ГОДОВОЙ ОТЧЕТ (2017)

Лаборатория алгебраической геометрии и ее приложений

РЕФЕРАТ

Ключевые слова: производные категории, исключительные наборы на грассманианах, изотропный грассманиан, диаграммы Юнга, полуортогональное разложение, эквивариантные производные категории, триангулированные категории, некоммутативные деформации, квантовая теория информации, самодуальная теория Янга–Миллса, конструкция Атьи–Дринфельда–Хитчина–Манина, гипотеза о геометрическом сечении, башня Лежандра, группы Чжоу, n-алгебры Вейля, инварианты Аксельрода–Зингера, теорема Гротендика–Римана–Роха, теорема Кемпбелла–Бейкера–Хаусдорфа, инварианты Громова–Виттена, кристаллические когомологии, теорема Хохшильда–Костанта–Розенберга, циклическая категория, полубесконечное многообразие флагов, бесконечномерные алгебры Ли, подмногообразия Бора–Зоммерфельда, перекладывания отрезков, многообразия Фано, колчанные грассманианы типа Шуберта, полиномы Пуанкаре, характеры Демазюра, диски Зигеля, примитивные формы Сайто, гепнеровские особенности, кристаллы Кашивары, аффинный грассманиан, аффинная группа Каца–Муди, поверхность дель Пеццо, обобщенные модули Вейля, несимметрические многочлены Макдональда, исчисление Шуберта, симплектические многогранники Гельфанда–Цетлина, комплекс Кошуля, исчисление Шуберта, колчанные многообразия, многочлены Костки–Шоджи, гепнеровская особенность, K3 поверхность, пространство модулей, рациональные кривые, голоморфно симплектическое многообразие, кэлерово многообразие, гиперкэлерово многообразие, многообразия Фано, группа Кремоны, субриманова метрика, теорема Торелли, отображение периодов, специальное лагранжево подмногообразие, лагранжево слоение, гиперкомплексное многообразие, некэлерово многообразие, зеркальная симметрия, монодромия, биголоморфизм, эргодическое действие, метрики Кобаяши, гиперболические многообразия, теорема Торелли, пространство Тейхмюллера, некоммутативная геометрия, вектора Витта, аддитивные категории, K-теория Моравы, циклические когомологии, геометрическое квантование, когомологии Хохшильда.

Краткая аннотация: Приводятся результаты исследований в области алгебраической геометрии, теории категорий, теории чисел, комплексной геометрии, дифференциальной геометрии, теории динамических систем и геометрической теории представлений.

Основные темы исследования — геометрическая терия представлений, арифметическая алгебраическая геометрия, бесконечномерные алгебры Ли, гомологические и мотивные методы в некоммутативной геометрии, производные каытегории, классическая геометрия, гиперкэлеровы многообразия и специальные многообразия.

Результаты носят теоретический характер и являются существенно новыми. Возможны приложения к теоретической физике, дифференциальной геометрии, теории чисел и задачам классификации комплексных многообразий.

Оглавление

1. Введение

В течение 2016 года Лаборатория алгебраической геометрии и ее приложений провела 3 школ и школы-конференции, в т.ч. 6-ю летнюю математическую школу “Алгебра и геометрия” в г.Ярославле, а также школу “Введение в бирациональню геометрию”, которая предваряла международную школу-конференцию “Группы бирациональных автоморфизмов”. Школа была рассчитана на студентов младших курсов бакалаврита и это был первый опыт Лаборатории проведения такого рода мероприятий. Кроме того, лаборатория провела 6 конференций, часть из которых совместно с другими научными центрами - факультетом математики НИУ ВШЭ, Математическим институтом им В.А.Стеклова, Лабораторией Понселе и рядом других. В лабораторию на стажировку приезжал студент магистратуры Эколь Политекник (г.Париж, Франция) Мануэль Жером Голик. Научный руководитель стажировки - С.О.Горчинский. Продолжал свою работу еженедельный семинар факультета математики (руководители семинара: Е.Ю.Америк, М.С.Вербицкий). С докладами на семинаре выступали сотрудники лаборатории, факультета математики, сотрудники российских научных центров, приглашенные специалисты из ведущих мировых научных и учебных центров.

По результатам проводимых в 2016 году научных исследований сотрудниками лаборатории было опубликовано 38 статей в ведущих зарубежных и российских журналах, индексируемых в базах WoS и/или Scopus, а также 4 публикации в иных научных изданиях.

Сотрудники лаборатории принимали участие в научных конференциях, семинарах и воркшопах, где выступили с 57-ю докладами, в которых представили результаты своих исследований в лаборатории.

Сотрудники лаборатории продолжали вести активную педагогическую работу, ими были прочитаны курсы на факультете математики НИУ ВШЭ, в Независимом Московском Университете, НОЦ МИАН, программе Math in Moscow, на школах для студентов, проводимых как лабораторией, так и крупным международными научными и учебными центрами. Часть курсов была прочитана впервые.

В течение 2016 года было сотрудниками лаборатории было защищено 2 кандидатские диссертации:

- Наталья Гончарук “Диффеоморфизмы окружности и комплексная динамика"
- Евгений Македонский “Некоторые классы циклических модулей над алгебрами Ли”

Научная деятельность сотрудников лаборатории была отмечена различными премиями и наградами:

- Ф.А.Богомолову было присвјено почетное звание Silver Professor New York University
- А.Г. Кузнецов избран членом-корреспондентом РАН
- Д.Б. Каледину, А.Г. Кузнецову и Н.А. Тюрину было присвоено звание Профессор РАН
- А.И. Ефимов стал победителем конкурса Московского математического общества
- П.А. Сечин, Р.Ш. Абугалиев и В.В. Крылов стали лауреатами конкурс Мёбиуса (учрежден в 1997 году для выявления лучших студенческих и аспирантских научных работ по математике и для оказания финансовой поддержки их авторам при продолжении их научной работы в России.)
- А.А.Петров стал Арнольдовским стипендиатом НИУ ВШЭ (стипендия назначается на один учебный год, стипендиатом может стать студент 4-го курса бакалавриата факультета математики).
- А. А. Ионов, Б.К. Завьялов, А.А. Петров, Р.Ш. Абугалиев стали Добрушинскими стипендиатами в в 2016 году (присуждаются каждый семестр лучшим студентам старших курсов (начиная с 5-го семестра) московских ВУЗов, показавшим отличную успеваемость и первые научные успехи).
- П.А. Сечин стал одним из победителем конкурсе стипендий Саймонса для студентов и аспирантов математиков 2016 года.

Были получены значительные результаты по основным темам, заявленным на 2015-й год:

1) Производные категории

2) Гомологические и мотивные методы в некоммутативной геометрии

3) Специальные многообразия

4) Классическая геометрия

5) Геометрическая теория представлений

6) Арифметическая геометрия

7) Модулярные формы в алгебраической геометрии и топологии и бесконечномерные алгебры Ли и автоморфные формы в зеркальной симметрии и в теории особенностей

Результаты работ по этим темам составляют содержание настоящего отчета.

2. Производные категории

2.1. Вычетные категории лефшецевых исключительных наборов

Сотрудник лаборатории Александр Кузнецов занимался изучением вычетных категорий минимальных лефшецевых исключительных наборов на грассманианах.

Лефшецев исключительный набор в триангулированной категории $\mathcal{T}$ — это исключительный набор, обладающий блочной структурой следующего вида. Пусть задана автоэквивалентность $\alpha : \mathcal{T} \to \mathcal{T}$ и неубывающая последовательность целых чисел $p_\bullet = (p_1 \geq p_2 \geq \cdots \geq p_m \geq 0)$. Тогда лефшецев набор относительно α с несущим разбиением $p_\bullet$ — это исключительный набор $E_1, \dots, E_p$, длины $p = p_1 + \cdots + p_m$, в котором первый блок составляют объекты $E_1, \dots, E_{p_1}$, второй блок получается из первых p_2 объектов первого блока, подкрученных на автоэквивалентность α:

$$E_{p_1+1} = \alpha(E_1), \quad E_{p_1+2} = \alpha(E_2), \quad \dots, \quad E_{p_1+p_2} = \alpha(E_{p_2}),$$

третий блок — из первых p_3 объектов первого блока, подкрученных на автоэквивалентность α^2:

$$E_{p_1+p_2+1} = \alpha^2(E_1), \quad E_{p_1+p_2+2} = \alpha^2(E_2), \quad \dots, \quad E_{p_1+p_2+p_3} = \alpha^2(E_{p_3}),$$

и так далее. То есть всего m блоков, длины которых заданы разбиением $p_\bullet$, а объекты m-го блока получаются из первых p_m объектов первого блока, подкрученных на автоэквивалентность α^{m-1}.

Заметим, что лефшецев набор (относительно данной автоэквивалентности) однозначно определяется своим первым блоком и несущим разбиением. На лефшецевых наборах имеется отношение частичного порядка по включению первого блока.

Лефшецевы наборы крайне важны для теории гомологической проективной двойственности. Также они применяются для построения категорных разрешений особенностей. Наибольший интерес представляют минимальные (относительно указанного выше порядка) лефшецевы наборы.

Минимальные лефшецевы наборы известны в производных категориях на ряде важных многообразий.

Пример 2.1. *Пусть $T = \mathbf{D}(\mathrm{Gr}(k, n))$ — ограниченная производная категория когерентных пучков на грассманиане $\mathrm{Gr}(k, n)$, $\alpha(E) = E \otimes O(1)$ — подкрутка на плюккерово расслоение, и для простоты предположим, что k и n взаимно просты. Рассмотрим множество диаграмм Юнга*

$$Y_{n,k} := \{\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_k = 0 \mid \lambda_i \leq (n-k)(k-i)/k\}$$

и снабдим его любым полным порядком, продолжающим частичный порядок по включению диаграмм. Тогда расслоения $\Sigma^\lambda U^\vee$, где $U^\vee$ — двойственное тавтологическое расслоение, а Σ^λ — функтор Шура, порождают лефшецев набор из n блоков длины $\frac{1}{n}\binom{n}{k}$ каждый.

