групп как пространства глобальных сечений линейных расслоений на пространствах флагов и, немного шире, эквивариантных векторных расслоений на многообразиях частичных флагов, в т.ч. грассманианах. В свою очередь, геометрия рациональных однородных пространств тесно связана с теорией представлений соответствующих параболических подгрупп.

Нами было продолжено изучение сплетения теории представлений и современной алгебраической геометрии в задаче о строении производных категорий однородных пространств для групп серии C. К текущему моменту уже стало известно, что совершенно не достаточно ограничиваться неприводимыми расслоениями/представлениями для построения множества исключительных объектов в данных категориях. Детальное изучение известных примеров для малых значений размерности, позволило сформировать существенно новую точку зрения на поставленную задачу. Еще в конце 90х годов Проктором было подмечено, что разумную теорию представлений можно развить для (нередуктивных) групп линейных преобразований, сохраняющих кососимметрическую форму произвольного ранга. К сожалению, данная теория остается плохо изученной.

Нередуктивные симлектические группы легли в основу нового подхода к изучению расслоений на изотропных грассманианах. Рассматривая расслоение ортогоналов как расслоение с вырожденной формой, удалось изучить естественный класс неразложимых эквивариантных векторных расслоений, в терминах которых были построены двойственные исключительные наборы к некоторым естественным исключительным блокам. Кроме того, используя определенные коплексы векторных расслоений на проективном пространстве с формой, которые естественно считать обобщением комплекса Кошуля, удалось получить явное описание некоторых перестроек объектов в производных категориях изотропных грассманианов.

В рамках изучения нередуктивных симплектических групп и их связи с современной алгебраической геометрией было инициировано исследование строения производных категорий векторных расслоений на грассманианах при условии, что пространство нечетномерно и наделено фиксированной кососимметрической формой максимального ранга. Особое внимание уделялось субмаксимальному случаю (максимальный случай совпадает с четномерным и является вырожденным). В частности, удалось построить семейства исключительных объектов, предположительно содержащихся в первом блоке некоторого минимального лефшецева разложения производной категории.

В работах [2], [3] был исследован так называемый некоммутативный операторный граф $\mathcal{L}_\theta, \theta \in \mathbb{C}^*$, введенный М.Е.Широковым для построения каналов с положительной квантовой емкостью, имеющих нулевую n - кратную квантовую емкость. Этот пример иллюстрирует явление суперактивации квантового канала. Мы изучаем появляющиеся ассоциативные алгебры, их теорию представлений и вырождения.

Другим объектом изучения и применения методов алгебраической геометрии являлись так называемые взаимно-несмещенные базисы в n-мерном эрмитовом пространстве. А также, изучались ортогональные пары в алгебре Ли $\mathfrak{sl}(n)$ — фактически математическая формулировка задачи взаимно-несмещенных базисов. Результатом исследований стала работа [5].

Теперь более подробно остановимся на второй работе. Сформулируем определения: базисы $\{e_i\}_{i=1}^n$ и $\{f_j\}_{j=1}^n$ в эрмитовом пространстве $\mathbb{C}^n$ называются взаимно-несмешанные, если $(e_i, f_j) = \frac{1}{n}$ для любых $i, j = 1, ..., n$. Ортогональной парой в простой алгебре Ли $\mathcal{L}$ называется пара Картановских подалгебр $(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$, ортогональных по отношению к форме Киллинга. Ранее аспекты теории представлений в классификации ортогональных парах изучались Бондалом А.И. и автором в предыдущих работах и привели к изучению теории представлений так называемых алгебр Темперли-Либа.

Невзирая на простоту формулировки, вопрос описания ортогональных пар в случае $\mathfrak{sl}(6)$ сводится к очень сложной алгебро-геометрической проблеме. Тем не менее, в работе [5] удалось показать, что многообразие, параметризующее ортогональные пары в $\mathfrak{sl}(6)$ имеет 4-хмерную компоненту, что привело к формулировке гипотезы о полной классификации ортогональных пар в $\mathfrak{sl}(6)$: а именно, помимо найденной 4-хмерной компоненты есть еще несколько изолированных точек. В данной работе описывается схема доказательства существования 4-хмерной компоненте. Ключевыми моментами в доказательстве является представление многообразия решений как расслоенного произведения более простых многообразий, нахождение “общих” элементов для этих более простых многообразий и изучение слоев над этими “общими” элементами. Эти слои по модулю конечных симметрий являются эллиптическими кривыми. Детальное изучение этих кривых и привело к доказательству существования 4-хмерной компоненты.

Автором и Кочеровой А.С. также изучались вопросы классификации и построения ортогональных пар в $\mathfrak{sl}(7)$. В частности, к изучению 1-мерного семейства Петреску. Ранее, Нишоарой, было отмечено что проекторы, естественным образом, построенные по ортогональным парам, удовлетворяют коммутационным соотношениям. Это послужило мотивировкой к изучению алгебры $\mathfrak{C}$, порожденной идемпотентами $P_1, P_2; Q_1, Q_2$, удовлетворяющие соотношениям: $P_iP_j = 0; Q_iQ_j = 0, i \neq j$ и $[P_1, Q_1] = [P_2, Q_2]$, здесь $[,]$ означает обычный коммутатор. Изучались комбинаторные свойства и теория представлений этой алгебры. В частности, было показано что неприводимые представления этой алгебры не более чем двумерные и эти представления описываются точками аффинного многообразия, являющимся объединением трех пересекающихся прямых. Также было показано какие именно представления должны участвовать в описании ортогональных парах в $\mathfrak{sl}(7)$. Далее, было показано, как стартуя с этих представлений можно построить семейство Петреску. Данные результаты стали основой для двух публикаций, которые уже сданы в печать.

2.6. Производные категории и суперсвязности

Производная категория когерентных пучков на гладких комплексно-аналитических многообразиях допускает DG-оснащение, построенное в дифференциально-геометрических терминах. Этот вопрос исследован в совместной работе сотрудников Лаборатории А. Бондала и А. Рослого [4], где была определена DG-категория плоских $\bar{\partial}$-суперсвязностей и доказано, что соответствующая гомотопическая категория эквивалентна производной категории когерентных аналитических пучков. Термин "суперсвязность" восходит к Квиллену [14] и, кратко говоря, означает, что в операторе ковариантной производной добавлены внешние формы всех степеней. В случае $\bar{\partial}$-суперсвязности мы имеем дело с формами типа $(0, q)$, $q = 0, ..., n$, принимающими значения в эндоморфизмах $\mathbb{Z}$-градуированного гладкого расслоения на комплексном многообразии, так что степень оператора суперсвязности равна один. (Здесь n — размерность рассматриваемого комплексного многообразия.)

2.7. Суперсвязности и теория поля

Суперсвязности были предметом изучения не только в чисто математическом контексте, но и в контексте квантовой теории поля и теории струн (см., например, [15]). Поскольку Бондалу и Рослому важен случай плоских суперсвязностей, удовлетворяющих уравнению нулевой кривизны, они обратились к обобщенной теории типа Черна–Саймонса или, точнее говоря, к так называемой голоморфной теории Черна–Саймонса. Стандартная версия последней требует, чтобы рассматриваемое комплексное многообразие было трехмерным многообразием Калаби–Яу, но естественные обобщения позволяют уже иметь дело и с другими многообразиями; подходит, например, супер-проективное пространство $\mathbb{C}P^{3|4}$, которое представляет собой (супер)твисторное пространство для $\mathcal{N} = 4$ суперсимметричных конформных теорий, см. [16]. Суммируя эти мотивирующие эвристические рассмотрения, можно сказать, что изучение статсуммы обобщенной голоморфной теории типа Черна–Саймонса на комплексном многообразии могло бы привести к построению инвариантов этого многообразия, выраженных в свойствах пространства модулей когерентных пучков (или модулей объектов производной категории). На практике мы пока можем лишь изучить некоторые простейшие версии или, точнее, аналоги, такого построения.

2.8. Голоморфная теория Черна–Саймонса и голоморфные зацепления

Этот раздел посвещен работам сотрудника Лаборатории А. Рослого, посвященным связи между производной алгебраической геометрией (в частности, новой теории когомологий “полярным когомологиям” - построенной Рослым совместно с Б. Хесиным и сотрудником Лаборатории С. Горчинским) и квантовой теорией поля.

Статистическая сумма квантовой теории, рассматриваемая как функция параметров теории, — это производящая функция для вакуумных средних каких-то определенных наблюдаемых. В случае теории Черна–Саймонса нам проще обратиться к отдельным наблюдаемым и их корреляторам. Как и в случае (обычной) топологической теории Черна–Саймонса на трехмерном многообразии, где естественные корреляционные функции приводят к инвариантам узлов и зацеплений кривых, скажем, в S^3, в голоморфной комплексно-трехмерной версии мы ожидаем, что наблюдаемые должны быть связаны с комплексными кривыми в трехмерном комплексном многообразии. И здесь мы изучаем пока простейшие варианты. Так, мы рассматриваем голоморфную теорию типа Черна–Саймонса на $\mathbb{C}P^3$. Наблюдаемые в такой теории, действительно, можно ассоциировать с комплексными кривыми. В абелевой версии теории это приводит к понятию голоморфного индекса зацепления [11], несколько обобщающего конструкцию Атьи [1]. Как и в случае топологического, или гауссова, индекса зацепления, голоморфный индекс зацепления — это, по сути дела, индекс пересечения в подходящих гомологиях. Соответствующая теория гомологий, называемая полярные гомологии, была довольно подробно изучена, см. [11, 12, 9]. В рассматриваемом сейчас случае мы имеем дело с индексом зацепления между прямой и эллиптической кривой в $\mathbb{C}P^3$. Для сравнения: в ситуации, рассмотренной в пионерской работе Атьи, "зацеплялись" две прямые в $\mathbb{C}P^3$. Более интересно изучить инварианты кривых в $\mathbb{C}P^3$, которые даются корреляторами в неабелевой теории. В нашем случае это должны быть инварианты положения эллиптической кривой в $\mathbb{C}P^3$, голоморфный аналог инвариантов узла. Заметим, что при построениях методом теории возмущений, основой является пропагатор свободной (то есть абелевой) теории, то есть как раз уже знакомый голоморфный индекс зацепления. Важным обстоятельством здесь является также факт, что в рассматриваемом случае ряд теории возмущений состоит из конечного числа членов. Тем не менее, здесь немало технических трудностей. Нам пока удалось описать случай, когда эллиптическая кривая полностью выродилась в "n-угольник", набор последовательно пересекающихся (по циклу) прямых.

Результаты работы докладывались на семинаре "Математика и струны" в Институте Кавли Физики и Математики Вселенной (Kavli IPMU, Kashiwa, Japan) 8 ноября 2016 г.

Литература

[1] M. F. Atiyah, *Green's Functions for Self-Dual Four-Manifolds*, Adv. Math., Suppl. Stud. **7A** (1981) 129–158.

[2] Amosov G.., Zhdanovskiy I., On the non-commutative deformation of the operator graph corresponding to the Klein group, Journal of Mathematical Sciences. 2016, vol.215 No 6. p. 659-676

[3] Amosov G., Zhdanovskiy I., Structure of the algebra generated by a noncommutative operator graph which demonstrates the superactivation phenomenon for zero-error capacity, Mathematical Notes, 2016, vol. 99, No 5, p. 924-927

[4] A. Bondal, A. Rosly, *Derived categories for complex-analytic manifolds*, preprint IPMU11-0117 (Kashiwa, 2011).

[5] Bondal A., Zhdanovskiy I., Orthogonal pairs and mutually unbiased bases, Journal of Mathematical Sciences. 2016, vol.216 No 1. p. 23-40.

[6] O. Debarre, A. Kuznetsov, *Gushel–Mukai varieties: linear spaces and periods*, preprint math.AG/1605.05648.

[7] G. Dimitrov, F. Haiden, L. Katzarkov, M. Kontsevich, "Dynamical systems and categories", arXiv:1307.8418v1.

[8] A. Elagin, V. Lunts, "On Serre dimension of finite dimensional algebras", in preparation.

[9] S. Gorchinskiy, A. Rosly, *A polar complex for locally free sheaves*, Int. Math. Res. Notices **2015** (2015) 2784–2829.

[10] B. Khesin and A. Rosly, *Polar Linkings, Intersections, and Weil Pairing*, Proc. Roy. Soc. Lond. **A461** (2005) 3505–3524.

[11] B. Khesin and A. Rosly, *Polar homology*, Canad. J. Math. **55** (2003) 1100–1120.

[12] B. Khesin, A. Rosly, R. Thomas, *A Polar de Rham Theorem,* Topology **43** (2004) 1231–1246.

[13] A. Kuznetsov, A. Perry, *Derived categories of Gushel–Mukai varieties*, preprint math.AG/1605.06568.

[14] D. Quillen, *Superconnections and the Chern character,* Topology **24** (1985) 89–95.

[15] E. Witten, *Chern-Simons Gauge Theory As A String Theory,* Prog. Math., **133** (1995) 637–678.

[16] E. Witten, *Perturbative Gauge Theory As A String Theory In Twistor Space,* Commun. Math. Phys., **252** (2004) 189–258.

3. Гомологические и мотивные методы в некоммутативной геометрии

За отчетный период, в рамках темы “Гомологические и мотивные методы в некоммутативной геометрии”, сотрудники лаборатории работали над следующими вопросами.

3.1. Дифференциальные формы в доминантной топологии

М. Ровинский изучал ограничения пучков дифференциальных форм в доминантной топологии над полем k [2] на башни координатных аффинных пространств, рассматриваемых как полулинейные представления группы перестановок множества координат.

А именно, пусть $\cdots \to A_3 \to A_2 \to A_1$ – башня сюръективных, но не инъективных аффинных морфизмов аффинных пространств над полем k; $S_1 \subset S_2 \subset S_3 \subset \cdots \subset S := \bigcup_i S_i$ – согласованный набор координат на всех A_i; K — объединение полей рациональных функций всех пространств A_i. Группа перестановок $\mathfrak{S}_S$ множества S естественно действует на поле K. Тогда функтор сечений $\Gamma_A := \varinjlim \Gamma(A_i, -)$ из категории квазикогерентных доминантных пучков над полем k в категорию дискретных полулинейных представлений группы $\mathfrak{S}_S$ над полем K является вполне строгим.

Было доказано, что для каждого целого $i \geqslant 0$ этот функтор переводит (простой) квазикогерентный доминантный пучок $\Omega^i_{-/k} : X \mapsto \Omega^i_{k(X)/k}$ в неразложимый инъективный объект. Это — первый шаг в проверке гипотезы о том, что неразложимые инъективные дискретные полулинейные представления группы $\mathfrak{S}_S$ над полем K изоморфны объектам вида $\Gamma_A(\Omega^i_{-/k})$.

3.2. K-теории Моравы

Стажер Лаборатории Павел Сечин изучал алгебраические K-теории Моравы $K(n)^*$, определяемые как локализации алгебраических кобордизмов Левина–Мореля Ω^*. (Для каждого простого p и натурального n существует своя K-теория Моравы.)

А именно, зафиксируем простое число p. Назовем ориентированную теорию, определенную над $\mathbb{Z}_{(p)}$-алгеброй без кручения, p^n-типической, если логарифм соответствующий формального группового закона содержит x только в степенях сравнимых с 1 по модулю $p^n - 1$. Например, логарифм К-теории Моравы $K(n)$: $x + x^{p^n}/p + x^{p^{2n}}/p^2 + x^{p^{3n}}/p^3 + \ldots$ является таким. Теория $CH^* \otimes \mathbb{Z}_{(p)}$ также является p^n-типической.

Используя теорему Вишика, классифицирующую операции из локализаций Ω^* в ориентированные теории, мы построили операции c_i из $K(n)^*$ в произвольную p^n-типическую теорию A^*. Эти операции удовлетворяют (модифицированной) формуле Картана:

$$c_{tot}(x + y) = F_{K(n)}(c_{tot}(x), c_{tot}(y))$$

и "свободно порождают" все операции в A^* как алгебру над $A = A^*(pt)$. Поскольку эти свойства аналогичны свойствам классов Черна из K_0 в произвольную ориентированную теорию, мы называем операции c_i классами Черна.

Случай $A^* = CH^* \otimes \mathbb{Z}_{(p)}$ подробно изложен в [5]. Общий случай, в действительности, сводится к этим результатам.

В частности, если $A^* = K(n)^*$, то классы Черна позволяют определить гамма-фильтрацию на К-теории Моравы. Класс Черна c_i из $K(n)^*$ в группы Чжоу задают аддитивные отображения из i-го присоединенного фактора гамма-фильтрации в $CH^i \otimes \mathbb{Z}_{(p)}$. Более того, при $1 \le i \le p^n$ эти отображения сюрьективны. Следуя идее Н. Семенова, благодаря этому, мы можем получить следующий новый результат про кручение в группах Чжоу квадрик. Пусть квадратичная форма $q \in I^{n+2}$ (I – фундаментальный идеал кольца Витта), Q — соответствующая квадрика, тогда $CH^i(Q)$ содержит кручение не более $\mathbb{Z}/2$ при $i < 2^n$, и кручение ограничено $\mathbb{Z}/2 + \mathbb{Z}/2$ для $i = 2^n$.

3.3. Модулярные наборы

В работах сотрудника Андрея Левина и стажера Лаборатории Нины Сахаровой исследовалась стратификация пространства модулей абелевых поверхностей (тела Зигеля) по рангу группы Нерона-Севери (Neron-Severi). Проведенный анализ позволил ввести в рассмотрение новый важный геометрически мотивированный класс объектов: **Модулярные наборы (modular arrangments)**. Параллелизм этого определения с апробированными ранее позволил рассчитывать на быстрый прогресс в достижении результатов, что и подтвердилось в ходе дальнейших исследований. Тем самым введен в рассмотрение новый класс объектов геометрической природы с вычислимыми гомологиями и мотивами, что может сыграть большую роль в мотивно-гомологичеких методах при исследовании некоммутативной геометрии.

3.4. Факторизационные гомологии n-алгебр Вейля

В течение отчетного периода продолжалось изучение факторизационных гомологий n-алгебры Вейля; последние были введены в статье Н. Маркаряна "Weyl n-algebras".

Показано, что доказательство формальности операды малых дисков Lambrecht'а и Volic'а может быть переформулировано в терминах факторизационных комплексов. Известно, что на множестве отображений формальности действует алгебра Ли группы Галуа категории смешанных мотивов Тэйта, а также алгебра Ли проконечного пополнения группы Гротендика–Тейхмюллера, что почти то же самое, согласно недавним результатам Brown'а. Как показал Wilwacher, последнее действие пропускается через отображение алгебры Ли проконечного пополнения группы Гротендика–Тейхмюллера в алгебру Ли стабильных когомологий алгебры Ли поливекторных полей. К сожалению, конструкция Wilwachera очень неявная. Планируется получить более явное отображение из алгебра Ли группы Галуа категории смешанных мотивов Тэйта в когомологии алгебры Ли поливекторных полей, используя вышеупомянутый подход к отображению формальности через факторизационные гомологии n-алгебр Вейля.

Также изучалось применение факторизационных гомологий n-алгебр Вейля к инвариантам узлов и многообразий. Благодаря интегралу Концевича, который непосредственно связан с ассоциатором Дринфельда, эта тема тесно переплетается с предыдущей. Гипотеза Melvin'а–Morton'а описывает вид интеграла Концевича произвольного узла. Естественно попытаться найти ее доказательство в терминах факторизационных гомологий. Первый член в выражении, доставляемом этой гипотезой имеет почти очевидную интерпретацию в этих терминах. Этот факт составляет обобщение результата из недавно вышедшей статьи [4]. Доказательство гипотезы в полном объеме будет темой дальнейших исследований.

3.5. Категорная проколотая окрестность бесконечности

Сотрудник Лаборатории Александр Ефимов изучал геометрию произвольных дифференциально-градуированных (DG) категорий. В этом направлении были получены следующие результаты.

Была придумана конструкция категорной проколотой окрестности бесконечности для гладких DG категорий. Геометрическая мотивация конструкции следующая. Пусть X — гладкое алгебраическое многообразие над полем k характеристики нуль. Тогда можно выбрать гладкую компактификацию $Y \supset X$. Положим $D = Y - X$. Обозначим через $\hat{Y}_D$ формальную окрестность D в Y. Нас интересует проколотая окрестность $\hat{Y}_D - D$. Несмотря на то, что этот объект не является ни схемой, ни формальной схемой, корректно определена DG категория совершенных комплексов на нем, а именно:

$$\operatorname{Perf}(\hat{Y}_D - D) = (\operatorname{Perf}(\hat{Y}_D)/\operatorname{Perf}_D(\hat{Y}_D))^{\kappa},$$

где $(-)^{\kappa}$ обозначает карубиеву оболочку. При этом можно показать, что категория $\operatorname{Perf}(\hat{Y}_D - D)$ не зависит от выбора гладкой компактификации Y. Обозначим эту категорию через $\operatorname{Perf}(\hat{X}_{\infty})$.

Оказывается, что DG кагегорию $\operatorname{Perf}(\hat{X}_{\infty})$ можно естественным образом построить, стартуя с (гладкой) DG категории $\operatorname{Perf}(X)$. Более того, конструкция работает для любой гладкой DG категории B.

Для любой малой DG категории T положим $\operatorname{Ind}(T) = \text{h-proj}(T)$ — DG категория правых h-проективных DG модулей, и $Calk_T = (\operatorname{Ind}(T)/T)^{\kappa}$. Тогда проколотая окрестность бесконечности гладкой DG категории B определяется формулой

$$\hat{B}_{\infty} = \ker(\operatorname{Fun}(B, Calk_{\mathrm{k}}) \to Calk_B).$$

Было доказано, что имеется квази-эквивалентность $\operatorname{Perf}(\hat{X}_{\infty}) \cong \widehat{\operatorname{Perf}(X)}_{\infty}$. То есть, категорная конструкция согласована с геометрической. При этом функтор ограничения $\operatorname{Perf}(X) \to \operatorname{Perf}(\hat{X}_{\infty})$ соответствует композиции $\operatorname{Perf}(B) \to \operatorname{Fun}(B, \operatorname{Ind}(\mathrm{k}) \to \operatorname{Fun}(B, Calk_{\mathrm{k}})$.

Были рассмотрены различные примеры. В частности, в качестве гладкой DG категории можно взять $D^b_{coh}(S)$, где S — собственная, но не гладкая схема над k. Тогда образ функтора $D^b_{coh}(S) \to \widehat{D^b_{coh}(S)}_{\infty}$ отождествляется с $D_{sg}(S)^{op}$, где $D_{sg}(S)$ — категория особенностей.

3.6. Логарифмический комплекс Хохшильда

А. Ефимов получил конструкцию логарифмического комплекса Хохшильда в категорных терминах, используя К-теорию и К-мотивы. Обозначим через $\mathcal{M}_{dg}^{add,geom}$ категорию, обогащенную над спектрами, в которой объекты — гладкие алгебраические многообразия над k, а морфизмы из X в Y — спектры К-теории от категорий DG функторов из $\mathrm{Perf}(X)$ в $\mathrm{Perf}(Y)$. Имеем подкатегорию $\mathrm{NKM}_{\mathrm{k}}^{geom} \subset \mathcal{M}_{dg}^{add,geom}$, состоящую из гладких собственных схем. Тогда функтор логарифмического комплекса Хохшильда $C_{\bullet}^{log}(-) : \mathcal{M}_{dg}^{add,geom} \to \mathrm{Mix}_{\mathrm{k}}$ получается из функтора комплекса Хохшильда $C_{\bullet}(-) : \mathrm{NKM}_{\mathrm{k}}^{geom} \to \mathrm{Mix}_{\mathrm{k}}$ взятием левого расширения Кана. Эта конструкция лог-комплекса в частности автоматически дает весовую фильтрацию, а также позволяет формально свести вырождение спектральной последовательности, связанной с фильтрацией Ходжа–Делиня, к аналитической теории Ходжа для гладких проективных многообразий. Ожидается, что существует исключительно k-линейная конструкция логарифмического комплекса Хохшильда (не использующая К-теорию), которая работает по меньшей мере для всех гладких DG категорий.

3.7. Некоммутативная гипотеза якобиана

А. Ефимов простое доказательство некоммутативной гипотезы якобиана (для свободных ассоциативных алгебр). Доказательство использует тот факт, что некоммутативный аналог свойства этальности эквивалентен свойству гомологический эпиморфизма, то есть это такой гомоморфизм DG алгебр $A \to B$, что функтор ограничения скаляров $D(B) \to D(A)$ на производных категориях модулей является вполне строгим. Доказательство удается получить благодаря теореме Krause–Šťovíček, утверждающей, что гипотеза о телескопе верна для алгебр гомологической размерности 1. С помощью этой теоремы доказательство сводится к работе с категорией совершенных комплексов над свободной алгеброй, которая устроена довольно просто.

3.8. Категорные основания геометрии

Стажер Лаборатории Григорий Кондырев занимался вопросами категорных оснований геометрии. В частности, был построен категорный механизм, позволяющий обобщать и получать новые доказательства классических утверждений из алгебраической геометрии.

А именно, пусть $\mathscr{E}$- некоторая симметрическая моноидальная $(\infty, 2)$-категория. Тогда для любого объекта $X \in \mathscr{E}$ сконструирован функтор следа

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{E}}(X, X) \xrightarrow{\mathrm{Tr}} \mathrm{Hom}_{\mathscr{E}}(I, I),$$

где за I обозначена моноидальная единица $\mathscr{E}$. Более того, для диаграммы

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "F_X"] \arrow[d, "\varphi"'] & X \arrow[d, "\varphi"] \arrow[dl, Rightarrow, "T"'] \\ Y \arrow[r, "F_Y"'] & Y \end{tikzcd}$$

коммутативной с точностью до некоторого (не обязательно обратимого) 2-морфизма T, где объекты X и Y дуализируемы в $\mathscr{E}$, а у морфизма φ имеется правый сопряженный, был сконструирован функториальный морфизм следов

$$\mathrm{Tr}_{\mathscr{E}}(F_X) \xrightarrow{\mathrm{Tr}(\varphi, T)} \mathrm{Tr}_{\mathscr{E}}(F_Y).$$

В качестве применения этого формализма был рассмотрен частный случай, когда $\mathscr{E} = 2\mathsf{Cat}_k$ есть $(\infty, 2)$-категория стабильных, представимых k-линейных категорий и фукнторов, уважающих копределы, где k- некоторое алгебраически замкнутое поле нулевой характеристики. Согласно работе [1] для любого достаточно хорошего стека X над нашим полем $(\infty, 1)$-категория $\mathrm{Qcoh}(X) \in 2\mathsf{Cat}_k$ неограниченных коцепных комплексов квази-когерентных пучков на X является самодвойственным объектом $2\mathsf{Cat}_k$. Как следствие, к ней применим вышеразвитый формализм. В частности, для любого эндоморфизма $X \xrightarrow{f} X$ была получена эквивалентность

$$\mathrm{Tr}_{2\mathsf{Cat}_k}(f_*) \simeq \Gamma(X^f, \mathcal{O}_{X^f}) \in \mathrm{Hom}_{2\mathsf{Cat}_k}(\mathrm{Vect}_k, \mathrm{Vect}_k) \simeq \mathrm{Vect}_k,$$

где Vect_k есть $(\infty, 1)$-категория неограниченных коцепных комплексов векторных пространств над k. Далее было замечено, что любой лакс-эквивариантный пучок $E \in \mathrm{Qcoh}(X)$, т.е. пучок с морфизмом $f^*E \xrightarrow{b} E$

задает 2-коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Vect}_k \arrow[r, "\mathrm{Id}_{\mathrm{Vect}_k}"] \arrow[d, "E"'] & \mathrm{Vect}_k \arrow[d, "E"] \arrow[dl, Rightarrow, "T"'] \\
\mathrm{Qcoh}(X) \arrow[r, "f_*"'] \arrow[d, "\Gamma"'] & \mathrm{Qcoh}(X) \arrow[d, "\Gamma"] \\
\mathrm{Vect}_k \arrow[r, "\mathrm{Id}_{\mathrm{Vect}_k}"'] & \mathrm{Vect}_k,
\end{tikzcd}$$

где 2-морфизм T индуцирован лакс-эквивариантной структурой b на E. Функториальность конструкции следов, примененная к диаграмме выше, дает коммутативный треугольник

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Tr}_{\mathsf{2Cat}_k}(\mathrm{Id}_{\mathrm{Vect}_k}) \arrow[r, "\mathrm{Tr}(E,T)"] \arrow[dr, "\mathrm{Tr}(\Gamma(X,E),\mathrm{Id}_{\Gamma(X,E)}\circ T)"'] & \mathrm{Tr}_{\mathsf{2Cat}_k}(f_*) \arrow[d, "\mathrm{Tr}(\Gamma,\mathrm{Id}_\Gamma)"] \\
& \mathrm{Tr}_{\mathsf{2Cat}_k}(\mathrm{Id}_{\mathrm{Vect}_k}).
\end{tikzcd}$$

Поскольку имеется эквивалентность $\mathrm{Tr}_{\mathsf{2Cat}_k}(\mathrm{Id}_{\mathrm{Vect}_k}) \simeq k$ диаграмма выше дает равенство двух чисел. Было получено равенство

$$\mathrm{Tr}(\varphi, T) = \mathrm{Tr}_{\mathrm{Qcoh}(X^f)}\left(i^*E \simeq i^*f^*E \xrightarrow{i^*(b)} i^*E \right),$$

где $X^f \xrightarrow{i} X$ производный стек неподвижных точек f, после которого был рассмотрен частный случай, когда X является гладким, собственным алгебраическим многообразием, таким, что стек X^f дискретен. В этом случае было доказано, что полученное из треугольной диаграммы выше равенство двух чисел $\mathrm{Tr}(\Gamma(X,E), \mathrm{Id}_{\Gamma(X,E)}) = \mathrm{Tr}(\Gamma, \mathrm{Id}_\Gamma) \circ \mathrm{Tr}(E,T)$ в точности совпадает с известным в классической алгебраической геометрии равенством Атьи–Ботта

$$\mathsf{L}(E,b) = \sum_{x=f(x)} \frac{\mathrm{Tr}_{\mathrm{Vect}_k}(E_x \simeq E_{f(x)} \xrightarrow{b_x} E_x)}{\mathsf{det}(1 - d_x f)},$$

где $\mathsf{L}(E,b) \in k$ есть число Лефшеца пары (E,b).

3.9. p-адическое интегрирование на алгебраических многообразиях

Стажер Лаборатории Александр Петров изучал p-адическое интегрирование на алгебраических многообразиях. Если дана замкнутая 1-форма на гладком многообразии над p-адическим полем, можно задаться вопросом о том, как сопоставить этой форме ее интеграл, то есть аналитическую функцию, дифференциал которой равен данной форме. В отличие от комплексно-аналитической ситуации, в p-адической топологии существует очень много локально постоянных аналитических функций, так что интеграл определен совершенно не однозначно, даже если зафиксировать значение интеграла в какой-нибудь точке. Но оказывается, что, тем не менее, можно выбрать эти интегралы функториально относительно пары (многообразие, форма). Это в 1998 году было показано Пьером Кольмезом, а также проверено что при дополнительных ограничениях на интегралы существует ровно один такой выбор.

В 2001 году Вадим Вологодский обобщил [6] конструкцию функториального интегрирования на следующую ситуацию. Рассмотрим категорию унипотентных расслоений с плоской связностью на многообразии X, то есть расслоений с плоской связностью, допускающих фильтрацию, присоединенные факторы которой являются тривиальными расслоениями со связностью. Будем называть интегрированием морфизм функторов слоя над двумя выбранными точками. Вологодский построил такое интегрирование, удовлетворяющее естественным условиям функториальности. Для расслоений с фильтрацией длины 2 это включает в себя ситуацию из предыдущего абзаца, так как по 1-форме ω можно построить связность на тривиальном расслоении длины 2, заданную матрицей $\left(\begin{smallmatrix} d & \wedge\omega \\ 0 & d \end{smallmatrix}\right)$. Также Вологодским была высказана гипотеза о единственности интегрирования, удовлетворяющего таким условиям.

Гипотеза была проверена для многообразий, допускаюших подъем эндоморфизма Фробениуса (то есть проверено, что любые два функториальных интегрирования на таких многообразиях совпадают). Также было сделано наблюдение о том, что если морфизм многообразий индуцирует изоморфизм на факторах по n-ому члену нижнего центрального ряда топологической фундаментальной группы, то гипотезы для этих многообразий равносильны. Используя это и конструкцию Хайна унипотентного многообразия Альбанезе, гипотеза была, в частности, проверена для эллиптической кривой с выколотой точкой для фильтраций длины 3.

3.10. Вектора Витта

Дмитрий Каледин построил и изучил некоммутативное обобщение классического функтора p-типических векторов Витта.

А именно, исходная конструкция Витта и Тейхмюллера сопоставляет каждому коммутативному кольцу A другое коммутативное кольцо $W(A)$, которое является итерированным расширением A с помощью себя самого (например, если A — поле $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, то $W(A)$ – кольцо p-адических чисел $\mathbb{Z}_p$). Эта конкструкия замечательна своей функториальностью: мы получаем функториальный способ поднять кольцо характеристики p до кольца характеристики 0.

Для некоммутативных колец, вектора Витта были построены Л. Хесселхолтом в 1995 году. При этом $W(A)$, вообще говоря, кольцом уже не является, а является только абелевой группой, и получается не итерированным расширением A, а итерированным расширением $A/[A, A]$, т.е. фактора A по абелевой подгруппе, порожденной коммутаторами. Концептуальная причина такого поведения в том, что вектора Витта на самом деле обобщают не само кольцо A, а его гомологии Хохшильда $HH_*(A)$. В гомологической степени 0 имеем $HH_0(A) = A/[A, A]$; в высших степенях хотелось бы иметь новую гомологическую теорию, которая даже для коммутативных колец даст новую информацию — а именно, позволит совершенно инвариантно построить комплекс де Рама–Витта, некоторое расширение комплекса де Рама, важное в изучении кристаллических когомологий.

Кроме того, гомологии Хохшильда вообще говоря зависят от двух аргументов, алгебры A и A-бимодуля M, и естественно ожидать, что новая гомологическая теория также будет существовать в такой общности. При этом если A — просто конечное поле k, то теория сведется к некоторому полиномиальному функтору из k-векторных пространств в абелевы группы. При этом известно, что если удастся ввести на построенном функторе структуру так называемого следового функтора (trace functor), то продолжение теории на любые алгебры и бимодули происходит совершенно автоматически.

В этом году это было осуществено в работах Д. Каледина. А именно, для каждого совершенного поля k фиксированной положительной характеристики p, построена проективая система полиномиальных функторов

W_n из k-векторных пространств в абелевы группы. Проективный предел W этой системы дает универсальное поднятие k-векторного пространства M до абелевой группы без кручения, причем $W(M)$ имеет естественную фильтрацию, присоединенные градуированные факторы которой суть циклические степени M степеней p^n (т.е. факторы тензорных степеней $M^{\otimes p^n}$ по действию циклической группы порядка p^n). Конструкция функторов W_n весьма простая и явная, и использует только элементарные гомологические свойства циклических групп, попутно позволяя прояснить и усилить некоторые сложные комбинаторные результаты из работы Л. Хесселхолта. Также без особого труда удалось доказать, что W_n имеют естественную структуру следовых функторов, что позволяет неделенно обобщить их до теории гомологий любых k-алгебр с коэффициентами в произвольном бимодуле.

Литература

[1] D. Ben-Zvi, J. Francis, D. Nadler, *Integral transforms and Drinfeld centers in derived algebraic geometry*, arXiv preprint arXiv:0805.0157,

[2] U. Jannsen, M. Rovinsky, *Smooth representations and sheaves*, Moscow Mathematical Journal 10 (1), 189–214.

[3] N. Markarian, *Weyl n-algebras*, arXiv preprint arXiv:1504.01931.

[4] N. Markarian, *Weyl n-algebras and Kontsevich integral of unknot*, arXiv preprint arXiv:1509.03415.

[5] P. Sechin, *Chern classes for Morava K-theories*, arXiv preprint arXiv:1605.04444.

[6] V. Vologodsky, *Hodge structure on the fundamental group and its application to p-adic integration*, Mosc. Math. J, 3(1), 205–247.

4. Специальные многообразия

4.1. Эргодическая теория и симплектическая геометрия

Доказательство глобальной теоремы Торелли для гиперкэлеровых многообразий привело к созданию новой парадигмы в теории пространств модулей. Пусть $\mathfrak{X}$ – пространство каких-то геометрических структур на многообразии M, скажем, симплектических структур, комплексных структур, G_2-структур и так далее. Мы определяем "пространство Тейхмюллера" Teich как фактор $\mathfrak{X}$ по действию Diff_0, связной компоненты группы диффеоморфизмов, и "пространство модулей" как фактор $\mathfrak{X}$ по действию группы диффеоморфизмов Diff. Определим "группу Тейхмюллера" Γ (она же "группа классов отображений") как фактор $\operatorname{Diff} / \operatorname{Diff}_0$. Вопросы теории пространств модулей можно интерпретировать как вопросы динамики действия Γ на пространстве Тейхмюллера. Оказывается, действие Γ на Teich довольно часто эргодично, в частности, общая орбита этого действия плотна. В такой ситуации, методы эргодической теории часто позволяют явно описать множество плотных орбит действия Γ.

Для каждого полунепрерывного инварианта геометрической структуры, принимающего значения в $\mathbb{R}$, соответствующая функция $\operatorname{Teich} \longleftarrow \mathbb{R}$ постоянна на всех плотных орбитах.

Это наблюдение (вместе с описанием плотных орбит, полученным, исходя из теоремы Ратнер в [V1] и [EV]) позволило решить большое число давно стоявших задач и гипотез.

В опубликованных ранее работах [V1] и [KLV], эргодичность действия группы классов отображений на пространстве Тейхмюллера комплексных структур применялась к нахождению метрики Кобаяши на гиперкэлеровом многообразии. В работе [V1] было доказано, что эта метрика вырождена, а в [KLV] - что она равна нулю на многообразиях, у которых есть деформации, допускающие лагранжево слоение.

Два препринта, вышедшие в 2016-м, посвящены усилению этих результатов. В [KamV], написанной сотрудником Лаборатории М. Вербицким совместно с Людмилой Каменовой, доказано, что проективное гиперкэлерово многообразие с рангом Пикара больше 2 (а если верна SYZ-гипотеза, то больше 1), не “алгебраически гиперболична”; это условие, которое сильнее гиперболичности, было определено и изучено Ж.-П. Демайли.

В работе [BKLV], написанной научным руководителем Лаборатории Ф. Богомоловым и М. Вербицким совместно с Л. Каменовой и С. Лу обсуждается несколько стратегий дальнейшего усиления этих результатов. Во-первых, доказано, что на гиперкэлеровом многообразии в предположении существования деформации, допускающей лагранжево расслоение, зануляется и финслерова структура Кобаяши-Ройдена, а не только метрика Кобаяши, полученная из финслеровой метрики Кобаяши-Ройдена интегрированием. Это утверждение было бы тривиально, если бы метрика Кобаяши-Ройдена была бы непрерывна, но она только полунепрерывна, и ее зануление – это более сильное утверждение.

Также в [BKLV] обсуждается структура групп автоморфизмов и свойства метрики Кобаяши в присутствии автоморфизмов бесконечного порядка. Обсуждается гипотеза о том, что метрика Кобаяши на таком многообразии везде вырождена. Также доказано, что метрический фактор Кобаяши (как и сама метрика) один и тот же на всех плотных орбитах действита группы классов отображений. Наконец, в этой работе определены абсолютные значения собственных значенй в когомологиях и размерности соответствующих собственных пространств для любого автоморфизма гиперкэлерова многообразия.

Другое приложение эргодического действия нашлось в совместной работе М. Вербицкого и М. Энтова [EV], вышедшей в 2016-м. В этой работе обсуждаются паковочные константы гиперкэлеровых многообтазий. Паковочные константы это полунепрерывный инвариант симплектического многообразия, полученный следующим образом. Пусть (K, ω_K) – $2n$-мерное симплектическое многообразие конечного объема, например, объединение симплектических шаров, а – (M, ω_M) симплектическое многообразие. Мы предполагаем, что K допускает симплектическое вложение в обраниченное подмножество в $\mathbb{R}^{2n}$ с плоской симплектической структурой. Соответствующая **паковочная константа** есть супремум всех ϵ, таких, что $(K, \epsilon\omega_K)$ допускает симплектическое вложение в (M, ω_M). Легко видеть, что такая константа полунепрерывна как функция ω_M. В работе [AV], вышедшей в 2015, было доказано, что действие группы классов отображений на симплектических структурах стандартного типа на M эргодично, если M это гиперкэлерово многообразие или тор. Используя теорему Ратнер, Энтов и Вербицкий доказали, что орбита группы классов отображений на стандартных симплектических структурах фиксированного объема плотна тогда и только тогда, когда эта структура иррациональна.

Применяя это к паковочным константам, получаем, что эти константы универсальны, и не зависят от выбора симплектической структуры, если она иррациональна. Эти константы были посчитаны явно когда K есть объединение шаров, кубов или полидисков; в этой ситуации, эти константы ограничены симплектическим объемом многообразия, других препятствий нет.

Литература

[AV] Amerik, E., Verbitsky, M., *Teichmuller space for hyperkahler and symplectic structures*, J. Geom. Phys. 97 (2015), 44-50.

[BKLV] Fedor Bogomolov, Ljudmila Kamenova, Steven Lu, Misha Verbitsky, *On the Kobayashi pseudometric, complex automorphisms and hyperkaehler manifolds*, arXiv:1601.04333, 19 pages.

[EV] Entov, Michael; Verbitsky, Misha, *Unobstructed symplectic packing for tori and hyper-Kähler manifolds* J. Topol. Anal. 8 (2016), no. 4, 589-626.

[KLV] Kamenova, L., Lu, S., Verbitsky, M., *Kobayashi pseudometric on hyperkahler manifolds,* J. London Math. Soc. (2014) 90 (2): 436 - 450.

[KamV] Ljudmila Kamenova, Misha Verbitsky, *Algebraic non-hyperbolicity of hyperkahler manifolds with Picard rank greater than one,* arXiv:1604.02601, 7 pages,

[V1] M. Verbitsky, *Ergodic complex structures on hyperkahler manifolds*, Acta Mathematica, September 2015, Volume 215, Issue 1, pp 161-182.

4.2. Геометрия некэлеровых многообразий

Помимо работ по симплектической геометрии, сотрудник лаборатории М. Вербицкий опубликовал за отчетный период ряд работ по применению методов алгебры, анализа и дифференциальной геометрии к компактным комплексным многообразиям, не допускающим кэлеровой метрики.

Одним из главных примеров некэлеровых комплексных многообразий являются нильмногообразия. Нильмногообразия получаются как факторы нильпотентных групп Ли, снабженных левоинвариантной комплексной структурой, по левому действию кокомпактной решетки. В работе [FGV], опубликованной как препринты в отчетный период, Грантчаров, Фино и Вербицкий исследуют мероморфные функции на комплексном нильмногообразии, и, более широко, отображения из комплексного нильмногообразия в кэлерово многообразие. Они доказывают, что слои таких отображений касательны листам слоения на нильмногообразии, которое получается как минимальное комплексное расслоение, содержащее все векторы, касательные коммутанту. Это дает эффективные оценки на алгебраическую размерность нильмногообразия.

Другой интересный пример некэлеровых многообразий был определен в конце 1990-х и начале 2000-х Лопе де Медрано, Меерссеманом и Верховским, [LMV] [?], [?]. Построенные ими многообразия получены как деформации главных торических расслоений (голоморфных расслоений со слоем тор) над торическими многообразиями. В 2008-2009 годах эта конструкция была обобщена, под названием "многообразия угла-момента". Эти многообразия обобщают многообразия Хопфа и многообразия Калаби-Экмана, и описываются в комбинаторных терминах, посредством конструкции, похожей на комбинаторное описание торических многообразий. Многообразие угла-момента снабжено каноническим гладким слоением Σ, пространство листов этого слоения локально является торическим многообразием, но (для некомпактных листов) пространство листов не многообразие. В ситуации, когда листы компактны, мы возвращаемся к торическим расслоениюам на торических многообразиях, таким, как многообразия Калаби-Экмана и их обобщения: комплексные многообразия, диффеоморфные произведениям нечетномерных сфер.

В работе [PUV], написанной М. Вербицким совместно с Т. Пановым и Ю. Устиновским и опубликованной в отчетный период, получена классификация комплексных подмногообразий в многообразии угла-момента M. Построена трансверсально кэлерова метрика на Σ (из этого, в частности, следует, что Σ не зависит от выбора комбинаторного описания). Доказано, что любое компактное кэлерово подмногообразие M содержится в листе Σ, что позволяет описывать такие подмногообразия в терминах комбинаторного описания.

Это наблюдение имеет интересное приложение к общим многообразиям угла-момента, то есть многообразиям M, которые заданы общей точкой в компоненте пространства параметров. Для таких многообразий, Панов, Устиновский и Вербицкий доказали, что любое подмногообразие M есть многообразие угла-момента меньшей размерности.

В работах [OV1], [OV2], опубликованных в отчетный период, и препринте [OV3] Вербицкий совместно с Ливиу Орнеа изучает геометрию локально конформно кэлеровых (LCK) многообразий: комплексных многообразий, накрытие которых кэлерово, а монодромия этого кэлерова накрытия действует на нем гомотетиями.

В статье [OV1] доказано, что локально конформно кэлерово многообразие M с потенциалом может иметь любой LCK-ранк между 1 и $b_1(M)$, и множество LCK-структур любых рангов плотно в пространстве LCK-структур на заданном многообразии. Это позволило устранить ошибки в ряде работ по LCK-геометрии LCK-многообразий с потенциалом, где утверждалось, что LCK-ранк всегда равен 1.

В работе [OV2] Орнеа и Вербицкий классифицируют все LCK-метрики на LCK-многообразиях с потенциалом и LCK-рангом 1. Оказывается, что такие метрики однозначно задаются псевдовыпуклыми гиперповерхностями в кэлеровом $\mathbb{Z}$-накрытии, содержащими 0 у пересекающимися с каждой орбитой конического действия $\mathbb{R}$ на накрытии ровно один раз.

В препринте [OV3], доказано, что нормализация двумерного комплексного подмногообразия в многообразии Хопфа изоморфна поверхности Хопфа. Доказательство этого факта оказалось неожиданно нетривиально, и использует классификацию положительных точных потоков на поверхностях, полученную сравнительно недавно в работах Чиосе-Тома и Брунеллы [Br], [CT].

Статья [ATV] посвящена вычислению когомологического инварианта δ, определенного в работах Анжелла и Томассини. Д. Анжелла и А. Томассини, совместно с М. Вербицким, вычисляют этот инвариант для поверхности.

Литература

[ATV] Daniele Angella, Adriano Tomassini, Misha Verbitsky, *On non-Kähler degrees of complex manifolds*, arXiv:1605.03368

[Br] M. Brunella, *A characterization of Inoue surfaces* Comment. Math. Helv. **88** (2013), no. 4, 859–874.

[CT] I. Chiose, M. Toma, *On compact complex surfaces of Kähler rank one*, Amer. J. Math. **135** (2013), no. 3, 851–860.

[FGV] Anna Fino, Gueo Grantcharov, Misha Verbitsky, *Algebraic dimension of complex nilmanifolds*, arXiv:1603.01877, 20 pages

[LMV] S. López de Medrano, A. Verjovsky, *A new family of complex, compact, non-symplectic manifolds,* Bol. Soc. Brasil. Mat. 20 (1997) 2.

[OV1] Ornea, Liviu; Verbitsky, Misha, *LCK rank of locally conformally Kähler manifolds with potential* J. Geom. Phys. 107 (2016), 92-98.

[OV2] Ornea, Liviu; Verbitsky, Misha *Locally conformally Kähler metrics obtained from pseudoconvex shells*, Proc. Amer. Math. Soc. 144 (2016), no. 1, 325-335.

[OV3] Liviu Ornea, Misha Verbitsky, *Hopf surfaces in locally conformally Kähler manifolds with potential*, 10 pages, arXiv:1601.07421.

[PUV] Panov, Taras; Ustinovskiy, Yury; Verbitsky, Misha, *Complex geometry of moment-angle manifolds*, Math. Z. 284 (2016), no. 1-2, 309-333.

4.3. Геометрия кэлерова конуса

В работах сотрудников Лаборатории Е. Америк и М. Вербицкого изучается кэлеров конус гиперкэлерова многообразия. Несколько раньше они доказали гипотезу Каваматы–Моррисона о конусе для таких многообразий. Это утверждение о том, что кэлеров (точнее, обильный) конус гиперкэлерова многообразия является конечным полиэдром с точностью до действия группы автоморфизмов. Гипотеза Каваматы-Моррисона в свою очередь сводится к утверждению, что группа ходжевой монодромии действует с конечным числом орбит на некоторых отрицательных целочисленных классах когомологий типа (1,1), называемых MBM классами (ортогональные к этим классам гиперплоскости как раз и задают грани кэлерова конуса). Отсюда видно, что квадрат Бовилля–Богомолова MBM класса ограничен (действительно, монодромия действует изометриями) в зависимости от многообразия X. Но для приложений существенен вопрос, можно ли найти не зависящую от X (а зависящую только от его топологического типа) оценку на этот квадрат. Это доказано в препринте [AV1], написанной в отчетный период. В нем методы работы с гиперплоскостями в гиперболическом пространстве, которые происходят из эргодической теории и привели Америк и Вербицкого к доказательству гипотезы Кавамата–Моррисона о конусе, переносятся на параболические орбиты специального вида в более общем однородном пространстве. Как следствие, получается, что квадрат Бовилля–Богомолова MBM класса на X ограничен числом, не зависящим от X, а зависящим только от его топологического типа.

В следующей работе [AV2] Америк и Вербицкого этот результат применяется для доказательства, что любое гиперкэлерово многообразие имеет деформации с автоморфизмами некоторого заданного типа (гиперболическими, или в случае большого второго числа Бетти — параболическими). Доказательство это основано на полученном Э. Маркманом следствии из глобальной теоремы Торелли — о том, что построение автоморфизма эквивалентно нахождению элемента ходжевой монодромии, сохраняющего кэлеров конус. Кэлеров конус будет равен положительному в отсутствие MBM классов, а последнее гарантировано, если форма Бовилля-Богомолова на $H^2(X, \mathbb{Z})$ не представляет малых целых чисел (кроме, возможно, нуля). Таким образом, этот результат — следствие исследований Америк и Вербицкого об ограниченности квадрата.

Статья, содержащая доказательство гипотезы Кавамата–Моррисона о конусе, в этом году принята в журнал Annales Scientifiques de l'Ecole Normale Supérieure, ее окончательная версия написана в 2016-м году.

Эти работы опираются на параллель между гиперболической геометрией и геометрией кэлерова конуса гиперкэлеровых многообразий, разработанной в совместной статье Америк и Вербицкого [AV3], опубликованной в отчетный период. В этой работе построено соответствие между гиперболической геометрией проективизации P обильного конуса гиперкэлерова многообразия M и геометрией многообразия. В частности, доказано, что фактор P по группе автоморфизмов M есть конечный полиэдр в гиперболическом многообразии конечного типа, а каспы этого фактора соответствуют целочисленным параболическим неф-классам на многообразии M. В частности, это доказывает, что у каждого гиперкэлерова многообразия с рангом решетки Нерона-Севери ≥ 5 есть бирациональная модель, которая имеет целочисленный параболический неф-класс, и (если SYZ-гипотеза верна) допускает лагранжево расслоение.

4.4. Эндоморфизмы проективных расслоений

Е. Америк и А. Кузнецовой изучались эндоморфизмы проективных расслоений, в продолжение статьи [А]. В той статье было доказано, что проективное расслоение над проективным многообразием допускает эндоморфизм степени больше 1, коммутирующий с проекцией на базу, если и только если расслоение тривиализуется после конечного накрытия. Еще было доказано для расслоений на проективные прямые, что существование эндоморфизмов степени больше 1, не обязательно коммутирующих с проекцией на базу, связано с расщеплением расслоения. В заметке с А. Кузнецовой был доказан результат того же типа для расслоений произвольного ранга. А именно, если первые когомологии линейных расслоений на базе B обращаются в нуль и В односвязна, то расслоение над B с эндоморфизмами должно полностью расщепляться. По нашим результатам была написана заметка [АК].

4.5. Специальные бор–зоммерфельдовы лагранжевы подмногообразия

Сотрудник Лаборатории Н. А. Тюрин в отчетный период занимался геометрией подмногообразий Бора-Зоммерфельда.

Сущность зеркальной симметрии в наибольшей общности была выражена Ю.И. Маниным как "двойственность симплектической геометрии и комплексной кэлеровой геометрии". Два алгебраических кэлеровых многообразия M, W понимаются как "зеркальные партнеры", если некоторые производные объекты, получаемые в рамках алгебраической и симплектической геометрий M, W перекрестно эквивалентны: например, в Гомологической зекральной симметрии М. Концевича производная категория когерентных пучков M должна быть эквивалентна категории Фукая–Флоера W и наоборот.

А.Н. Тюрин, посвятивший много лет исследованию стабильных векторных расслоений, преполагал более геометрическое соответствие: соответствие между векторными расслоениями и лагранжевыми подмногообразиями. При этом главная проблема — в "бесконечности" лагранжевой геометрии в противовес конечномерности геометрии алгебраической.

Эта проблема решается введением условий специальности на лагранжевы подмногообразия: развивая идею калиброванных лагранжевых циклов, Д. МакЛин и Н. Хитчин предложили условие специальности на лагранжевы подмногообразия кэлеровых многообразий Калаби–Яу, которое приводило к конечномерным модулям. Однако многолетные попытки построить специальные лагранжевы слоения на гладких многообразиях Калаби–Яу не увенчались успехом, что привело к постепенному спаду популярности SYZ-конструкции в кругах математических физиков, сконцентрировавшихся на гомологическом подходе М. Концевича. По замечанию А.Н. Тюрина, условие Бора–Зоммерфельда "трансверсально" условию специальности в случае Калаби–Яу, откуда можно было бы определять конечные инварианты для трифолдов Калаби–Яу, зеркальные инвариантам Кассонса. Мы развиваем эту идею, вводя новое условие специальности на бор–зоммерфельдовы лагранжевы подмногообразия, что приводит к интересным наблюдениям.

Пусть (M, ω) — компактное односвязное сиплектическое многообразие, удовлетворяющее условию Бора–Зоммерфельда: класс $[\omega] \in H^2(M, \mathbb{R})$ является целочисленным. Тогда зафиксируем данные предквантования: линейное расслоение $L \to M$ и эрмитову связность a на нем, такие что форма кривизны $F_a = 2\pi i \omega$, при этом такая связность последним условием определена однозначно с точностью до калибровочного преобразования. Лагранжево подмногообразие $S \subset M$ удовлетворяет условию Бора - Зоммерфельда (BS для краткости), если ограничение $(L, a)|_S$ допускает ковариантно постоянное сечение σ_S.

Пусть $s \in \Gamma(M, L)$ — произвольное гладкое сечение L.

Определение. *Назовем BS- лагранжево подмногообразие S специальным относительно сечения s, если $s|_S$ нигде не обращается в нуль на S и коэффициент пропорциональности $\alpha(s, S)$, определяемый из равенства $s|_S = \alpha(S, s)\sigma_S$, имеет постоянный аргумент.*

Так как это определение не зависит от домножений сечения s на любую ненулевую константу, то на самом деле мы определели соотношение, выделяющее "цикл инциденции" в прямом произведении

$$\mathcal{U}_{SBS} \subset \mathbb{P}(\Gamma(M, L)) \times \mathcal{B}_S,$$

где последним символом обозначается многообразие модулей бор–зоммерфельдовых циклов фиксированного топологического типа. А именно, пара (p, S) принадлежит $\mathcal{U}_{SBS}$, если S является специальным бор–зоммерфельдовым относительно сечения s, класс которого определен точкой p проективизации пространства сечений. Естественным образом определены проекции p_1, p_2 на первый и второй прямые сомножители.

“Конечность” множества специальных бор–зоммерфельдовых подмногообразий отражена в следующем факте:

Теорема 1. *Проекция* $p_1 : \mathcal{U}_{SBS} \to \mathbb{P}(\Gamma(M, L))$ *обладает структурой многолистного накрытия над образом* $\operatorname{Im} p_1 \subset \mathbb{P}(\Gamma(M, L))$.

Отсюда немедленно вытекает

Следствие. *Простанство* $\mathcal{U}_{SBS}$ *обладает кэлеровой структурой.*

Заметим, что в самом общем случае это позволяет использовать пространство $\mathcal{U}_{SBS}$ в обобщении квантования Сурьо–Костанта.

Однако нас интересует случай очень конкретный: пусть наше симплектическое многообразие (M, ω) обладает интегрируемой комплексной структурой I, согласованной с ω. Это значит, что M есть алгебраическое многообразие с главной поляризацией, задаваемой голоморфным расслоением L. Тогда мы получаем конечномерное подпространство $\mathbb{P}(H^0(M_I, L)) \subset \mathbb{P}(\Gamma(M, L))$ голоморфных сечений и редуцированный цикл инциденции

$$\mathcal{M}_{SBS} \subset \mathbb{P}(H^0(M_I, L)) \times \mathcal{B}_S$$

вместе с двумя естественными проекциями на прямые сомножители, которые мы снова обозначаем как p_i. В качестве следствия из Теоремы 1 мы получаем, что многообразие модулей $\mathcal{M}_{SBS}$ — конечномерно и кэлерово.

Таким образом, для произвольного односвязного алгебраического многообразия X возможно построение следующего семейства многообразий модулей: возьмем произвольное очень обильное линейное расслоение $L \to X$, вложим полным линейным рядом $|L|$ наше многообразие X в проективное пространство, двойственное $\mathbb{P}H^0(X, L)$, и поднимем с этого проективного пространства на X стандартную кэлерову форму. Рассмотрим эту форму как симплектическую форму — и мы попадаем в точности в ситуацию, описанную выше, исходную для построения многообразий модулей SBS-лагранжевых подмногообразий. Каждое такое многообразие при фиксированном L характеризуется топологическими данными: классом $[S] \in H_n(X, \mathbb{Z})$ в средних когомологиях X и топологическим типом S. Таким образом, каждое $\mathcal{M}_{SBS}$ может быть маркировано топологическими данными

$$\mathcal{M}_{SBS} = \mathcal{M}_{SBS}(S, [S], c_1(L)), \quad c_1(L) \in H^2(X, \mathbb{Z}).$$

Заметим, что даже для близких расслоений эти многообразия могут не совпадать: в примере, представленном ниже, оказывается, что для некоторого L многообразия пусты, в то время как для L^2 это не так.

Пример. Возьмем в качестве M простейшее возможное компактное односвязное симплектическое многообразие — комплексную проективную прямую $\mathbb{CP}^1$ со стандартной комплексной структурой. Если взять в качестве очень обильного расслоения L расслоение $\mathcal{O}(1)$, то $\mathcal{M}_{SBS}(S^1, 0, h)$ оказывается пустым множеством потому что ни для одной гладкой петли на $\mathbb{CP}^1$ не выполняется условие Бора–Зоммерфельда. Если взять в качестве L расслоение $\mathcal{O}(2)$, то любая петля, разделяющая сферу $S^2 = \mathbb{CP}^1$ на пару областей с равными симплектическими площадями (равными ± 1), удовлетворяет условию Бора–Зоммерфельда. Далее, любое голоморфное сечение с точностью до умножения на константу определяется парой точек (возможно совпадающих), в которых это сечение обращается в нуль. В этом случае $\mathcal{M}_{SBS}(S^1, 0, 2h)$ естественно изоморфно $\mathbb{CP}^2 \backslash Q$, где коника Q есть образ $\mathbb{CP}^1$ при вложении Веронезе. Более точно, в этом случае: (1) образом $p_1(\mathcal{M}_{SBS}) \subset \mathbb{P}(H^0(M_I, L)) = \mathbb{CP}^2$ будут сечения с некратными нулями; (2) слои p_1 состоят из единственных точек; (3) кэлерова структура с $\mathbb{CP}^2$ поднимается до кэлеровой структуры на $\mathcal{M}_{SBS}(S^1, 0, 2h)$.

4.6. Когомологии гиперкэлеровых многообразий

Получение ограничений на числа Бетти гиперкэлеровых многообразий является первым шагом в доказательстве важной гипотезы Бовилля об ограниченности числа гиперкэлеровых многообразий в каждой размерности. В своё время Гуан доказал конечность числа возможных наборов чисел Бетти для гиперкэлеровых многообразий в размерности четыре. В больших размерностях можно получить ограничения на числа Бетти, используя теоремы Вербицкого и Луенги–Лунца о действии алгебры Ли $\mathfrak{so}(b_2 + 2)$ на когомологиях и инварианты Розанского–Виттена.

Никоном Курносовым, стажером лаборатории, были получены неравенства на числа Бетти гиперкэлеровых многообразий, следующие из значений инвариантов Розанского–Виттена для простых графов, определённых в работах Сейвона и Хитчина.

В качестве применений этих результатов, Курносовым были получены ограничения [K] на число возможных гиперкэлеровых многообразий в размерности шесть с $b_2 = 23$, т.е. имеющих то же второе число Бетти, как и схема Гильберта трёх точек над $K3$. Это было сделано с использованием ранее полученного неравенства на числа Бетти и результатов Сейвона для шестимерных гиперкэлеровых многообразий. Также результаты Сейвона были обобщены на размерности восемь и десять и выдвинута общая гипотеза о оценки на второе число Бетти для простых гиперкэлеровых многообразий.

4.7. Послойная стабильность векторных расслоений на твисторных пространствах гиперкэлеровых многообразий

Стажер Лаборатории Артур Томберг занимался вопросами стабильности векторных расслоений на пространстве твисторов гиперкэлерова многообразия.

Гиперкэлерово многообразие (M, I, J, K, g) есть гладкое многообразие с тройкой интегрируемых почти комплексных структур, удовлетворяющих кватернионным соотношениям

$$I^2 = J^2 = K^2 = -1,\ IJ = K,$$

и римановой метрикой, сохраняющей эти три структуры, и такой что соответствующие эрмитовы формы замкнуты. Это определение было впервые предложено Э. Калаби [C]. Легко видеть, что на таком многообразии мы имеем 2-сферу интегрируемых почти комплексных структур

$$S^2 = \left\{ aI + bJ + cK : a^2 + b^2 + c^2 = 1 \right\},$$

из которых строится твисторное пространство $\mathrm{Tw}(M) = M \times S^2$, параметризующее эти структуры в точках M; отождествляя S^2 с $\mathbb{CP}^1$, можно показать [S], что $\mathrm{Tw}(M)$ обладает естественной комплексной структурой, такой что проекция $\pi : \mathrm{Tw}(M) \to \mathbb{CP}^1$ голоморфна.

Для компактного гиперкэлерова M, $\mathrm{Tw}(M)$ никогда не бывает кэлеровым [H], однако, как было доказано Д. Калединым и М. Вербицким в статье [KV], оно удовлетворяет условию сбалансированности [M]; эрмитова метрика на многообразии называется сбалансированной, если соответствующая эрмитова форма ω удовлетворяет условию $d\omega^{n-1} = 0$, где n — комплексная размерность многообразия. Сбалансированность многообразия является достаточным условием для существования адекватной структуры пространства модулей расслоений [LY]. Таким образом, имеет смысл изучать стабильные расслоения на $\mathrm{Tw}(M)$ и их ограничения на слои твисторной проекции $\pi : \mathrm{Tw}(M) \to \mathbb{CP}^1$.

В статье [KV] доказывается, что если расслоение E на $\mathrm{Tw}(M)$ стабильно ограничивается на общий слой твисторной проекции $\pi : \mathrm{Tw}(M) \to$

$\mathbb{CP}^1$, оно является простым, то есть не имеет подпучков строго меньшего ранга. В данный момент почти закончена работа [To2], в которой приводится доказательство обратного утверждения. Ключевым моментом доказательства является обобщение результата А. Телемана об открытости по Зарисскому условия стабильности в семействах голоморфных расслоений на фиксированном комплексном многообразии [Te] на случай твисторной проекции $\pi : \mathrm{Tw}(M) \to \mathbb{CP}^1$, в слоях которой комплексная структура на M варьируется. В [To2] также приводится пример стабильного расслоения на твисторном пространстве $\mathrm{Tw}(M)$, которое нестабильно ограничивается на все слои твисторной проекции.

В дальнейшем планируется обобщить этот результат на случай гиперкомплексного многообразия M, чье твисторное пространство $\mathrm{Tw}(M)$ также допускает сбалансированную метрику [To1].

4.8. Геометрия гамильтоновых многообразий с инвариантными изотропными подмногообразиями.

Симплектические многообразия играют важную роль в современной алгебраической геометрии. В последнее время было замечено, что структура действия группы G на алгебраическом многообразии, а также структура орбит действия ее борелевской подгруппы непосредственно связана с G-эквивариантной симплектической геометрии их кокасательных расслоений. В связи с этим, возникает множество вопросов об обобщении результатов об эквивариантной симплектической геометрии кокасательных расслоений на более общие классы симплектических многообразий.

Сотрудником лаборатории В. С. Жгуном совместно с Д. А. Тимашевым были начаты исследования симплектических многообразий содержащих G-инвариантные лагранжевы многообразия. Напомним, что для многообразия X сложность — это коразмерность типичной орбиты в X борелевской подгруппы B в G, а ранг — это ранг решетки характеров B-полуинвариантных функций на X. В. С. Жгун совместно с Д. А. Тимашевым доказали следующую теорему. Пусть M — симплектическое многообразие, снабженное отображением моментов, тогда все G-инвариантные лагранжевы подмногообразия в M имеют одинаковую сложность и ранг. Более того, сложность и ранг G-инвариантного лагранжева подмногообразия могут быть выражены через симплектические инварианты M, а именно через коранг и дефект. Напомним, что корангом симплектического многообразия M называется ранг ограничения симплектической формы на косоортогональное дополнение к касательному пространству к общей G-орбите в M, а дефектом называется размерность ядра ограничения симплектической формы на касательное пространство к общей G-орбите в M. Отметим также, что эти инварианты могут быть выражены через размерность образа отображения моментов и размерность рационального фактора этого образа по группе G. Результаты указанные выше подчеркивают важность исследований инвариантных лагранжевых подмногообразий.

В текущем году ими было введено понятие нульконуса для G-инвариантного подмногообразия S в M: а именно, это подмножество точек замыкания орбит которых имеет непустое пересечение с S. Это понятие обобщает понятие нульконуса векторного пространства, где в качестве S берется точка 0. В случае, когда S является гладким изотропным подмногообразием в симплектическом многообразии M, снабженным отображением моментов, мы показали, что пересечение нульслоя отображения моментов и нульконуса многообразия S является также изотропным.

4.9. Эргодические свойства многомерных алгоритмов деления с остатком

Основным предметом изучения Александры Скрипченко, сотрудника лаборатории, являются эргодические свойства некоторых многомерных алгоритмов деления с остатком, в частности, алгоритма Арну–Рози–Пуанкаре.

Многомерные алгоритмы деления с остатком появились как способ нахождения хороших рациональных приближений для данного вектора. Алгоритм Арну–Рози–Пуанкаре — это трехмерный алгоритм, который определен в проективном треугольнике и является комбинацией двух известных алгоритмов: Арну–Рози, определенного на специальном фрактальном множестве, называемом в литературе Rauzy Gasket, и заключающегося в вычитании суммы двух меньших компонент из наибольшей, и алгоритма Пуанкаре, действующем на дополнении к этому множеству и состоящего в вычитании наименьшей компоненты из средней и средней — из наибольшей, действующей на дополнении в упомянутому множеству.