Этот набор является примером прямоугольного набора, так как все его блоки имеют одинаковую длину.

Пример 2.2. *Следующий пример — грассманиан $\mathrm{Gr}(2, n)$ с четным числом $n = 2r$. Соответствующее множество диаграмм Юнга*

$$Y_{2r,2} := \{r - 1 \geq \lambda_1 \geq \lambda_2 = 0\}$$

порождает лефшецев набор с длинами блоков $(\underbrace{r, \ldots, r}_{r}, \underbrace{r-1, \ldots, r-1}_{r})$.

Пример 2.3. *Еще один пример — изотропный относительно симплектической формы грассманиан $\mathrm{IGr}(2, 2r)$. В этом случае все то же множество диаграмм Юнга $Y_{2r,2}$ порождает лефшецев набор с длинами блоков $(\underbrace{r, \ldots, r}_{r-1}, \underbrace{r-1, \ldots, r-1}_{r})$.*

Лефшецевы наборы в последних двух примерах не прямоугольны.

Вычетной категорией лефшецева набора называется подкатегория, порожденная проекцией на ортогонал к прямоугольной части набора тех его объектов, которые сами не входят в прямоугольную часть. В частности, если набор прямоугольный, то его вычетная категория равна нулю. В случае набора из примера 2.2 вычетная категория — это

$$R = \langle \mathbb{L}_{A_0}(S^{r-1} U^\vee), \ldots, \mathbb{L}_{A_0, A_0(1), \ldots, A_0(r-1)}(S^{r-1} U^\vee(r-1)) \rangle,$$

где $A_0 = \langle O, U^\vee, \ldots, S^{r-1} U^\vee \rangle$ — первый блок прямоугольной части набора, а $\mathbb{L}$ обозначает функтор перестройки.

Вычетные категории представляют большой интерес с точки зрения модулей Ландау–ГинзубргаПодкрутка на $O(1)$ в лефшецевых наборах соответствует действию группы корней n-ой степени из 1 на множестве особых точек модели,а вычетная категория представляет собой локализацию модели Ландау–Гинзубрга над точкой 0 (неподвижной точкой действия группы корней из 1).

В работе [5] были получены описания вычетной категории для лефшецевых наборов из примеров 2.2 и 2.3.

Теорема 2.4. *Для грассманиана* $\mathrm{Gr}(2, 2r)$ *вычетная категория порождается набором из* r *полностью ортогональных исключительных расслоений, то есть эквивалентна прозводной категории представлений колчана с* r *вершинами и без стрелок.*

Для изотропного грассманиана $\mathrm{IGr}(2, 2r)$ *вычетная категория эквивалентна производной категории представлений колчана типа* A_{r-1}.

В дальнейшем планируется изучение вычетных категорий на всех грассманианах и других однородных пространствах.

2.2. Полуортогональные разложения эквивариантных категорий для некоторых групп отражений

Аффилиированный сотрудник лаборатории Александр Полищук занимался изучением эквивариантных производных категорий когерентных пучков на комплексном векторном пространстве относительно действия группы, порожденной отражениями.

Для всякого действия конечной группы на квазипроективном многообразий над полем нулевой характеристики имеется разложение гомологий Хохшильда эквивариантной производной категории в прямую сумму по классам сопряженности группы — так называемая формула орбифолдных когомологий.Аналогичные разложения существуют для эквивариантных K-групп с рациональными коэффициентами и для мотивов Чжоу. Соответственно, возникает естественный вопрос — не поднимается ли орбифолдное разложение до полуортогонального разложения эквивалентной категории?

В качестве предполагаемого ответа предлагается следующая гипотеза. Допустим действие группы G на многообразии X эффективно и для всех элементов группы $g \in G$ фактормногообразие $X^g/C(g)$ гладко, где

$X^g \subset X$ — неподвижные точки g, а $C(g)$ — централизатор g в G. Тогда существует полуортогональное разложение эквивариантной производной категории, компоненты которого занумерованы классами сопряженности в группе, а компонента соответствующая элементу g эквивалентна обычной (не эквивариантной) производной категории фактора $X^g/C(g)$.

Частным случаем гипотезы является следующий. Пусть C — гладкая комплексная кривая, $X = C^n$, $G = S_n$ — симметрическая группа, действующая на X перестановками множителей. В этом случае, строится явное полуортогональное разложение эквивариантной категории, компоненты которого занумерованы разбиениями числа n. Каждому разбиению λ сопоставляется подмногообразие $C[\lambda] \subset C^n$, состоящее из точек $(x_1, \ldots, x_n)$, таких что

$$x_1 = \cdots = x_{\lambda_1}, \quad x_{\lambda_1+1} = \cdots = x_{\lambda_1+\lambda_2}, \ldots .$$

Очевидно, что $C[\lambda] \cong C^k$, где k — число частей разбиения. На этом подмногообразии действует группа $W \cong \prod S_{r_i}$, где r_i — кратность части i в разбиении λ (действие задается перестановками координат, соответствующих разным частям разбиения одинаковой длины). Положим $C^{(\lambda)} = C[\lambda]/W_\lambda$. Между многообразием $C^{(\lambda)}$ и стэком $[C^n/S_n]$ есть естественное соответствие, получающееся факторизацией по естественному действию S_n (в смысле стэков) объединения образов графика вложения $C[\lambda] \subset C^n$ под действием представителей классов смежности S_n/S_λ. Оно задает функтор Фурье–Мукаи из производной категории $C^{(\lambda)}$ в производную категорию факторстэка $[C^n/S_n]$, то есть в эквивариантную производную категорию C^n. Мы доказываем, что этот функтор строго полон, и что образы этих функторов для разных разбиений задают полуортогональное разложение эквивариантной производной категории (относительно любого порядка согласованного с доминантным порядком на разбиениях).

Пользуясь этим результатом, мы доказываем, что наша гипотеза выполняется для действия групп Вейля типов A_n, B_n, C_n, G_2 и F_4, а также групп отражений $G(m, 1, n) = (\mu_m)^n \rtimes S_n$ в их естественных представлениях. Для групп Вейля оставшихся типов D_n, E_6, E_7 и E_8 не выполняется одно из условий гипотезы (гладкость фактора $X^g/C(g)$), поэтому гипотеза здесь не применима.

Все описанные результаты опубликованы в работе [14], которая принята к публикации в журнале европейского математического общества.

2.3. Размерность триангулированных категорий

Для активно изучающихся в последние десятилетия триангулированных категорий возможны различные определения размерности. Одно из них было дано Р. Рукье около десяти лет назад. Для триангулированной категории T и её генератора G время порождения определяется как минимум таких n, что любой объект в T есть прямое слагаемое объекта, допускающего фильтрацию длины n, факторы которой суть конечные прямые суммы сдвигов G. Размерность Рукье категории определяется как минимум времени порождения по всем генераторам категории. Таким образом, размерность Рукье измеряет "сложность" триангулированной категории.

Основной недостаток данного определедения — такую размерность трудно вычислять. Например, неизвестно, чему равна размерность производной категории когерентных пучков на гладком многообразии. Ожидается, что она равна размерности d многообразия, однако известно лишь, что она лежит между d и $2d$. Как правило, поведение размерности Рукье плохо контролируется при различных конструкциях с категориями, таких как полуортогональная сумма, тензорное произведение, семейства.

Имеется другое понятие размерности хорошей триангулированной категории — так называемая размерность Серра. Её определение происходит из геометрического наблюдения: функтор Серра на производной категории когерентных пучков на гладком проективном многообразии "сдвигает" комплексы влево со скоростью, равной размерности многообразия. Размерность Серра для триангулированной категории T с функтором Серра S и генератором G определяется как скорость роста минимума таких i, что $Hom^i(G, S^k(G)) \neq 0$, отнесённая к росту k (и взятая со знаком минус). Таким образом, размерность Серра для производной категории гладкого проективного многообразия равна размерности многообразия. Это наблюдение позволяет обобщить некоторые гипотезы о производных категориях, связанные с многообразиями, на более общие категории. Например, ожидается, что размерность Серра монотонна в полуортогональных разложениях.

Сотрудник Лаборатории А. Елагин (совместно с В. Лунцем) занимался изучением размерности Серра для производных категорий модулей над конечномерными алгебрами, см. [6]. Этот класс категорий, с одной стороны, достаточно богат (в частности, он включает в себя все триангулированные категории с сильным полным исключительным набором), а с другой стороны, доступен для изучения ввиду своей относительной простоты и развитой теорией представлений таких алгебр. Так, например, размерность Серра известна для производных категорий представлений колчанов (без соотношений): она равна $\frac{h-2}{h}$ для колчанов Дынкина (где h — число Кокстера) и 1 для остальных связных колчанов.

Был получен следующий результат: размерность Серра в плоских семействах конечномерных алгебр конечной глобальной размерности полунепрерывна сверху (в топологии Зариского). Аналогично размерности Серра, отвечающий за поведение “левого края” комплекса $S^k(G)$, может быть определена нижняя размерность Серра, измеряющая скорость движения “правого края” комплекса $S^k(G)$. Для нижней размерности Серра была доказана полунепрерывность снизу.

Для доказательства полунепрерывности было введено понятие верхней и нижней размерности категории относительно эндофунктора, дающее в случае функтора Серра интересующие нас размерности. Было показано, что верхняя размерность относительно эндофунктора Φ — это минус нижняя размерность относительно Φ^{-1}, и наоборот. Для плоского семейства алгебр (и соответственно, семейства их производных категорий) естественно рассматривать хорошие семейства эндофункторов на этих категориях. Под хорошим семейством эндофункторов понимается семейство функторов, определённое как тензорное умножение на бимодуль, являющийся ограничением на слой семейства некоторого пучка бимодулей на семействе. Было доказано следующее: для хорошего семейства автоэквивалентностей верхняя размерность полунепрерывна сверху, а нижняя — снизу. Ввиду связи между верхней и нижней размерностями достаточно доказывать одно из двух утверждений, а именно полунепрерывность снизу в семействе для нижней размерности. Нижнюю размерность легче контролировать, чем верхнюю, так как при производном тензорном умножении комплексов проще контролировать правый край.