Алгоритм Арну–Рози–Пуанкаре наряду с алгоритмом Бруна считается оптимальным трехмерным алгоритмом с точки зрения ряда диофантовых свойств. Символическая динамика для этого алгоритма была описана в [BL]. В недавлей работе А. Скрипченко показывает эргодичность и строим инвариантную меру для ускоренной версии рассматриваемого алгоритма и доказываем ее абсолютную непрерывность. Кроме того, с помощью теоремы Оселедца мы определяем ляпуновский спектр, который, в частности, отвечает за скорость сходимости нашего алгоритма, и доказываем важнейшие свойства спектра, в частности простоту и свойство Пизо. Наше доказательство простоты спектра частично использует результаты, полученные в [AHS], для алгоритма Арну–Рози.

Похожие результаты для других многомерных алгоритмов деления с остатком были получены ранее в [BN].

Это совместная работа с Pierre Arnoux (Марсель, Франция), Valérie Berthé (Париж, Франция) и Sébastien Labbé (Льеж, Бельгия). Результаты готовятся к публикации.

4.10. Предельные циклы полиномиальных слоений на $\mathbb{C}^2$

Рассмотрим пространство $\mathcal{A}_n$ полиномиальных дифференциальных уравнений $\dot{x} = p(x, y)$, $\dot{y} = q(x, y)$, где p, q»— многочлены степени не выше»n. Такое уравнение задаёт слоение пространства $\mathbb{C}^2$ на комплексно-одномерные поверхности.

Свойства слоений из $\mathcal{A}_n$ изучались с 60-х–70-х годов. Для типичного слоения из $\mathcal{A}_n$ все листы плотны в $\mathbb{C}^2$ (Ю.Ильяшенко, 1978). До сих пор неизвестно, как геометрически устроены листы типичного слоения из»$\mathcal{A}_n$; известно только, что типичное слоение имеет счётное число (гомологически независимых) комплексных предельных циклов»— нестягиваемых петель на листах, голономия вдоль которых нетождественна. Сперва это было доказано в статье Ю.Ильяшенко 1978г. для подмножеств полной меры в $\mathcal{A}_n$, $n \geqslant 2$, потом был получен аналогичный результат для открытого всюду плотного подмножества $\mathcal{A}_n$, $n \geqslant 3$ (Л.Ортиз-Бобадилла, Э.Розалес-Гонзалес, А.Щербаков, 1998).

Стажер лаборатории Н.Гончарук в соавторстве с Ю. Кудряшовым (Cornell University) предложила новую конструкцию счётного множества гомологически независимых комплексных предельных циклов [GK]. Эта конструкция имеет несколько преимуществ по сравнению с предыдущими:

- доказательство требует гораздо меньше вычислений;
- рассуждение работает и для открытого всюду плотного подмножества $\mathcal{A}_2$, а не только $\mathcal{A}_n$, $n \geqslant 3$;
- циклы равномерно ограничены, и рассуждение работает в некоторой окрестности $\mathcal{A}_n$ в пространстве $\mathcal{B}_{n+1}$ слоений, которые задаются уравнением степени не выше $n+1$ в любой аффинной карте $\mathbb{C}^2 \subset \mathbb{C}P^2$.

Новая конструкция комплексных предельных циклов позволяет исследовать и другие открытые подмножества в $\mathcal{B}_n$ (статья готовится к публикации). Результаты о слоениях из $\mathcal{B}_n$ особенно интересны, поскольку для типичного слоения из $\mathcal{B}_n$ неизвестны аналоги результатов о плотности листов и счетном числе комплексных предельных циклов.

По материалам исследования сделан доклад на семинаре "Dynamical systems seminar", Cornell University (14 октября 2016 г.)

Литература

[A] E. Amerik, *On endomorphisms of projective bundles*, Manuscripta mathematica, 111(1) 2003, 17–28.

[AK] E. Amerik, A. Kuznetsova, *Endomorphisms of projective bundles over a certain class of varieties*, arXiv preprint arXiv:1609.00910.

[AV1] E. Amerik, M. Verbitsky, *Collections of parabolic orbits in homogeneous spaces, homogeneous dynamics and hyperkahler geometry*, arXiv preprint arXiv:1604.03927, 12 pages.

[AV2] E. Amerik, M. Verbitsky, *Construction of automorphisms of hyperkähler manifolds*, arXiv preprint arXiv:1604.03079, 16 pages.

[AV3] Amerik, Ekaterina; Verbitsky, Misha, *Hyperbolic geometry of the ample cone of a hyperkähler manifold*, Res. Math. Sci. 3 (2016), Paper No. 7, 9 pp.

[AHS] A. Avila, P. Hubert, A. Skripchenko, *Diffusion for chaotic plane sections of 3-periodic surfaces*, Inventiones Mathematicae, **206** (1) (2016), 109–146.

[BL] V. Berthé, S. Labbé, *Factor Complexity of S-adic words generated by the Arnoux–Rauzy–Poincaré Algorithm*, Advances in Applied Mathematics **63** (2015) 90–130.

[BN] V. Baladi, A. Nogueira, *Lyapunov exponents for non-classical multidimensional fraction algorithms*, Nonlinearity **9** (1996), 1529–1546.

[C] E. Calabi, *Métriques kähleriennes et fibrés holomorphes*, Ann. Ecol. Norm. Sup. **12** (1979), pp. 269–294.

[GK] N. Goncharuk, Yu. Kudryashov, *Bounded limit cycles of polynomial foliations of* $\mathbb{C}P^2$, Bulletin of the Brazilian Mathematical Society, New Series (2016), pp. 1–21.

[H] N. J. Hitchin, *Kählerian twistor spaces*, Proc. London Math. Soc. **43** (1981), pp. 133–150.

[KV] D. Kaledin, M. Verbitsky, *Non-Hermitian Yang–Mills connections*, Selecta Math. New Series **4** (1998), pp. 279–320.

[K] N.M. Kurnosov, *Contraints for Betti numbers of hyperkähler manifolds in dimension six*, in preparation to Proceedings of miniPAGES (Warsaw).

[LY] J. Li, S. T. Yau, *Hermitian Yang-Mills connections on non-Kähler manifolds*, Mathematical aspects of string theory, World Scientific Publ., London (1987), pp. 560–573.

[M] M. L. Michelsohn, *On the existence of special metrics in complex geometry*, Acta Math. **149** (1982), no. 3-4, pp. 261–295.

[S] S. Salamon, *Quaternionic Kähler manifolds*, Inv. Math. **67** (1982), pp. 143–171.

[Te] A. Teleman, *Families of holomorphic bindles*, Commun. Contemp. Math. **10** (2008), pp. 523–551.

[To1] A. Tomberg, *Twistor spaces of hypercomplex manifolds are balanced*, Advances in Mathematics **280** (2015), pp.282–300.

[To2] A. Tomberg, *A result on fibrewise stability of vector bundles on twistor spaces of hyperkähler manifolds*, preprint.

5. Классическая геометрия

5.1. Оскулирующая двойственность

Будем говорить, что кривая $C \subset \mathbb{P}^3$ является оскулирующей самодвойственной, если она проективно эквивалентна кривой в двойственном пространстве $(\mathbb{P}^3)^*$, точки которой "— оскулирующие (соприкасающиеся) плоскости к C. Аналогично, k-мерное подмногообразие $X \subset \mathbb{P}^{2k+1}$ будем называть оскулирующим самодвойственным, если его второе соприкасающееся подпространство в общей точке является гиперплоскостью и при этом X проективно эквивалентно подмногообразию в $(\mathbb{P}^{2k+1})^*$, точки которого суть вторые оскулирующие пространства к X. В недавней работе сотрудника Лаборатории С. Львовского показано, что для каждого k можно построить большое семейство оскулирующих самодвойственных k-мерных подпространств в $\mathbb{P}^{2k+1}$.

Конструкция основана на следующих соображениях. Рассмотрим на $\mathbb{P}^{2k+1} = \mathbb{P}(E)$, где E "— $(2k+2)$-мерное векторное пространство, голоморфную контактную структуру. Как известно, все такие структуры изоморфны контактной структуре, получающейся из какой-нибудь невырожденной кососимметрической билинейной формы B на E.

Предложение 5.1. *Пусть E "— четномерное векторное пространство, снабженное невырожденной кососимметрической билинейной формой B, и пусть $Y \subset \mathbb{P}(E)$ "— проективное подмногообразие. Тогда следующие два утверждения эквивалентны.*

(1) *Y интегрируемо относительно контактной структуры, соответствующей форме B.*

(2) *Для всякой гладкой точки $y \in Y$ проективизация вложенного касательного пространства $T_yY \subset \mathbb{P}(E)$ изотропна, как векторное подпространство в E, относительно формы B.*

Если, в условиях предыдущего предложения, $p \in \mathbb{P}(E)$, то обозначим через $p^\perp \ni p$ гиперплоскость в $\mathbb{P}(E)$, соответствующую точке p при корреляции, отвечающей форме B.

Предложение 5.2. *Если $X \subset \mathbb{P}(E)$ "— интегральное подмногообразие относительно контактной структуры, соответствующей форме B, то для всякой гладкой точки $p \in X$ второе оскулирующее пространство к X содержится в гиперплоскости $p^\perp$.*

Из этого предложения вытекает, что если $X \subset \mathbb{P}(E)$ "— лежандрово подмногообразие, для которого второе оскулирующее пространство в общей точке "— гиперплоскость, то X является оскулирующим самодвойственным.

С другой стороны, в работе [3] приведена конструкция, позволяющая строить лежандровы подмногообразия в $\mathbb{P}^{2k-1}$ из конормальных многообразий к проективным подмногообразиям в $\mathbb{P}^k$. Вычисления показывают, что для лежандрова подмногообразия, соответствующего общей гиперповерхности в $\mathbb{P}^k$, второе оскулирующее пространство действительно является гиперплоскостью (бóльшую размерность оно иметь не может ввиду предложения 5.2); тем самым, всякое такое многообразие является оскулирующим самодвойственным.

Хотя описанная конструкция дает большое семейство оскулирующе самодвойственных подмногообразий, не все такие многообразия получаются с ее помощью.

Напомним, что мономиальной кривой в $\mathbb{P}^3$ называется замыкание множества точек с однородными координатами $(1 : t^a : t^b : t^c)$, где a, b и c "— натуральные числа, $(a, b, c) = 1$, $a < b < c$.

Предложение 5.3. *Всякая мономиальная кривая в $\mathbb{P}^3$ является оскулирующей самодвойственной, но если $a + b \neq c$, то такая кривая не является лежандровой относительно какой-либо контактной структуры на $\mathbb{P}^3$.*

Многомерные примеры также существуют.

Предложение 5.4. *Пусть $k \geqslant 2$ "— целое число; обозначим через $V \subset \mathbb{P}^{2k+1}$ замыкание множества точек с однородными координатами*

$$(1 : t_1 : \ldots : t_k : t_1^2 : \ldots : t_k^2 : t_1^3 + \ldots + t_k^3).$$

Тогда $\dim V = k$, второе оскулирующее пространство к V в общей точке является гиперплоскостью, V является оскулирующим самодвойственным, но при этом V не является лежандровым относительно какой-либо контактной структуры на $\mathbb{P}^{2k+1}$.

При $k = 2$ многообразие V из этого предложения проективно эквивалентно поверхности (II) из работы Тольятти [41].

Результаты изложены в работе [21].

5.2. Компактификации аффинного пространства $\mathbb{C}^4$ и многообразия Фано

Сотрудником лаборатории Ю. Прохоровым совместно с М. Зайденбергом (университет г. Гренобль, Франция) исследовались многомерные многообразия Фано с числом Пикара 1, являющиеся компактификациями аффинного пространства $\mathbb{C}^n$. Эта тема продолжает исследования цилиндричных многомерных многообразий Фано, начатые в работах [18], [37], [36].

Проблема классификации компактных комплексных многообразий со вторым числом Бетти 1, содержащих аффинное пространство $\mathbb{C}^n$ как открытое множество, была поставлена Ф. Хирцебрухом [13, Problem 27] и активно изучалась на протяжении последующих десятилетий, особенно в размерности 2 и 3 (см., напр., [31], [39], [12]). В частности, проблема полностью решена в размерности ≤ 3 (см. [12]) для случая проективных многообразий. Однако в настоящее время проблема еще очень далека от ее окончательного решения. Известно, что компактификация $\mathbb{C}^n$ с $\mathrm{b}_2 = 1$, являющаяся проективным многообразием, будет многообразием Фано (Кодаира). Поэтому в проективном случае проблема естественным образом сводится к классификации многообразий Фано V и нахождению на них подходящего дивизора A такого, что $V \setminus A \simeq \mathbb{C}^n$.

Работа была сконцентрирована на случае многообразий Фано размерности 4 и индекса Фано 2 (случай многообразий Фано размерности 4 и индекса Фано > 2 полностью изучен [32]). Построена новая серия компактификаций $\mathbb{C}^4$:

Теорема 5.1. *Пусть $V = V_{18} \subset \mathbb{P}^{12}$ – неособое четырехмерное многообразие Фано рода 10 индекса 2 с $\rho(V) = 1$. Тогда существует гиперплоское сечение $A = V \cap \mathbb{P}^{11}$ такое, что A особо вдоль поверхности $S \subset A$ – конуса над рациональной скрученной кубической кривой и $V \setminus A \simeq \mathbb{C}^4$. Обратно, если $S \subset V$ – конус над рациональной скрученной кубической кривой, то существует единственное гиперплоское сечение $A = V \cap \mathbb{P}^{11}$ такое, что A особо вдоль S и $V \setminus A \simeq \mathbb{C}^4$.*

Изучены группы автоморфизмов таких многообразий Фано $V = V_{18} \subset \mathbb{P}^{12}$. В частности, построено одно очень симметричное квазиоднородное многообразие. Доказательство основано на конструкции специальных бирациональных перестроек (линков Саркисова).

Готовится публикация на эту тему.

Отметим, что из теоремы очевидным образом следует, что рассматриваемые многообразия $V = V_{18} \subset \mathbb{P}^{12}$ являются цилиндрическими, т.е. они содержат цилиндр – открытое в топологии Зарисского подмножество, являющееся произведением аффинной прямой с другим многообразием. Это интересно в связи с изучением групп автоморфизмов аффинных конусов над многообразиями Фано (в частности, с изучением действий связных унипотентных групп на таких конусах, см. [17], [16]).

5.3. Особенности экстремальных трехмерных терминальных окрестностей.

Ю. Прохоровым совместно с С. Мори (RIMS, Kyoto University) продолжалась работа над долгосрочным проектом по классификации аналитических типов экстремальных стягиваний трехмерных терминальных стягиваний со слоями размерности ≤ 2. *Экстремальным ростком* (X, C) называется росток трехмерного нормального комплексного пространства X с терминальными особенностями вдоль компактной неприводимой кривой C такой, что имеется морфизм-стягивание $f : X \to Z \ni o$ с $C = f^{-1}(o)$ и относительно обильным антиканоническим дивизором $-K_X$ [22]. Работа продолжает серию публикаций [19], [27], [26], [25], [23], [24]. Изучались экстремальные ростки, содержащие исключительную особенность типа (IIA). Опубликована статья [28], в которой полностью исследован случай, когда общее гиперплоское сечение $H \subset X$, проходящее через C, нормально. Классификация формулируется в терминах минимального разрешения особенностей поверхности H и инфинитезимальной структуры X вдоль C.

Полученные результаты находят применение в бирациональной геометрии и классификации алгебраических многообразий, см. [34], [35].

5.4. Модели Ландау–Гинзбурга и зеркальная симметрия

В 2016 году были продолжены исследования в области зеркальной симметрии. Основное внимание было уделено тонким инвариантам моделей Ландау–Гинзбурга в маломерном случае, таким как различные числа Ходжа моделей Ландау–Гинзбурга.

Зеркальная симметрия изучает двойственность между алгебраическими многообразиями или семействами многообразий. При этой двойственности алгебраические свойства многообразия соответствуют симплектическим свойствам двойственного и наоборот, симплектические свойства многообразия соответствуют алгебраическим свойствам исходного. Двойственный объект к многообразию Калаби–Яу является снова многообразием Калаби–Яу. Одним из следствий картины зеркальной симметрии является двойственность чисел Ходжа: если X и Y — двойственные многообразия Калаби–Яу и $n = \dim(X) = \dim(Y)$, то $h^{p,q}(X) = h^{p,n-q}(Y)$. Вариант этого утверждения был доказан Батыревым (и Батыревым–Борисовым). А именно, для общего полного пересечения Калаби–Яу X в рефлексивном торическом многообразии он определил струнные числа Ходжа $h^{p,q}_{st}(X)$ как числа Ходжа его крепантного разрешения. В частности, он показал, что, во-первых, такое крепантное разрешение для данного класса многообразий существует, а, во-вторых, эти числа не зависят от разрешения. Кроме того, он показал, что для таких чисел выполнена зеркальная симметрия чисел Ходжа. А именно, конструкция Гивенталя и Хори–Вафы зеркальной двойственности для полных пересечений в (гладких) торических многообразиях строится по так называемому неф-разбиению, то есть разбиению компонент граничного дивизора торического многообразия на группы, такие что сумма дивизоров в каждой группе линейно эквивалентна гиперповерхности, высекающей торическое многообразие. Для такого полного пересечения X существует двойственное неф-разбиение, определяющее полное пересечение Калаби–Яу Y, такое, что

$$h^{p,q}_{st}(X) = h^{n-p,q}_{st}(Y).$$

Двойственным многообразием к многообразию Фано, согласно зеркальной симметрии, является модель Ландау–Гинзбурга, то есть (открытое) многообразие Y с комплекснозначной функцией (суперпотенциалом) $f\colon Y \to \mathbb{C}$, удовлетворяющее ряду свойств. Мы будем отождествлять эту модель Ландау–Гинзбурга с одномерным семейством слоев ее суперпотенциала. Для того, чтобы установить зеркальную двойственность чисел Ходжа в этом случае, необходимо определить числа Ходжа для моделей Ландау–Гинзбурга. Это было сделано в статье [15].

Определим *вручную компактифицированную модель Ландау–Гинзбурга* (без горизонтальных слоев) как набор данных $((Z, f), D_Z)$, в котором

1) Z — гладкое проективное многообразие, а $f\colon Z \to \mathbb{P}^1$ — плоский морфизм.

2) $D_Z = \cup_i D_i$ — приведенный дивизор с нормальными пересечениями, такой, что D_Z является схемно-теоретическим полюсом функции f, то есть $f^{-1}(\infty) = D_Z$. В частности, $ord_{D_i}(f) = -1$ для всех i;

3) дивизор D_Z является антиканоническим для Z.

   Назовем $((Z, f), D_Z)$ *компактификацией модели Ландау–Гинзбурга* (Y, w), если вдобавок

4) $Y = Z \setminus D_Z$, $f|_Y = w$.

Следуя [15], дадим три определения чисел Ходжа для такого объекта.

Определим логарифмический комплекс де Рама $\Omega_Z^\bullet(log\, D_Z)$ следующим образом. Пусть $z_1 \cdot \ldots \cdot z_k = 0$ — локальное уравнение дивизора D_Z. Тогда $\Omega_Z^1(log\, D_Z)$ локально порождена формами

$$\frac{dz_1}{z_1}, \ldots, \frac{dz_k}{z_k}, dz_{k+1}, \ldots, dz_n.$$

(В частности, $\Omega_Z^0(log\, D_Z) = \mathcal{O}_Z$.) f-приспособленные логарифмические формы $\Omega_Z^a(log\, D_Z, f)$ — это подпучок в $\Omega_Z^a(log\, D_Z)$, такой, что

$$\Omega_Z^a(log\, D_Z, f) = \{\alpha \in \Omega_Z^a(log\, D_Z) \mid df \wedge \alpha \in \Omega_Z^{a+1}(log\, D_Z)\}.$$

Числа Ходжа модели Ландау–Гинзбурга $f^{p,q}(Y, w)$ определяются как

$$f^{p,q}(Y, w) = \dim H^p(Z, \Omega_Z^q(log\, D_Z, f)).$$

Пусть теперь $T\colon H^m(Y_b) \to H^m(Y_b)$ — монодромия в бесконечности для гладкого слоя Y_b. По теореме Гриффитса–Ландмана–Гротендика выполнено $(T - \mathrm{Id})^{m+1} = 0$. Таким образом, для $N = \log T$ выполнено $N^{m+1} = 0$. Этим данным можно сопоставить весовую фильтрацию $W_\bullet(N, m)$ пространства $H^m(Y, Y_b)$ с центральным весом m:

$$0 \subset W_0(N, w) \subset W_1(N, w) \subset \ldots$$

$$\subset W_{2m-1}(N, m) \subset W_{2m}(N, m) = H^m(Y, Y_b),$$

удовлетворяющую некоторым естественным свойствам. Лунц и Пржиялковский ввели дополнительное условие на фильтрацию — она должна быть типа Фано, что значит, что монодромия должна быть максимально унипотентной. Так, модели Ландау–Гинзбурга, построенные Кацарковым, Орловым и Уру в [2] для поверхностей дель Пеццо имеют тип Фано, а для раздутия $\mathbb{P}^2$ в пересечении двух эллиптических кривых — нет.

Пусть монодромия для (Y, w) имеет тип Фано. Определим *Числа Ходжа модели Ландау–Гинзбурга* $h^{p,q}(Y, w)$ как

$$h^{p,n-q}(Y, w) = \dim gr^{W,n-a}_{2(n-p)} H^{n+p-q}(Y, Y_b) \text{ если } a = p - q \geq 0,$$

$$h^{p,n-q}(Y, w) = \dim gr^{W,n+a}_{2(n-q)} H^{n+p-q}(Y, Y_b) \text{ если } a = p - q < 0.$$

(Градуировка здесь отличается от определенной в [15]).

Наконец, используя смешанную структуру Ходжа для особых слоев, были определены числа $i^{p,q}(Y, f)$.

В той же работе [15] было показано, что

$$\dim H^m(Y, Y_b; \mathbb{C}) = \sum_{p+q=m} h^{p,q}(Y, w) = \sum_{p+q=m} f^{p,q}(Y, w) = \sum_{p+q=m} i^{p,q}(Y, w).$$

Кроме того, были выдвинуты две гипотезы. Первая утверждала, что

$$h^{p,q}(Y, f) = f^{p,q}(Y, f) = i^{p,q}(Y, f),$$

а вторая — что если (Y, f) — модель Ландау–Гинзбурга для многообразия Фано X, то

$$f^{p,q}(Y, f) = h^{p,n-q}(X).$$

Лунцем и Пржиялковским изучались эти гипотезы для моделей Ландау–Гинзбурга для поверхностей дель Пеццо, предложенных Кацарковым, Орловым и Уру. А именно, были вычислены числа $f^{p,q}(Y, f)$ для модели Ландау–Гинзбурга (Y, f) поверхности дель Пеццо S и доказана вторая гипотеза. Для вычисления использовались локальные вычисления и эти числа были проинтерпретированы как размерности когомологий некоторых стандартных пучков на Y и Z. Далее, было дано новое, корректное определение чисел $h^{p,q}(Y, f)$, которое отличается от определенных в [15] на градуировку, и показано, что $h^{p,q}(Y, f) = f^{p,q}(Y, f)$. Наконец, было показано, что определение чисел $i^{p,q}(Y, f)$ некорректно: первая гипотеза для них не выполнена даже для $\mathbb{P}^2$.

5.5. Эквивариантная бирациональная жёсткость многообразий Фано

Многообразия Фано с большими группами симметрий интересны с многих точек зрения. Во многих случаях они дают "изолированные" вложения соответствующих групп в группы бирациональных автоморфизмов.

Конечные подгруппы в группе Кремоны Cr_2 ранга 2 были классифицированы И. Долгачёвым и В. Исковских [10]. Про конечные подгруппы в группе Кремоны Cr_3 ранга 3 известны только частичные результаты. Ю.Прохоров классифицировал конечные простые неабелевы подгруппы в группе Cr_3 [33]. Оказалось, что с точностью до изоморфизма их всего 6: это группы $\mathfrak{A}_5$, $\mathfrak{A}_6$, $\mathrm{PSL}_2(\mathbf{F}_7)$, $\mathfrak{A}_7$, $\mathrm{SL}_2(\mathbf{F}_8)$ и $\mathrm{PSp}_4(\mathbf{F}_3)$. Вложения последних трёх групп легко классифицировать с точностью до сопряжённости: все вложения групп $\mathfrak{A}_7$ и $\mathrm{SL}_2(\mathbf{F}_8)$ в группу Cr_3 сопряжены между собой, а группа $\mathrm{PSp}_4(\mathbf{F}_3)$ допускает два несопряжённых вложения. С группами $\mathfrak{A}_6$ и $\mathrm{PSL}_2(\mathbf{F}_7)$ ситуация несколько сложнее: И.Чельцовым и К.Шрамовым ранее были построены несколько несопряжённых вложений этих групп в группу Cr_3 [8], [7]; вероятно, общее количество таких вложений конечно, но на данный момент это не доказано.

Группа икосаэдра $\mathfrak{A}_5$ действует на многих интересных геометрических объектах. В частности, многие многообразия Фано с "экстремальными" свойствами допускают действие группы $\mathfrak{A}_5$. Неизвестно, является ли количество её вложений в группу Кремоны ранга 3 конечным с точностью до сопряжённости, и по этому поводу нет убедительных гипотез. Несколько таких вложений были ранее построены И.Чельцовым и К.Шрамовым, и попутно были доработаны некоторые подходы к эквивариантной бирациональной геометрии особых многообразий Фано.

За отчётный период И. Чельцовым, В. Пржиялковским и К. Шрамовым в работе [6] были найдены два новых трёхмерных $\mathfrak{A}_5$-бирационально жёстких многообразия многообразия Фано; это дало два новых вложения группы $\mathfrak{A}_5$ в группу Кремоны ранга 3. Интересно, что оба многообразия известны из классических работ по алгебраической геометрии, и даже имеют "имена". Первое из них, *квартика Бурхарда* X, является трёхмерной квартикой с наибольшим возможным количеством изолированных особых точек. Количество её особенностей равно 45, и все они являются обыкновенными двойными особыми точками. Известно, что квартика Бурхарда рациональна. Группа автоморфизмов $\mathrm{Aut}(X)$ изоморфна $\mathrm{PSp}_4(\mathbf{F}_3)$; в частности, с точностью до сопряжённости она содержит две подгруппы, изоморфные $\mathfrak{A}_5$. И.Чельцовым, В.Пржиялковским и К.Шрамовым было доказано, что относительно одной из них квартика X бирационально жёстка (а относительно другой — нет). Основным шагом в доказательстве было вычисление $\mathfrak{A}_5$-инвариантной группы классов дивизоров Вейля на X, которое удалось провести, придумав подход к комбинаторике плоскостей на квартике Бурхарда.

Вторым многообразием, проанализированным в работе И.Чельцова, В.Пржиялковского и К.Шрамова, было двойное накрытие Y проективного пространства $\mathbb{P}^3$, разветвлённое в *секстике Барта* B; секстика B лежит в трёхпараметрическом семействе поверхностей степени 6 в $\mathbb{P}^3$, имеющих максимально возможное количество изолированных особых точек, и является единственной поверхностью в этом семействе, допускающей действие группы $\mathfrak{A}_5$. Количество особых точек поверхности B и многообразия Y равно 65, и все они являются обыкновенными двойными. Было доказано, что многообразие Y является $\mathfrak{A}_5$-бирационально жестким. Как и в случае с квартикой Бурхарда, основным шагом доказательства было вычисление $\mathfrak{A}_5$-инвариантной группы классов дивизоров Вейля, основанное на разработанном для этого комбинаторном подходе к поверхностям малой степени на Y.

5.6. Схемы Гильберта многообразий Фано

При изучении групп бирациональных автоморфизмов рационально связных многообразий одним из ключевых элементов является установление свойств групп бирегулярных автоморфизмов многообразий Фано. В частности, на многообразиях Фано регуляризуются многие конечные группы бирациональных автоморфизмов; более того, часто встречается ситуация, когда на них регуляризуются все конечные группы бирациональных автоморфизмов, обладающие каким-нибудь важным дополнительным свойством.

Группы многообразий Фано размерности 2, то есть так называемых поверхностей дель Пеццо, полностью классифицированы; это стало возможным потому, что имеется полная и простая классификация гладких поверхностей дель Пеццо. Однако в трёхмерном случае в результате применения программы минимальных моделей возникают, вообще говоря, многообразия Фано с терминальными особенностями. Известно, что они содержатся в конечном количестве алгебраических семейств, но классифицировать все эти семейства не представляется возможным из-за их чрезмерно большого числа. В то же время наиболее важными для приложений являются гладкие многообразия Фано с рангом Пикара, равным 1. Классификация таких многообразий известна (она была получена В.Исковских), однако структура некоторых из них достаточно сложна.

Известно, что группы автоморфизмов многих многообразий Фано конечны, но существуют гладкие многообразия Фано с бесконечными группами автоморфизмов, например, проективное пространство или квадрика. В работе А. Кузнецова, Ю. Прохорова и К. Шрамова [20] были классифицированы все гладкие трёхмерные многообразия Фано с рангом Пикара 1, группы автоморфизмов которых бесконечны. Оказалось, что это следующие многообразия: проективное пространство; квадрика; многообразие дель Пеццо V_5 с группой автоморфизмов SL_2; многообразие Мукая–Умемуры V_{22}^{MU} с группой автоморфизмов SL_2; одно многообразие типа V_{22} с группой автоморфизмов $\mathbb{G}_a$; и однопараметрическое семейство многообразий типа V_{22} с группой автоморфизмов $\mathbb{G}_m$. Все эти примеры были известны ранее [38], однако не было известно, что список ограничивается ими.

Наибольшую сложность с точки зрения исследования групп автоморфизмов представляют многообразия Фано индекса 1 большой антиканонической степени; такие многообразия являются полными пересечениями в грассманианах. А.Кузнецовым, Ю.Прохоровым и К.Шрамовым было доказано, что для таких многообразий выполняются следующие два свойства. Во-первых, группа автоморфизмов такого многообразия точно действует на схеме Гильберта коник на многообразии. Во-вторых, схемы Гильберта коник являются гладкими неприводимыми поверхностями, и более того, эти поверхности и их группы автоморфизмов можно легко описать, по крайней мере в той степени, которая необходима для доказательства конечности группы автоморфизмов соответствующего многообразия Фано.

5.7. Инфинитезимальные тела Ньютона–Окунькова

Тело Ньютона–Окунькова — объект, который кодирует свойства нормирования поля функций на алгебраическом многообразии. В частности, инфинитезимальные тела Ньютона–Окунькова соответствуют нормированиям, которые строятся некоторым специальным образом по флагам на поверхностях, причём в качестве дополнительных данных к флагу добавляется информация о бесконечно близких центрах нормирования.

В работе Ч. Чилиберто, М. Фарника, А. Курони, В. Лозовану, Ж. Ро и К. Шрамова [9] были проанализированы инфинитезимальные тела Ньютона–Окунькова при изменении дополнительного параметра на некотором начальном отрезке его возможных значений, и описаны возникающие в этом процессе мутации.

5.8. Исследование факторов рациональных поверхностей над незамкнутыми полями

Мы продолжаем изучать вопрос, в каких случаях фактор $\Bbbk$-рациональной поверхности X над алгебраически незамкнутым полем $\Bbbk$ характеристики 0 по действию конечной группы G является рациональным многообразием, а в каких нет.

Применяя программу минимальных моделей, получаем, что этот вопрос сводится к исследованию факторов минимальных относительно действия группы G расслоений на коники и факторов G-минимальных поверхностей дель Пеццо.

В случае расслоений на коники ранее в работе [43] был получен ответ, что для групп чётного порядка, действующих на проективной прямой, факторы расслоений на коники могут быть нерациональными в случае, если не все элементы поля $\Bbbk$ являются квадратами в этом поле, причём класс таких факторов является *бирационально неограниченным*, то есть не существует алгебраического семейства поверхностей, содержащего все поверхности, бирационально эквивалентные факторам по этим группам. Таким образом, в этом случае наблюдается огромное количество нерациональных факторов $\Bbbk$-рациональных поверхностей.

В случае G-минимальных поверхностей дель Пеццо ситуация совсем другая, поскольку они сами по себе являются ограниченным набором семейств. Поэтому в этом случае возможно получить полную бирациональную классификацию нерациональных факторов X/G.

Ранее в препринте [42] были получены следующие результаты.

Теорема 5.2 ([42, Theorem 1.1]). *Пусть $\Bbbk$ — поле характеристики 0, X — поверхность дель Пеццо над $\Bbbk$ такая, что $X(\Bbbk) \neq \varnothing$, а G — конечная группа автоморфизмов X. Если $K_X^2 \geqslant 5$, то факторповерхность X/G рациональна. Если $K_X^2 = 4$, порядок G равен 1, 2, или 4, и все нетривиальные элементы G не имеют неподвижных кривых, то фактор X/G может быть нерациональным. Для всех других случаев G и*

$K_X^2 = 4$ *фактор* X/G *всегда рационален.*

Следствие 5.5 ([42, Corollary 1.2]). *Пусть* $\Bbbk$ *— поле характеристики* 0*,* X *— гладкая рациональная поверхность над* $\Bbbk$ *такая, что* $X(\Bbbk) \neq \varnothing$*, а* G *— конечная группа автоморфизмов* X*. Если* $K_X^2 \geqslant 5$*, то фактор* X/G *рационален.*

Для групп порядка 2 и 4 построены примеры нерациональных факторов $\Bbbk$-рациональных поверхностей (см. [42, Section 6]).

Следующий случай — факторы кубических поверхностей. Их исследованию посвящена статья [44], основной результат которой следующий.

Теорема 5.3 ([44, Theorem 1.3]). *Пусть* $\Bbbk$ *— поле характеристики* 0*,* X *— поверхность дель Пеццо над* $\Bbbk$ *степени* 3 *такая, что* $X(\Bbbk) \neq \varnothing$*, а* G *— подгруппа в* $\mathfrak{Aut}_{\Bbbk}(X)$*. Предположим, что* G *не тривиальная и* G *не является группой порядка* 3*, не имеющей кривых, состоящих из неподвижных точек. Тогда факторповерхность* X/G *является рациональной.*

При этом для группы порядка 3, не имеющей кривых, состоящих из неподвижных точек, построены примеры нерациональных факторов рациональных кубических поверхностей (см. [44, Section 6]).

Для оставшихся случаев поверхностей дель Пеццо степеней 2 и 1 получен результат, который в ближайшее время планируется подготовить к публикации.

Теорема 5.4. *Пусть* $\Bbbk$ *— произвольное поле характеристики ноль,* X *— поверхность дель Пеццо степени* d*, на которой действует группа* G*. Тогда верно следующее:*

- *если* $d = 2$ *и множество* $X(\Bbbk)$ *всюду плотно, то* X/G *является* $\Bbbk$*-рациональной поверхностью, если группа* G *не изоморфна* $\langle \mathrm{id} \rangle$*,* $\mathfrak{C}_2$*,* $\mathfrak{C}_3$*,* $\mathfrak{C}_2^2$*,* $\mathfrak{C}_4$*,* $\mathfrak{S}_3$*,* $\mathfrak{D}_8$ *или* Q_8*;*
- *если* $d = 1$ *и множество* $X(\Bbbk)$ *всюду плотно, то* X/G *является* $\Bbbk$*-рациональной поверхностью, если группа* G *не изоморфна* $\langle \mathrm{id} \rangle$*,* $\mathfrak{C}_2$*,* $\mathfrak{C}_3$ *или* $\mathfrak{C}_6$*,*

5.9. Автоморфизмы поверхностей типа К3

Поверхностью типа К3 называется односвязная проективная поверхность с единственной (с точностью до умножения на константы) голоморфной симплектической формой σ. Группа автоморфизмов поверхности типа К3 X называется симплектической, если он действует тождественно на форме σ. Классификация таких конечных групп была получена в работах Шигеру Мукаи [29] и Вячеслава Никулина [30]. Фактор группы автоморфизмов G по её максимальной симплектической подгруппе G_{s} всегда является циклической группой (обозначим её за G_{n}). Классификация возможных групп G_{n} их инвариантных множеств была получена с статье [1] с помощью изучения решёток.

В работе сотрудника лаборатории были изучены группы автоморфизмов поверхностей К3, которые распадаются в прямое произведение симплектической и антисимплектической групп, то есть $G = G_{\mathrm{s}} \times G_{\mathrm{n}}$. Основной метод состоял в том, чтобы исследовать геометрию фактора по группе G_{n} как поверхности с действием группы G_{s}. Если фактор не изоморфен поверхности Энриквеса, то он получается рациональным. А значит, имеет либо структуру G_{s}-расслоения на конники или G_{s}-поверхности дель Пеццо. Был рассмотрен случай, в котором фактор по подгруппе G_{n} является расслоением на коники. Из этого предположения получилось построить G-инвариантный эллиптический пучок на поверхности X. Получилось достичь ограничений на порядок G_{s}: например, если порядок этой группы простой, то он равен равен двум или трём. Случай $G_{\mathrm{n}} = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ был уже полностью изучен в работе [11]. Интересно, что в случае порядка G_n равного трём или четырём, этот эллиптический пучок является изотривиальным с j-инвариантом 0 или 1728 соответственно. Из этого результата и работы [40] была выведена классификация групп G, удовлетворяющих изначальному предположению, и поверхностей, на которых они действуют.

5.10. K-стабильность поверхностей дель Пеццо

В совместной работе [5] Чельцова и Хесуса Мартинез-Гарсии изучалась K-стабильность поляризованных гладких поверхностей дель Пеццо. Данная задача мотивирована следующей гипотезой:

Гипотеза 5.6 (Яо–Тиан–Дональдсон)**.** *Пусть X — гладкое комплексное многообразие, а L — обильный дивизор на нем. Тогда на X существует* *метрика постоянной скалярной кривизны в классе $c_1(L)$ если и только если пара (X, L) является K-стабильной.*

В торическом случае эта гипотеза была доказана Дональдсоном. Более того, Дональдсон также показал необходимость K-стабильности для существование метрик постоянной скалярной кривизны. Для многообразий Фано с естественной антиканонической поляризацией, эта гипотеза была недавно доказана Ченом, Дональдсоном и Саном.

Чельцов и Мартинез-Гарсия доказали следующий результат:

Теорема 5.5. *Пусть S — гладкая комплексная поверхность дель Пеццо, такая что $K_S^2 \leqslant 2$, а L — обильный $\mathbb{Q}$-дивизор на поверхности S. Предположим дополнительно, что дивизор*

$$-K_S - \frac{2}{3}\frac{-K_S \cdot L}{L^2}L$$

является численно эффективным. Тогда пара (S, L) является K-стабильной.

Данный результат позволяет строить огромное множество новых примеров K-стабильных поляризаций на гладких поверхностях дель Пеццо степени 1 и 2. Для кубических поверхностей, Чельцовым и Мартинез-Гарсией получен следующий результат:

Теорема 5.6. *Пусть S — гладкая кубическая поверхность в $\mathbb{P}^3$, и пусть E_1, E_2, E_3, E_4, E_5, E_6 — попарно непересекающиеся прямые на поверхности S. Положим*

$$L = -K_S + x\sum_{i=1}^{6} E_i,$$

где x — неотрицательное рациональное число, такое что $x < 1$. Тогда дивизор L обилен. Более того, пара (S, L) является K-стабильной при $0 < x \leqslant \frac{1}{10}$.

Статья [5] выложена на Архив (см. arXiv:1606.04370) и подана в журнал.

В работе [4] Чельцов строит явный контр-пример к гипотезе Хонга и Вона о α-инвариантах поляризованных гладких комплексных поверхностей дель Пеццо степени 1.

Напомним, что в 2008 году Чельцов вычислил точные значения α-инвариантов Тиана всех гладких поверхностей дель Пеццо. А именно, он доказал следующий результат:

Теорема 5.7. *Пусть S — гладкая комплексная поверхность дель Пеццо. Тогда*

$$\alpha(S)=\begin{cases}\frac{1}{3} \text{ если } S\cong\mathbb{F}_1 \text{ или } K_S^2\in\{7,9\},\\ \frac{1}{2} \text{ если } S\cong\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1 \text{ или } K_S^2\in\{5,6\},\\ \frac{2}{3} \text{ если } K_S^2=4,\\ \frac{2}{3} \text{ если } S \text{ является кубической поверхностью в } \mathbb{P}^3 \text{ с точкой Эккарда},\\ \frac{3}{4} \text{ если } S \text{ является кубической поверхностью в } \mathbb{P}^3 \text{ без точек Эккарда},\\ \frac{3}{4} \text{ если } K_S^2=2 \text{ и } |-K_S| \text{ содержит таккнодальную кривую},\\ \frac{5}{6} \text{ если } K_S^2=2 \text{ и } |-K_S| \text{ не содержит таккнодальную кривую},\\ \frac{5}{6} \text{ если } K_S^2=1 \text{ и } |-K_S| \text{ содержит каспидальную кривую},\\ 1 \text{ если } K_S^2=1 \text{ и } |-K_S| \text{ не содержит каспидальную кривую}.\end{cases}$$

Данная задача может быть естественным образом обобщена на поляризованные поверхности дель Пеццо. Напомним что если X — произвольное комплексное многообразие, а L — обильный $\mathbb{Q}$-дивизор на нем, то α-инвариант пары (X,L) определяется как

$$\alpha\big(X,L\big)=\sup\left\{\lambda\in\mathbb{Q}\ \middle|\ \begin{array}{l}\text{лог-пара } (X,\lambda D) \text{ имеет лог-}\\ \text{канонические особенности}\\ \text{для каждого эффективного}\\ \mathbb{Q}\text{-дивизора } D\sim_{\mathbb{Q}} L\end{array}\right\}\in\mathbb{R}_{>0}.$$

Этот инвариант играет важную роль в комплексной геометрии. Например, недавно Дерваном был доказан следующий результат:

Теорема 5.8. *Пусть X — комплексное многообразие, а L — обильный $\mathbb{Q}$-дивизор на нем. Предположим, что дивизор*

$$-K_X-\frac{n}{n+1}\frac{-K_X\cdot L^{n-1}}{L^n}L$$

является численно эффективным, и выполнено строгое неравенство

$$\alpha\big(X, L\big) > \frac{n}{n+1}\frac{-K_X \cdot L^{n-1}}{L^n}.$$

Тогда пара (X, L) *является* K*-стабильной.*

В своей совместной статье [14], Хонг и Вон рассмотрели следующую задачу:

Проблема 5.7. *Пусть* S *— гладкая комплексная поверхность дель Пеццо. Вычислить*

$$\alpha(S, A) \in \mathbb{R}_{>0}$$

для каждого обильного $\mathbb{Q}$*-дивизора* A *на поверхности* S*.*

Более того, они дали гипотетическое решение данной задачи для поверхностей дель Пеццо степени 1, чей α-инвариант Тиана равен 1. Чтобы описать их гипотезу, зафиксируем гладкую комплексную поверхность дель Пеццо S, такую что $K_S^2 = 1$. Пусть A — обильный $\mathbb{Q}$-дивизор на S. Положим

$$\mu = \inf\Big\{\lambda \in \mathbb{Q}_{>0}\ \Big|\ \mathbb{Q}\text{-дивизор } K_S + \lambda A \text{ псевдоэффективен}\Big\} \in \mathbb{Q}_{>0}.$$

Для изучения возможных значение инварианта $\alpha(S, A)$ можно считать, что $\mu = 1$, потому что $\alpha(S, A) = \frac{\alpha(S, \mu A)}{\mu}$. Тогда дивизор $K_S + A$ содержится в границе конуса Мори $\overline{\mathbb{NE}}(S)$ поверхности S. Пусть Δ_A — наименьшая грань конуса Мори $\overline{\mathbb{NE}}(S)$, которая содержит дивизор $K_S + A$. Тогда существует стягивание $\phi\colon S \to Z$ этой грани Δ_A. Возможны два случая:

- либо морфизм ϕ бирационален, а Z — гладкая поверхность дель Пеццо,
- либо ϕ является расслоением на коники и $Z \cong \mathbb{P}^1$.

Если ϕ бирационален и $Z \ncong \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$, назовем A дивизором типа $\mathbb{P}^2$. В этом случае

$$K_S + A \sim_{\mathbb{Q}} \sum_{i=1}^{8} a_i E_i,$$

где E_1, E_2, E_3, E_4, E_5, E_6, E_7, E_8 — попарно непересекающиеся (-1)-кривые на поверхности S, а a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8 — некоторые неотрицательные числа такие что $1 > a_1 \geqslant a_2 \geqslant a_3 \geqslant a_4 \geqslant a_5 \geqslant a_6 \geqslant a_7 \geqslant a_8 \geqslant 0$. В этом случае положим $s_A = a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 + a_8$.

Если A не является дивизором типа $\mathbb{P}^2$, то поверхность S содержит гладкую неприводимую рациональную кривую C такую что $C^2 = 0$ и

$$K_S + A \sim_{\mathbb{Q}} \delta C + \sum_{i=1}^{7} a_i E_i,$$

где E_1, E_2, E_3, E_4, E_5, E_6, E_7 — попарно непересекающиеся (-1)-кривые на поверхности S, которые также не пересекаются с кривой C, а δ, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7 — некоторые неотрицательные числа такие что $1 > a_1 \geqslant a_2 \geqslant a_3 \geqslant a_4 \geqslant a_5 \geqslant a_6 \geqslant a_7 \geqslant 0$. В этом случае, пусть $\psi\colon S \to \overline{S}$ — стягивание кривых E_1, E_2, E_3, E_4, E_5, E_6, E_7. Пусть $\eta\colon S \to \mathbb{P}^1$ — расслоение на коники, заданное $|C|$. Тогда либо $\overline{S} \cong \mathbb{F}_1$, либо $\overline{S} \cong \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$. В обоих случаях существует коммутативная диаграмма

$$\begin{tikzcd} S \arrow[rr, "\psi"] \arrow[dr, "\eta"'] & & \overline{S} \arrow[dl, "\pi"] \\ & \mathbb{P}^1 & \end{tikzcd}$$

где π — естественная проекция. Если $\overline{S} \cong \mathbb{F}_1$, назовем A дивизором типа $\mathbb{F}_1$. Аналогично, если $\overline{S} \cong \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$, то назовем A дивизором типа $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$. В обоих случаях положим $s_A = a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7$.

Если A является дивизором типа $\mathbb{P}^2$, определим число $\alpha_c(S, A)$ следующим образом:

- если $s_A > 4$, положим $\alpha_c(S, A) = \frac{1}{2+a_1}$,
- если $4 \geqslant s_A > 1$, то определим $\alpha_c(S, A)$ как

$$\max\left(\frac{2}{2+2a_1+s_A-a_2-a_3}, \frac{4}{3+4a_1+2s_A-a_2-a_3-a_4}, \frac{3}{2+3a_1+s_A}\right),$$

- если $1 \geqslant s_A$, положим $\alpha_c(S, A) = \min(\frac{2}{1+2a_1+s_A}, 1)$.

Если A является дивизором типа $\mathbb{F}_1$, определим число $\alpha_c(S, A)$ следующим образом:

- если $s_A > 4$, положим $\alpha_c(S, A) = \frac{1}{2+a_1+\delta}$,
- если $4 \geqslant s_A > 1$, то определим $\alpha_c(S, A)$ как

$$\max\left(\frac{2}{2+2a_1+s_A-a_2-a_3+2\delta}, \frac{4}{3+4a_1+2s_A-a_2-a_3-a_4+4\delta}, \frac{3}{2+3a_1+s_A+3\delta}\right),$$

- если $1 \geqslant s_A$, положим $\alpha_c(S, A) = \min(\frac{2}{1+2a_1+s_A+2\delta}, 1)$.

Если A является дивизором типа $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$, определим число $\alpha_c(S, A)$ следующим образом:

- если $s_A > 4$, положим $\alpha_c(S, A) = \frac{1}{2+a_1+\delta}$,
- если $4 \geqslant s_A > 1$, то определим $\alpha_c(S, A)$ как

$$\max\left(\frac{2}{2+s_A-a_7-a_2-a_3+2\delta}, \frac{4}{3+2s_A-2a_7-a_2-a_3-a_4+4\delta}, \frac{3}{2+s_A-a_7+3\delta}\right),$$

- если $1 \geqslant s_A$, положим $\alpha_c(S, A) = \min(\frac{2}{1+s_A-a_7+2\delta}, 1)$.

Гипотеза Хонга и Вона утверждает следующее:

Гипотеза 5.8. *Пусть S — гладкая комплексная поверхность дель Пеццо такая что $K_S^2 = 1$ и $\alpha(S) = 1$. Тогда $\alpha(S, A) = \alpha_c(S, A)$.*

В свое работе, Хонг и Вон приводят много аргументов в пользу своей гипотезы. Чельцов показал, что эта гипотеза не верна. Это легко следует из следующей теоремы, которая доказана в его работе [4].

Теорема 5.9. *Пусть S — гладкая комплексная поверхность дель Пеццо такая что $K_S^2 = 1$. Пусть C — гладкая неприводимая рациональная кривая на поверхности S такая что $C^2 = -1$. Тогда линейная система $|-2K_S - C|$ содержит единственную кривую $\widetilde{C}$. Кривая $\widetilde{C}$ также является гладкой неприводимой и рациональной. Более того, имеем $\widetilde{C}^2 = -1$ и $1 \leqslant |C \cap \widetilde{C}| \leqslant C \cdot \widetilde{C} = 3$. Пусть λ — рациональное число такое что $0 \leqslant \lambda < 1$. Тогда дивизор $-K_S + \lambda C$ обилен и выполнено равенство*

$$\alpha\big(S, -K_S + \lambda C\big) = \begin{cases} \min\Big(\alpha(S), \dfrac{2}{1+2\lambda}\Big) & \text{если } |C \cap \widetilde{C}| \geqslant 2, \\ \min\Big(\alpha(S), \dfrac{4}{3+3\lambda}\Big) & \text{если } |C \cap \widetilde{C}| = 1. \end{cases}$$

Из этой теоремы сразу следует, что гипотеза Хнга и Вона не верна. Чельцов приводит явный пример:

Пример 5.9. *Пусть S — поверхность в $\mathbb{P}(1,1,2,3)$, заданная уравнением*

$$w^2 = z^3 + zx^2 + y^6,$$

где x, y, z, w — координаты такие что $\mathrm{wt}(x) = \mathrm{wt}(y) = 1$, $\mathrm{wt}(z) = 2$ и $\mathrm{wt}(w) = 3$. Тогда S — гладкая комплексная поверхность дель Пеццо такая что $K_S^2 = 1$. Пусть C — кривая на поверхности S, заданная уравнением $z = w - y^3 = 0$. Пусть $\widetilde{C}$ — кривая на поверхности S, заданная уравнением $z = w + y^3 = 0$. Тогда $C + \widetilde{C} \sim -2K_S$. Обе кривые C и $\widetilde{C}$ гладкие неприводимые и рациональные. Более того, выполнены равенства $C^2 = \widetilde{C}^2 = -1$ и $|C \cap \widetilde{C}| = 1$. Можно показать, что все кривые в пучке $|-K_S|$ нодальны, откуда следует что $\alpha(S) = 1$ по теореме 5.7. Таким образом, из теоремы 5.9 следует, что

$$\alpha\big(S, -K_S + \lambda C\big) = \min\Big(1, \frac{4}{3+3\lambda}\Big).$$

С другой стороны, гипотеза 5.8 утверждает, что $\alpha(S, -K_S + \lambda C) = \min(1, \frac{2}{1+2\lambda})$.

Статья [4] выложена на Архив (см. arXiv:1611.01237) и подана в журнал.

5.11. Научно-педагогическая деятельность

- Ю. Прохоров прочитал курс лекций о конечных подгруппах в группах Кремоны на осенней школе-конференции “*Cremona conference*”, Basel, Switzerland, September 5-16, 2016.
- В течение всего года активно работал научный семинар “Геометрия алгебраических многообразий им В. А. Исковских” (МИАН-МГУ) в работе которого принимали участие многие сотрудники лаборатории. Руководители семинара: Ю. Г. Прохоров, Д. О. Орлов, В. В. Пржиялковский, К. А. Шрамов.
- В течение всего года работал учебный семинар “Алгебраическая геометрия” (НОЦ МИАН) в работе которого принимали участие многие студенты и аспиранты факультета математики. Руководители семинара: Ю. Г. Прохоров, Д. О. Орлов, К. А. Шрамов

- В осеннем семестре Ю. Прохоров прочитал специальный курс "Проблемы рациональности" (НОЦ МИАН). Имеются видеозаписи лекций курса.
- В весеннем семестре Ю. Прохоров и К. Шрамов прочитали специальный курс "Классическая алгебраическая геометрия (продолжение)" (НОЦ МИАН). Имеются видеозаписи лекций курса.
- Ю. Прохоров и К. Шрамов организовали две школы-конференции на математическом факультете ВШЭ:
  - Workshop "Surfaces in positive characteristic", April 4-8, 2016
  - Workshop "Groups of birational automorphisms", November 14-18, 2016

  Перед второй школой-конференцией была проведена серия подготовительных лекций.

Литература

[1] Artebani M., Sarti A. and Taki S, *K3 surfaces with non-symplectic automorphisms of prime order*, Math. Z. **268** (2011), 507–533.

[2] D. Auroux, L. Katzarkov, D. Orlov, *Mirror symmetry for del Pezzo surfaces: vanishing cycles and coherent sheaves*, Invent. Math. 166 (2006), no. 3, 537–582.

[3] Robert L. Bryant, *Conformal and minimal immersions of compact surfaces into the* 4*-sphere*, J. Differential Geom. **17** (1982), no. 3, 455–473.

[4] Ivan Cheltsov. On a conjecture of Hong and Won. *ArXiv e-print*, 1611.01237, 2016.

[5] Ivan Cheltsov and Jesus Martinez-Garcia. Stable polarized del Pezzo surfaces. *ArXiv e-print*, 1606.04370, 2016.

[6] Ivan Cheltsov, Victor Przyjalkowski, and Constantin Shramov. Burkhardt quartic, barth sextic, and the icosahedron. *arXiv*, 1606.04372, 2016.

[7] Ivan Cheltsov and Constantin Shramov. Three embeddings of the Klein simple group into the Cremona group of rank three. *Transform. Groups*, 17(2):303–350, 2012.

[8] Ivan Cheltsov and Constantin Shramov. Five embeddings of one simple group. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 366(3), 2014.

[9] C. Ciliberto, M. Farnik, A. Küronya, V. Lozovanu, J. Roé, and C. Shramov. Newton-okounkov bodies sprouting on the valuative tree. *arXiv e-print*, 1602.02074, 2016.

[10] Igor V. Dolgachev and Vasily A. Iskovskikh. Finite subgroups of the plane Cremona group. In *Algebra, arithmetic, and geometry: in honor of Yu. I. Manin. Vol. I*, volume 269 of *Progr. Math.*, pages 443–548. Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 2009.

[11] K. Frantzen. *Classification of K3 surfaces with involution and maximal symplectic symmetry.* Math. Ann., **350** (4):757–791, 2011.

[12] Mikio Furushima. The complete classification of compactifications of $\mathbf{C}^3$ which are projective manifolds with the second Betti number one. *Math. Ann.*, 297(4):627–662, 1993.

[13] Friedrich Hirzebruch. Some problems on differentiable and complex manifolds. *Ann. Math. (2)*, 60:213–236, 1954.

[14] Kyusik Hong and Joonyeong Won. Alpha invariant for general polarization of del Pezzo surfaces of degree 1. *ArXiv e-print*, 1606.01418, 2016.

[15] L. Katzarkov, M. Kontsevich, T. Pantev, *Bogomolov–Tian–Todorov theorems for Landau–Ginzburg models*, arXiv:1409.5996.

[16] T. Kishimoto, Yu. Prokhorov, and M. Zaidenberg. Group actions on affine cones. In *Peter Russell's Festschrift, Proceedings of the conference on Affine Algebraic Geometry held in Professor Russell's honour, 1–5 June 2009, McGill Univ., Montreal.*, volume 54 of *Centre de Recherches Mathématiques CRM Proc. and Lect. Notes*, pages 123–163, 2011.

[17] T. Kishimoto, Yu. Prokhorov, and M. Zaidenberg. $\mathbf{G}_a$-actions on affine cones. *Transformation Groups*, 18(4):1137–1153, 2013.

[18] Takashi Kishimoto, Yuri Prokhorov, and Mikhail Zaidenberg. Affine cones over Fano threefolds and additive group actions. *Osaka J. Math.*, 51(4):1093–1113, 2014.

[19] János Kollár and Shigefumi Mori. Classification of three-dimensional flips. *J. Amer. Math. Soc.*, 5(3):533–703, 1992.

[20] Alexander Kuznetsov, Yuri Prokhorov, and Constantin Shramov. Hilbert schemes of lines and conics and automorphism groups of Fano threefolds. *ArXiv e-print*, 1605.02010, 2016.

[21] Serge Lvovski, *Some remarks on osculating self-dual varieties*, arXiv:1602.07450 [math.AG].

[22] Shigefumi Mori. Flip theorem and the existence of minimal models for 3-folds. *J. Amer. Math. Soc.*, 1(1):117–253, 1988.

[23] Shigefumi Mori and Yuri Prokhorov. On $\mathbf{Q}$-conic bundles. *Publ. Res. Inst. Math. Sci.*, 44(2):315–369, 2008.

[24] Shigefumi Mori and Yuri Prokhorov. On $\mathbf{Q}$-conic bundles. II. *Publ. Res. Inst. Math. Sci.*, 44(3):955–971, 2008.

[25] S. Mori and Yu. Prokhorov. On $\mathbf{Q}$-conic bundles, III. *Publ. Res. Inst. Math. Sci.*, 45(3):787–810, 2009.

[26] S. Mori and Yu. Prokhorov. Threefold extremal contractions of type IA. *Kyoto J. Math.*, 51(2):393–438, 2011.

[27] S. Mori and Yu. Prokhorov. Threefold extremal contractions of types (IC) and (IIB). *Proc. Edinburgh Math. Soc.*, 57(1):231–252, 2014.

[28] S. Mori and Yu. Prokhorov. Threefold extremal contractions of type (IIA). I. *Изв. РАН. Сер. матем.*, 80(5):77–102, 2016.

[29] S. Mukai. *Finite groups of automorphisms of K3 surfaces and the Mathieu group*, Invent. Math., **94** (1988), 183–221.

[30] V. Nikulin, *Finite groups of automorphisms of Kählerian K3 surfaces*, Trudy Moskov. Mat. Obshch., **38** (1979), 75–137. Nauk SSSR Ser. Mat., **35** (1971), 530–572.

[31] Thomas Peternell and Michael Schneider. Compactifications of $\mathbf{C}^n$: a survey. In *Several complex variables and complex geometry, Part 2 (Santa Cruz, CA, 1989)*, volume 52 of *Proc. Sympos. Pure Math.*, pages 455–466. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1991.

[32] Yu. Prokhorov. Compactifications of $\mathbf{C}^4$ of index 3. In *Algebraic geometry and its applications (Yaroslavl′, 1992)*, Aspects Math., E25, pages 159–169. Vieweg, Braunschweig, 1994.

[33] Yu. Prokhorov. Simple finite subgroups of the Cremona group of rank 3. *J. Algebraic Geom.*, 21(3):563–600, 2012.

[34] Yuri Prokhorov and Miles Reid. On Q-Fano threefolds of Fano index 2. In *Minimal Models and Extremal Rays (Kyoto 2011)*, volume 70 of *Adv. Stud. Pure Math.*, pages 397–420. Mathematical Society of Japan, Kinokuniya, Tokyo, 2016.

[35] Yuri Prokhorov and Constantin Shramov. Jordan property for Cremona groups. *Amer. J. Math.*, 138(2):403–418, 2016.

[36] Yu. Prokhorov and M. Zaidenberg. New examples of cylindrical Fano fourfolds. *ArXiv e-print*, 1507.01748, 2015. to appear Advanced Studies in Pure Mathematics (ASPM), (the proceedings series of the Mathematical Society of Japan) Proceedings of Kyoto Workshop "Algebraic Varieties and Automorphism Groups", July 7–11, 2014.

[37] Yu. Prokhorov and M. Zaidenberg. Examples of cylindrical Fano fourfolds. *European J. Math.*, 2(1):262–282, 2016.

[38] Ю. Г. Прохоров. Группы автоморфизмов многообразий Фано. *УМН*, 45(3):195–196, 1990.

[39] Ю. Г. Прохоров. Многообразия Фано рода 12 и компактификации $\mathbf{C}^3$. *Алгебра и Анализ*, 3(4):162–170, 1991.

[40] Sawon J. *Isotrivial elliptic K3 surfaces and Lagrangian fibrations*, Arxiv:1406.1233.

[41] E. G. Togliatti, *Alcuni esempî di superficie algebriche degli iperspazî che rappresentano un'equazione di Laplace*, Comment. Math. Helv. **1** (1929), 255–272.

[42] A. Trepalin, Quotients of del Pezzo surfaces of high degree, Препринт, доступен по адресу http://arxiv.org/abs/1312.6904

[43] A. Trepalin, Quotients of conic bundles, Transformation Groups, 2016, 21(1), 275–295

[44] A. Trepalin, Quotients of cubic surfaces, European Journal of Mathematics, 2016, 2, 333–359

6. Геометрическая теория представлений

6.1. Обобщённые модули Вейля

В отчетном году сотрудник лаборатории Евгений Фейгин совместно со стажером Евгением Македонским изучал обобщенные модули Вейля над аффинными алгебрами Каца-Муди.

Пусть $\mathfrak{g}$ — аффинная алгебра Каца–Муди. Рассмотрим подалгебру I Ивахори в ней и некоторую максимальную параболическую P, изоморфную возможно скрученной алгебре полиномиальных токов. Тогда в P есть естественная градуировка, $P = \bigoplus_{i=0}^{\infty} \mathfrak{g}_i$. Пусть $\mathfrak{g}_0$ — подалгебра нулевого уровня относительно этой градуировки. Пусть $\Delta = \Delta_+ \cup \Delta_-$ — корневая система $\mathfrak{g}_0$. Запишем треугольное разложение $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{n}_- \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}_+$ и разложение $P = P_- \oplus P_h \oplus P_+$.

Пусть λ — некоторый доминантный вес алгебры $\mathfrak{g}_o$. Определим модуль Вейля $W(\lambda)$ как циклический модуль над алгеброй токов с образующим v и следующим набором соотношений.

$$P_- v = 0$$

$$pv = 0; p \in P_h \cap \bigoplus_{i=1}^{\infty} \mathfrak{g}_i$$

$$(e_\alpha)^{\langle \alpha^\vee, \lambda \rangle + 1} = 0, \alpha \in \Delta_+.$$

Этот модуль, с одной стороны, является градуированным по степени t. С другой стороны, этот модуль, как и любой конечномерный модуль над простой алгеброй Ли, градуирован корневой решеткой X. Относительно этих градуировок для модуля Вейля можно записать его характер как многочлен от элементов корневой решетки и элемента t. Обозначим этот характер как $chW(\lambda)$.

Для изучения этого модуля вводится некоторое обобщение, обобщенный модуль Вейля, определенный над I. Для обобщенных модулей Вейля находится фильтрация, подфакторы в которой оказываются также обобщенными модулями Вейля. Это рассуждение категорифицирует комбинаторную формулу Орра и Шимозоно для многочленов Макдональда.

Несимметрические многочлены Макдональда $E_\lambda(X, q, t)$ – это рациональные функции от элементов решетки и двух дополнительных параметров, которые являются ортогональными относительно некоторого скалярного произведения (скалярное произведение Чередника). Многие их сециализации совпадают с некоторыми классами симметрических функций, таких как многочлены Шура, Джека, Холла–Литлвуда. В работах Б. Иона и Сандерсон доказано, что характер модуля Вейля совпадает со специализацией несимметрического многочлена Макдональда, соответствующий антидоминантному весу, при $t = 0$, $chW(\lambda) = E_\lambda(X, q, 0)$ для алгебр Ли типов A, D, E.

В работе Е. Фейгина и Е. Македонского [2] доказано что специализация $E_\lambda(X, q^{-1}, \infty)$ для антидоминантного веса λ совпадает с характером некоторого обобщенного модуля Вейля. В работе [4] изучаются обобщенные модули Вейля над скрученными аффинными алгебрами Ли. В частности с их помощью вычисляется размерность классического модуля Вейля в последнем неизвестном случае.

Для обобщенных модулей Вейля в работе Е. Фейгина и Е. Македонского и Д. Орра [3] строится их глобальная версия и процедура разборки на подфакторы этих глобальных модулей. С помощью характеров этих модулей строится q-Уиттэкерова функция.

6.2. Вырождения многообразий флагов и комбинаторная формула Орра–Шимозоно

Работы Е. Б. Фейгина 2016 года посвящены изучению различных объектов алгебраической, комбинаторной и геометрической теории групп и алгебр Ли. Важность теории представлений и структурной теории групп и алгебр Ли обуславливается большим количеством приложений в различных задачах современной математики. Это объясняется наличием большого числа симметрий у того или иного объекта. В качестве примеров можно привести действия групп автоморфизмов алгебраических многообразий (аффинных или проективных), позволяющие яснее описывать алгебро-геометрические, топологические и комбинаторные свойства самих многообразий или описание в задачах математической физики пространств состояний тех или иных теорий в терминах представлений со старшим весом над простыми или аффинными алгебрами Ли. В связи с разнообразием задач, в которых важную роль играют группы и алгебры Ли, в самой теории имеются как чисто алгебраические конструкции и теоремы, так и геометрические и комбинаторные структуры.

В работах Е. Б. Фейгина изучаются представления простых алгебр

Ли и соответствующие многообразия флагов, а также представления алгебр токов и комбинаторные конструкции, описывающие структуру представлений и базисов в них. В частности, в работе [15] описывается конструкция построения торических вырождений многообразий флагов и более общих замыканий орбит унипотентных групп, действующих в проективизациях своих циклических представлений. Вырождение строится с помощью алгебраической конструкции фильтрации на пространстве представления. При этом при определённых условиях явно описывается многогранник Ньютона соответствующего торического многообразия и проясняется связь множества целых точек в таком многограннике с базисом градуированного пространства представления (см. также [5, 6, 13, 14, 15]). Полученные торические вырождения пропускаются через так называемые вырождения Пуанкаре–Биркгофа–Витта. Другими словами, колчанные грассманианы, естественным образом возникающие в качестве вырожденных многообразий флагов, могут быть дальше торически вырождены (см. [8, 9, 10, 11, 12]). Кроме того, в работах Фейгина изучаются комбинаторная структура представлений алгебр Ивахори над простыми алгебрами Ли. Эти бесконечномерные алгебры Ли являются подалгебрами соответствующих аффинных алгебр Каца–Муди и играют в них роль борелевских подалгебр. Важный класс циклических представлений таких алгебр составляют модули Демазюра и Вейля [18, 19, 21]. Показано, что комбинаторика модулей Вейля и модулей Демазюра тесно связана с несимметрическими полиномами Макдональда [1, 2, 22, 20, 7]. Это соответствие позволяет явно вычислять различные численные характеристики соответствующих представлений алгебр Ивахори, а также строить теоретико-представленческие модели для комбинаторных конструкций, связанных с полиномами Макдональда.