Из доказанных результатов о полунепрерывности вытекает важное следствие: если для некоторого слоя верхняя и нижняя размерность Серра равны, то этому же числу равны верхняя и нижняя размерность Серра для общего слоя.

Предствляется интересным получить аналогичные результаты о полунепрерывности для размерности Рукье семейств категорий.

2.4. Категорификация инфинитезимальных некоммутативных деформаций

В совместной работе А.И. Бондала и А. Бодзенты, которая неоднократно посещала лабораторию с научными визитами, строилась теория некоммутативных инфинитезимальных деформаций объектов в абелевой категории. В качестве фундаментального принципа такой теории была предложена категорификация пространства некоммутативных деформаций. Это означает, что пространством деформации является не некоммутативная алгебра, как было принято считать, начиная с работ Лаудала по некоммутативным деформациям, а абелева категория. Связь с теорией Лаудала заключается в том, что, если алгебра деформаций уже найдена, то категория — это категория конечномерных представлений этой алгебры. Однако, категория является инвариантным объектом, и имеет целый ряд преимуществ, по сравнению с алгеброй.

Одним из подводных камней теории некоммутативных деформаций является тот факт, что, деформируя семейство объектов, нельзя производить деформацию объектов независимо друг от друга, как это было возможно в случае коммутативных деформаций.

Для случая одновременных деформации набора из n объектов в абелевой категории, были построены основы теории категорных некоммутативных деформаций, в частности, плоская деформация была определена как деформирующий функтор — точный функтор на категории с n простыми объектами со значениями в абелевой категории, где были взяты исходные n объектов, такой что простые объекты отображаются в исходные. Затем по данному набору n объектов в абелевой категории был построен 2-функтор деформаций, который сопоставляет категории с n объектами все деформирующие функторы на ней. Этот функтор принимает значение в группоидах.

Изучался вопрос про-представимости этого функтора и, в случае, когда про-представимость не имеет места — вопрос существования и построения про-оболочки функтора. Эта про-оболочка вместе с дополнительными данными позволяет контролировать функтор деформаций. Аналогичный вопрос для коммутативных деформаций был решен в знаменитой работе Шлезингера.

Оказалось, что если набор деформируемых объектов простой, то функтор деформаций про-представим. И категория, которая пропредставляет его — это минимальная абелева подкатегория, содержащая деформируемые объекты и замкнутая относительно расширений входящих в нее объектов.

В общем случае было показано на примерах, что про-представляющей категории не существует. Однако для произвольного набора объектов в абелевой категории доказано существование про-оболочки. Конструкция про-оболочки включает в себя построение минимальной А-бесконечность алгебры с подходящими свойствами, рассмотрения производной категории представлений этой алгебры и выделения подходящей t-структуры в этой категории. Сердцевина этой t-структуры и является искомой абелевой категорией.

Замечательным свойством построенной про-оболочки является тот факт, что полу-универсальный деформирующий функтор из этой категории в исходную абелеву категорию является гладким. Более того, можно построить гладкий некоммутативный группоид в абелевых категориях, такой что про-оболочка является его категорией объектов,а функтор деформации представляется этим группоидом.Тем самыи функтор деформации получает полное описание, которое позволяет его эффективно контролировать.

Развитая техника была применена в геометрической ситуации к построению эквивалентностей производных категорий когерентных пучков на многообразиях, связанных флопом относительной размерности один. Было показано, что так называемый флоп-флоп функтор является сферическим отражением для сферического функтора, который есть производный функтор для вложения нуль-категории флопирующего стягивания в абелеву категорию когерентных пучков на флопируемом многообразии, а нуль-категория есть про-представляющая категория для набора линейных расслоений $O(-1)$ на всех флопируемых кривых.

Эта работа получила дальнейшее развитие в совместной работе А. Бондала с М. Капрановым и В. Шехтманом, где диаграммы категорий, связанных с флопом были исследованы с точки зрения модельных структур на категории дифференциально-градуированных категорий.

2.5. Гамма-гипотезы через зеркальную симметрию

Асимптотическое поведение решений квантового дифференциального уравнения многообразия Фано F определяет характеристический класс A_F, называемый главным асимптотическим классом. Гамма-гипотезы Василия Голышева, Сергея Галкина и Хироши Иритани утверждают, что главный асимптотический класс A_F равен гамма-классу $\hat{\Gamma}_F$ ассоциированному с гамма-функцией Эйлера. В препринте [7] 2015-го года Галкин и Иритани проиллюстрировали как эта гипотеза выводится из зеркальной симметрии в случаях торических многообразий, полных пересечений в них, а также для грассманианов. Они также доказали, что гамма-гипотеза совместна с собой при взятии гиперплоского сечения и, дали эвристический аргумент как зеркальный осцилляторный интеграл и гамма-класс для проективного пространства возникают из полиномиального пространства петель.

Для того, чтобы первую гамма-гипотезу можно было хотя бы сформулировать, необходимо, чтобы выполнялось так называемое свойство O — некоторые ограничения на кратности собственных значений оператора квантового умножения на первый класс Черна $c_1(F)$, действующего на когомологиях $H^\bullet(F)$ (эти собственные значения также можно понимать как критические значения зеркальной модели Гинзбурга–Ландау). Гипотеза O утверждает, что свойство O выполнено для всех многообразий Фано. В 2017 году Галкин и Иритани обнаружили, что свойство O и первая гамма-гипотеза для тотальных когомологий следуют из свойства O и первой гамма-гипотезы для чётных когомологий, и доказали это с помощью аргумента, аналогичного аргументу Хертлинга–Манина–Телемана для полупростоты. Более того, достаточно знать, что свойство O выполнено на сумме (p, p)-циклов для какой-нибудь комплексной структуры.

На эту тему Галкин сделал доклад “Свойство O для нечётных когомологий” на семинаре “Автоморфные формы и их приложения” 20 июня 2017 г. Видео доклада доступно на http://www.mathnet.ru/php/seminars.phtml?presentid=17653.

В обновлении [8] этого же препринта от 26 июня 2017 года было добавлено упомянутое выше доказательство того, что верность свойства O для полных когомологий следует из этого верности свойства O на подпространстве чётных когомологий (а также на ещё меньшем подпространстве $\oplus H^{p,p}$).

2.6. Приложение алгебраической геометрии и теории представлений к задачам квантовой теории информации

В работе [2] А. Бондалом и И. Ждановским рассматривается редуцированная алгебра Темперли–Либа $B(\Gamma)$, построенная по графу Г без кратных ребер и петель, как алгебра с 1, порожденная идемпотентами x_i индексированными вершинами i графа Г,и порождающими соотношениями:

- $x_i^2 = x_i$,
- $x_i x_j x_i = s_{ij} x_i$, если ij ребро,
- $x_i x_j = x_j x_i = 0$, если ij не ребро.

Изучение этих алгебр и их теории представлений связано со многими задачами математики и физики, о некоторых из которых речь пойдет ниже.

Напомним, что гомотопом ассоциативной алгебры A с помощью элемента Δ называется ассоциативная алгебра с 1 с умножением $*_\Delta$ "подкрученным" на элемент Δ:

$$a *_\Delta b = a\Delta b.$$

Важным наблюдением в [2]было то, что алгебра $B(\Gamma)$ является гомотопом алгебры путей графа, причем в качестве элемента Δ выступает обобщенный дискретный оператор Лапласа на графе.

Как следствие развитой в [2], теории гомотопов, получаем полуортогональное разложение производной категории модулей над $B(\Gamma)$. Разложение состоит из пары категорий,одна из которых — это производная категория модулей над алгеброй путей графа Г, а другая — это производная категрия модулей над базовым кольцом K. Абелева категория модулей над $B(\Gamma)$ оказывается сердцевиной превратной t-структуры, склеенной из соответствующих абелевых категорий для компонентов полуортогонального разложения.

Это позволило связать теорию представлений алгебры $B(\Gamma)$ с топологией графа и различных частичных компактификаций топологических пространств, гомотопически эквивалентных графу как одномерному комплексу. Исходной мотивацией в изучении алгебр $B(\Gamma)$ являлась связь представлений алгебры $B(\Gamma_m(n))$ и проблемы классификации m картановских подалгебр в $\mathrm{sl}(n)$, попарно ортогональных относительно формы Киллинга. Граф $\Gamma_m(n)$ — полный m-дольный граф, где каждая "доля" состоит из n вершин. В применении к ортогональным разложениям надо положить $s_{ij} = \frac{1}{n}$.

Еще одной причиной для изучения теории представлений $B(\Gamma_m(n))$ является связь унитарных представлений $B(\Gamma_m(n))$ и так называемых взаимно-несмещенных базисов в эрмитовом пространстве. Эти базисы имеют широкое применение в квантовой теории информации, квантовом кодировании и декодировании, а также квантовой томографии.

Знаменитая "гипотеза Винни-Пуха", предложенная А. И. Костриkиным, утверждает что полное ортогональное разложение алгебры Ли $\mathrm{sl}(n)$ над полем комплексных чисел возможно только когда n является степенью простого числа. Аналогичная гипотеза для взаимно-несмещенных базисов была сформулирована Ивановичем.

Естественным первым шагом в изучении ортогональных разложений является классификация ортогональных пар в $\mathrm{sl}(n)$. Напомним, что ортогональной парой называется пара картановских подалгебр H_0, H_1 ортогональных относительно формы Киллинга. Ортогональные пары изучаются с точностью до естественного действия двух торов, соответствующих этим картановским подалгебрам.

В случае $n = 6$ было сформулировано несколько гипотез, некоторые из которых удалось доказать [3]. Также исследовался случай $n = 7$. Этот случай имеет интерес в связи с давнишней гипотезой, сформулированной Сорином Попа: ортогональных пар в $\mathrm{sl}(p)$ в случае простого p лишь конечное число. Эта гипотеза была опровергнута Петреску с помощью компьютерных вычислений было построено одномерное семейство ортогональных пар в $\mathrm{sl}(7)$.