6.3. Сизигии проективных вложений однородных пространств

Сотрудник лаборатории И. Нетай занимался вычислением резольвент обратимых пучков на проективных вложениях однородных пространств вида G/P, где G — редуктивная алгебраическая группа, P — её параболическая подгруппа. Для таких вычислений использовалась комбинаторика комплекса Кошуля $A_X \otimes \Lambda^\bullet V_\lambda$, где A_X — проективная координатная алгебра образа вложения многообразия X в проективное пространство $\mathbb{P}(V_\lambda)$, где V_λ — неприводимое представление группы G со старшим весом λ, и X является проективизацией орбиты вектора старшего веса в этом представлении. Оказалось, что данная комбинаторика наиболее просто и эффективно исследуется в случае, когда вес λ обладает следующими свойствами:

- $V_\lambda \otimes V_\mu$ имеет простой спектр (то есть не имеет кратных подпредставлений) для любого неприводимого представления группы G,
- $\Lambda^k V_\lambda$ имеет простой спектр для любого k.

Неприводимые представления, удовлетворяющие каждому из свойств, классифицированы. При этом для сведения классификации оказалось полезным построение таких канонических вложений, как

$$V_\lambda \otimes V_\mu^* \subseteq V_{\lambda+\nu} \otimes V_{\mu+\nu}^*,$$

$$\mathrm{Hom}_G(V_\theta, \Lambda^k V_\lambda) \subseteq \mathrm{Hom}_G(V_{\theta+k\nu}, \Lambda^k V_{\lambda+\nu}),$$

выполненные для любых доминантных весов $\lambda, \mu, \nu, \theta$ любой редуктивной группы G и для любого k. Для бесконечных серий в данной классификации удалось вычислить резольвенты обратимых пучков на образе вложения, а классификация позволяет исследовать, каковы могут быть следующие по сложности проективные вложения однородных пространств, для которых удалось бы произвести вычисления такого рода. На данную тему статья «Сизигии квадратичного вложения Веронезе» рекомендована к публикации после внесения правок, а также опубликован препринт [23].

6.4. Ламинационные модели некоторых пространств многочленов

В работе [24], написанной сотрудником Лаборатории В. Тимориным совместно с А. Блохом, Л. Оверстигеном и Р. Птачеком получено ламинационное описание срезов пространств параметров комплексных многочленов произвольной степени d, аналогичное комбинаторной модели множества Мандельброта. Напомним, что инвариантные ламинации — это замкнутые семейства непересекающихся хорд единичного диска

$\overline{\mathbb{D}} = \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z| \leqslant 1\}$, обладающие определенными свойствами инвариантности относительно отображения $\sigma_d : z \mapsto z^d$ на единичной окружности. Инвариантные ламинации используются для комбинаторного описания динамики комплексных многочленов степени d. Напомним, что хорды, входящие в ламинацию, называются листами, а щели ламинации определяются как замыкания компонент дополнения до объединения всех листов. Под образом листа или щели G при отображении σ_d мы имеем в виду выпуклую оболочку множества $\sigma_d(G \cap \partial(\mathbb{D}))$. *Критическая хорда* — это хорда, концы которой отображаются в одну и ту же точку при отображении σ_d.

Определение. Зафиксируем семейство $\mathcal{Y}$ из $d-2$ попарно непересекающихся критических хорд с непериодическими концами и незацепленными орбитами. Определим пространство $\mathbb{L}(\mathcal{Y})$ инвариантных геодезических ламинаций следующим образом: $\mathcal{L} \in \mathbb{L}(\mathcal{Y})$ если $\mathcal{L}$ порождается ламинационным отношением эквивалентности $\sim$, таким, что концы каждой критической хорды из $\mathcal{Y}$ являются $\sim$-эквивалентными, и $\mathcal{L}$ не имеет щелей типа Зигелевского захвата.

Пусть $\mathcal{Y}^+$ обозначает объединение всех критических хорд из $\mathcal{Y}$. Имеется единственная компонента $A(\mathcal{Y}) = A$ множества $\overline{\mathbb{D}} \setminus \mathcal{Y}^+$, такая, что отображение $\sigma_d|_{\partial(A)}$ — два к одному, за исключением критических хорд на границе. Обозначим через $\overline{y}_1, \ldots, \overline{y}_k$ все критические хорды семейства $\mathcal{Y}$ на границе множества A (ясно, что $1 \leq k \leq d-2$). Рассмотрим $\overline{y}_1$; найдется в точности одна точка $a \in \partial(A) \setminus \overline{y}_1$ со свойством $\sigma_d(a) = \sigma_d(\overline{y}_1)$ в то время как другие точки из $\partial(A)$ отображаются в точки вне $\sigma_d(\overline{y}_1)$. То же самое можно сказать и про другие критические хорды на границе множества A. Для любой другой компоненты T множества $\overline{\mathbb{D}} \setminus \mathcal{Y}^+$ нетрудно видеть, что, за исключением критических хорд на границе множества T, которые отображаются в точки, все остальные точки из $\partial(T)$ отображаются один к одному.

Определение (Минорные множества ламинаций из $\mathbb{L}(\mathcal{Y})$). Для $\mathcal{L} \sim\in \mathbb{L}(\mathcal{Y})$ определим *минорное множество* $m_\sim$ ламинации $\mathcal{L}_\sim$ следующим образом.

1) Если множество $C_\sim$ конечно, то положим $m_\sim = \sigma_d(C_\sim)$.

2) Предположим, что множество $C_\sim$ является квадратичной периодической щелью Фату U периода n. Выберем максимальную ко-

нечную щель G, вершины которой неподвижны относительно отображения σ_d^n и которая имеет общую сторону с U. Положим $m_\sim$ равным σ_d-образу щели G.

Следующая теорема обобщает ламинационное описание квадратичного комбинаторного множества Мандельброта.

Теорема. *Минорные множества инвариантных геодезических ламинаций из $\mathbb{L}(\mathcal{Y})$ являются классами эквивалентности некоторого неинвариантного ламинационного отношения эквивалентности $\sim_{\mathcal{Y}}$. Соответствующее этому отношению эквивалентности факторпространство $\mathcal{M}(\mathcal{Y})$ (пережатый диск) содержит бесконечно много непересекающихся друг с другом максимальных копий комбинаторного квадратичного множества Мандельброта. Компоненты внутренности множества $\mathcal{M}(\mathcal{Y})$ совпадают либо с гиперболическими компонентами в копиях комбинаторного квадратичного множества Мандельброта, либо с параметрическими компонентами типа Зигелевского захвата.*

Приведенный в теореме результат готовится к публикации.

6.5. Исчисление Шуберта и симплектические многогранники Гельфанда–Цетлина

В работе сотрудника лаборатории Валентины Кириченко [29], совместной с М. Падалко, строится модель исчисления Шуберта для типа C, и формулируется гипотеза, выражающая циклы Шуберта через суммы граней симплектического многогранника Гельфанда–Цетлина. Напомним, что модель исчисления Шуберта через классические многогранники Гельфанда–Цетлина была разработана в [30]. Там же были получены явные представления через грани для циклов Шуберта в типе A с помощью геометрического митоза в типе A. На комбинаторном уровне геометрический митоз в типе A совпадает с митозом Кнутсона–Миллера [31] на приведённых RC-графах или пайп дримах.

Геометрический митоз был перенесён на произвольный тип в работе [27]. Комбинаторная реализация геометрического митоза в типе C изучалась для Sp_6 в [33] для многогранников, построенных с помощью выпукло-геометрических операторов разделённых разностей [26] по разложению $(s_3s_2s_1)^3$ самого длинного элемента в группе Вейля (здесь s_3 соответствует более длинному корню). Однако комбинаторика оказалась слишком сложной, и обобщать этот подход на Sp_{2n} представляется нецелесообразным.

Недавно мы заметили, что гораздо более простому комбинаторному митозу, разработанному в [27, Section 5] для Sp_{2n} можно придать геометрический смысл с помощью симплектических многогранников Гельфанда–Цетлина. Несмотря на то, что геометрический митоз из [27] нельзя прямо применить к симплектическим многогранникам Гельфанда–Цетлина, он тем не менее позволяет угадать возможных представителей для циклов Шуберта, а затем доказать гипотезу другими методами (например, методами [28, Section 4]).

Симплектические многогранники Гельфанда–Цетлина определяются простыми неравенствами с помощью обрезанных диаграмм Гельфанда–Цетлина [25, Section 4], [32, Section 4]. Мы определяем биекцию между этими диаграммами и диаграммами из [27, Section 5]. Это позволяет сопоставить грань симплектического многогранника Гельфанда–Цетлина каждой из диаграмм, полученных митозом из [27, Section 5]. Наша гипотеза состоит в том, что полученные таким образом наборы граней представляют циклы Шуберта симплектического многообразия флагов в смысле [30, 27], то есть характеры граней дают соответствующие характеры Демазюра. Мы проверили гипотезу для Sp_4 и теперь разрабатываем метод её доказательства для произвольного n.

6.6. Явное описание изоморфизма между колчанными многообразиями типа A и срезами в аффинном Грассманиане

Этот раздел описывает результаты Михаила Финкельберга, сотрудника Лаборатории Алгебраической Геометрии, полученные в 2016 году.

Миркович и Выборнов в статье [37] построили изоморфизм между колчанными многообразиями Накаджимы $\mathfrak{M}_0(\mathbf{v},\mathbf{w})$ типа A и трансверсальными срезами $\overline{\mathcal{W}}^{\lambda}_{\mu}$ в аффинном Грассманиане, соответствующем группе $GL_{w_1+\dots+w_n}$ (λ и μ некоторым специальным образом строятся по $\mathbf{v},\mathbf{w}$). Этот изоморфизм строится в несколько шагов: сначала колчанные многообразия отождествляются с некоторыми специальными срезами к нильпотентным орбитам $\mathcal{O}_\lambda \subset \mathfrak{gl}_{\sum iw_i}$, а те, в свою очередь, уже отождествляются со срезами в аффинном Грассманиане.

Мы изучаем другую, более геометрическую конструкцию изоморфизма между колчанными многообразиями Накаджимы $\mathfrak{M}_0(\mathbf{v},\mathbf{w})$ типа A и срезами $\overline{\mathcal{W}}^{\lambda}_{\mu}$. А именно, в работе [34] описан изоморфизм между регулярной частью в срезе $\overline{\mathcal{W}}^{\lambda}_{\mu}$ (обозначается $\mathcal{W}^{\lambda}_{\mu}$) и некоторой связной компонентой подмногообразия многообразия $\mathrm{Bun}^{v}_{GL_w}(\mathbb{A}^2)$ состоящего из точек, неподвижных относительно некоторого $\mathbb{C}^*$-действия на $\mathrm{Bun}^{v}_{GL_w}(\mathbb{A}^2)$. ($\mathbb{C}$-точки $\mathrm{Bun}^{v}_{GL_w}(\mathbb{A}^2)$ суть пучки без кручения ранга w на $\mathbb{P}^2$ со вторым классом Черна, равным v и выбранной тривиализацией в ограничении на бесконечно удаленную прямую). Будем обозначать эти связные компоненты как $\mathrm{Bun}^{\lambda}_{GL_m,\mu}(\mathbb{A}^2/\mathbb{G}_m)$. Пространство $\mathrm{Bun}^{v}_{GL_w}(\mathbb{A}^2)$ обладает естественной компактификацией — $\mathcal{U}^{v}_{GL_w}(\mathbb{A}^2)$) (пространства Уленбек см. [35]). В статье [34] доказывается, что срезы $\overline{\mathcal{W}}^{\lambda}_{\mu}$ изоморфны замыканию $\mathrm{Bun}^{\lambda}_{GL_m,\mu}(\mathbb{A}^2/\mathbb{G}_m)$ в пространстве Уленбек. Будем обозначать их $\mathcal{U}^{\lambda}_{GL_m,\mu}(\mathbb{A}^2/\mathbb{G}_m)$. Пользуясь ADHM-конструкцией, Накаджима описал изоморфизм между колчанными многообразиями типа A и многообразиями $\mathcal{U}^{\lambda}_{GL_m,\mu}(\mathbb{A}^2/\mathbb{G}_m)$. Тем самым, получается другой изоморфизм между колчанными многообразиями типа A и срезами $\overline{\mathcal{W}}^{\lambda}_{\mu}$, который априори не совпадает с изоморфизмом, построенном в [37].

Мы явно вычислили этот изоморфизм (в случае выполнения стандартных условий доминантности на $\mathbf{v},\mathbf{w}$). Таким образом, изоморфизм между колчанными многообразиями Накаджимы $\mathfrak{M}_0(\mathbf{v},\mathbf{w})$ типа A и срезами $\overline{\mathcal{W}}^{\lambda}_{\mu}$ описан совершенно явной формулой. В частном случае (когда $\mu = 0$) эта формула была найдена в работе [36]. Также мы показали, что эта формула задает ровно тот же изоморфизм, который получается в статье [37] тем самым доказав, что изоморфизм Мирковича-Выборнова совпадает с изоморфизмом Бравермана, Финкельберга и Накаджимы.

6.7. Многочлены Костки–Шоджи и диаграмы свёртки Люстига

Этот раздел описывает результаты Андрея Ионова, стажера Лаборатории Алгебраической Геометрии, полученные в 2016 году.

Пусть G — редуктивная комплексная алгебраическая группа. В работе [38] показывается, что многочлены Костки задают градуированные кратности в глобальных сечениях линейного расслоения на кокасательном пространстве к пространству флагов для двойственной по Ленглендсу группы $G^{\vee}$. Авторы работы [39] замечают, что классические многочлены Костки–Шоджи ([42]) схожим образом задают градуированные кратности в глобальных сечениях линейного расслоения на тотальном пространстве некоторого векторного расслоения на квадрате многообразия флагов для GL_N. Оказывается, что это векторное расслоение является итерированной диаграммой свёртки для циклического колчана $\tilde{A}_1$ ([41]). При этом зануление высших когомологий линейного расслоения следует из Фробениус-расщепимости диаграм свёртки, что в свою очередь следует из существование разрешения типа Ботта–Самельсона–Демазюра–Хансена в типе A ([40]).

В работе [39] исследуется обобщение этих утверждений, дающее связь между версией многочленов Костки–Шоджи ([42]), зависящей от r переменных $K^{-}_{\boldsymbol{\lambda\mu}}(t_1, \ldots, t_r)$, где $\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu}$ - r-мультиразбиения и (мульти)градуированными кратностями в глобальных сечениях расслоений на итерированной диаграмме свёртки циклического колчана $\tilde{A}_{r-1}$. Для доказательства этого факт применяется метод аналогичный описанному выше. Авторы доказывают это утверждение для случая регулярного $\boldsymbol{\mu}$. Заметим, что в частности из этого утверждения следует неотрицательность коэффициентов многочленов $K^{-}_{\boldsymbol{\lambda\mu}}(t_1, \ldots, t_r)$.

6.8. Примитивные формы для Гепнеровских особенностей

Этот раздел описывает результаты Андрея Ионова, стажера Лаборатории Алгебраической Геометрии, полученные в 2016 году.

Гепнеровская особенность $G_{k,n}$ — это фактор особенности $F_{k,n} = \sum_{i=1}^{n} x_i^k$ по действию группы S_n перестановками координат.

Интерес к Гепнеровским особенностям появился после того как в работе Д. Гепнера [49] был установлен изоморфизм между киральным кольцом модели Казама–Сузуки $SU(n+1)_{k-n-1}/(SU(n)_{k-n} \times U(1))$, кольцом Милнора Гепнеровской особенности $G_{k,n}$ и кольцом когомологий грассманиана $Gr(n,k)$. Дальнейшие исследования связи Гепнеровских особенностей и топологических конформных теорий поля (TCFT) продолжились в работах [54], [50].

Все три стороны изоморфизма построенного в [49] допускают естественные деформации снабженные структурой Фробениусова многообразия: деформации потомками Виттена ([48]) для киральных колец TCFT, структуры Саито для колец Милнора особенностей ([52]) и квантовые когомологии для кольца когомологий. Легко проверить, что Фробениусова структура квантовых когомологий неизоморфна другим двум структурам даже в простейших случаях. Однако, в работе [48] было доказано, что структура Саито для особенности z^{k+1} даёт Фробениусово многообразие изоморфное Фробениусовому многообразию для модели Казама–Сузуки $SU(2)_k/U(1)$, также известной как минимальная модель типа A_k. Это ведет к естественной гипотезе о связи между структурами Саито для Гепнеровских особенностей и деформациями потомками Виттена для моделей Казама–Сузуки. Говоря точнее, должна существовать некоторая примитивная форма Саито дающая Фробениусово многообразие изоморфное многообразию приходящему из деформаций потомками Виттена кирального кольца модели Казама–Сузуки. Дальнейшие исследования примитивных форм для Гепнеровсих особенностей продолжились в работах [43], [44], [46], [53].

В работе [51] автор исследует связь между структурами Саито для Гепнеровской особенности и особенности $F_{k,n}$. Это является естественным аналогом в теории особенностей одного из результатов [47], устанавливающего связь между квантовыми когомологиями грассманиана $Gr(n,k)$ и произведения проективных пространств $(\mathbb{P}^{k-1})^{\times n}$. В частности в [51] методы [47] используются для построения примитивных форм Саито для Гепнеровских особенностей.

Примечательно, что из связи установленной в [51] должна следовать связь между моделью Казама–Сузуки $SU(n+1)_{k-n-1}/(SU(n)_{k-n}\times U(1))$ и тензорного произведения n копий минимальной модели $SU(2)_k/U(1)$, что должно быть исследовано в последующих работах.

6.9. Многообразия Фано и Калаби–Яу как сечения расслоений на многообразиях флагов

Грассманианы и многообразия флагов являются примерами *многообразий Фано*: гладких комплексных проективных алгебраических многообразий X, антиканонический дивизор которых $-K_X$ обилен. Напомним, что *индексом* многообразия Фано называется наибольшее целое число, делящее $-K_X$ в группе $Pic(X)$. В работе О. Кюхле [55] классифицированы четырехмерные многообразия Фано индекса 1, получаемые как множества нулей набора общих сечений однородных векторных расслоений на грассманианах $Gr(k,n)$, а также вычислены числа Ходжа и многочлены Гильберта этих многообразий. При этом проверка того, является ли многообразием Фано множество нулей общих сечений данного набора векторных расслоений, является по сути дела задачей теории представлений. Эту конструкцию можно рассматривать как источник большого числа примеров новых четырехмерных многообразий Фано. Впоследствии эти многообразия исследовались также А. Г. Кузнецовым [56] и Л. Манивелем [57].

Эти результаты были обобщены и углублены в работе Евгения Смирнова и Константина Шрамова, сотрудников лаборатории.

В работе Кюхле рассматриваются только грассманианы типа A. Целью нашей работы является получение классификации четырехмерных многообразий Фано, происходящих таким образом из многообразий G/P, где G — произвольная связная редуктивная алгебраическая группа, а P — ее максимальная параболическая подгруппа, а также получить оценку на размерность объемлющего грассманиана и параметры векторных расслоений, для которых таким образом получается многообразие Фано произвольной фиксированной размерности, что, возможно, даст еще набор примеров многообразий Фано размерности 5 и выше. В ходе проекта было построено несколько первых примеров таких многообразий.

6.10. Суперпотенциал Гайотто–Виттена и Уиттэкеровы Д-модули на пространстве модулей монополей

Работа сотрудника лаборатории Михаила Финкельберга, и опубликованной в отчетный период совместно с А. Браверманом и Г. Добровольска посвящена аспектам геометрической теории представлений, связанным с математической физикой. Работа [58] описывает разнообразные естественные структуры на пространстве модулей евклидовых монополей, вычисляя их в естественных координатах на этом пространстве, введённых ранее в [59]. В этом разделе разъясняется значение и сфера применимости результатов этой работы.

Пусть G почти простая односвязная алгебраическая группа над $\mathbb{C}$. Обозначим $\mathcal{B}$ пространство флагов G. Фиксируем пару противоположных борелевских подгрупп B, B_-, пересекающихся по картановскому тору T (таким образом, $\mathcal{B} = G/B = G/B_-$).

Пусть Λ обозначает решётку кохарактеров T; поскольку G предполагается односвязной, эта решётка совпадает с решёткой кокорней G. Обозначим $\Lambda_+ \subset \Lambda$ подгруппу, порождённую простыми кокорнями. Будем говорить $\alpha \geq \beta$ (для $\alpha, \beta \in \Lambda$), если $\alpha - \beta \in \Lambda_+$.

Хорошо известно, что $H_2(\mathcal{B}, \mathbb{Z}) = \Lambda$ и что элемент $\alpha \in H_2(\mathcal{B}, \mathbb{Z})$ представим классом алгебраической кривой тогда и только тогда, когда $\alpha \in \Lambda_+$. Пусть $\mathring{Z}^\alpha$ обозначает пространство алгебраических отображений $\mathbb{P}^1 \to \mathcal{B}$ степени α, переводящих $\infty \in \mathbb{P}^1$ в $B \in \mathcal{B}$. Известно [59], что это гладкое симплектическое аффинное многообразие, изоморфное пространству модулей обрамлённых G-монополей на $\mathbb{R}^3$ с максимальным нарушением симметрии на бесконечности, топологического заряда α [63], [64].

Схема $\mathring{Z}^\alpha$ снабжена целым набором замечательных структур (перечисленных ниже). С другой стороны, в [59] авторы ввели систему (бирациональных этальных) координат на $\mathring{Z}^\alpha$. Целью настоящей работы является явное вычисление этих структур в координатах. В частности, оказывается, что суперпотенциал Гайотто–Виттена [62] допускает естественную интерпретацию в терминах D-модулей Уиттэкера [61].

6.10.1. Квазиотображения

Схема $\mathring{Z}^\alpha$ снабжена естественной частичной компактификацией Z^α. Она может быть реализована как пространство базированных *квазиотображений* степени α; теоретико-множественно она может быть описана следующим образом:

$$Z^\alpha = \bigsqcup_{0 \leq \beta \leq \alpha} \mathring{Z}^\beta \times \mathbb{A}^{\alpha - \beta},$$

где для $\gamma \in \Lambda_+$ мы обозначаем $\mathbb{A}^\gamma$ пространство всех крашеных дивизоров $\sum \gamma_i x_i$ с $x_i \in \mathbb{A}^1$, $\gamma_i \in \Lambda_+$, таких что $\sum \gamma_i = \gamma$.

6.10.2. “Симметричное” определение застав

Фиксируем $\lambda, \mu \in \Lambda$. Обозначим $\mathring{Z}^{\lambda,\mu}$ схему, классифицирующую следующие данные:

1) G-расслоение $\mathcal{F}$ на $\mathbb{P}^1$ с тривиализацией на $\infty \in \mathbb{P}^1$.

2) B-структуру $\mathcal{F}_B$ на $\mathcal{F}$, такую что индуцированное T-расслоение $\mathcal{F}_{T,+}$ имеет степень λ. Мы требуем, чтобы слой $\mathcal{F}_B$ был равен B в ∞.

3) B_--структуру $\mathcal{F}_{B_-}$ на $\mathcal{F}$, такую что индуцированное T-расслоение $\mathcal{F}_{T,-}$ имеет степень μ. Мы требуем, чтобы слой $\mathcal{F}_{B_-}$ был равен B_- в ∞.

Легко видеть, что это в самом деле схема. Больше того, $\overset{\circ}{Z}{}^{\lambda,\mu}$ естественно изоморфна $\overset{\circ}{Z}{}^{\lambda-\mu}$.

6.10.3. Структуры на пространстве застав

Легко видеть, что пространство $\overset{\circ}{Z}{}^{\alpha}$ снабжено следующими структурами:

1) Схема $\overset{\circ}{Z}{}^{\alpha}$ имеет естественную симплектическую структуру [59].

2) Есть естественный морфизм $\pi_\alpha : \overset{\circ}{Z}{}^{\alpha} \to \mathbb{A}^\alpha$. Более того, для $\beta, \gamma \in \Lambda_+$ пусть $(\mathbb{A}^\beta \times \mathbb{A}^\gamma)_{\mathrm{disj}}$ обозначает пространство пар непересекающихся крашеных дивизоров степеней β и γ. Если $\alpha = \beta + \gamma$, то имеется естественное этальное отображение $(\mathbb{A}^\beta \times \mathbb{A}^\gamma)_{\mathrm{disj}} \to \mathbb{A}^\alpha$. *Факторизация* — это канонический изоморфизм
$$\mathfrak{f}_{\beta,\gamma}: \ (\mathbb{A}^\beta \times \mathbb{A}^\gamma)_{\mathrm{disj}} \times_{\mathbb{A}^\alpha} Z^\alpha \xrightarrow{\sim} (\mathbb{A}^\beta \times \mathbb{A}^\gamma)_{\mathrm{disj}} \times_{\mathbb{A}^\beta \times \mathbb{A}^\gamma} (Z^\beta \times Z^\gamma).$$
Он будет называться *свойством факторизации* застав.

3) Картановская инволюция на группе G (которая переставляет B и B_- и индуцирует отображение $t \mapsto t^{-1}$ на торе T) индуцирует инволюцию ι на $\overset{\circ}{Z}{}^{\alpha}$ (это ясно с точки зрения определения $\overset{\circ}{Z}{}^{\alpha}$, данного в 6.10.2).

4) Пусть $\partial Z^\alpha = Z^\alpha \backslash \overset{\circ}{Z}{}^{\alpha}$. Тогда ∂Z^α является дивизором Картье; более того, дивизором нулей некоторой функции F_α на Z^α, обратимой на $\overset{\circ}{Z}{}^{\alpha}$ (эта функция определена однозначно с точностью до умножения на константу).

5) Фиксируем $\lambda, \mu \in \Lambda$, такие что $\lambda - \mu = \alpha$. Тогда для каждого простого корня $\check{\alpha}_i$ of G имеются канонические морфизмы $\mathfrak{E}^\alpha_{\lambda,+,i} : \overset{\circ}{Z}{}^{\alpha} \to H^1(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}(\langle -\check{\alpha}_i, \lambda\rangle)$, $\mathfrak{E}^\alpha_{\mu,-,i} : \overset{\circ}{Z}{}^{\alpha} \to H^1(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}(\langle -\check{\alpha}_i, \mu\rangle)$. Так как точное определение довольно сложно, мы приведём определение для $G = SL(2)$. В этом случае $Z^{\lambda,\mu} \simeq Z^\alpha$ классифицирует двумерные векторные расслоения $\mathcal{F}$ на $\mathbb{P}^1$ с тривиализованным детерминантом

и двумя точными последовательностями $0 \to \mathcal{L}_+ \to \mathcal{F} \to \mathcal{L}_+^{-1} \to 0$ и $0 \to \mathcal{L}_- \to \mathcal{F} \to \mathcal{L}_-^{-1} \to 0$ т.ч. $\deg \mathcal{L}_+ = -\lambda, \deg \mathcal{L}_- = -\mu$ (мы отождествляем решётку Λ с $\mathbb{Z}$). Кроме того, $\mathcal{F}$ снабжено тривиализацией в ∞, совместимой с $\mathcal{L}_+$ и $\mathcal{L}_-$; в частности, $\mathcal{L}_+$ и $\mathcal{L}_-$ тоже тривиализованы в ∞, что позволяет отождествить их канонически с $\mathcal{O}(-\lambda)$ и $\mathcal{O}(-\mu)$ (мы обозначаем $\mathcal{O}(n),\ n \in \mathbb{Z}$ линейное расслоение на $\mathbb{P}^1$, тривиализованное в $\infty \in \mathbb{P}^1$). Поэтому вышеприведённые короткие точные последовательности задают элементы в $H^1(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}(-2\lambda))$ and $H^1(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}(-2\mu))$.

Пусть $\chi_{i,+}^{\lambda} : \overset{\circ}{Z}{}^{\lambda,\mu} \times H^0(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}(\langle\lambda, \check{\alpha}_i\rangle - 2)) \to \mathbb{C}$ — это композиция $\mathfrak{E}_{\lambda,+,i}^{\alpha}$ и естественного спаривания $H^0(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}(\langle\lambda, \check{\alpha}_i\rangle - 2)) \times H^1(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}(-\langle\lambda, \check{\alpha}_i\rangle)) \to \mathbb{C}$. Заметим, что элемент $H^0(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}(\langle\lambda, \check{\alpha}_i\rangle - 2)$ можно рассматривать как многочлен K_i от z степени $\leq \langle\lambda, \check{\alpha}_i\rangle - 2$. Аналогично, пусть $\chi_{i,-}^{\mu} : \overset{\circ}{Z}{}^{\lambda,\mu} \times H^0(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}(\langle\mu, \check{\alpha}_i\rangle - 2)) \to \mathbb{C}$ — соответствующая функция (полученная заменой $\mathfrak{E}_{\lambda,+,i}^{\alpha}$ на $\mathfrak{E}_{\mu,-,i}^{\alpha}$). Мы определяем $\mathfrak{E}_{\lambda,+}^{\alpha}$ как прямую сумму всех $\mathfrak{E}_{\lambda,+,i}^{\alpha}$; аналогично определяется $\mathfrak{E}_{\mu,-}^{\alpha}$ (иногда мы опускаем индексы λ, μ и α, если нет опасности путаницы). Очевидно, отображения $\mathfrak{E}_+$ и $\mathfrak{E}_-$ переставляются инволюцией ι.

6.10.4. Координаты на заставах

Напомним определение системы этальных бирациональных координат на $\overset{\circ}{Z}{}^{\alpha}$ в случае $G = SL(2)$. Тогда $\overset{\circ}{Z}{}^{\alpha}$ состоит из всех отображений $\mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1$ степени α, переводящих ∞ в 0. Можно представлять такое отображение как рациональную функцию $\frac{R}{Q}$, где Q является многочленом со старшим коэффициентом 1 степени α, а R является многочленом степени $< \alpha$. Пусть $w_1, \ldots, w_\alpha$ — нули Q. Положим $y_r = R(w_r)$. Тогда функции $(y_1, \ldots, y_\alpha, w_1, \ldots, w_\alpha)$ образуют систему этальных бирациональных координат на $\overset{\circ}{Z}{}^{\alpha}$.

Для произвольной G определение системы координат аналогично вышеприведённому. В этом случае, точка $\overset{\circ}{Z}{}^{\alpha}$ задаёт многочлены R_i, Q_i, где i пробегает множество вершин диаграммы Дынкина G, и

(1) Q_i является многочленом со старшим коэффициентом 1 степени $\langle\alpha, \check{\omega}_i\rangle$

(2) R_i является многочленом степени $< \langle\alpha, \check{\omega}_i\rangle$.

Поэтому мы можем определить (этальные бирациональные) координаты $(y_{i,r}, w_{i,r})$, где i определено выше, а $r = 1, \ldots, \langle \alpha, \check{\omega}_i \rangle$. Нам будет удобно использовать немного видоизменённые координаты $\mathbf{y}_{i,r} := y_{i,r} \prod_{j \neq i} Q_j^{\langle \alpha_j, \check{\alpha}_i \rangle / 2}(w_{i,r})$. Основным результатом является следующая

Теорема 6.1. *1) Скобка Пуассона модифицированных координат (относительно симплектической структуры [59]) выглядит так:*

$$\{w_{i,r}, w_{j,s}\} = 0, \ \{w_{i,r}, \mathbf{y}_{j,s}\} = \check{d}_i \delta_{ij} \delta_{rs} \mathbf{y}_{j,s}, \ \{\mathbf{y}_{i,r}, \mathbf{y}_{j,s}\} = 0.$$

2) (Напомним, что уравнение границы F_α определено с точностью до мультипликативной константы.) $F_\alpha = \prod_{i,r} \mathbf{y}_{i,r}^{d_i} = \prod_{i,r} y_{i,r}^{d_i} \prod_{j \neq i} Q_j^{\alpha_j \cdot \alpha_i / 2}(w_{i,r})$.

3) Определим ещё одну модифицированную систему рациональных этальных координат на $\overset{\circ}{Z}{}^\alpha$:

$$\mathfrak{y}_{i,r} := \frac{y_{i,r}}{Q_i'(w_{i,r})}, \tag{6.10.1}$$

где Q_i' обозначает производную многочлена $Q_i(z)$. Тогда

$$\mathfrak{f}_{\beta,\gamma}(w_{i,r}, \mathfrak{y}_{i,r})_{i \in I}^{1 \le r \le a_i} = \left((w_{i,r}, \mathfrak{y}_{i,r})_{i \in I}^{1 \le r \le b_i}, (w_{i,r}, \mathfrak{y}_{i,r})_{i \in I}^{b_i + 1 \le r \le a_i} \right). \tag{6.10.2}$$

4) Инволюция ι переводит $(w_{i,r}, \mathbf{y}_{i,r})$ в $(w_{i,r}, \mathbf{y}_{i,r}^{-1})$.

5) Имеем

$$\begin{aligned} \chi_{i,+}^{\lambda}(\underline{w}, \underline{y}, \underline{z}) = \sum_{r=1}^{a_i} y_{i,r}^{-1} \frac{\prod_{j \neq i} Q_j^{-\langle \alpha_j, \check{\alpha}_i \rangle}(w_{i,r})}{Q_i'(w_{i,r})} K_i(w_{i,r}) = \\ \sum_{r=1}^{a_i} \mathbf{y}_{i,r}^{-1} \frac{\prod_{j \neq i} Q_j^{-\langle \alpha_j, \check{\alpha}_i \rangle / 2}(w_{i,r})}{Q_i'(w_{i,r})} K_i(w_{i,r}). \end{aligned} \tag{6.10.3}$$

Аналогично,

$$\chi_{i,-}^{\mu}(\underline{w}, \underline{y}, \underline{z}) = \sum_{r=1}^{a_i} \mathbf{y}_{i,r} \frac{\prod_{j \neq i} Q_j^{-\langle \alpha_j, \check{\alpha}_i \rangle / 2}(w_{i,r})}{Q_i'(w_{i,r})} K_i(w_{i,r}). \tag{6.10.4}$$

Замечание 6.2. *Множество неприводимых компонент* Irr^α *центрального слоя факторизации* $\pi_\alpha^{-1}(\alpha\cdot 0)\subset Z^\alpha$ *находится в естественной биекции с весовой компонентой веса* α *кристалла Кашивары* $\mathsf{B}_{\check{\mathfrak{g}}}(\infty)$, *[60, Параграф 14]. Инволюция, индуцированная* ι *на* $\bigsqcup_\alpha \mathrm{Irr}^\alpha$ *совпадает с инволюцией* $*:\ \mathsf{B}_{\check{\mathfrak{g}}}(\infty)\to\mathsf{B}_{\check{\mathfrak{g}}}(\infty)$ *[65, 8.3].*

6.10.5. Связь с работами Гайотто–Виттена и Гайцгори

Обозначения Теоремы 6.1 остаются в силе. Заметим, что многочлен $K(z)$ степени d со старшим коэффициентом 1 — это то же самое, что точка $\mathbb{A}^{(d)}$. Поэтому если все K_i имеют старшие коэффициенты 1, все вместе они задают точку $\mathbb{A}^{\lambda-2\rho}$. Поэтому можно рассматривать $\chi^\lambda_\pm:=\sum_{i\in I}\chi^\lambda_{i,\pm}$ как функции на $\mathring{Z}^\alpha\times\mathbb{A}^{\lambda-2\rho}$.

Пусть $\Lambda=(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)$ — неупорядоченный набор доминантных ковесов с суммой $\lambda-2\rho$. Тогда Λ задаёт локально замкнутое подмногообразие $\mathring{\mathbb{A}}^\Lambda$ в $\mathbb{A}^{\lambda-2\rho}$ (а именно, пространство модулей конфигураций *различных* крашеных точек $\underline{z}=(z_1,\ldots,z_n)$ т.ч. цвет z_i равен λ_i), и мы обозначаем $\chi^\Lambda_\pm$ ограничение $\chi^\lambda_\pm$ на $\mathring{Z}^\alpha\times\mathring{\mathbb{A}}^\Lambda$. Определим (многозначные) суперпотенциалы $\mathcal{W}^{\Lambda,\alpha}_\pm:\mathfrak{h}^\vee\times\mathring{Z}^\alpha\times\mathring{\mathbb{A}}^\Lambda\to\mathbb{A}^1$, положив

$$\mathcal{W}^{\Lambda,\alpha}_\pm=\sum_{1\le n\le N}\langle\lambda_n,h^*\rangle z_n-\sum_{(i,r)}\langle\alpha_i,h^*\rangle w_{i,r}\pm\log F_\alpha+\chi^\Lambda_\pm+\sum_{1\le m<n\le N}\lambda_m\cdot\lambda_n\log(z_m-z_n).\tag{6.10.5}$$

Заметим, что все слагаемые, кроме третьего и четвёртого, подняты с $\mathring{\mathbb{A}}^\alpha\times\mathbb{A}^\Lambda$. Также из определения ясно, что экспонента $\mathcal{W}^\Lambda_+$ корректно определена как регулярная функция на $\mathfrak{h}^\vee\times\mathring{Z}^\alpha\times\mathring{\mathbb{A}}^\Lambda$. Ясно, что инволюция ι переводит $\mathcal{W}^{\Lambda,\alpha}_+$ в $\mathcal{W}^{\Lambda,\alpha}_-$.

Пусть $G=SL(2)$. Тогда из Теоремы 6.1 следует, что функция $\mathcal{W}^{\Lambda,\alpha}_-$ является суперпотенциалом Гайотто–Виттена, изученном в [62]. Мы сохраним это название для функции $\mathcal{W}^{\Lambda,\alpha}_-$ для произвольной G. Экспонента суперпотенциала Гайотто–Виттена корректно определена на $\mathfrak{h}^\vee\times\mathring{Z}^\alpha\times\mathring{\mathbb{A}}^\Lambda$ (это не очевидно из формулы в координатах).

С другой стороны, пусть $\kappa\in\mathbb{C}$ иррациональное число. Тогда из работы Гайцгори [61] без труда следует такой результат:

Теорема 6.1. *Пусть* $M_{-}^{\kappa,\alpha,\Lambda}$ *обозначает* D*-модуль на* $\overset{\circ}{Z}{}^{\alpha}\times\overset{\circ}{\mathbb{A}}{}^{\Lambda}$*, порождённый функцией* $\exp(\kappa\mathcal{W}_{-}^{\Lambda,\alpha})$*. Пусть* $\pi^{\alpha,\Lambda}:\ \mathfrak{h}^{\vee}\times\overset{\circ}{Z}{}^{\alpha}\times\overset{\circ}{\mathbb{A}}{}^{\Lambda}\to\mathfrak{h}^{\vee}\times\mathbb{A}^{\alpha}\times\overset{\circ}{\mathbb{A}}{}^{\Lambda}$ *— соответствующий морфизм. Тогда* $\pi_{!}^{\alpha,\Lambda}(M_{-}^{\kappa,\alpha,\Lambda})=\pi_{*}^{\alpha,\Lambda}(M_{-}^{\kappa,\alpha,\Lambda})$ *изоморфен минимальному продолжению* D*-модуля на открытом страте, порождённому функцией*

$$\prod_{1\le n\le N}\exp(\langle\lambda_n,\kappa h^*\rangle z_n)\times\prod_{(i,r)}\exp(-\langle\alpha_i,\kappa h^*\rangle w_{i,r})\times$$

$$\times\prod_{(i,r)\neq(j,s)}(w_{i,r}-w_{j,s})^{\kappa\alpha_i\cdot\alpha_j/2}\times\prod_{(i,r),1\le n\le N}(z_n-w_{i,r})^{-\kappa\alpha_i\cdot\lambda_n}\times\prod_{1\le m<n\le N}(z_m-z_n)^{\kappa\lambda_m\cdot\lambda_n}.$$

Замечание 6.3. *Эта теорема в ограничении на открытый страт в сущности принадлежит Гайотто и Виттену (в этом случае нетрудно вывести её из формулы для суперпотенциала в координатах). Интерпретация суперпотенциала в терминах (6.10.5) позволяет продолжить этот изоморфизм на всё пространство* $\mathbb{A}^{\alpha}\times\overset{\circ}{\mathbb{A}}{}^{\Lambda}$*, пользуясь работой Гайцгори. Было бы интересно найти интерпретацию этого уточнённого утверждения в терминах модели Ландау–Гинзбурга, изученной Гайотто и Виттеном.*

Литература

[1] E.Feigin, I.Makedonskyi, *Nonsymmetric Macdonald polynomials, Demazure modules and PBW filtration*, Journal of Combinatorial Theory, Series A. 2015. P. 60–84.

[2] E.Feigin, I.Makedonskyi, *Generalized Weyl modules, alcove paths and Macdonald polynomials*, preprint, arXiv:1512.03254.

[3] Evgeny Feigin, Ievgen Makedonskyi, Daniel Orr, Generalized Weyl modules and nonsymmetric q-Whittaker functions, arXiv:1605.01560.

[4] Evgeny Feigin, Ievgen Makedonskyi, Generalized Weyl modules for twisted current algebras, arXiv:1606.05219.

[5] I. Arzhantsev, *Flag varieties as equivariant compactifications of* $\mathbb{G}_a^n$, Proceedings of the American Mathematical Society, vol. 139 (2011), no. 3, pp. 783–786.

[6] I. Cherednik, E.Feigin, *Extremal part of the PBW-filtration and E-polynomials*, Advances in Mathematics (2015) vol. 282, pp. 220-264.

[7] I. Cherednik, D. Orr, *Nonsymmetric difference Whittaker functions*, arXiv:1302.4094 (2013).

[8] G. Cerulli Irelli, E. Feigin, M. Reineke, *Quiver Grassmannians and degenerate flag varieties*, Algebra & Number Theory, 6-1 (2012), 165–194.

[9] G. Cerulli Irelli, E. Feigin, M. Reineke, *Homological approach to the Hernandez-Leclerc construction and quiver varieties*, Representation Theory 2014, no. 18, pp.1–14..

[10] G. Cerulli Irelli, E. Feigin, M. Reineke, *Desingularization of quiver Grassmannians for Dynkin quivers*, Advances in Mathematics (2013), no. 245, pp. 182–207.

[11] G. Cerulli Irelli, E. Feigin, M. Reineke, *Degenerate flag varieties: moment graphs and Schröder numbers*, Journal of Algebraic Combinatorics, Volume 38, Issue 1 (2013), pp. 159–189.

[12] G. Cerulli Irelli, E. Feigin, M. Reineke, *Schubert Quiver Grassmannians*, Algebras and Representation Theory (2016), doi:10.1007/s10468-016-9634-3

[13] E. Feigin, $\mathbb{G}_a^M$ *degeneration of flag varieties*, Selecta Mathematica: Volume 18, Issue 3 (2012), pp. 513–537.

[14] E. Feigin, G. Fourier, P. Littelmann, *PBW–filtration over* $\mathbb{Z}$ *and compatible bases for* $V_{\mathbb{Z}}(\lambda)$ *in type* $\mathtt{A}_n$ *and* $\mathtt{C}_n$, Symmetries, Integrable Systems and Representations, vol. 40, Springer, 2013, pp. 35–63.

[15] E. Feigin, G. Fourier, P. Littelmann, *Favourable modules: Filtrations, polytopes, Newton-Okounkov bodies and flat degenerations*, Transformation Groups (2016). doi:10.1007/s00031-016-9389-2.

[16] E.Feigin and M.Finkelberg, *Degenerate flag varieties of type A: Frobenius splitting and BW theorem*, Mathematische Zeitschrift (2013), vol. 275, no. 1-2, pp. 55–77.

[17] E.Feigin, M.Finkelberg, P.Littelmann, *Symplectic degenerate flag varieties*, Canadian Journal of Mathematics, vol.66 (2014), no. 6, pp. 1250–1286

[18] G.Fourier, P.Littelmann, *Tensor product structure of affine Demazure modules and limit constructions*, Nagoya Math. Journal 182 (2006), 171–198.

[19] G.Fourier, P.Littelmann, *Weyl modules, Demazure modules, KR-modules, crystals, fusion products and limit constructions*, Advances in Mathematics 211 (2007), no. 2, 566–593.

[20] M. Haiman, and J. Haglund, and N. Loehr, *A combinatorial formula for non-symmetric Macdonald polynomials*, Amer. J. Math. 130:2 (2008), 359–383.

[21] B. Ion, *Nonsymmetric Macdonald polynomials and Demazure characters*, Duke Mathematical Journal 116:2 (2003), 299–318.

[22] D.Orr, M.Shimozono, *Specializations of nonsymmetric Macdonald-Koornwinder polynomials*, arXiv:1310.0279.

[23] I. V. Netay, Syzygies of Quadratic Veronese Embedding, https://arxiv.org/abs/1610.04558.

[24] A. Blokh, L. Oversteegen, R. Ptacek, V. Timorin, "Laminational models for some spaces of polynomials of arbitrary degree", in preparation.

[25] A. D. Berenstein, A.V. Zelevinsky, *Tensor product multiplicities and convex polytopes in partition space*, J. Geom. and Phys. **5** (1989), 453–472.

[26] V. Kiritchenko, *Divided difference operators on convex polytopes*, arXiv:1307.7234 [math.AG], to appear in Adv. Studies in Pure Math.

[27] V. Kiritchenko, *Geometric mitosis*, Math. Res. Lett., **23** (2016), no. 4, 1069–1096.

[28] V. Kiritchenko, *Newton–Okounkov polytopes of flag varieties*, Transform. Groups, doi 10.1007/s00031-016-9372-y.

[29] V. Kiritchenko, M. Padalko, *Schubert calculus and symplectic Gelfand–Zetlin polytopes*, in preparation.

[30] V. Kiritchenko, E. Smirnov, V. Timorin, *Schubert calculus and Gelfand–Zetlin polytopes*, Russian Math. Surveys, **67** (2012), no.4, 685–719.

[31] A. Knutson and E. Miller, *Gröbner geometry of Schubert polynomials*, Ann. of Math. (2), **161** (2005), 1245–1318.

[32] P. Littelmann, *Cones, crystals and patterns*, Transform. Groups, **3** (1998), pp. 145–179.

[33] M. Padalko, *Mitosis for symplectic flag varieties*, Diploma, National Research University Higher School of Economics, 2015.

[34] A. Braverman and M. Finkelberg, *Pursuing the double affine Grassmannian I: transversal slices via instantons on A_k-singularities*, Duke Math. J. 152 (2010), no. 2, 175-206.

[35] A. Braverman, M. Finkelberg and D. Gaitsgory, *Uhlenbeck spaces via affine Lie algebras*, Progress in Mathematics 244 (2006), 17–135.

[36] A. Henderson, *Involutions on the affine Grassmannian and moduli spaces of principal bundles*, preprint 2015, arXiv:1512.04254.

[37] I. Mirković and M. Vybornov, *Quiver varieties and Beilinson-Drinfeld Grassmannians of type A*, preprint 2007, arXiv:0712.4160.

[38] R. Brylinski *Limits of weight spaces, Lusztig's q-analogs, and fiberings of adjoint orbits*, J. Amer. Math. Soc. **2** (1989), 517–533.

[39] M. Finkelberg, A. Ionov *Kostka-Shoji polynomials and Lusztig's convolution diagram*, arXiv:1605.05806, to be published in Bulletin of the Institute of Mathematics Academia Sinica.

[40] G. Lusztig *Canonical bases arising from quantized enveloping algebras*, J. Amer. Math. Soc. **3** (1990), 447–498.

[41] G. Lusztig, *Quivers, perverse sheaves, and quantized enveloping algebras*, J. Amer. Math. Soc. **4** (1991), 365–421.

[42] T. Shoji, *Green functions attached to limit symbols*, Adv. Stud. Pure Math. **40** (2004), 443–467.

[43] A. Belavin, V. Belavin *On exact solution of topological CFT models based on Kazama-Suzuki cosets*, J. Phys. A: Math. Theor. 49 (2016) 41LT02 (8pp).

[44] A. Belavin, V. Belavin *Flat structures on the deformations of Gepner chiral rings*, High Energ. Phys. (2016) 2016: 128.

[45] A. Belavin, D. Gepner, Y. Kononov *Flat coordinates for Saito Frobenius manifolds and String theory*, Pis'ma v Zh. Eksper. Teoret. Fiz., 103:3 (2016), 168-172.

[46] A. Belavin, L. Spodyneiko *Flat structures on Frobenius Manifolds in the case of irrelevant deformations*, arXiv:1608.02284 [hep-th].

[47] I. Ciocan-Fontanine, B. Kim, C. Sabbah *The abelian/nonabelian correspondence and Frobenius manifolds*, Invent. math. (2008) 171: 301.

[48] R. Dijkgraaf, E. Verlinde, H. Verlinde *Topological strings in $d < 1$*, Nuclear Physics B 352 (1), 59-86, 1991.

[49] D. Gepner *Fusion rings and geometry*, Commun.Math. Phys. (1991) 141: 381.

[50] S. Gusein-Zade, A. Varchenko *Verlinde algebras and the intersection form on vanishing cycles*, A. Sel. math., New ser. (1997) 3: 79.

[51] A. Ionov *Primitive forms for Gepner singularities* , arXiv:1611.03962.

[52] K. Saito *Period mapping associated to a primitive form*, Publ. R.I.M.S. 19 (1983), 1231-1261.

[53] K. Saito, unpublished.

[54] J.-B. Zuber *Graphs and Reflection Groups*, Comm. Math. Phys. Volume 179, Number 2 (1996), 265-294.

[55] Oliver Küchle, *On Fano 4-fold of index 1 and homogeneous vector bundles over Grassmannians*, Math. Z. **218** (1995), no. 4, 563–575.

[56] A. G. Kuznetsov, *On Küchle varieties with Picard number greater than 1*, Izv. Ross. Akad. Nauk Ser. Mat. **79** (2015), no. 4, 57–70.

[57] Laurent Manivel, *On Fano manifolds of Picard number one*, Math. Z. **281** (2015), no. 3-4, 1129–1135.

[58] A. Braverman, G. Dobrovolska, M. Finkelberg, *Gaiotto–Witten superpotential and Whittaker D-modules on monopoles*, Advances in Mathematics **300** (2016), 451–472.

[59] M. Finkelberg, A. Kuznetsov, N. Markarian, I. Mirković, *A note on a symplectic structure on the Space of G-monopoles*, Commun. Math. Phys. **201** (1999), 411–421. *Erratum*, Commun. Math. Phys. **334** (2015), 1153–1155; arXiv:math/9803124, v6.

[60] A. Braverman, M. Finkelberg, D. Gaistgory, *Uhlenbeck spaces via affine Lie algebras*, Progress in Math. **244** (2006), 17–135.

[61] D. Gaitsgory, *Twisted Whittaker model and factorizable sheaves*, Selecta Math. (N.S.) **13** (2008), no. 4, 617–659.

[62] D. Gaiotto, E. Witten, *Knot invariants from four-dimensional gauge theory*, Adv. Theor. Math. Phys. **16** (2012), no. 3, 935–1086.

[63] S. Jarvis, *Euclidean monopoles and rational maps*, Proc. Lond. Math. Soc. (3) **77** (1998), no.1, 170–192.

[64] S. Jarvis, *Construction of Euclidean monopoles*, Proc. Lond. Math. Soc. (3) **77** (1998), no.1, 193–214.

[65] M. Kashiwara, *On crystal bases*, CMS Conf. Proc. **16** (1995), 155–197.

7. Арифметическая алгебраическая геометрия

7.1. Метрики Кобаяши

Научный руководитель Лаборатории Ф. Богомолов совместно с сотрудником М. Вербицким и Л. Каменовой, С. Лу исследовали в работе [5] (принята к публикации в 2016) вопрос о структуре метрики Кобаяши на комплексных проективных многообразиях специальных типов. В частности, были исследованы многобразия, на которых имеется действие бесконечной группы автоморфизмов. Напомним, что метрика Кобаяши (более точно, псевдометрика, так как могут существовать различные точки с нулевым расстоянием) на компактном комплексном многообразии определяется при помощи системы голоморфных дисков. Было показано, что для каждого многообразия M определено непрерывное отображение $f\colon M \to S$ в компактное метрическое пространство S со свойством: $d_K(x,y) = d_S\big(f(x), f(y)\big)$ где d_K — метрика Кобаяши, а d_S — метрика на S. Метрика Кобаяши всюду вырождена, если все слои отображения f имеют положительную размерность.

Был получен следующий результат:

Теорема 7.1. *Если проективное многообразие M имеет ненулевой канонический класс и бесконечную группу бирациональных автоморфизмов, то метрика Кобаяши всюду вырождена.*

Этот результат является важным шагом в направлении общей гипотезы о том, что метрика Кобаяши в действительности тривиальна на компактных кэлеровых многообразиях с нулевым каноническим классом.

7.2. Абсциссы точек кручения эллиптических кривых

Ф. Богомолов совместно с Хангом Фу рассматривал поведение точек кручения на комплексных эллиптических кривых. А именно, пусть $\pi\colon E \to \mathbb{P}^1$ является стандартной проекцией степени два эллиптической кривой на проективную прямую. Пусть $PE_{tors} \subset \mathbb{P}^1$ обозначает образ относительно π подмножества точек кручения кривой E, рассмотренной как абелева группа в проективной прямой при условии, что за нулевой элемент в E взята одна из точек ветвления проекции π. Заметим, что при проективной замене координаты в $\mathbb{P}^1$ точно также изменяется и множество PE_{tors}.

Как было показано ранее в совместной работе Ф. Богомолова и Ю. Чинкеля, множество PE_{tors} существенно зависит от эллиптической кривой E. В частности, для разных кривых E и E' пересечение $PE_{tors} \cap PE'_{tors}$ конечно и обладает геометрической интерпретацией. В совместной работе с Хангом Фу [4] исследовалась гипотеза о существовании универсальной константы, ограничивающей порядок пересечения $PE_{tors} \cap PE'_{tors}$ независимо от пары (E, E') и проективной замены координаты на $\mathbb{P}^1$.

Были получены следующие результаты:

Теорема 7.2. *Если у двух кривых E и E' образы точек порядка 4 и порядка 3 совпадают, то совпадают и образы точек порядка 2, т.е. кривые изоморфны и имеют одно и тоже отображение.*

Теорема 7.3. *Если кривые определены над полем алгебраических чисел, имеют общий образ нуля в $\mathbb{P}^1$ и действие группы Галуа на точках кручения имеет достаточно большой образ, то нуль является единственной общей точкой.*

Эти результаты вместе с гипотезой Серра о действии группы Галуа на точках кручения показывают, что пересечение действительно очень маленькое во многих нетривиальных случаях. Однако, мы одновременно получили результаты и в другом направлении:

Теорема 7.4. *Имеются неизоморфные кривые, у которых пересечение содержит 14 точек.*

Отметим, что при этом пересечение состоит из образов точек достаточно маленьких порядков $3, 4, 5, 6$.

Данные результаты об эллиптических кривых связаны с конструкцией неразветленных соответствий, которая была введена в работах Ф. Богомолова и Ю. Чинкеля и рассматривается в совместной работе Ф. Богомолова и Джина Киана [7]. В этой работе были построены новые нетривиальные соответствия между кривыми типа C_n, где C_n — это кривая, заданная уравнением $y^2 = x^n - 1$. В частности, была дана конструкция неразветленного накрытия кривой C_{613^d}, которое отображается на $C_{2^s 3^n 5^t 7^r}$, и неразветленного накрытия кривой $C_{6\cdot 1143}$, которое отображается на C_7. Это показывает существование нетривиальных соответствий между C_{n_1} и C_{n_2}, где n_i является произведением различных относительно больших простых чисел.

В совместной работе с К. Бенингом и графом фон Бетмером [3] было показано, что любое расслоение, общий слой которого является рациональным многообразием, бирационально эквивалентно прямому произведению после конечной замены базы. Этот относительно простой результат говорит, что любое такое семейство имеет конечную подгруппу группы Кремоны в качестве группы рациональной монодромии и отчасти связан с работами Ф. Богомолова и Ю. Прохоровым [6] по инаварииантам стабильной рациональности.

7.3. Группа Гротендика стеков Деліня–Мамфорда

Сотрудик лаборатории С. Горчинский в работе, написанной совместно с Д. Бергом, М. Ларсеном и В. Лунцем [1], изучал геометрию группы Гротендика гладких проективных стеков Деліня–Мамфорда. Для построения категорной меры на данной группе изучался вопрос об описании абелевой категории G-эквивариантных когерентных пучков на многообразии X с действием конечной группы G, имеющим в качестве ядра неэффективности нетривиальную (нормальную) подгруппу N в G. При этом искомое описание должно быть в терминах H-экивариантных пучков на X, где $H = G/N$. Был получен следующий результат:

Теорема 7.5. *Пусть* $\mathrm{Irr}(N)$ *обозначает конечную схему неприводимых представлений группы* N*. Тогда в группе Брауэра фактор-стека* $[\mathrm{Irr}(N) \times X/H]$ *существует элемент* α*, для которого имеется эквивалентность категорий* $\mathrm{coh}(\alpha) \simeq \mathrm{coh}^G(X)$*.*

Для элемента α был найден критерий равенства нулю, а также были найдены явные представители элемента α в виде H-эквивариантных алгебр Азумая в широком ряде примеров, в частности, для случая, когда подгруппа N коммутативна и центральна.

Явное описание группы Гротендика стеков Деліня–Мамфорда также позволило найти новые нетривиальные меры на данной группе. С. Горчинским была построена мера со значением в группе Гротендика инд-мотивов Чжоу "с ограниченными группами Чжоу", т.е. таких инд-мотивов $\varinjlim_i M_i$, для которых при каждом натуральном p группа $CH^p(M_i)$ стабилизируется по i. При этом использовался один результат из недавнего препринта Е. Шиндера [9].

В свою очередь, это позволяет строить целую серию новых мер, например, меру, равную логарифму порядка n-кручения в группе Брауэра для фиксированного натурального числа n. В случае, когда основное поле является полем комплексных числе, это также позволяет строить меру, равную логарифму кручения в третьей группе когомологий. Используя данные меры, можно доказать новым способом основные результаты из работ [9] и [6]. Также можно получить обобщения результатов данных работ, относящихся к поверхностям, на случай произвольной размерности. Ожидается, что это позволит найти новые инварианты конечных подгрупп в многомерных группах Кремоны.

7.4. Группы Чжоу алгебраических многообразий

В работе К. Вуазен [10] был предложен новый стабильно бирациональный инвариант гладких проективных алгебраичесих многообразий, а именно, универсальная тривиальность групп Чжоу нуль-циклов. Данный инвариант активно применялся в последнее время многими математиками и позволил доказать стабильную нерациональность для целого ряда многообразий. С. Горчинский рассматривал этот инвариант в следующем контексте: пусть гладкое проективное трехмерное комплексное многообразие X не имеет нечетных когомологий, не имеет кручения в четных когомологиях, и элементы всех его четных когомологий являются классами алгебраических циклов. Предположим также, что отображение класса циклов устанавливает изоморфизмы $\mathbb{Q}$-векторных пространств $CH^2(X)_{\mathbb{Q}} \simeq H^4(X,\mathbb{Q})$, $CH^3(X)_{\mathbb{Q}} \simeq \mathbb{Q}$. Тогда группа Чжоу нуль-циклов $CH^3(X)$ универсально тривиальна тогда и только тогда, когда универсально тривиальна группа четвертых неразветвленных когомологий $H^4_{nr}(X,\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ для любого натурального числа n. Ожидается, что данную группу неразветвленных когомологий можно будет более явно вычислить в некоторых важных примерах, связанных с расслоениями на коники.

Имеется следующая гипотеза о произведении K_1-цепей и алгебраических циклов. Пусть X является гладким проективным многообразием над полем k, Z является алгебраическим циклом коразмерности p, а

$\{f_W\}_W$ является K_1-цепью на X коразмерности q, т.е. набором неприводимых подмногообразий W коразмерности q и ненулевых рациональных функций $f_W \in k(W)^*$, для которого имеется равенство $\sum_W \operatorname{div}(f_W) = 0$ в группе циклов коразмерности $q+1$ на X. Пусть $p+q$ равно размерности многообразия X. Тогда корректно определено произведение $Z.\{f_W\}_W \in k^*$. Гипотеза утверждает, что если цикл Z численно тривиален, то произведение $Z.\{f_W\}_W$ является корнем из единицы. Данное утверждение было доказано С. Блохом [2] для случая, когда цикл Z гомологически тривиален, при помощи гипотез Вейля и когомологий Делиня. Таким образом, одна из стандартных гипотез Гротендика предсказывает, что приведенная выше гипотеза верна.

При помощи характера Черна гипотезу можно свести к некоторой другой гипотезе о K-группах. С. Горчинским был доказан частных случай последней гипотезы, а именно было доказано следующее утверждение. Пусть $E^\bullet$ является конечным комплексом векторных расслоений на X, для которого характер Черна численно тривиален. Заметим, что данное условие равносильно тому, что для любого расслоения F на X (супер)ранг когомологий $H^\bullet(X, E^\bullet \otimes F)$ равен нулю. Тогда для любого расслоения F на X и автоморфизма $f\colon F \xrightarrow{\sim} F$ (супер)определитель автоморфизма f на $H^\bullet(X, E^\bullet \otimes F)$ равен одному.

Литература

[1] D. Bergh, S. Gorchinskiy, M. Larsen, V. Lunts, *Categorical measures for nite group actions*, preprint.

[2] S. Bloch, *Cycles and biextensions*, Contemp. Math., **83** (1989), 19–30.

[3] F. Bogomolov, C. Böhning, H.-S. Graf von Bothmer, *Birationally isotrivial fiber spaces*, Eur. J. Math., **2**:1 (2016), 45–54.

[4] F. Bogomolov, H. Fu, *Division polynomials and intersection of projective torsion points*, Eur. J. Math., **2**:3 (2016), 644–660.

[5] F. Bogomolov, L. Kamenova, S. Lu, M. Verbitsky, *On the Kobayashi pseudometric, complex automorphisms and hyperkaehler manifolds*, preprint arXiv:1601.04333.

[6] F. Bogomolov, Yu. Prokhorov, *On stable conjugacy of finite subgroups of the plane Cremona group, I*, Cent. Eur. J. Math., **11**:12 (2013), 2099–2105.

[7] F. Bogomolov, J. Qian, *On contraction of algebraic points*, preprint arXiv:1607.01832.

[8] J. Breeding II, C. Poor, D. S. Yuen, *Computations of spaces of paramodular forms of general level*, J. Korean Math. Soc. **53**:3 (2016), 645–689.

[9] E. Shinder, *The Bogomolov–Prokhorov invariant of surfaces as equivariant cohomology*, prepint arXiv:1604.01991.

[10] C. Voisin, *Unirational threefolds with no universal codimension* 2 *cycle*, Invent. Math., **201**:1 (2015), 207–237.

8. Модулярные формы в алгебраической геометрии и топологии и бесконечномерные алгебры Ли и автоморфные формы в зеркальной симметрии и в теории особенностей

В 2016 году научные исследования выполнялись В. А. Гриценко по следующим двум направлениям:

• Модулярные формы в алгебраической геометрии, арифметике и топологии;

• Бесконечномерные алгебры Ли и автоморфные формы в зеркальной симметрии и в теории особенностей.

Оба направления имеют отношения к теории автоморфных форм и их приложениям. Генетически, модулярные формы являются аналитическими объектами в арифметике, но имеют многочисленные приложения в алгебраической и дифференциальной геометрии, в топологии, в теории бесконечномерных алгебр Ли, в математической и теоретической физике.

В 2016 годы В. А. Гриценко сделал шесть докладов с консультациями (24 часа) на научных семинарах лаборатории, провел исследовательский семинар на летней школе Лаборатории алгебраической геометрии в Ярославле и подготовил, отредактировал и провел оригинальный научно-исследовательский курс **Jacobi forms: 30 ans après** (12 лекций) в рамках программы дистанционного обучения ВШЭ. Приведем список докладов в ВШЭ, подготовленных по результатам моих научных исследований. Названия докладов отражают полученные результаты и тематику исследований.

1) Автоморфные формы и новый класс Лоренцевых алгебр Каца-Муди (05.04);

2) Тета-блоки и произведения Борчердса (04.10);

3) Модули поляризованных поверхностей Куммера и произведения Борчердса рода 2 (21.10);

4) Формы типа Якоби и модулярные формы с t-параметром (08.11);

5) Структура градуированных колец слабых форм Якоби и ортогональных модулярных форм (13.12);

6) Производящие функции геометрических инвариантов и рефлективные модулярные формы (27.12).

Курс **Jacobi forms: 30 ans après** был прочитан на английском языке в рамках программы дистанционного обучения ВШЭ. Курс состоит из 12 основных лекций (по 90 минут) и оригинальных упражнений для 12 учебно-исследовательских семинаров. Многие задания семинаров носят исследовательский характер. Основная цель курса — дать введение в новый раздел математики, в теорию модулярных форм Якоби от многих переменных. Эта теория находит многочисленные приложения в арифметике, теории бесконечномерных алгебр Ли, теории геометрических инвариантов и теории струн. Курс рассчитан на студентов-дипломников (Master students) западных университетов и сильных российских студентов. Курс стал продолжением двух семестровых курсов для студентов-бакалавров, прочитанных мною на факультете в 2015 году и является введением в научную тематику Лаборатории алгебраической геометрии ВШЭ. Вторая половина курса содержит новые оригинальные, нигде не опубликованные результаты по теории форм Якоби, например, конструкции автоморфных коррекций форм Якоби многих переменных. Новые научные результаты по структуре градуированных колец слабых форм Якоби приводимых систем корней типа nA_1 вошли в материалы исследовательских заданий по курсу.

Курс прочитан на международной платформе COURSERA от Национального исследовательского университета Высшая школа экономики. Учебный ассистент курса — Дмитрий Адлер, студент магистр 2-го курса факультета математики ВШЭ. Материалы курса и его семинаров подготавливаются для издания в серии лекций математических курсов ВШЭ для издательства Springer.

Весь 2016 на факультете математике под моим руководством (совместно с С. Галкиным) работал научно-исследовательский семинар “**Автоморфные формы и их приложения**” (коорганизаторы семинара: Лаборатория Понселе (CNRS) и Независимый Университет). Сайт семинара расположен на сайте Лаборатории алгебраической геометрии (см. https://ag.hse.ru/automorphic).

В апреле 2016 Валерием Гриценко также прочитан курс из четырех лекций на научно-исследовательской школе по Математике Теории Струн (School on the Mathematics of String Theory) в институте CIRM, Luminy (France). Кроме этого прочитаны следующие часовые научные доклады:

• *Kac-Moody algebras, Borcherds products and L-functions* на конференции Физика и Теория Чисел (Physics and Number Theory), Институт Пуанкаре, Париж;

• *Lorentzian Kac-Moody algebras with* 2*-reflective Weyl groups* на международном семинаре по Конформной теории поля (Darmstadt-Erlangen-Freiburg Seminar on Conformal Field theory;

• *Произведения Борчердса и парамодулярная гипотеза Брамера-Креймера* на Коллоквиуме Лаборатории Чебышева в Санкт-Петербурге;

• *Арифметика квадратичных форм, произведения Борчердса и автоморфные дискриминанты* на международной конференции в Коряжме.

В 2016 В. А. Гриценко подготовлены следующие научные работы:

[1] V. Gritsenko, K. Hulek, *Moduli of polarized Enriques surfaces.* Progress in Math. vol. **315** “K3 Surfaces and their Moduli”, pp. 55–72, Birkhäuser-Spinger, 2016.

[2] V. Gritsenko, V. Nikulin, *Lorentzian Kac-Moody algebras with Weyl groups of 2-reflections.* `arXiv:1602.08359` (2016), 75 pages. (Статья прошла предварительный отбор в Proc. of Londom Math. Soc. и находится назаключительном рецензировании с апреля 2016. Возможное принятие в печать: март 2017.)

[3] V. Gritsenko, C. Poor и D. Yuen “*Antisymmetric Paramodular Forms of Weights* 2 *and* 3” Arxiv: 1609.04146, (2016), 20 pages.