Нишоара заметил, что если рассмотреть ортогональные проекторы, соответствующие картановским подалгебрам H_0, H_1 из семейства Петреску и упорядочить должным образом, то выполняется коммутационное соотношение:

$$[p_1 + p_2, q_1 + q_2] = [p_3 + p_4, q_3 + q_4],$$

здесь $p_1, \ldots, p_4$; $q_1, \ldots, q_4$ — проекторы из H_0 и H_1 соответственно. Это соотношение привело естественным образом к вопросу об изучении алгебры C, порожденной парами ортогональных проекторов P_1, P_2 и Q_1, Q_2

и удовлетворяющих соотношению:

$$[P_1, Q_1] = [P_2, Q_2].$$

Действительно, в силу ортогональности проекторов p_i и q_j, проекторы определенные как $P_1 = p_1 + p_2$, $P_2 = p_3 + p_4$, $Q_1 = q_1 + q_2$ и $Q_2 = q_3 + q_4$ — ортогональные и удовлетворяют соотношению Нишоары.

А также естественным вопросом стало изучение фактора редуцированной алгебры Темперли–Либа по соотношению Нишоары. В совместных статьях [4], [17] с Кочеровой А.С. эти алгебры изучались. В частности, было показано,

- алгебра C — бесконечномерная;
- алгебра C как Z-модуль конечно-порожден. В частности, Z — бесконечномерная алгебра;
- Spec Z — объединение трех прямых, пересекающихся в одной точке;
- неприводимые C-модули имеют размерность не более чем 2 и эти модули параметризуются точками спектра центра.

Также получено описание семейства Петреску как многообразия модулей представлений фактора редуцированной алгебры Темперли–Либа.

2.7. Четырехмерная конформная теория и твисторы

2.7.1. Описание рассматриваемой квантовой модели

Интерес к рассмотрению четырехмерных конформных теорий поля можно среди прочего объяснить их связью с комплексной геометрией. Эту связь доставляет твисторное преобразование, позволяющее переформулировать конформно-инвариантные уравнения четырехмерной теории поля в терминах геометрии трехмерного комплексного проективного пространства — пространства твисторов. Также и в случае квантовой теории можно ожидать подобного соответствия.

Примеров твисторного соответствия в квантовой теории пока не много (см., в частности, [16]). Одна из причин этого заключается в том, что большинство изучаемых в физике моделей квантовой теории не являются конформными. Конформные свойства сохраняются в тех квантовых теориях, в которых происходит удачное сокращение ультрафиолетовых расходимостей. Это, как правило, суперсимметричные теории. Имеется, однако, пример несуперсимметричной квантовой теории, у которой можно предполагать интересные конформные свойства. Это так называемая самодуальная теория Янга–Миллса, которую можно представлять как такое вырождение стандартной теории Янга–Миллса, когда самодуальная “половина” теории остается нелинейной и описывается калибровочным полем A_μ, а анти-самодуальная линеаризована и описывается антисимметричным анти-самодуальным тензорным полем $P_{\mu\nu}$.

Несмотря на крайнюю простоту этой модели, она обладает интересными квантовыми свойствами. Простота этой модели определяется конечностью ряда теории возмущений, но при этом в ней присутствуют ультрафиолетовые расходимости и соответствующие перенормировки. Мы полностью описали структуру ультрафиолетовых расходимостей и показали, что перенормировки не должны испортить конформные свойства этой модели [13]. Последнее предположение основывается на том, что в данной модели нет константы связи, а перенормировки имеются следующих двух типов. Во-первых, это перенормировка топологического члена в действии, а во-вторых, перенормировка поля, которая, однако, приводит только к появлению так называемых контактных членов и не должна повлиять на конформное поведение корреляционных функций конформных наблюдаемых.

Задачей, которую следует исследовать в будущем, является задача построения таких наблюдаемых. Эта задача позволит связать свойства рассматриваемой четырехмерной квантовой теории и алгебро-геометрические объекты на твисторном пространстве.

2.7.2. Твисторная мотивировка

Взаимное проникновение квантовой теории поля и комплексной (алгебраической) геометрии хорошо известно в случае двумерной конформной квантовой теории. В четырехмерном случае ситуация беднее. Связь между теорией поля и комплексной геометрией доставляется так называемой твисторной конструкцией, или твисторным преобразованием. Самый значительный результат здесь — построение инстантонных решений с помощью геометрии голоморфных расслоений на $\mathbb{CP}^3$ — конструкция Атьи–Дринфельда–Хитчина–Манина. Представляется разумным ожидать большего от твисторной конструкции, в том числе и в ситуации квантовой теории.

Твисторное соответствие применимо в первую очередь к конформным теориям в четырех измерениях. Мы ожидаем, что самодуальная теория Янга–Миллса даст новые интересные примеры. На классическом уровне рассматриваемая самодуальная теория эквивалентна голоморфной теории типа Черна–Саймонса [15] в твисторном пространстве. Теперь необходимо изучить эту связь в квантовом случае. Согласно общей идеологии ожидается некоторое соответствие между конформными корреляционными функциями четырехмерной квантовой теории и определенными геометрическими объектами в твисторном пространстве. Последние будут иметь смысл, обобщающий понятие голоморфного индекса зацепления [1, 12, 10, 11, 2]. Четырехмерная квантовая теория должна помочь найти правильное определение таких “голоморфных инвариантов узлов”.

Пример подобной ситуации был рассмотрен Атьей [1]. В этой работе Атья показал, что коррелятор свободной теории (то есть просто функция Грина оператора Лапласа) при твисторном преобразовании приобретает смысл голоморфного индекса зацепления двух (комплексных) прямых в CP^3. Если обобщить эту идею на случай взаимодействующей квантовой теории, можно ожидать появление интересных “голоморфных инвариантов узлов”.

2.7.3. Простейшие корреляционные функции

Простейший способ изучения корреляционных функций — это теория возмущений. В случае самодуальной теории Янга–Миллса это, пожалуй, и главный способ, поскольку теория возмущений, как мы показали, в данном случае особенно проста, нетривиальны только конечное число членов ряда.

Надо заметить, что для построения даже конформно-инвариантных корреляционных функций на промежуточных технических шагах можно воспользоваться неконформными величинами. В нашей работе [13] мы изучили свойства первой нетривиальной двухточечной (неконформной) функции. Это двухточечный коррелятор полей, отвечающих линеаризованной анти-самодуальной части, $P_{\mu\nu}$, о которой говорилось выше. При не совпадающих аргументах эта функция имеет простой вид,она пропорциональна $k-yk^4$, но требует регуляризации при $x-y \to 0$. Регуляризованный коррелятор описывается двухточечной обобщенной функцией:

$$G(x, y) = c \int \frac{d^4u}{u^4} \left[\delta(u + x - y) - e^{im\cdot u}\, \delta(x - y)\right].$$

Здесь проявляется тот факт, что перенормировка поля в этой модели сводится только к появлению контактных членов.

Эту двухточечную функцию, а также древесный коррелятор полей A_μ и $P_{\mu\nu}$ можно использовать для нахождения вакуумных средних наблюдаемых типа вильсоновских петель, которые и должны дать нам примеры конформно-инвариантных объектов. Это предполагается изучить в ходе наших исследований.

Литература

[1] M. F. Atiyah, Green's Functions for Self-Dual Four-Manifolds, Adv. Math., Suppl. Stud. **7A** (1981) 129–158.

[2] Bondal A., Zhdanovskiy I., Representation theory for systems of projectors and discrete Laplace operators, Preprint IPMU 13-0001 (готовится к печати в 2018 году).

[3] Bondal A., Zhdanovskiy I.Yu., Orthogonal pairs for Lie algebra sl(6), Preprint IPMU 14-0296 (готовится к печати в 2018 году).

[4] Kocherova A. S., Zhdanovskiy I. Yu., On the algebra generated by projectors with commutator relation, Lobachevskii Journal of Mathematics. 2017. Vol. 38. No. 4. P. 670–687.

[5] Cruz Morales, J. A., Kuznetsov, A., Mellit, A., Perrin, N., Smirnov, M. On quantum cohomology of Grassmannians of isotropic lines, unfoldings of A_n-singularities, and Lefschetz exceptional collections. arXiv preprint arXiv:1705.01819.

[6] A. Elagin, V. Lunts, Two dimensions of a triangulated category, in preparation.

[7] Sergey Galkin, Hiroshi Iritani: *Gamma conjecture via mirror symmetry*, http://arxiv.org/abs/1508.00719v1arXiv:1508.00719v1 от 4 августа 2015 г.

[8] Sergey Galkin, Hiroshi Iritani: *Gamma conjecture via mirror symmetry*, http://arxiv.org/abs/1508.00719v2arXiv:1508.00719v2 от 26 июня 2017 г.

[9] S. Gorchinskiy, A. Rosly, A polar complex for locally free sheaves,Int Math Res Notices **2015** (2015) 2784–2829 [arXiv:1101.5114[math.AG]].

[10] B. Khesin and A. Rosly, Polar homology, Canad. J. Math. **55** (2003) 1100–1120 [math.AG/0009015].

[11] B. Khesin, A. Rosly, R. Thomas, A Polar de Rham Theorem, Topology **43** (2004) 1231–1246 [math.AG/0305081].

[12] B. Khesin and A. Rosly, Polar Linkings, Intersections, and Weil Pairing, Proc. Roy. Soc. Lond. **A461** (2005) 3505–3524.

[13] A. Losev, I. Polyubin, A. Rosly, Ultraviolet Properties of the Self-Dual Yang–Mills Theory, arXiv preprint arXiv:1711.10026.

[14] Polishchuk, A., Van den Bergh, M. , Semiorthogonal decompositions of the categories of equivariant coherent sheaves for some reflection groups. arXiv preprint arXiv:1503.04160.

[15] E. Witten, Chern–Simons Gauge Theory As A String Theory, Prog. Math., **133** (1995) 637-678 [arXiv:hep-th/9207094].

[16] E. Witten, Perturbative Gauge Theory As A String Theory In Twistor Space, Commun. Math. Phys., **252** (2004) 189–258 [arXiv:hep-th/0312171].

[17] И. Ю. Ждановский, А. С. Кочерова, Алгебры проекторов и взаимно несмещенные базисы в размерности 7Квантовые вычисления, Итоги науки и техн. Сер. Соврем. мат. и ее прил. Темат. обз., 138, ВИНИТИ РАН, Москва, 2017, 19–49 .

3. Эллиптические кривые и гипотеза о существовании геометрического сечения

Результаты научного руководителя лаборатории Ф. А. Богомолова

Одной из основных тем исследований научного руководителя лаборатории Ф.А.Богомолова в 2016–2017 было изучение проективных ансамблей точек полученных из точек кручения эллиптических кривых при стандартной проекции $\pi : E \to \mathbb{P}^1$ на проективную прямую. Под стандартной проекцией мы понимаем двулистное накрытие проективной прямой разветвленное в 4-различных точках.

Если зафиксировать четыре точки (a, b, c, d) на прямой, то существует единственное двулистное накрытие прямой разветвленное в точности в этих четырех точках. Это накрытие является эллиптической кривой

$$E = E(a, b, c, d).$$

Существует единственная подгруппа в PGL(2, C) изоморфная $\mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/2$, которая отображает набор из четырех точек ветвления (a, b, c, d) в себя. Эта группа поднимается единственным образом в подгруппу сдвигов на эллиптической кривой $E(a, b, c, d)$. При этом четыре точки ветвления естественно отождествляются на эллиптической кривой $E = E(a, b, c, d)$ с подгруппой точек порядка два. При этом естественно определяется и подгруппа точек кручения E_{tors}, независимо от того какая из четырех точек ветвления становится нулем группы E.

Таким образом с каждым набором различных четырех точек на проективной прямой связывается подмножество $P\,E(a, b, c, d) \subset \mathbb{P}^1$ образов точек кручения в $\mathbb{P}^1$. При проективном преобразовании g в PGL(2, C). Подмножество $P\,E(a, b, c, d)$ также сдвигается с помошью g, т.е.

$$P\,E(g(a), g(b), g(c), g(d)) = g(P\,E(a, b, c, d)).$$

Как было показано в наших предыдущих статьях с Ю. Чинкелем, если $g(a, b, c, d) \neq (a', b', c', d')$, т.е. соответствующие подмножества различны, то пересечение $P\,E(a, b, c, d)$ и $P\,E(a', b', c', d')$ конечно. В работах последнего года исследовался вопрос об оценке возможного числа точек пересечения $P\,E(a, b, c, d)$ и $P\,E(a', b', c', d')$ и структуре этого подмножества.

С одной стороны, в работе было показано существование одномерных семейств пар кривых с количеством точек пересечения ≥ 10. Кроме того на одной из таких кривых в пространстве параметров были обнаружены пары с пересечением 22. Отметим, что соответствующий эффект наблюдается уже для простейшей такой кривой.

С другой стороны, в работе [1] были сформулированы и частично доказаны следующие результаты, которые показывают исключительную редкость больших пересечений множеств $P E(a, b, c, d)$, $P E(a^0, b^0, c^0, d^0)$ и подтверждают существование сравнительно небольшой константы (видимо 36) универсально ограничивающей размер конечного пересечения. Они относятся к описанию инвариантов наборов k-точек начиная с наборов из четырех точек.

Рассматривается фактор по определенной инволюции θ на "универсальном" семействе $E(J)$ эллиптических кривых параметризованных проективной прямой с параметром j. В семействе $E(J)$ послойные точки кручения разбиваются в бесконечное семейство неприводимых модулярных кривых X_n^0 параметризующих точки порядка в точности n, если выделить единое нулевое сечение (хотя более естественно рассматривать одновременно точки нечетного порядка n вместе с точками порядка $2n$, так как их обьединение инвариантно относительно группы $Z_2 \oplus Z_2 \subset PGL(2)$ соответсвующей группе сдвигов $Z_2 \oplus Z_2$ на $E(j)$, $j \subset J$). Мы получаем соответственно набор неприводимых кривых $X_n = X_n^0/\theta$ в факторе $E(J)/\theta$, который является расслоением над P^1 с рациональным параметром j со слоем рациональная кривая P^1. Мы можем выбрать единый рациональный параметр t на всех слоях проекции $j : E(J)/\theta \to P^1$ и соответсвенно определить отображение i_k: $S^k_{\text{fiber}} E(J)/\theta \to M_{0,k}$ на послойной симметрической степени семества $E(J)/\theta \to P^1$ в пространство $M_{0,k}$ модулей наборов точек на прямой. Это отображение совпадает с фактором по действию PGL(2, C) на $S^k P^1 = P^k$ и регулярно на открытой части $S^k P^1$ сответствущей наборам различных k точек.

Обьединение кривых X_n при взятии послойной симметрической степени распадается в счетное обьединение неприводимых кривых $Y_{\omega,k}$, где ω соответсвует орбите действия SL(2, Z) на точках порядка k (или более точно на орбитах действия расширения

$$1 \to Z_2 \oplus Z_2 \to G \to SL(2, Z) \to 1,$$

если изначально не фиксировать нулевое сечение в $E(J)$). Таким образом имеются отображения $i_k : Y_{\omega,k} \to M_0(k)$ и $(i_k, j) : Y_{\omega,k} \to M_{0,k} \times \mathbb{P}^1$. Я получил следующие результаты:

1) Отображение i_4 является сюрьективным за исключением случаев $n = 3, 4, 6$.

2) Отображение (i_4, j) является бирациональной проекцией на образ если все точки в наборе принадлежащем $Y_{\omega,4}$ имеют порядок больше 10 (впрочем это верно и в большинстве оставшихся случаев).

3) При отображении i_5 различные кривые $Y_{\omega,5}$ (кроме очевидных исключений) имеют разные образы в $M_{0,2} = \mathbb{P}^2$, т.е образы различных кривых $Y_{\omega,5}$ в $M_{0,2}$ имеют конечное пересечение.

Доказательство всех трех утверждений основано на классических результатах касающихся поведения точек конечного порядка при мультипликативном вырождении эллиптической кривой а также действия группы $\mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/K)$ на точках конечного порядка, если эллиптическая кривая определена над конечным расширением K поля $\mathbb{Q}$ рациональных чисел.

Кроме того, Богомолов продолжил работу над рядом вопросов связанных с уточнением полученных результатов, а также над проблемой сформулированной в [1]:верно ли, что “большинство” образов кривых $Y_{\omega,6}$ в $M_{0,6}$, $\dim M_{0,6} = 3$ не пересекаются. Из положительного ответа на этот вопрос следовало бы, что конфигурация образов в прямой 6 точек кручения достаточно большого порядка определяет эллиптическую кривую (по аналогии с четырьмя точками второго порядка)

Полученные результаты о проекциях точек кручения планируется применить к конструкции новых неразветвленных соответствий

$$C_1 \Rightarrow C_2,$$

т. е. пар кривых C_1, C_2 таких, что имеется отображение конечного неразветвленного накрытия $\tilde{C}_1$ кривой C_1 на кривую C_2. Дело в том, что имеющиеся конструкции таких соответствий основаны на переходе от эллиптической кривой E с ветвлением в точках (a, b, c, d) к новой эллиптической кривой с ветвлением в образе точек кручения кривой $E(a, b, c, d)$. Полученные результаты показывают существование нетривиальных циклов в этом процессе (т.е. тот факт, что после конечного числа шагов мы получаем эллиптическую кривую изоморфную начальной).Тем самым индуцируются и циклы среди неразветвленных соответствий, т.е возникает возможность строить новые конечные последовательности кривых C_i, $i = 1, \dots, n$ рода $g > 1$ такие, что $C_i \Rightarrow C_j$ для любого i, j.

Также научный руководитель лаборатории Ф. А. Богомолов работал над проблемой связанной с так называемой минималистской версией известной гипотезы о существовании геометрического сечения. Как было показано в совместных работах с Ю.Чинкелем этот вопрос имеет очень близкий аналог относящийся к гомоморфизмам мултипликативных групп полей сохраняющх свойство алгебраической зависимости элементов над основным полем k. Ранее были описаны мономорфизмы мультипликативных групп полей степени трансцендентности > 2 с этим свойством. В совместной статье с Чинкелем и Ровинским [2] был доказан следующий основной результат.

Теорема 3.1. *Пусть K произвольное поле конечной характеристики содержащее нетривиальное подполе k. Преположим, что имеется гоморфизм мультипликативных групп $\psi: K^*/k^* \to L^*/l^*$ удовлетворяющий следующим условиям:*

1) *Если два элемента $x, y \in K^*$ алгебраически зависимы над k, то их образы $\psi(x), \psi(y)$ алгебраически зависимы над l.*

2) *Имеется по крайней мере два элемента $x, y \in K^*$, образы которых алгебраически независимы в L^*/l^*, где L тоже поле и l его подполе.*

3) *Имеется нетрвиальное ядро, т.е елемент $z \in K$, $z \notin \bar{k} \cap K$, такой, что $\psi(z) = 1$.*

Тогда либо:

1) *сушествует подполе $F \subset K$, $k \subset F$, такое, что ψ разлагается в композицию проекции $p_F: K^*/k^* \to K^*/F^*$ и мономорфизма $K^*/F^* \to L^*/l^*$, либо*

2) *существует неахимедово нормирование v на K такое что ограничение ψ на мультпликативную группу A_v^* нормирования v разлагается в композицию $p_v: A_v^* \to A^*/(1 + m_v) = K_v^* \to K_v^*/k_v^*$ и мономорфизма $i_v: K_v^*/k_v^* \to L^*/l^*$.*

Тем самым существует выделенное нормирование v связанное с ψ. Центр этого нормирования и является в случае функционального поля K геометрическим сечением как это предсказывает гипотеза о существовании геометрического сечения.

Основные элементы доказательства работают также и для полей характеристики 0, но в этом случае несколько усложняется доказательство при его распространении на нормирования нетривиальные на подполе рациональных чисел.