8.1. Модулярные формы в алгебраической геометрии, арифметике и топологии

Одним из основных направлений исследований В. Гриценко в 2016 было изучение конструкции мероморфных автоморфных произведений Борчердса как диофантовой проблемы. В результате были найдены две бесконечные серии мероморфных произведений Борчердса и очень интересные примеры голоморфных антисимметричных парамодулярных форм веса 2 и 3 рода 2. Основные результаты изложены в совместной работе В. Гриценко с К. Поором и Д. Юеном [11].

В чем важность подобных результатов? Эти исследования тесно связаны с проблемами модулярности в алгебраической геометрии. Точнее, речь идет о точном соотношении между L-функциями алгебраических многообразий и модулярными формами. Безусловно, такие соотношения формулируются в рамках гипотез Ленглендса. Но в нашем частном случае речь идет о двумерном обобщении знаменитой гипотезы (теперь теоремы) Шимуры–Таниямы, которая утверждает, что дзета-функция Хассе-Вейля эллиптической кривой над полем рациональных чисел совпадет с L-функцией Гекке модулярной формы веса 2 одной комплексной переменной относительно конгруэнц-подгруппы специальной линейной группы $SL_2(\mathbb{Z})$. До последнего времени не было известно никаких примеров алгебраических многообразий дзета-функция которых совпадали бы L-функциями модулярных форм на группах ранга большего единицы. Новая гипотеза парамодулярная гипотеза Брамера-Креймера (см. [2]) является замечательным двумерным обобщением гипотезы Шимуры–Таниямы.

Парамодулярная Гипотеза Брамера–Креймера. (A. Brumer, K. Kramer см. [2]) *Пусть $N \in \mathbb{N}$. Существует взаимно однозначное соответствие между*

(1) *классами изогений абелевых поверхностей $\mathcal{A}$, определенных над $\mathbb{Q}$ с кондуктором с N и* $\mathrm{End}_{\mathbb{Q}}(\mathcal{A}) = \mathbb{Z}$,

и

(2) *одномерных линейных пространств собственных функций операторов Гекке $F \in S_2\left(\Gamma_N\right)^{new}$ с рациональными собственными значениями, которые не являются подъемом Гриценко из пространства форм Якоби $J_{2,N}^{cusp}$.*

При этом соотвествии

$$L(\mathcal{A}, s, \text{Hasse-Weil}) = L(F, s, \text{spin}).$$

Основной модулярной группой этой гипитезы являются парамодулярная группа поляризации $(1, N)$ $(N \in \mathbb{Z})$:

$$\Gamma_N = \begin{pmatrix} * & N* & * & * \\ * & * & * & */N \\ * & N* & * & * \\ N* & N* & N* & * \end{pmatrix} \cap \mathrm{Sp}_2(\mathbb{Q}), \qquad * \in \mathbb{Z} \ .$$

Заметим, что Γ_N — арифметическая подгруппа симплектической группы рода 2 над полем рациональных чисел, действующая на верхнюю полуплоскость Зигеля $\mathbb{H}_2$. Трехмерное модулярное многообразие $\Gamma_N \setminus \mathbb{H}_2$ изоморфно пространству модулей поляризованных абелевых поверхностей с поляризацией типа $(1, N)$. Модулярные формы относительно Γ_N называются парамодулярными формами Зигеля рода 2. Подъем Гриценко был предложен в статье [4] как инъективное отображения из пространства параболических форм Якоби $J_{k,N}^{cusp}$ в пространство параболических парамодулярных форм Зигеля $S_k(\Gamma_N)$

$$\mathrm{Lift}: \ J_{k,N}^{cusp} \mapsto S_k(\Gamma_N).$$

Очень большой объем вычислений проделанный американскими математиками Poor и Yuen в [13] показал, что для простых $N = p$ для $p < 600$ пространство $S_2(\Gamma_p)$ порождено подъемами Гриценко для все p кроме $p \in \{277, 349, 353, 389, 461, 523, 587\}$. Этот результат согласуется с Парамодулярной Гипотезой в следующем смысле.

A) Брамер и Креймер показали в [2], что подходящие абелевые поверхности с кондуктором $p < 600$ не существуют для простых p, не входящих в указанный выше список.

B) Для каждого p из указанного списка существует абелевая поверхность над $\mathbb{Q}$ кондуктора p.

C) Для максимального простого из списка, т.е. для $p = 587$, существует два класса неизогенных абелевых поверхностей кондуктора 587, одна из которых $\mathcal{A}_{587}^-$ имеет нечетный ранг.

Из вычислений Брамера и Креймера следует, что класс изогении первой абелевой поверхности над $\mathbb{Q}$ простого кондуктора p ранга один задается Якобианом $\mathcal{A}_{587}^-$ кривой $y^2 + (x^3 + x + 1)y = -x^3 - x^2$. Более того на основе компьютерных вычислений в [13] доказано, что $\dim S_2^-(\Gamma_{587}) \leq 1$. (Точная формула для размерности подобных пространств неизвестна.) Если Парамодулярная Гипотеза верна, то должна существовать единственная антиинвариантная парамодулярная форма Зигеля $S_2^-(\Gamma_{587})$ веса 2 для Γ_{587}. (Спинорная L-функция такой модулярной формы будет иметь знак минус в функциональном уравнении.) Отметим, что подъем Гриценко дает только инвариантные зигелевые формы, поэтому форма из $S_2^-(\Gamma_{587})$ автоматически новая (если она существует).

Проблема существования. *Доказать существование антиинвариантной зигелевой формы веса 2 относительно* Γ_{587}.

Дать общий метод построения антиинвариантных парамодулярных форм веса 2 относительно Γ_N.

Наш основной результат состоит в решении этой задачи. Это дает, в частности, новое подтверждение фундаментальной Парамодулярной Гипотезы.

Теорема 8.1.

(1) Модулярная форма F, порождающая пространство $S_2^-(\Gamma_{587})$, строится как произведение Борчердса. Она имеет целые коэффициенты Фурье.

(2) Существует (диофантовый) метод построения антиинвариантных автоморфных произведений Борчердса для парамодулярных групп Γ_N.

Предложенный нами метод построения базируется на теории *тета-блоков* (см. [12], [10]) и *автоморфных произведений Борчердса* в форме Гриценко–Никулина (см. [5]), отвечающей одномерным компонентам модулярных многообразий. Основным структурным "кирпичиком" для построения тета-блоков и произведений Борчердса в нашем подходе является (нечетная) тета-функция Якоби $\vartheta(\tau, z)$ и эта-функция Дедекинда $\eta(\tau)$. Мы полагаем

$$\vartheta(\tau, z) = q^{\frac{1}{8}} \left(\zeta^{\frac{1}{2}} - \zeta^{-\frac{1}{2}}\right) \prod_{j\in\mathbb{N}} (1 - q^j\zeta)(1 - q^j\zeta^{-1})(1 - q^j),$$

где $q = \exp(2\pi i\tau)$, $\zeta = \exp(2\pi iz)$, $\tau \in \mathbb{H}_1$ и $z \in \mathbb{C}$,

$$\eta(\tau) = q^{\frac{1}{24}} \prod_{n\in\mathbb{N}} (1 - q^n).$$

Известно (см. [5]), что $\eta(\tau) \in J_{\frac{1}{2},0}(\epsilon) = M_{1/2}(SL_2(\mathbb{Z}), \epsilon)$, где $\epsilon : SL_2(\mathbb{Z}) \to U_{24}$, $\vartheta \in J_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(\epsilon^3 \times v_H)$, и $\vartheta_\ell \in J_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}\ell^2}(\epsilon^3 \times v_H^\ell)$, где $\vartheta_\ell(\tau, z) = \vartheta(\tau, \ell z)$ и $\ell \in \mathbb{N}$.

8.1.1. Тета-блоки и инфляция

Тета-блоки появляются в теории произведений Борчердса (см. [6]) как естественные рациональные функции от η и θ, которые являются голоморфными формами Якоби. Тета-блок $\mathrm{TB}_f : \mathbb{H}_1 \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ определяется (см. [10]) как рациональная функция

$$\mathrm{TB}_f = \eta^{f(0)} \prod_{\ell\in\mathbb{N}} (\vartheta_\ell/\eta)^{f(\ell)}\,,$$

для некоторой четной функции $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ с конечным носителем. Легко показать, что $\mathrm{TB}_f \in J^{(mero)}_{k,m}(\chi)$, где вес k, индекс m и характер χ задаются формулами

$$\begin{aligned} k &= \frac{1}{2}f(0); \quad 4m = \sum_{\ell\in\mathbb{Z}} \ell^2 f(\ell);\\ \chi &= \epsilon_\eta^{24A} v_H^{2B}; \quad 24A = \sum_{\ell\in\mathbb{Z}} f(\ell); \quad 2B = \sum_{\ell\in\mathbb{N}} \ell f(\ell). \end{aligned}$$

Чтобы проверить, является ли мероморфная форма Якоби TB_f голоморфной (в бесконечности) формой Якоби, необходимо проверить порядок тета-блока в бесконечности (см. [12]), а именно надо оценить значение функции

$$\mathrm{ord}(\mathrm{TB}_f; x) = \frac{k}{12} + \frac{1}{2}\sum_{\ell\in\mathbb{N}} f(\ell)\bar{B}_2(\ell x)$$

неотрицательно для $0\le x\le 1$. Если $\mathrm{ord}(\mathrm{TB}_f; x) > 0$, то $\mathrm{TB}_f \in J^{(cusp)}_{k,m}(\chi)$. ($\bar{B}_2(x)$ – периодическое расширение второго полинома Бернулли $B_2(x) = x^2 - x + \frac{1}{6}$.) Если мы перемножим все множители тета-блока, то получим следующее представление блока в виде бесконечного произведния

$$\begin{aligned} \mathrm{TB}_f(\tau,z) &= q^A \prod_{\ell\in\mathbb{N}} \left(\zeta^{\ell/2} - \zeta^{-\ell/2}\right)^{f(\ell)} \prod_{n\in\mathbb{N}}\prod_{\ell\in\mathbb{Z}} (1-q^n\zeta^\ell)^{f(\ell)}\\ &= q^A\,\zeta^B \prod_{\substack{n,\ell\in\mathbb{Z}:\, n\ge 0 \text{ and}\\ \text{if } n=0 \text{ then } \ell<0}} (1-q^n\zeta^\ell)^{f(\ell)}. \end{aligned}$$

В нашей работе мы рассматриваем только тета-блоки без знаменателя, т.е. построенные по таким функциям f , что $f(\ell)\ge 0$ всех ℓ.

Чтобы построить произведения Борчердса нам потребуются формы Якоби веса 0 *с целыми коэффициентами Фурье, которые получаются в виде отношений двух тета-блоков одного веса.* Мы используем два метода построения таких модулярных форм.

Первый метод. Пусть ϕ тета-блок (без знаменателя). Отношение $\dfrac{\phi|V_\ell}{\phi}$ имеет целые коэффициенты Фурье и является почти голоморфной формой Якоби для $\ell = 2$ (см. [10], Corollary 6.2).

Второй метод. Положим $\mathrm{BTB}_f(\zeta) = \prod_{\ell\in\mathbb{N}} \left(\zeta^{\ell/2} - \zeta^{-\ell/2}\right)^{f(\ell)}$ и назовем это произведение частичным тета-блоком. Предположим, что частичный тета-блок $\mathrm{BTB}_f(\zeta)$ делит $\mathrm{BTB}_g(\zeta)$ в $\mathbb{Z}[\zeta^{1/2}, \zeta^{-1/2}]$, тогда форма Якоби веса 0 $\psi = \dfrac{\mathrm{TB}_g}{\mathrm{TB}_f}$ является почти голоморфной и имеет целые коэффициенты Фурье в бесконечности. В этом случае мы называем TB_g *инфляцией* блока TB_f.

8.1.2. Явная конструкция единственной анти-симметричной формы Зигеля из $S_2^-(\Gamma_{587})$

Пусть $T = T_f$ обозначает конечный список значений, содержащий $f(1)$ раз число 1, $f(2)$ раз число 2 и т.д. Антисимметричное произведение Борчердса начинается с тета-блока с первым множителем типа q^2, поэтому совершенно необходимо найти подобные формы Якоби.

Предложение 1. *Существует единственный голоморфный в бесконечности тета-блок веса 2 и индекса 587 с указанным выше свойством:*

$$\phi_{587} = \mathrm{TB}_2(1,1,2,2,2,3,3,4,4,5,5,6,6,7,8,8,9,10,11,12,13,14).$$

Метод 1 дает нам форму Якоби веса нуль $\psi_{0,587} = \dfrac{\phi_{587}|V_\ell}{\phi_{587}}$, которая порождает мероморфное произведение Борчердса по методу Гриценко–Никулина ([6]).

Чтобы "подправить" последнее мероморфное произведение до голоморфного мы используем условие антиинвариантности произведения Борчердса, записывающееся как некоторое арифметическое условие на коэффициенты Фурье искомой формы Якоби. Эти соображения позволяют нам подобрать корректирующую инфляцию для $\psi_{0,587}$.

Предложение 2. *Инфляция тета-блока* ϕ_{587}

$$\Xi = \mathrm{TB}_2(1,10,2,2,18,3,3,4,4,15,5,6,6,7,8,16,9,10,22,12,13,14)$$

является параболической формой Якоби веса 2 *и индекса* 1174*, начинающаяся с* q^2*, т.е.* $\Xi \in J_{2,1174}^{(cusp)}(q^2)$.

Комбинируя отмеченные выше два метода построения форм Якоби, мы строим почти голоморфную форму Якоби веса 0 и индекса 587 с целыми коэффициентами Фурье

$$\psi = \frac{\phi_{587}|V_2 - \Xi}{\phi_{587}} \in J_{0,587}^{(wh)}.$$

Используя компьютер, мы можем найти все особые (сингулярные) коэффициенты Фурье, отвечающие за дивизор произведения Борчердса $B(\psi)$. Сингулярная часть разложения Фурье приведена ниже. Она содержит коэффициенты со степенями q^n до $n = 147 < \frac{587}{4}$:

$$\begin{aligned}
&\psi_{\text{sing}} = \frac{1}{q} + 4 + \zeta^{-14} + \zeta^{-13} + \zeta^{-12} + \zeta^{-11} + \zeta^{-10} + \zeta^{-9} + 2\zeta^{-8} + \zeta^{-7} + \\
&2\zeta^{-6} + 2\zeta^{-5} + 2\zeta^{-4} + 2\zeta^{-3} + 3\zeta^{-2} + 2\zeta^{-1} + 2\,\zeta + 3\,\zeta^{2} + 2\,\zeta^{3} + \\
&2\,\zeta^{4} + 2\,\zeta^{5} + 2\,\zeta^{6} + \zeta^{7} + 2\,\zeta^{8} + \zeta^{9} + \zeta^{10} + \zeta^{11} + \zeta^{12} + \zeta^{13} + \zeta^{14} + \\
&q\,\left(\zeta^{-50} + 2\zeta^{-49} + 2\,\zeta^{49} + \zeta^{50}\right) + q^{2}\,\left(\zeta^{-69} + \zeta^{69}\right) + \\
&q^{3}\,\left(\zeta^{-85} + 2\zeta^{-84} + 2\,\zeta^{84} + \zeta^{85}\right) + q^{4}\,\left(\zeta^{-98} + 2\zeta^{-97} + 2\,\zeta^{97} + \zeta^{98}\right) + \\
&q^{5}\,\left(\zeta^{-109} + \zeta^{109}\right) + q^{6}\,\left(\zeta^{-119} + \zeta^{119}\right) + q^{11}\,\left(\zeta^{-161} + \zeta^{161}\right) + \\
&q^{12}\,\left(2\zeta^{-168} + 2\,\zeta^{168}\right) + q^{13}\,\left(2\zeta^{-175} + 2\,\zeta^{175}\right) + q^{15}\,\left(\zeta^{-188} + \zeta^{188}\right) + \\
&q^{16}\,\left(2\zeta^{-194} + 2\,\zeta^{194}\right) + q^{17}\,\left(\zeta^{-200} + \zeta^{200}\right) + q^{27}\,\left(\zeta^{-252} + \zeta^{252}\right) + \\
&q^{29}\,\left(3\zeta^{-261} + 3\,\zeta^{261}\right) + q^{31}\,\left(\zeta^{-270} + \zeta^{270}\right) + q^{35}\,\left(\zeta^{-287} + \zeta^{287}\right) + \\
&q^{37}\,\left(\zeta^{-295} + \zeta^{295}\right) + q^{67}\,\left(\zeta^{-397} + \zeta^{397}\right) + q^{74}\,\left(\zeta^{-417} + \zeta^{417}\right) + \\
&q^{78}\,\left(2\zeta^{-428} + 2\,\zeta^{428}\right) + q^{79}\,\left(\zeta^{-431} + \zeta^{431}\right) + q^{85}\,\left(\zeta^{-447} + \zeta^{447}\right) + \\
&q^{87}\,\left(2\zeta^{-452} + 2\,\zeta^{452}\right) + q^{94}\,\left(\zeta^{-470} + \zeta^{470}\right) + q^{101}\,\left(2\zeta^{-487} + 2\,\zeta^{487}\right) + \\
&q^{106}\,\left(\zeta^{-499} + \zeta^{499}\right) + q^{109}\,\left(\zeta^{-506} + \zeta^{506}\right) + q^{116}\,\left(\zeta^{-522} + \zeta^{522}\right) + \\
&q^{126}\,\left(2\zeta^{-544} + 2\,\zeta^{544}\right) + q^{133}\,\left(\zeta^{-559} + \zeta^{559}\right) + q^{134}\,\left(\zeta^{-561} + \zeta^{561}\right) \\
&\;+ O(q^{148}).
\end{aligned}$$

Произведение Борчердса $B(\psi) \in S_2^-(\Gamma_{587})$ голоморфно, потому что все коэффициенты сингулярной части разложения Фурье положительны.

Теорема 8.2. *Имеется следующая формула бесконечного произведения* *для построенной формы в* $S_2^-(\Gamma_{587})$*:*

$$B(\psi)\begin{pmatrix}\tau & \zeta\\ \zeta & \omega\end{pmatrix} = q^2\zeta^{68}\xi^{587}\prod_{\substack{n,r,m\in\mathbb{Z}\colon m\geq 0,\text{ if } m=0 \text{ then } n\geq 0\\ \text{and if } m=n=0 \text{ then } r<0.}}\left(1-q^n\zeta^r\xi^{587m}\right)^{c(nm,r;\psi)},$$

где $q=\exp(2\pi i\tau)$, $\zeta=\exp(2\pi iz)$ *и* $\xi=\exp(2\pi i\omega)$, *а* $c(n,r)$ *коэффициенты Фурье почти голоморфной формы Якоби* $\psi(\tau,z)\in J_{0,587}^{(wh)}$. *В частности, мы можем написать явную формулу для дивизора этого произведения Борчердса в терминах Гумбертовых поверхностей.*

8.1.3. Диофантовое обобщение конструкции Теоремы 8.2

Метод построения автоморфного произведения Борчердса в пространстве $S_2^-(\Gamma_{587})$ можно существенно обобщить.

Возьмем $c\in\mathbb{N}^{24}$ такое, что $\prod_{j=1}^{24}c_j = 1080$. Определим следующее алгебраическое множество $A_c=\{d\in\mathbb{C}^{24}:$ выполнено соотношение (8.1.1)$\}$, где

$$\exp\left(\sum_{n\in\mathbb{N}}\frac{(-1)^n}{(2n)!}\zeta(1-2n)\sum_{j=1}^{24}(1-c_j^{2n})d_j^{2n}z^{2n}\right)=1+$$

$$\frac{1}{540}\sum_{n\in\mathbb{N}}\frac{(-1)^n}{(2n)!}\left(\sum_{1\leq i<j\leq 24}\left[(d_i+d_j)^{2n}+(d_i-d_j)^{2n}\right]-\sum_{j=1}^{24}d_j^{2n}\right)z^{2n} \quad (8.1.1)$$

Отметим, что $A_c\subseteq\mathbb{C}^{24}$ определено счетным числом однородных полиномиальных уравнений, одним для каждой четной степени. Первые уравнения выглядят следующим образом:

$$\sum_{j=1}^{24}c_j^2d_j^2 = 2\sum_{j=1}^{24}d_j^2. \quad (z^2 \text{ term})$$

$$\sum_{j=1}^{24}46d_j^4+6c_j^4d_j^4=\sum_{i,j=1}^{24}[15(c_i^2-1)(c_j^2-1)-8]d_i^2d_j^2. \quad (z^4 \text{ term})$$

$$\sum_{j=1}^{24}(128-16c_j^6)d_j^6+\sum_{i,j=1}^{24}\left(224+42(1-c_i^2)(1-c_j^4)\right)d_i^2d_j^4+$$

$$\sum_{i,j,k=1}^{24}35(1-c_i^2)(1-c_j^2)(1-c_k^2)d_i^2d_j^2d_k^2=0. \quad (z^6 \text{ term})$$

Алгебраическое множество A_c инвариантно относительно замены знаков и перестановок 24 индексов. Следующая теорема дает общий метод построения анти-симметричных произведений Борчердса.

Теорема 8.3. *Возьмем $c \in \mathbb{N}^{24}$ такое, что $\prod_{j=1}^{24} c_j = 1080$. Каждая целая точка $d \in A_c$ соответствует антисимметричному мероморфному парамодулярному произведению Борчердса по следующей схеме. Беря абсолютные значения всех координат, мы можем предполагать, что все компоненты $d \in A_c$ неотрицательные. Пусть k число нулевых компонент в d и $\epsilon = (-1)^{k+1}$. Число $N = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{24} d_j^2$ целое. Положим $m = \prod_{j:d_j=0} c_j$. Тогда получается произведение Борчердса*

$$B(\psi) = \tilde{\phi} \exp\left(-\mathrm{Grit}(\psi)\right) \in M_k^{(mero)}\left(\Gamma_N\right)^{\epsilon},$$

где $\psi = \dfrac{\phi|V_2 - m\Xi}{\phi} \in J_{0,N}^{(nh)}(\mathbb{Z})$, $\phi = \eta^{2k}\prod_{j:d_j\neq 0}(\vartheta_{d_j}/\eta) \in J_{k,N}^{(w)}(2)$ и $\Xi = \eta^{2k}\prod_{j:d_j\neq 0}(\vartheta_{c_j d_j}/\eta) \in J_{k,2N}^{(w)}(2)$.

8.1.4. Два бесконечных спорадических семейства целых точек и важные примеры порамодулярных произведений Борчердса

Для каждого $c \in \mathbb{N}^{24}$ с $\prod_{j=1}^{24} c_j = 1080$, мы хотели бы знать разбиение проективного алгебраического множества $[A_c \setminus \{0\}] \subseteq \mathbb{P}^{23}(\mathbb{C})$ на неприводимые компоненты. Это очень интересная и трудная проблема. Компьютерные эксперименты дали нам два линейных подпространства над $\mathbb{Q}$ в A_c, содержащих целую точку d для

$$c = [5,3,3,3,2,2,2,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1] \in \mathbb{N}^{24},$$

т.е. для такого c, $[A_c \setminus \{0\}]$ содержит две проективные прямые $\mathcal{F}_1$ и $\mathcal{F}_2$:

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_1 = \{&\beta, 2\beta, \beta+\alpha, \beta-\alpha, 2\beta+\alpha, 2\alpha, \alpha, 4\beta, 3\beta+2\alpha, 3\beta+\alpha,\\
&3\beta, 3\beta-\alpha, 2\beta+2\alpha, 2\beta, 2\beta-\alpha, 2\beta-2\alpha, \beta+2\alpha, \beta+\alpha, \beta,\\
&\beta-\alpha, \beta-2\alpha, \alpha, 0, 0 : \alpha, \beta \in \mathbb{Z}\}\\
\mathcal{F}_2 = \{&\beta, \alpha+\beta, \alpha, \alpha-\beta, \alpha+2\beta, \alpha-2\beta, 2\beta, 2\alpha, 2\alpha+2\beta, 2\alpha+\beta,\\
&2\alpha-\beta, 2\alpha-2\beta, \alpha+3\beta, \alpha+\beta, \alpha, 4\beta, \alpha-\beta, 3\beta, 2\beta, \alpha-3\beta,\\
&\beta, \beta, 0, 0 : \alpha, \beta \in \mathbb{Z}\}
\end{aligned}$$

Анализируя целые точки на этих прямых, мы можем построить много важных (с арифметической и геометрической точек зрения) примеров парамодулярных форм рода 2. Первые примеры сведены в Таблицу 1, которая дает антисимметричное произведение Борчердса $\mathrm{Borch}(\psi) \in S_k(\Gamma_N)^{\epsilon}$ со знаком $\epsilon = (-1)^{k+1}$.

Таблица 1. **Антисимметричные произведения Борчердса** в $S_k(\Gamma_N)^{\epsilon}$.

k	N	m	(α, β) for $\mathcal{F}_1$	(α, β) for $\mathcal{F}_2$	ϵ
2	587	1			-1
2	713	1	$(1,4)$ or $(-5,3)$		-1
2	893	1	$(5,3)$		-1
3	122	1	$(2,1)$		+1
3	167	1		$(1,2)$	+1
3	173	1	$(-2,1)$	$(3,1)$	+1
3	197	1	$(1,2)$		+1
3	213	1	$(3,1)$		+1
3	285	1	$(-3,2)$		+1
5	38	3		$(0,1)$	+1
5	42	4	$(0,1)$		+1
5	53	3	$(-1,1)$	$(1,1)$	+1
5	65	3	$(1,1)$		+1
8	17	15	$(1,0)$		-1
9	15	10		$(1,0)$	+1

В завершении мы сделаем несколько замечаний о полученных примерах Таблицы 1. Как и случае 587 (Теорема 8.2), примеры для $N = 713$

и 893 подтверждают первую часть Парамодулярной Гипотезы. В силу результатов [2] существуют абелевые поверхности над $\mathbb{Q}$ ранга один и кондуктора N. Они задаются Якобианами следующих гиперэллиптических кривых над $\mathbb{Q}$ ранга один и кондуктора N:

$$y^2 = x^6 - 2x^5 + x^4 + 2x^3 + 2x^2 - 4x + 1 \quad \text{для} \quad N = 713$$

и

$$y^2 = x^6 - 2x^4 - 2x^3 - 3x^2 - 2x + 1 \quad \text{для} \quad N = 893.$$

8.1.5. Дальнейшие приложения в геометрии

Построенные в Таблице 1 произведения Борчердса веса 3 для 167, 173, 197 дают результат о нетривиальности групп третьих когомологий важных максимальных арифметических групп.

Теорема 8.4. *Обозначим через Γ_p^* расширение парамодулярной группы Γ_p при помощи инволюции Фрике. (Γ_p^* будет максимальной арифметической группой в $Sp_2(\mathbb{R})$). Для $p = 167$, 173 и 197*

$$H^3(\Gamma_p^*, \mathbb{C}) \neq \{0\}.$$

Отметим, что форма веса 3 для $N = 122$, построенная в Таблице 1 соответствует форме, предсказанной в модулярной гипотезе о специальных трехмерных многообразиях Калаби–Яу из теории Зеркальной Симметрии (Корти, Голышев, Шоль, …).

8.2. Бесконечномерные алгебры Ли и автоморфные формы в зеркальной симметрии и в теории особенностей

Многие производящие функции в геометрии, физике и теории алгебр Ли являются модулярными или квазимодулярными формами относительно различных арифметических групп. Именно поэтому автоморфные формы являются инструментом, связывающие различные области математики. Как было отмечено в конце первой части, антисимметричные парамодулярные формы для групп Γ_{61} и Γ_{122} описывают эффект зеркальной симметрии для специальных многообразий Калаби-Яу.

В 2016 году мною (совместно с В. Никулиным) была написана фундаментальная работа (75 страниц), посвященная Лоренцевым алгебрам Каца-Муди (бесконечномерные алгебры Ли типа Борчердса)

[GN2016] V. Gritsenko, V. Nikulin, *Lorentzian Kac-Moody algebras with Weyl groups of 2-reflections.* `arXiv:1602.08359` (2016), 75 pages. (Статья прошла предварительный отбор в Proc. of Londom Math. Soc.)

Уникальность Лоренцевых алгебр Каца-Муди в математике и физике можно объяснить тем фактом, что у них происходит взрывное расширение группы симметрий от исходной гиперболической группы Вейля сигнатуры $(n,1)$ до целочисленной ортогональной группы решетки сигнатуры $(n+1,2)$. Иначе это можно сформулировать так: *Лоренцева алгебра Каца-Муди имеет огромную группу скрытых симметрий.* Существует только конечное число таких алгебр. Их полная классифилкация – очень трудная, фундаментальная проблема этого раздела математики.

Основные результаты статьи [GN2016]:

(1) Описан первые большой полностью расклассифицированный класс Лоренцевых алгебр Каца-Муди без ограничения на ранг решеток.

(2) Для каждой алгебры из класса полностью описаны системы простых корней, найдены их диаграммы Дынкина и камеры Вейля.

(3) Для алгебр из класса найдены автоморфные формы знаменателя, т.е. построены рефлективные модулярные формы относительно некоторых ортогональных групп. Для каждой такой модулярной формы получена формула автоморфного произведения Борчердса.

(4) Среди всех формул знаменателей найдены те, которые получаются как аддитивные подъемы. Эти функции дают явные описания (точные формулы) системы мнимых простых корней соответствующих Лоренцевых алгебр.

(5) Кратности всех корней алгебр описаны при помощи почти голоморфных форм Якоби веса 0 от многих переменных. Получены результаты по теории форм Якоби.

(6) Построенные алгебры описывают арифметическую зеркальную симметрию для решетчато-поляризованных $K3$ поверхностей.

(7) Получены многочисленные результаты по квазиограничениям рефлективных модулярных форм, которые позволяют строить новые рефлективные модулярные формы от меньшего числа переменных.

(8) Используя методы (7) изучены большинство автоморфных дискриминантов версальных деформации 14 исключительных гиперболических особенностей Арнольда.

Первая основная идея статьи [GN2016] состоит в том, что система простых корней произвольной Лоренцевой алгебры Каца-Муди должна обладать решетчатым вектором Вейля. (Существуют разные типы векторов Вейля дле гиперболических систем корней.) Сформулируем первую основную теорему.

Теорема 2.1 (Теорема 3.1 в [GN2016].) *Следующие и только только следую эллиптические 2-рефлективные системы корней четных гиперболических решеток S ранга $\mathrm{rk}\, S \geq 3$ имеют решетчатый вектор Вейля ρ относительно группы Вейля $W^{(2)}(S)$, порожденной 2-отражениями. Мы упорядочиваем их по рангу и по величине определителя.*

Rank 3: $S_{3,2} = U \oplus A_1$, $S_{3,8,a} = \langle -2 \rangle \oplus 2A_1$, $S_{3,8,b} = (\langle -24 \rangle \oplus A_2)[1/3, -1/3, 1/3]$, $S_{3,18} = U(3) \oplus A_1$, $S_{3,32,a} = U(4) \oplus A_1$, $S_{3,32,b} = \langle -8 \rangle \oplus 2A_1$, $S_{3,32,c} = U(8)[1/2, 1/2] \oplus A_1$, $S_{3,72} = \langle -24 \rangle \oplus A_2$, $S_{3,128,a} = U(8) \oplus A_1$, $S_{3,128,b} = \langle -32 \rangle \oplus 2A_1$, $S_{3,288} = U(12) \oplus A_1$,
анизотропный случай: $S_{3,12} = \langle -4 \rangle \oplus A_2$, $S_{3,24} = \langle -6 \rangle \oplus 2A_1$, $S_{3,36} = \langle -12 \rangle \oplus A_2$, $S_{3,108} = \langle -36 \rangle \oplus A_2$.

Rank 4: $S_{4,3} = U \oplus A_2$, $S_{4,4} = U \oplus 2A_1$, $S_{4,12} = U(2) \oplus A_2$, $S_{4,16,a} = \langle -2 \rangle \oplus 3A_1$, $S_{4,16,b} = \langle -4 \rangle \oplus A_3$, $S_{4,27,a} = U(3) \oplus A_2$, $S_{4,27,b} = \left\langle \begin{matrix} 0 & -3 \\ -3 & 2 \end{matrix} \right\rangle \oplus A_2$, $S_{4,64,a} = U(4) \oplus 2A_1$, $S_{4,64,b} = \langle -8 \rangle \oplus 3A_1$, $S_{4,108} = U(6) \oplus A_2$,

$$S_{4,28} = \left\langle \begin{matrix} -2 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 2 \end{matrix} \right\rangle \text{ (anisotropic case).}$$

Rank 5: $S_{5,4} = U \oplus A_3$, $S_{5,8} = U \oplus 3A_1$, $S_{5,16} = \langle -4 \rangle \oplus D_4$, $S_{5,32,a} = \langle -2 \rangle \oplus 4A_1$, $S_{5,32,b} = \langle -8 \rangle \oplus D_4$, $S_{5,64} = \langle -16 \rangle \oplus D_4$, $S_{5,128} = U(4) \oplus 3A_1$.

Rank 6: $S_{6,4} = U \oplus D_4$, $S_{6,5} = U \oplus A_4$, $S_{6,9} = U \oplus 2A_2$, $S_{6,16,a} = U(2) \oplus D_4$, $S_{6,16,b} = U \oplus 4A_1$, $S_{6,64,a} = \langle -2 \rangle \oplus 5A_1$, $S_{6,64,b} = U(4) \oplus D_4$, $S_{6,81} = U(3) \oplus 2A_2$.

Rank 7: $S_{7,4} = U \oplus D_5$, $S_{7,6} = U \oplus A_5$, $S_{7,128} = \langle -2 \rangle \oplus 6A_1$.