Этот рациональный вариант гипотезы верен для практически произвольных полей.Был также получен ряд результатов в направлениии гипотезы о существовании геометрического сечения для функциональных полей. Отличие состоит в том, что в этом случае нам приходится иметь дело с линейными пространствами над кольцом целых l-адических чисел.

Для того, что-бы сформулировать нужный результат нам нужно понятие L-подгруппы в абелевой про-l группе Галуа поля K. Это замкнутая подгруппа $\mathrm{Gal}_l^{\mathrm{ab}}(K)$ имеющая топологический ранг > 1, прообраз которой в центральном расширении $\mathrm{Gal}_l^{c}(K)$ абелев. Результат,к которому мы стремимся можно сформулровать следующим образом:

Минималистский вариант гипотезы о геометрическом сечении для функциональнях полей формулируется следующим образом:

Пусть $\pi : X \to Y$ отображение алгебраических многообразий, таких что $\dim Y \geq 2$ с неприводмым общим слоем над алгебраически замкнутым полем k. Рассмотрим индуцириованное сюрьективное отображение абелевых про-l групп Галуа. π_a: $\mathrm{Gal}_l^{\mathrm{ab}}(k(X)) \to \mathrm{Gal}_l^{\mathrm{ab}}(k(Y))$, где l взаимно просто с характеристикой поля k. Предположим, что имеется групповое сечение s_a, т.е гомоморфизм

$$s_a : \mathrm{Gal}_l^{\mathrm{ab}}(k(Y)) \to \mathrm{Gal}_l^{\mathrm{ab}}(k(X)), \qquad \pi_a \circ s_a = \mathrm{id},$$

с дополнительным свойством , что все L-подгруппы $\mathrm{Gal}_l^{\mathrm{ab}}(k(Y))$ отображаются в L-подгруппы $\mathrm{Gal}_l^{\mathrm{ab}}(k(X))$ при гомоморфизме s_a.

Гипотеза 3.2. *При указанных условиях существует рациональное отображение $s : Y \to X$ такое, что композиция $\pi \circ s : Y \to Y$ является чисто несепарабельным отображением конечной степени и при этом s индуцирует групповое сечение s_a.*

Удалось свести общий случай этой гипотезы к случаю,когда Y поверхность, а $X = Y \times \mathbb{P}^1$. Кроме того в последнем случае удалось доказать, что для справедливости гипотезы достаточно установить, что элементы инерции в группе $\mathrm{Gal}_l^{ab}(k(Y))$ не переходят в элементы инерции дивизориальных нормирований поля в группе $\mathrm{Gal}_l^{ab}(k(X))$.

Литература

[1] Fedor Bogomolov, Hang Fu, Yuri Tschinkel, “Torsion of elliptic curves and unlikely intersections”, arXiv:1706.01586.

[2] Fedor Bogomolov, Marat Rovinsky, Yuri Tschinkel, “Homomorphisms of multiplicative groups of fields preserving algebraic dependence”, arXiv:1709.00639.

4. Гомологические и мотивные методы в некоммутативной геометрии

За отчетный период, в рамках темы “Гомологические и мотивные методы в некоммутативной геометрии”,сотрудники лаборатории работали над следующими вопросами.

4.1. Гомотопически инвариантные пучки

Изучались определенные ограничения некоторых пучков в доминантной топологии над полем k характеристики 0, представляющих алгебро-геометрический интерес.

По определению [3], объекты доминантного сайта над k – гладкие многообразия над k, морфизмы – гладкие k-морфизмы, покрытия – доминантные морфизмы.

Доминантный пучок F *гомотопически инвариантен*, если для каждого X биективно отображение $F(X) \to F(X \times \mathbb{A}^1)$, индуцированное проекцией $X \times \mathbb{A}^1 \to X$.

Гомотопически инвариантные пучки возникают при изучении стабильных бирациональных инвариантов (гладких многообразий) со свойством спуска Галуа, таких как группы Чжоу с рациональными коэффициентами гладких проективных многообразий. В частности, гипотеза С. Блоха (об инъективности отображения Альбанезе из группы Чжоу 0-циклов степени 0 в многообразие Альбанезе для многообразий без голоморфных форм с тепени 2 и выше) следовала бы из того гипотетического факта, что любой *простой* гомотопически инвариантный доминантный пучок k-векторных пространств вкладывается в пучок дифференциальных форм.

Назовем Gal-*комбинаторным* подсайт с теми же покрытиями, объекты которого — этальные морфизмы в координатные аффинные пространства над полем k, а морфизмы — гладкие морфизмы, коммутирующие с координатными проекциями.

Теорема 4.1. *Пусть F – поле характеристики* 0. *Ограничение гомотопически инвариантного пучка F -векторных пространств на* Gal-*комбинаторный подсайт изоморфно прямой сумме представимых пучков, т.е.*

пучков, ассоциированных с предпучками F -векторных пространств

$$Y \mapsto \begin{array}{l}F\text{-векторное пространство, базис которого}\\ \text{образуют морфизмы } Y \to X\end{array}$$

для некоторых объектов X.

Назовем *комбинаторным* подсайт с теми же покрытиями, объекты которого — координатные аффинные пространства над полем k, а морфизмы — координатные проекции.

Квазикогерентным называется пучок F, значения которого $F(X)$ (для всех X) снабжены структурой векторного пространства над полем функций $k(X)$ многообразия X, и эти структуры согласованы с морфизмами, т.е. для каждого морфизма $X \to Y$ (отождествляющего $k(Y)$ с подполем поля $k(X)$) отображение $F(Y) \to F(X)$ $k(Y)$-линейно.

Квазикогерентный пучок F называется *когерентным*, если для каждого X $k(X)$-векторное пространство $F(X)$ конечномерно. Например, доминантный пучок дифференциальных форм над k, равно как и его ограничения на комбинаторный и Gal-комбинаторный подсайтыявляется когерентным.

Теорема 4.2. *Ограничение когерентного пучка на комбинаторный подсайт изоморфно прямой сумме пучков дифференциальных форм $X \mapsto \Omega^i_{k(X)|k}$ ($i > 0$) с конечными кратностями.*

Обозначим через Φ функтор, сопряженный слева к забывающему функтору из категории квазикогерентных доминантных пучков в категорию доминантных пучков k-векторных пространств.

С точки зрения алгебро-геометрических приложений особый интерес представляют (квазикорентные) факторпучки пучков $\Phi(W)$ для простых гомотопически инвариантных доминантных пучков k-векторных пространств W.

Теорема 4.3. *Пусть W – гомотопически инвариантный доминантный пучок k-векторных пространств. Тогда ограничение пучка $\Phi(W)$ на комбинаторный подсайт инъективно.*

Связностью на квазикогерентном пучке F называется набор связностей $\nabla_X : F(X) \to F(X) \otimes_{k(X)} \Omega_{k(X)|k}$, согласованный с морфизмами, т.е.

для каждого гладкого морфизма $X \to Y$ коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccc}
F(Y) & \xrightarrow{\nabla_Y} & F(Y) \otimes_{k(Y)} \Omega_{k(Y)|k} \\
\downarrow & & \downarrow \\
F(X) & \xrightarrow{\nabla_X} & F(X) \otimes_{k(X)} \Omega_{k(X)|k}
\end{array} .$$

Связность ∇ на квазикогерентном пучке F называется *тривиальной* (соотв., *квазитривиальной*), если естественные отображения $\ker \nabla_X \otimes_k k(X) \to F(X)$ сюръективны для всех X (соотв., если для каждого объекта Y найдется такой доминантный этальный морфизм $X \to Y$, что сюръективно отображение $\ker(\nabla_Y \otimes_{k(Y)} k(X)) \otimes_k k(X) \to F(Y) \otimes_{k(Y)} k(X)$), где $\nabla_Y \otimes_{k(Y)} k(X) : F(Y) \otimes_{k(Y)} k(X) \to F(Y) \otimes_{k(Y)} \Omega_{k(X)|k}$ – единственная связность, продолжающая ∇_Y.

Построена следующая коммутативная диаграмма строгих функторов

$$\begin{array}{ccccc}
\left\{\begin{array}{c}\text{доминантные пучки}\\ k\text{-векторных}\\ \text{пространств}\end{array}\right\} & \xrightarrow[\Phi]{\sim} & \left\{\begin{array}{c}\text{квазикогерентные}\\ \text{доминантные пучки}\\ \text{с тривиальной}\\ \text{связностью}\end{array}\right\} & \xrightarrow{for} & \begin{array}{c}\text{квазикогерентные}\\ \text{доминантные пучки}\end{array} \\
\downarrow \text{ограничение} & & \downarrow \text{ограничение} & & \downarrow \text{ограничение} \\
\left\{\begin{array}{c}\text{Gal-комбинаторные}\\ \text{пучки } k\text{-векторных}\\ \text{пространств}\end{array}\right\} & \xleftarrow[\ker \nabla_C]{\sim} & \left\{\begin{array}{c}\text{квазикогерентные}\\ \text{комбинаторные пучки}\\ \text{с квазитривиальной}\\ \text{связностью}\end{array}\right\} & \xrightarrow{for} & \left\{\begin{array}{c}\text{квазикогерентные}\\ \text{комбинаторные}\\ \text{пучки}\end{array}\right\} \\
\downarrow \text{ограничение} & & & & \\
\left\{\begin{array}{c}\text{комбинаторные}\\ \text{пучки } k\text{-векторных}\\ \text{пространств}\end{array}\right\} & & & &
\end{array}$$

4.2. Башни кривых над конечными полями

Сотрудник ЛАГ Сергей Рыбаков изучал семейство Лежандра и оптимальные башни кривых над конечными полями.

У алгебраической кривой C над конечным полем $\mathbb{F}_q$ из q элементов есть два основных инварианта: ее род $g(C)$ и количество точек на кривой $N(C) = |C(\mathbb{F}_q)|$. Граница Хассе–Вейля устанавливает следующую связь между этими инвариантами:

$$|N(C) - q - 1| \le 2g(C)\sqrt{q}.$$

Оказывается, что для кривых большого рода это неравенство дает не слишком хорошую оценку для числа точек. Более точно это обстоятельство описывает теорема Дринфельда–Влэдуца: для любого (разумеется, счетного) семейства кривых C_n над $\mathbb{F}_q$, у которых род стремится к бесконечности

$$\beta(C_\bullet) = \varlimsup_{n\to\infty} \frac{N(C_n)}{g(C_n)} \leq \sqrt{q} - 1.$$

Как только было доказано это неравенство, возник вопрос об оптимальности этой оценки, то есть существует ли семейство кривых, для которого $\beta(C_\bullet) = \sqrt{q} - 1$. Такое семейство называется *оптимальным*. Ответ положительный, если q является квадратом. При этом в качестве примеров удобно брать башни кривых. Башня кривых — это последовательность кривых C_n и конечных отображений $C_n \to C_{n-1}$, при этом род C_n стремится к бесконечности. Основные примеры оптимальных башен алгебраических кривых над конечными полями можно построить либо при помощи явных рекуррентных формул, либо как башни модулярных кривых.

Если порядок конечного поля является квадратом, то неизвестно, существуют ли над ним оптимальные башни или семейства. С. Рыбаков предложил новую конструкцию, которая обобщает модулярные башни и дает надежду построить оптимальные семейства кривых без ограничений на конечное поле.

Пусть дано семейство $X \to C$ алгебраических многообразий над кривой C. Предположим, что семейство является гладким над открытым подмножеством U. Тогда i-й высший этальный прямой образ постоянного пучка $\mathbb{Z}/\ell^n\mathbb{Z}$ соотвествует локальной системе на U Можно определить послойную “проективизацию” этой локальной системы, которая будет схемой U_n, конечной над U. Если выполняются некоторые технические условия на семейство $X \to C$, эта схема будет геометрически неприводимой кривой. Определим C_n как гладкую проективную кривую, содержащую U_n.

Простейший пример, в котором выполняются упомянутые условия — это семейство Лежандра эллиптических кривых над полем $\mathbb{F}_p$, которому наша конструкция сопоставляет *башню Лежандра*. Мы доказали, что эта башня оптимальна.

Можно также предположить, что башня Лежандра является заменой базы модулярной башни $X_0(\ell^\bullet)$. Напомним, что точке кривой $X_0(\ell^n)$ над алгебраическим замыканием основного поля соответствует класс изоморфизма эллиптической кривой E вместе с циклической подгруппой порядка ℓ^n в группе точек на кривой E. Эта кривая на самом деле определена над полем $\mathbb{F}_{p^2}$, а семейство $X_0(\ell^\bullet)$ является оптимальной башней над $\mathbb{F}_{p^2}$.

Одно из условий на семейство $X \to C$ связано с суперсингулярностью слоев. Будем говорить, что алгебраическое многообразие Y над $\mathbb{F}_q$ строго суперсингулярно в степени i, если обратные корни действия Фробениуса на i-ых этальных когомологиях Y одинаковы. В этом случае они равны $\pm q^{-i/2}$. Более того, эти числа всегда целые, поэтому, если q не квадрат, то i должно быть четным. Для того, чтобы башня кривых была оптимальной необходимо, чтобы у исходного семейства многообразий было много строго суперсингулярных слоев. В частности, для семейств эллиптических кривых это сразу означает, что q должно быть квадратом.

Подобные соображения подсказывают, что для построения оптимальной башни кривых над $\mathbb{F}_p$ нужно начинать с семейства поверхностей, у которых тривиальны первые этальные когомологии. В частности, семейства абелевых поверхностей нам не подходят. В дальнейшем С. Рыбаков планирует работать с семействами поверхностей K3.

4.3. Алгебраические K-теории Моравы

Стажер ЛАГ Павел Сечин изучал алгебраические K-теории Моравы $K(n)^*$, определяемые как локализации алгебраических кобордизмов Левина-Мореля Ω^*. (Для каждого простого p и натурального n существует своя K-теория Моравы.)

В исследованиях предыдущего года была построена гамма-фильтрация на алгебраических K-теориях Моравы. Основным ее практическим применением на данный момент является получение оценок сверху на кручение в группах Чжоу некоторых однородных многообразий. В частности, для квадрик из $(n+2)$-ой степени фундаментального идеала в кольце Витта были получены новые оценки на кручение в коразмерностях до 2^n. Однако, сразу было ясно, что данные оценки не являются точными ни в каком смысле и одним из результатов этого года является получение точных оценок в данной задаче совместно с Н. Семеновым (Мюнхенский университет имени Людвига и Максимилиана).

Проблема, которая возникала в предыдущем методе, состоит в том, что гамма-фильтрация не совпадает с топологической фильтрацией даже в младших членах. В качестве примера можно рассмотреть K-теорию векторных расслоений $K_0 \otimes \mathbb{Z}_{(p)}$, гамма-фильтрация на которой совпадает с топологической фильтрацией, вообще говоря, только в первом и втором члене. Тем не менее присоединенные факторы топологической фильтрации изоформны соответствующим группам Чжоу до p-ой коразмерности. Для n-ой K-теории Моравы верно соответствующее утверждение с заменой p на p^n. Таким образом, для улучшения оценок требовалось получить оценки на топологическую фильтрацию n-ой K-теории Моравы.

Для решения этой проблемы мы использовали симметрические операции Вишика на алгебраических кобордизмах. А именно, поскольку все элементы n-ой K-теории Моравы для рассматриваемых квадрик над замыканием являются рациональными, то мы поднимали их до рациональных элементов в кобордизмах, затем применяли к ним симметрические операции, которые позволяют "делить на v_n" и таким образом получали рациональные элементы достаточно большой коразмерности, которые доставляют все те же рациональные элементы в K-теории Моравы. Поскольку элементы кобордизмов j-ой коразмерности всегда лежат в j-ом члене топологической фильтрации, то это позволило доказать, что кручения в коразмерностях менее 2^n у квадрик из идеала I^{n+2} нет, а в коразмерности 2^n кручение не более, чем $\mathbb{Z}/2$. Поскольку для квадрик Пфистера эти оценки реализуются, то они являются точными.

Попутно мы доказали следующий факт, упорядочивающий изучение K-теорий Моравы: Если $K(n)$-мотив гладкого проективного многообразия X является Тейтовым, то и $K(m)$-мотив X является Тейтовым для $m < n$. Таким образом, для каждого гладкого проективного геометрически клеточного многообразия можно определить его высоту относительно простого числа p — последний номер K-теории Моравы, относительно которой мотив многообразия Тейтов. Гамма-фильтрация на $K(n)$ позволяет оценивать кручение в группах Чжоу, поэтому вопрос вычисления высоты данного многообазия видится новой интересной задачей, подходы к которой на данный момент отсутствуют.

4.4. Аддитивные эндооперации

Другим направлением исследования стало изучение аддитивных эндоопераций в универсальных p^n-типических свободных теориях $BP\{n\}^*$, построенных в прошлом году. Основным методом здесь является так называемое "обрезание", конструкция разработанная нами для построения классов Черна из K-теорий Моравы, которая позволяет по операции из теории A^* в теорию B^*, принимающей значение j-ом члене топологической фильтрации, получить "обрезанную операцию" из A^* в $CH^j \otimes B$. Таким образом, задача классификации аддитивных операций из свободной теории A^* в ориентированную теорию B^* делится на две части:

1) классификация операций из A^* в группы Чжоу,

2) поиск поднятий этих операций в теорию B^*.

В случае с теориями, коэффициенты которых не содержат кручения, первая задача может быть исчерпывающе решена. Для решения второй задачи, однако, требуется изучать различного рода делимости линейных комбинаций индуктивно построенных операций. В случае с теориями типа $BP\{n\}^*$ по всей видимости возможно применить методы, использованные при построении классов Черна из K-теорий Моравы в группы Чжоу. Однако полный ответ на эту задачу пока нам получить не удалось.

Важность этого проекта пока неясна, однако, нестабильные аддитивные эндооперации в $BP^* = BP\{1\}^*$, построенные Вишиком,позволили значительно лучше понять структуру алгебраических кобордизмов как модуля над кольцом Лазара. Мы надеемся, что гипотетические аддитивные операции в $BP\{n\}^*$ позволят лучше понять структуру этой теории, в частности, в приложениях для оценок топологической фильтрации K-теории Моравы, а также к вопросам рациональности элементов различных ориентированных теорий алгебраических многообразий.

4.5. n-алгебры Вейля

Кроме того, в течение отчетного периода продолжалось изучение факторизационных гомологий n-алгебры Вейля, введеных в статье Н. Маркаряна [6].

Это направление исследований имеет широкую область применений в современной математике и математической физике.В частности, в этой статье строго построены инварианты Аксельрода–Зингера, введенные более 20 лет назад. n-алгебры Вейля играют важную роль в подходе Gwillaim-Costello к квантовой теории поля, вдохновленном работами Beilinson-Drinfeld и Francis-Gaitsgory-Lurie.

Перспективность этого подхода доказывает результат из статьи Маркаряна [5]. Там вычислен интеграл Концевича неузла при помощи n-алгебр Вейля.Это вычисление может быть обобщено,например, на торические узлы. По сути, этот подход позволяет включить в современный контекст и развить уже ставший классическим подход Тураева к скейн-теории через квантование алгебры петель на поверхности. В течение отчетного периода была продолжена работа в этом направлении.

Кроме того, n-алгебры Вейля могут быть естественно применены в направлении многочисленных исследований, инициированных работой Концевича о гипотезе формальности. В этой статье был построен квазиизоморфизм между алгебрами Ли поливекторных полей и хохшильдовского когомологического комплекса. Поливекторые поля образуют 2-алгебру Вейля, и это отображение естественно описывается в рамках развитой Маркаряном теории n-алгебр Вейля. Более того, таким образом можно получить и так называемую циклическую формальность в смысле Б. Шойхета.

Другое доказательство теоремы формальности Концевича использует технику работы с операдами, а именно формальность операды малых дисков. Это доказательство также можно получить с использованием n-алгебр Вейля. Систематизация и дополнения к работе Концевича, данные Т. Вильвахером в работе [7], также могут быть существенно упрощена и развита с использованием n-алгебр Вейля.