Rank 8: $S_{8,3} = U \oplus E_6$, $S_{8,4} = U \oplus D_6$, $S_{8,7} = U \oplus A_6$, $S_{8,16} = U \oplus 2A_3$, $S_{8,27} = U \oplus 3A_2$, $S_{8,256} = \langle -2 \rangle \oplus 7A_1$.

Rank 9: $S_{9,2} = U \oplus E_7$, $S_{9,4} = U \oplus D_7$, $S_{9,8} = U \oplus A_7$, $S_{9,512} = \langle -2\rangle \oplus 8A_1$.

Rank 10: $S_{10,1} = U \oplus E_8$, $S_{10,4} = U \oplus D_8$, $S_{10,16} = U \oplus 2D_4$, $S_{10,64} = U(2) \oplus 2D_4$.

Rank 18: $S_{18,1} = U \oplus 2E_8$.

В параграфе 3.4 работы [GN2016] анализируются диаграммы Дынкина гиперболических систем корней из Теоермы 2.1 и их решетчатые векторы Вейля. При этом используются геометрические аналогии. Например, для решеток $S = \langle -2\rangle \oplus nA_1$, $2 \le n \le 8$ вычисление фундаментальной области (а значит и системы корней) эквивалентно вычислению все классов исключительных кривых решетки Пикара ранга $n+1$ для невырожденных поверхностей Дель Пеццо. А вычисление вектора Вейля эквивалентно нахождению антиканонического класса.

Мы подробно исследуем фундаментальные области гиперболических ортогональных групп, используя технику развитую в работах Никулина и в предыдущих совместных работах Гриценко и Никулина (см. библиографии в конце отчета). В случаях малой размерности схемы Дынкина дают очень хорошее графическое представление соответствующих систем корней и их групп симметрий. Некоторые примеры таких диаграмм приведены в конце отчета. Наличие дополнительных симметрий проводит к принципиально новому результаты: *гиперболические системы корней могут иметь несколько автоморфных коррекций* (см. Теорему 2.4 ниже.)

Во второй части статьи построены рефлективные модулярные формы, задающие автоморфные коррекции гиперболических алгебр Каца-Муди. Интересно, что решетчатый вектор Вейля гиперболических систем корней из Теоремы 2.1 можно вычислять и чисто автоморфными методами: рефлективная форма "указывает" на вектор Вейля своим произведением Борчердса. Для различных алгебр рефлективные формы строятся в [GN2016] различными методами. Приведем самый широкий, наиболее "универсальный" класс решеток.

Рассмотрим следующие двадцать четыре решетки $T = 2U \oplus K$, где K одна из решеток корней

$$A_1,\ 2A_1,\ 3A_1,\ 4A_1,\ N_8;\ \ A_2,\ 2A_2,\ 3A_2;\ \ A_3,\ 2A_3;\ \ A_4,\ A_5,\ A_6,\ A_7;$$

$$D_4,\ \ 2D_4,\ D_5,\ D_6,\ D_7,\ D_8;\ \ E_6,\ \ E_7,\ \ E_8,\ \ 2E_8;$$

В Теореме 2.2 мы собираем основные результаты параграфов 4 и 5 работы [GN2106].

Теорема 2.2. *Пусть K одна из 24 решеток, перечисленных выше. Тогда существует рефлективная модулярная форма $\Phi_{k,K}$ относительно ортогональной группы решетки T. При этом*

1) Все коэффициенты Фурье модулярной формы $\Phi_{k,K}$ целые.

2) $\Phi_{k,K}$ обладает произведением Борчердса

$$\Phi_{k,K}(\tau,\mathfrak{z},\omega)=q^Ar^Bs^C\prod_{\substack{n,m\in\mathbb{Z},\,\ell\in K^*\\(n,\ell,m)>0}}\left(1-q^nr^\ell s^m\right)^{f(nm,\ell)},$$

где $f(n,\ell)$ коэффициенты Фурье некоторой формы Якоби полученной ограничением почти голоморфной формы Якоби веса ноль

$$\Delta(\tau)^{-1}\vartheta_N(\tau,\mathfrak{z})=\Delta(\tau)^{-1}\sum_{\ell\in N}\exp\left(\pi i(\ell,\ell)\tau-2\pi i(\ell,\mathfrak{z})\right)\in J_{0,N}$$

для некоторой решетки Нимейера N, содержащей K.

3) Решетчатый вектор Вейля гиперболической 2-корневой системы $U\oplus K$, соответствующего произведения Борчердса $\Phi_{k,K}$ и Лоренцевой алгебры задается формулой

$$\rho_{U\oplus K}=(A,B,C)=\Big(1+h(K),\,-\frac{1}{2}\sum_{v\in R_2(K)_{>0}}v,\,h(K)\Big)$$

где $h(K)$ число Кокстера системы корней K и $B=-\frac{1}{2}\sum_{v\in R_2(K)_{>0}}v$ есть сумма векторов Вейля неприводимых компонент системы корней K.

4) Первый нетривиальный коэффициент Фурье-Якоби формы $\Phi_{k,K}$ имеет индекс $h(K)$. Он равен следующему тета-блоку

$$\eta(\tau)^{(h(K)+1)(24-\mathrm{rk}(K))}\cdot\eta(\tau)^{\mathrm{rk}(K)}\prod_{v\in R(K)_{>0}}\frac{\vartheta(\tau,(v,\mathfrak{z}))}{\eta(\tau)},$$

где $\mathfrak{z}\in K\otimes\mathbb{C}$, $\vartheta(\tau,z)$ тета-функция Якоби, определенная в первой части моего отчета.

5) Для $K>0$ этот коэффициент отличается только η-множителем от формулы знаменателя для аффинной алгебры Каца-Муди с аффинной системой корней типа $\hat{K}$

$$\eta(\tau)^{\mathrm{rk}(K)}\prod_{v\in R(K)_{>0}}\frac{\vartheta(\tau,(v,\mathfrak{z}))}{\eta(\tau)}.$$

Второй большой класс автоморфных коррекций получается при помощи аддитивных подъемов (или подъемов Гриценко) форм Якоби от многих переменных. Модулярные формы такого типа изучены в параграфе 6 работы [GN2016]. Они дают автоморфную коррекцию семнадцати решеток из Теоремы 2.1

$$\langle -2\rangle \oplus k\langle 2\rangle\ (2 \le k \le 9),\quad U(2)\oplus D_4,\quad U(4)\oplus D_4,$$
$$U(4)\oplus kA_1\ (1\le k\le 4),\quad U(3)\oplus kA_2\ (1\le k\le 3).$$

Отметим, что некоторые формы из §6 [GN2016] являются многомерными аналогами тета-блоков, рассмотренных в первой часто моего отчета. Модулярные формы из §6 часто имеют элементарные формулы для коэффициентов Фурье, а значит и для мнимых простых корней соответствующих Лоренцевых алгебр Каца-Муди. Типичной такой функцией является формула знаменателя для алгебры, определяемой решеткой $U \oplus D_8$ сигнатуры $(9,1)$

$$\operatorname{Lift}(\vartheta_{D_8}) = \sum_{\substack{n,\,m\in\mathbb{N},\,\ell\in\frac12\mathbb{Z}^8\\ 2nm-(\ell,\ell)=0}} \ \sum_{d|(n,\,\ell,\,m)} d^3\left(\frac{-4}{2\ell/d}\right)e^{2\pi i(n\tau+(\ell,\mathfrak{z})+m\omega))}.$$

Эта форма тесно связана с пространством модулей поверхностей Энриквеса.

Сформулируем один из основных доказанных результатов для башни D_8. Аналогичные башни автоморфных форм рассмотрены в §6 для решеток $4A_1$ и $3A_2$.

Теорема 2.3. *Автоморфная коррекция системы 2-корней* $\langle -2\rangle \oplus (k+1)\langle 2\rangle$ *(*$1\le k\le 7$*) определена модулярной формой*

$$\Delta_{12-k,D_k} = \operatorname{Lift}(\psi_{12-k,\,D_k}) \in S_{12-k}(O^+(U(2)\oplus\langle -2\rangle\oplus(k+1)\langle 2\rangle),\chi_2)$$

где

$$\psi_{12-k,\,D_k}(\tau,\mathfrak{z}) = \eta(\tau)^{24-3k}\ \vartheta(z_1)\cdot\ldots\cdot\vartheta(z_k)\quad (2\le k\le 7)$$

и

$$\psi_{11,\,D_1} = \eta(\tau)^{21}\ \vartheta(2z).$$

Эта теорема показывает, что автоморфная D_8-башня Лорнцевых алгебр Каца-Муди, состоящая из восьми алгебр, базируется на одной из алгебр ранга три для системы корней $U\oplus\langle 4\rangle$ из работы Гриценко-Никулина [9]. Аналогичные результаты получены для башен типа $4A_1$ и $3A_2$.

Рефлективные модулярные формы, построенные в Теореме 2.3 и ее аналогах для систем корней $U \oplus 4A_1$ и $U \oplus 3A_2$ приводят к следующему неожиданному результату. Гиперболическая система корней **может иметь две автоморфные коррекции**, т.е. иметь две различные Лоренцевы алгебры Каца-Муди с одной группой Вейля, системой простых корней, но с различными системами мнимых простых корней и различными автоморфными формулами знаменателя!

Теорема 2.4. *Система 2-корней $U(2) \oplus D_4$ имеет две автоморфные коррекции.*

Первая автоморфная коррекция получается из квазиограничения формы Борчердса для группы $O^+(II_{2,26})$, а вторая получается как конечное (тройное) произведение преобразованной рефлективной формы из автоморфной D_8-башни Теоремы 2.3. (См. детали в §6.3 работы [GN2016]). Существование второй коррекции можно объяснить высокой симметричностью графа Дынкина этой системы корней (см. Приложение).

Литература

[1] Breeding II, J., Poor, C., Yuen, D. S.: *Computations of spaces of paramodular forms of general level*, J. Korean Math. Soc. **53** (No. 3) (2016) pp. 645-689.

[2] Brumer, A., Kramer, K.: *Paramodular abelian surfaces of odd conductor* Trans. AMS. **366** (no. 5) (2014), 2463–2516.

[3] F. Cléry, V. Gritsenko *Modular forms of orthogonal type and Jacobi theta-series.* Abh. Math. Semin. Univ. Hamburg **83** (2013), 187–217.

[4] Gritsenko, V.: *Irrationality of the moduli spaces of polarized abelian surfaces*, The International Mathematics Research Notices **6** (1994), 235–243.

[5] V.A. Gritsenko, V.V. Nikulin, *Siegel automorphic form correction of some Lorentzian Kac–Moody Lie algebas.* Amer. J. Math. **119** (1997), 181–224

[6] V.A. Gritsenko, V.V. Nikulin, *Automorphic forms and Lorentzian Kac–Moody algebras. Part I.* Intern. J. Math. **9** (1998), 153–199.

[7] Gritsenko, V., Nikulin, V.: *Automorphic Forms and Lorentzian Kac-Moody Algebras, Part II*, International J. Math. **9** (1998), 201–275.

[8] V.A. Gritsenko and V.V. Nikulin, *The arithmetic mirror symmetry and Calabi–Yau manifolds*, Comm. Math. Phys. **210** (2000), no. 1, 1–11.

[9] V.A. Gritsenko and V.V. Nikulin, *On the classification of Lorentzian Kac–Moody algebras*, Russian Math. Surveys. **57** (2002), no. 5, 921–979.

[10] Gritsenko, V., Poor, C., Yuen, D. S.: *Borcherds Products Everywhere*, J. Number Theory **148** (2015), 164–195.

[11] Gritsenko, V., Poor, C., Yuen, D. S.: "*Antisymmetric Paramodular Forms of Weights* 2 *and* 3" Arxiv: 1609.04146, (2016), 20 pages.

[12] Gritsenko, V., Skoruppa, N.-P., Zagier, D.: *Theta Blocks*, Manuscript.

[13] Poor, C., Yuen, D. S.: *Paramodular Cusp Forms*, Math. Comp. **84** (no. 293) (2015), 1401–1438.

ПРИЛОЖЕНИЕ: Диаграммы Дынкина некоторых гиперболических систем корней, полученных в [GN2106]

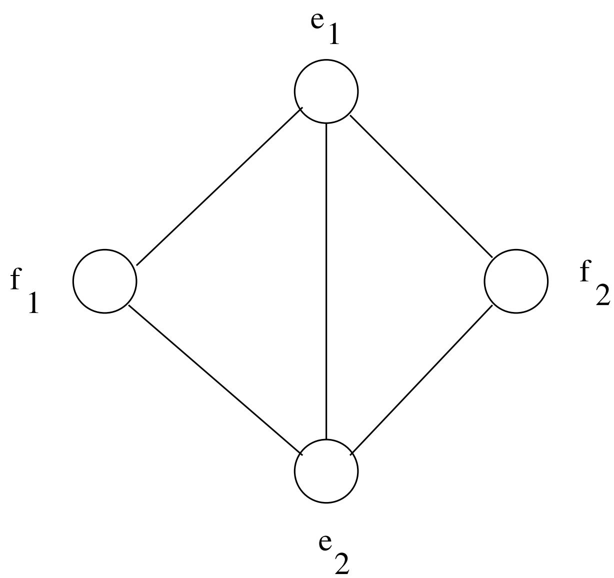

Рис. 1. Граф Дынкина для $U \oplus A_2 \oplus A_2$.

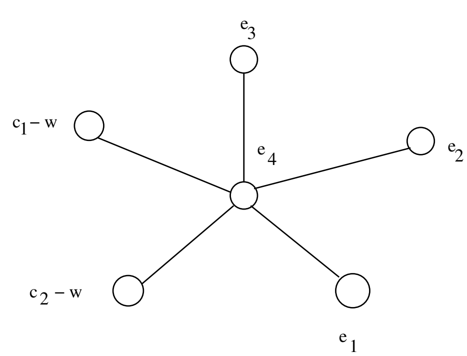

Рис. 2. Граф Дынкина для $U(2) \oplus D_4$.

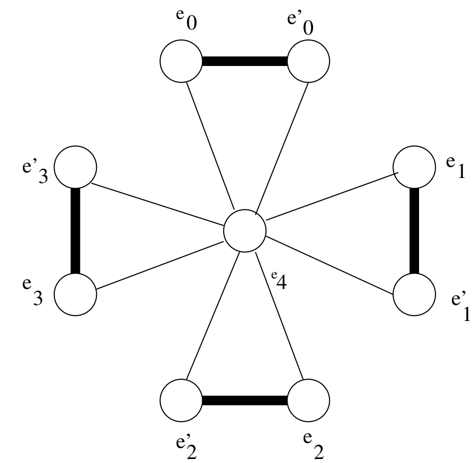

Рис. 3. Граф Дынкина для $U(4) \oplus D_4$.

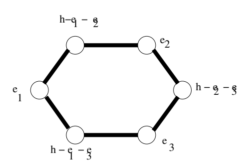

Рис. 4. Граф Дынкина для $\langle -2 \rangle \oplus 3A_1$.

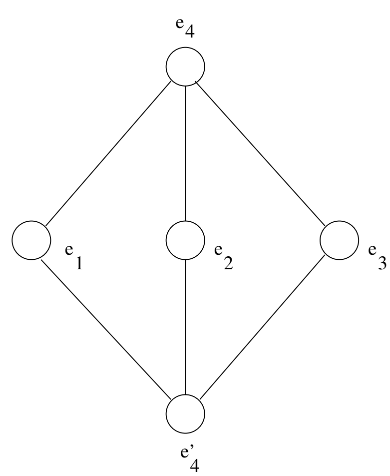

Рис. 5. Граф Дынкина для $\langle -4 \rangle \oplus D_4$.

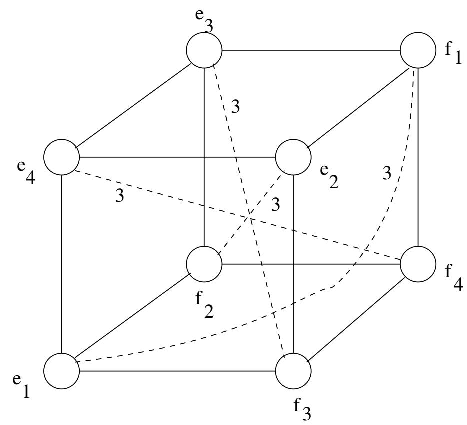

Рис. 6. Граф Дынкина для $\langle -16 \rangle \oplus D_4$.

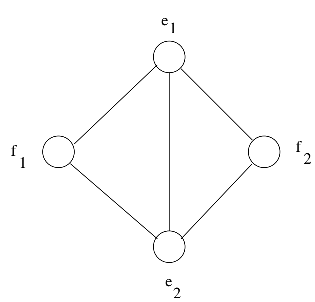

Рис. 7. Граф Дынкина для $U(2) \oplus A_2$.

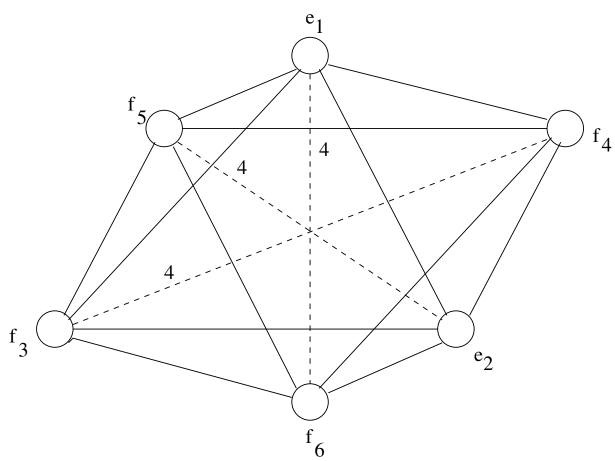

Рис. 8. Граф Дынкина для $U(6) \oplus A_2$.

9. Заключение: библиография

В заключение отчета, мы приводим список публикаций лаборатории, и список препринтов, подготовленных к печати.

9.1. Публикации лаборатории

1) Bogomolov F. A., Bohning C., Graf von Bothmer H. Birationally isotrivial fiber spaces // European Journal of Mathematics. 2016. Vol. 2. No. 1. P. 45-54.

2) Bogomolov F. A., Fu H. Division polynomials and intersection of projective torsion points // European Journal of Mathematics. 2016. Vol. 2. No. 3. P. 644-660.

3) Bogomolov F. A., Pirutka A., Silberstein A. M. Families of disjoint divisors on varieties // European Journal of Mathematics. 2016. P. 1-12.

4) Galkin S., Golyshev V., Iritani H. Gamma classes and quantum cohomology of Fano manifolds: Gamma conjectures // Duke Mathematical Journal. 2016. Vol. 165. No. 11. P. 2005-2077. ,

5) Coates T., Corti A., Galkin S., Kasprzyk A. Quantum Periods for 3-Dimensional Fano Manifolds // Geometry and Topology. 2016. Vol. 20. No. 1. P. 103-256.

6) Белошапка И., Горчинский С. О. Неприводимые представления нильпотентных конечно порожденных групп // Математический сборник. 2016. Т. 207. # 1. С. 45-72.

7) Gorchinskiy S. O., Guletskii V. Symmetric powers in abstract homotopy categories // Advances in Mathematics. 2016. Vol. 292. P. 707-754.

8) Efimov A. I. Mac Lane (co)homology of the second kind and Wieferich primes // Journal of Algebra. 2016. Vol. 467. P. 80-154.

9) Alexander Kuznetsov, Perry A. Derived categories of cyclic covers and their branch divisors // Selecta Mathematica, New Series. 2016. P. 1-35.

10) Kuznetsov A. G., Polishchuk A. Exceptional collections on isotropic Grassmannians // Journal of the European Mathematical Society. 2016. Vol. 18. No. 3. P. 507-574.

11) Finkelberg M. V., Ginzburg V., Ionov A., Kuznetsov A. G. Intersection cohomology of the Uhlenbeck compactification of the Calogero-Moser space // Selecta Mathematica, New Series. 2016

12) Kurnosov N. Absolutely trianalytic tori in the generalized Kummer variety // Advances in Mathematics. 2016. Vol. 298. No. 6 August . P. 473-483.

13) Levin A. M., Olshanetsky M., Zotov A. Yang-Baxter equations with two Planck constants // Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical. 2016. Vol. 49. No. 1. P. 14003-14021.

14) Cheltsov I., Przyjalkowski V. V., Shramov K. A. Quartic double solids with icosahedral symmetry // European Journal of Mathematics. 2016. Vol. 2. No. 1. P. 96-119.

15) Prokhorov Y., Zaidenberg M. Examples of cylindrical Fano fourfolds // European Journal of Mathematics. 2016. Vol. 2. No. 1. P. 262-282.

16) Сечин П. А. Кольцо операций из K-теорий Моравы в группы Чжоу // Математические заметки. 2016
17) Сечин П. А. Категория плоских структур Ходжа-Тейта // Математические заметки. 2016. Т. 99. # 1. С. 149-154.
18) Smirnov E., Kleptsyn V. Ribbon graphs and bialgebra of Lagrangian subspaces // Journal of Knot Theory and Its Ramifications. 2016. Vol. 26. P. 1642006.
19) Trepalin A. Quotients of cubic surfaces // European Journal of Mathematics. 2016. Vol. 2. No. 1. P. 333-359.
20) Feigin E., Fourier G., Littelmann P. Favourable modules: Filtrations, polytopes, Newton-Okounkov bodies and flat degenerations // Transformation Groups. 2016
21) Cerulli I. G., Feigin E., Reineke M. Schubert Quiver Grassmannians // Algebras and Representation Theory. 2016
22) Braverman A., Dobrovolska G., Finkelberg M. V. Gaiotto-Witten superpotential and Whittaker D-modules on monopoles // Advances in Mathematics. 2016. Vol. 300. P. 451-472.
23) Cheltsov I., Park J., Won J. Affine cones over smooth cubic surfaces // Journal of the European Mathematical Society. 2016. Vol. 18. No. 7. P. 1537-1564.
24) Cheltsov I., Park J., Won J. Cylinders in singular del Pezzo surfaces // Compositio Mathematica. 2016. Vol. 152. P. 1198-1224.
25) Prokhorov Y., Shramov K. A. Jordan property for Cremona groups // American Journal of Mathematics. 2016. Vol. 138. No. 2. P. 403-418.
26) .F. A. Bogomolov, Vik. S. Kulikov. The ambiguity index of an equipped finite group // European Journal of Mathematics. 2015. Vol. 1. No. 4. P. 260-278. .
27) Rybakov S. DG-modules over de Rham DG-algebra // European Journal of Mathematics. 2015. Vol. 1. P. 25-53.

28) Alexey Bondal, Ilya Zhdanovskiy. Coherence of relatively quasi-free algebras // European Journal of Mathematics. 2015. Vol. 1. No. 4. P. 695-703.

29) Levin A. M., Olshanetsky M., Zotov A. Noncommutative extensions of elliptic integrable Euler-Arnold tops and Painlev'e VI equation // Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical. 2016. Vol. 49. No. 39

30) Cheltsov I., Shramov K. A. Two rational nodal quartic 3-folds // Quarterly Journal of Mathematics. 2016 (в печати)

31) Mori S., Prokhorov Y. Threefold extremal contractions of type (IIA). I // Izvestiya: Mathematics. 2016. Vol. 80. No. 5. P. 77-102.

32) Blokh A., Oversteegen L., Ptacek R. M., Timorin V. The parameter space of cubic laminations with a fixed critical leaf // Ergodic Theory and Dynamical Systems. 2016 (в печати)

33) Kaledin D. B., Kuznetsov A. G. Refined blowups // Mathematical Research Letters. 2015. Vol. 22. No. 6. P. 1717-1732.

34) . Blokh A., Oversteegen L., Ptacek R. M., Timorin V. Laminations from the main cubioid // Discrete and Continuous Dynamical Systems - Series A. 2016. Vol. 36. No. 9. P. 4665-4702.

35) Amosov G., Zhdanovskiy I. Structure of the algebra generated by a noncommutative operator graph which demonstrates the superactivation phenomenon for zero-error capacity // Mathematical Notes. 2016. Vol. 99. No. 5. P. 924-927.

36) Efimov A. I. Derived categories of Grassmannians over integers and modular representation theory // Advances in Mathematics. 2017. Vol. 304. P. 179-226.

37) E.Amerik, Some applications of p-adic uniformization to algebraic dynamics. Contemporary Mathematics, Volume 654, 2015 http://dx.doi.org/10.1090/conm/654/13213

38) Blokh A., Oversteegen L., Ptacek R., Timorin V. The combinatorial Mandelbrot set as the quotient of the space of geolaminations, in:

Dynamics and Numbers Vol. 669. American Mathematical Society, 2016. P. 50-74.

39) Глава книги Gritsenko V., Hulek K. Moduli of polarized Enriques surfaces, in: K3 Surfaces and Their Moduli. Basel : Birkh"auser, 2016. doi P. 55-72.

40) Timorin V., Petrushchenko S. On maps taking lines to plane curves // Arnold Mathematical Journal. 2016. Vol. 2. P. 1-20.

41) Prokhorov Y., Reid M. On Q-Fano 3-folds of Fano index 2, in: Advanced Studies in Pure Mathematics Vol. 70: Minimal Models and Extremal Rays. Kyoto : Mathematical Society of Japan, 2016.

42) Tyurin N. A. Special Bohr-Sommerfeld geometry, in: Дни геометрии в Новосибирске - 2016. Novosibirsk : ., 2016. P. 22-23.

9.2. Статьи сотрудников лаборатории (работы по гранту РНФ)

1) Amerik, Ekaterina; Verbitsky, Misha, *Hyperbolic geometry of the ample cone of a hyperkähler manifold*, Res. Math. Sci. 3 (2016), Paper No. 7, 9 pp.

2) Amerik E., Verbitsky M., *Morrison-Kawamata cone conjecture for hyperkahler manifolds*, Annales Scientifiques de l'Ecole Normale Superieure (accepted).

3) Blokh A., Oversteegen L., Ptacek R., Timorin V., *Quadratic-like dynamics of cubic polynomials*, Communications in Mathematical Physics, Vol. 341. No. 3. P. 733-749.

4) Вербицкий М.С. *Начальный курс топологии: теоремы и задачи*, МЦНМО, г.Москва (2017 г.)

5) Звонилов В.И., Оревков С.Ю., *Компактификация пространства разветвленных накрытий двумерной сферы*, Труды МИАН.

6) V. Kiritchenko, *Geometric mitosis*, Math. Res. Lett., **23** (2016), no. 4, 1069–1096.

7) Grigory Mikhalkin and Stepan Orevkov, *Real algebraic knots and links of small degree*, Journal of Knot Theory and Its Ramifications, Vol. 26 (2016).

8) Ornea, Liviu; Verbitsky, Misha, *LCK rank of locally conformally Kähler manifolds with potential*, J. Geom. Phys. 107 (2016), 92-98.

9) Liviu Ornea, Misha Verbitsky, *Locally conformally Kahler metrics obtained from pseudoconvex shells*, Proc. Amer. Math. Soc. 144 (2016), 325-335

10) Panov, Taras; Ustinovskiy, Yury; Verbitsky, Misha, *Complex geometry of moment-angle manifolds*, Math. Z. 284 (2016), no. 1-2, 309-333.

11) Прохоров Ю.Г. *Особые многообразия Фано рода 12*, Математический сборник, Vol. 207. No. 7., p.101-130

12) Тюрин Н.А., *Специальные бор-зоммерфельдовы лагранжевы подмногообразия,* Известия РАН. Серия математическая, vol. 80 (6)

13) Юрий В. Элияшев (Yury V. Eliyashev) *Mixed Hodge structure on complements of complex coordinate subspace arrangements*, vol. 16 (3), pp. 545-560.

9.3. Препринты лаборатории

1) Bogomolov F. A., Qian J. On Contraction of Algebraic Points / Cornell University. Series arxive "math". 2016.

2) Amerik E., Kuznetsova A. Endomorphisms of projective bundles over a certain class of varieties / Cornell University. Series arxive "math". 2016.

3) Gritsenko V., Nikulin V. V. Lorentzian Kac-Moody algebras with Weyl groups of 2-reflections / Cornell University. Series arxive "math". 2016

4) Kuznetsov A. G., Perry A. Derived categories of Gushel-Mukai varieties / Cornell University. Series arxive "math". 2016.

5) Debarre O., Kuznetsov A. G. Gushel-Mukai varieties: linear spaces and periods / Cornell University. Series arxive "math". 2016.

6) Kuznetsov A. G., Prokhorov Y., Shramov K. A. Hilbert schemes of lines and conics and automorphism groups of Fano threefolds / Cornell University. Series arxive "math". 2016.

7) Kuznetsov A. G., Debarre O. On the cohomology of Gushel-Mukai sixfolds / Cornell University. Series arxive "math". 2016.

8) Lvovsky S. Some remarks on osculating self-dual varieties / Cornell University. Series arxive "math". 2016.

9) Feigin E., Makedonskyi I., Orr D. Generalized Weyl modules and nonsymmetric q-Whittaker functions / Cornell University. Series math "arxiv.org". 2016. No. 1605.01560.

10) Feigin E., Makedonskyi I. Generalized Weyl modules for twisted current algebras / Cornell University. Series math "arxiv.org". 2016. No. arXiv:1606.05219.

11) Cheltsov I., Przyjalkowski V. V., Shramov K. A. Burkhardt quartic, Barth sextic, and the icosahedron / Cornell University. Series arxive "math". 2016.

12) Lunts V., Przyjalkowski V. V. Landau-Ginzburg Hodge numbers for mirrors of del Pezzo surfaces / Cornell University. Series arxive "math". 2016.

13) Sechin P. Chern classes for Morava K-theories / Cornell University. Series arxive "math". 2016.

14) Blokh A., Oversteegen L., Timorin V. Slices of Parameter Space of Cubic Polynomials / Cornell University. Series arxive "math". 2016.

15) Cerulli Irelli G., Fang X., Feigin E., Fourier G., Reineke M. Linear degenerations of flag varieties / Cornell University. Series arxive "math". 2016. No. 1603.08395.

16) Feigin E., Makhlin I. Vertices of FFLV polytopes / Cornell University. Series math "arxiv.org". 2016. No. arXiv:1604.08844 .

17) Finkelberg M. V., Ionov A. Kostka-Shoji polynomials and Lusztig's convolution diagram / Cornell University. Series arxive "math". 2016.

18) Braverman A., Finkelberg M. V., Nakajima H. Coulomb branches of 3d N=4 quiver gauge theories and slices in the affine Grassmannian / Cornell University. Series arxive "math". 2016.

19) Braverman A., Finkelberg M. V., Nakajima H. Towards a mathematical definition of Coulomb branches of 3-dimensional N=4 gauge theories, II / Cornell University. Series math "arxiv.org". 2016.

20) Bogomolov F. A., Halle L. H., Pazuki F., Tanimoto S. Abelian Calabi-Yau threefolds: N'eron models and rational points / Cornell University. Series arxive "math". 2016.

21) Rovinsky M. An analogue of Hilbert's Theorem 90 for infinite symmetric groups / Cornell University. Series math "arxiv.org". 2016.

22) Kaledin D. B. Witt vectors as a polynomial functor / Cornell University. Series arxive "math". 2016.

23) Ionov A. Primitive forms for Gepner singularities / Cornell University. Series arxive "math". 2016. No. 1611.03962.

24) Kuznetsov A. G. Derived equivalence of Ito-Miura-Okawa-Ueda Calabi-Yau 3-folds / Cornell University. Series arxive "math". 2016.

9.4. Препринты сотрудников лаборатории (работы по гранту РНФ)

1) Bogomolov F. A., Kamenova L., Lu S., Verbitsky M. On the Kobayashi pseudometric, complex automorphisms and hyperkaehler manifolds / Cornell University. Series arxive "math". 2016.

2) Amerik E., Verbitsky M. Collections of parabolic orbits in homogeneous spaces, homogeneous dynamics and hyperkahler geometry / Cornell University. Series arxive "math". 2016.

3) Amerik E., Verbitsky M. Construction of automorphisms of hyperkahler manifolds / Cornell University. Series arxive "math". 2016.

4) Kaledin D. B. Hochschild-Witt complex / Cornell University. Series arxive "math". 2016.

5) Prokhorov Y. A simple proof of the non-rationality of a general quartic double solid / Cornell University. Series arxive "math". 2016.

6) Galkin S., Karzhemanov I., Shinder E. Acyclicity of non-linearizable line bundles on fake projective planes / Cornell University. Series math "arxiv.org". 2016. No. 1602.06107.

7) Angella D., Tomassini A., Verbitsky M. On non-K"ahler degrees of complex manifolds / Cornell University. Series arxive "math". 2016.

8) Kamenova L., Verbitsky M. Algebraic non-hyperbolicity of hyperkahler manifolds with Picard rank greater than one / Cornell University. Series arxive "math". 2016.

9) Fino A., Grantcharov G., Verbitsky M. Algebraic dimension of complex nilmanifolds / Cornell University. Series arxive "math". 2016.

10) Ornea L., Verbitsky M. Hopf surfaces in locally conformally Kahler manifolds with potential / Cornell University. Series arxive "math". 2016.

11) Ornea L., Verbitsky M. LCK rank of locally conformally Kahler manifolds with potential / Cornell University. Series arxive "math". 2016.

12) Tyurin N. A. Special Bohr - Sommerfeld geometry on Riemann surfaces: toy problems / Cornell University. Series arxive "math". 2016.

13) Smirnov E. Singularities of divisors on flag varieties via Hwang's product theorem / Cornell University. Series math "arxiv.org". 2016. No. 1609.07771.

14) Poor C., Gritsenko V., Yuen D. S. Antisymmetric Paramodular Forms of Weights 2 and 3 / Cornell University. Series arxive "math". 2016. https://arxiv.org/abs/1609.04146

15) Ornea L., Verbitsky M. Hopf surfaces in locally conformally Kahler manifolds with potential / Cornell University. Series arxive "math". 2016.

16) Amerik E., Guseva L. On the characteristic foliation on a smooth hypersurface in a holomorphic symplectic fourfold / Cornell University. Series arxive "math". 2016.