Как было замечено еще Концевичем, квантование не единственно. Множество всех квантований описывается группой Гротендика–Тейхмюллера. Эта группа была определена В. Дринфельдом и имеет массу приложений в разных областях математики. Она, в частности, действует на операде малых дисков. Гипотетически, эта группа совпадает (с точностью до технических деталей) с группой Галуа вещественных тейтовских смешанных структур Ходжа. Нам удалось явно построить dg операду в категории смешанных структур Ходжа, когомологии функтора слоя от которой равны когомологиям операды малых дисков. Это дает прямое отображение из группы Галуа категории смешанных структур Ходжа в автоморфизмы операды когомологий малых дисков.

Изучение этого отображения приводит к интересным комбинаторным задачам, очень близкими к тем, которые возникают при изучении кратных дзета значений, как, например, в работе [1]. Это направление исследований очень перспективно и может привести к интересным результатам.

4.6. Теорема Гротендика–Римана–Роха

Используя конструкцию морфизма следов в симметрических моноидальных $(\infty, 2)$-категориях из [4] а так же теорию деформаций и формализм соответствий, разработанные в [2], было получено новое доказательство классической теоремы Гротендика–Римана–Роха.

А именно, пусть дан морфизм $X \xrightarrow{f} Y$ собственных гладких алгебраических многообразий над полем нулевой характеристики k. Тогда для любого объекта $E \in \mathrm{QCoh}(X)$ $(\infty, 1)$-категории неограниченных коцепных комплексов квазикогерентных пучков на X имеется коммутативная диаграмма

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Vect}_k \arrow[r, "E"] & \mathrm{QCoh}(X) \arrow[r, "f_*"] \arrow[d, "\otimes O_X", "\sim"'] & \mathrm{QCoh}(Y) \arrow[d, "\otimes O_Y", "\sim"'] \\ & \mathrm{IndCoh}(X) \arrow[r, "f_*"'] & \mathrm{IndCoh}(Y) \end{tikzcd}$$

в $(\infty, 2)$-категории $2\mathrm{Cat}_k$ стабильных, представимых k-линейных категорий и фукнторов, уважающих копределы. Применяя конструкцию морфизма следов из [4] к тождественным функторам всех категорий из диаграммы, была получена коммутативная диаграмма

$$\begin{tikzcd} k \arrow[r, "\mathrm{ch}(E, \mathrm{Id}_E)"] & \Gamma(LX, O_{LX}) \arrow[r, "\mathrm{Tr}(f_*)"] \arrow[d, "\mathrm{Tr}(\otimes O_X)"] & \Gamma(LY, O_{LY}) \arrow[d, "\mathrm{Tr}(\otimes O_Y)"] \\ & \Gamma(LX, \omega_{LX}) \arrow[r, "\mathrm{Tr}(f_*)"'] & \Gamma(LY, \omega_{LX}) \end{tikzcd}$$

в категории Vect_k, где $LX = X \times_{X \times X} X$ группа инерций X.

Было показано, что всякий пучок $E \in \mathrm{QCoh}(X)$ обладает естественной LX-эквивариантной структурой, и что морфизм $\mathrm{ch}(E, \mathrm{Id}_E)$ совпадает со следом в категории $\mathrm{QCoh}(LX)$ от морфизма действия LX на E. Используя эквивалентность $\mathrm{Grp}(\mathrm{FormModuli}_X) \simeq \mathrm{LieAlg}(\mathrm{IndCoh}(X))$ из [2] и гладкость X, этот морфизм действия был связан с естественным действием алгебры Ли $T_X[-1] \in \mathrm{LieAlg}(\mathrm{QCoh}(X))$ на E. Таким образом, опираясь на теорему Хохшильда–Костанта–Розенберга

$$\Gamma(LX, O_{LX}) \simeq \bigoplus_{p=0}^{\dim X} H^p(X, \Omega_X^p)$$

удалось доказать, что морфизм $\mathrm{ch}(E, \mathrm{Id}_E)$ совпадает с классическим характером Черна.

Используя конструкцию инд-когерентных пучков как функтора из категории соответствий было доказано, что морфизм

$$\Gamma(LX, \omega_{LX}) \xrightarrow{\mathrm{Tr}(f_*)} \Gamma(LY, \omega_{LX})$$

совпадает с морфизмом, полученным применением функтора глобальных сечений к морфизму

$$L(f)_*\omega_{LX} \simeq L(f)_* L(f)^! \omega_{LY} \longrightarrow \omega_{LY}$$

в $\mathrm{IndCoh}(LY)$, где второй морфизм индуцирован коеденицей сопряжения $L(f)_* \dashv L(f)^!$. Таким образом, используя двойственность Серра–Пуанкаре было показано, что морфизм $\mathrm{Tr}(f_*)$ можно интерпретировать как классическое отображение на гомологиях, индуцированное f.

Используя явную конструкцию морфизма следов из [4] было показано, что морфизм $\Gamma(LX, \mathcal{O}_{LX}) \xrightarrow{\mathrm{Tr}(\otimes \mathcal{O}_X)} \Gamma(LY, \omega_{LY})$ можно получить применением функтора глобальных сечений к канонической Калаби–Яу структуре $\mathcal{O}_{LX} \simeq \omega_{LX}$ на LX, полученной из описания LX как производного стека неподвижных точек тождественного отображения на X. Опираясь на отображение экспоненты из [2] для любой формальной группы $\mathcal{G}$ над X было введено понятие теоретико-группового класса Тодда $\mathrm{td}_{\mathcal{G}} \in \Gamma(\mathcal{O}_{\mathcal{G}})$, и показано, что каноническую Калаби–Яу структуру на LX можно описать в терминах теоретико-группового класса Тодда td_{LX} группы инерций.

Для произвольной k-линейной представимой симметрической моноидальной категории $\boldsymbol{C} \in \mathrm{CAlg}(2\mathrm{Cat}_k)$, представления $\mathfrak{g} \xrightarrow{\rho} End_{\boldsymbol{C}}(E)$ алгебры Ли $\mathfrak{g} \in \mathrm{LieAlg}(\boldsymbol{C})$ и формального степенного ряда $f \in \mathbb{Q}[[t]]$ была построена формальная функция $End_{\boldsymbol{C}}(\mathfrak{g}) \xrightarrow{f(\rho)} End_{\boldsymbol{C}}(E)$ и ее интерпретация в терминах мультипликативных характеристических классов в случае, когда $\boldsymbol{C} = \mathrm{QCoh}(X)$ и $\mathfrak{g} = T_X[-1]$. Было показано, что из равенства $f(\mathrm{ad}_{T_X[-1]}) = \mathrm{td}_{LX}$ следует совпадение теоретико-группового класса Тодда td_{LX} и классического. Было введено понятие касательного комплекса морфизма в произвольной $\boldsymbol{C} \in \mathrm{CAlg}(2\mathrm{Cat}_k)$, таким образом позволяя проинтерпретировать равенство $f(\mathrm{ad}_{T_X[-1]}) = \mathrm{td}_{LX}$ в любой такой $\boldsymbol{C}$, после чего путем разбора случая когда $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{U}_{\mathrm{Lie}}$ универсальная категория, классифицирующая алгебры Ли, утверждению было выведено из классической теоремы Кемпбелла–Бейкера–Хаусдорфа.

Используя результаты выше, было доказано, что коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Vect}_k \arrow[r, "E"] & \mathrm{QCoh}(X) \arrow[r, "f_*"] \arrow[d, "\otimes O_X", "\sim"'] & \mathrm{QCoh}(Y) \arrow[d, "\otimes O_Y", "\sim"'] \\ & \mathrm{IndCoh}(X) \arrow[r, "f_*"'] & \mathrm{IndCoh}(Y) \end{tikzcd}$$

можно переписать как

$$\begin{tikzcd} k \arrow[r, "\mathrm{ch}(E)"'] \arrow[rr, bend left, "\mathrm{ch}(f_*(E))"] & \bigoplus_{p=0}^{\dim X} H^p(X, \Omega_X^p) \arrow[r] \arrow[d, "\cdot \mathrm{td}_X", "\sim"'] & \bigoplus_{p=0}^{\dim Y} H^p(Y, \Omega_Y^p) \arrow[d, "\cdot \mathrm{td}_Y", "\sim"'] \\ & \bigoplus_{p=0}^{\dim X} H^p(X, \Omega_X^p) \arrow[r, "f_*"'] & \bigoplus_{p=0}^{\dim Y} H^p(Y, \Omega_Y^p) \end{tikzcd}$$

что дает классическую формулу Гротендика–Римана–Роха

$$f_*(\mathrm{ch}(E)\mathrm{td}_X) = \mathrm{ch}(f_*(E))\mathrm{td}_Y.$$

4.7. Исчислительная геометрия

Кроме того, продолжалась работа по исчислительной геометрии пространств модулей кривых и инвариантам Громова–Виттена.

Исчислительная геометрия пространств модулей кривых испытала скачок после работы Концевича и Манина, в которой было обнаружено что числа кривых, проходящих через заданный набор циклов удовлетворяют набору уравнений WDVV. Данные соотношения,в частности, позволяют вычислять их индуктивно для любой степени кривой на произвольном многообразии Фано.Уже тогда было очевидно, что задачи аналогичного толка для чисел отображений из комплексных поверхностей намного сложнее — одним из принципиальных препятствий является то, что деформации отображения из поверхности даже в гладкое X не являются “теорией с простыми препятствиями”,поэтому построение виртуальных фундаментальных классов на них затруднено.

Наш подход к данной задаче состоит в поиске (гипотетических) алгебраических соотношений, аналогичных WDVV в простых случаях, и последующем их доказательстве post factum либо попытке переопределить (аналогично виртуальным числам пересечений) исчислительные инварианты в более сложных случаях таким образом, чтобы соотношения выполнялись. На данном пути нами была обнаружена связь комбинаторики вырождений пространств стабильных поверхностей, описанных В. Алексеевым, и комбинаторики сетей из работ Гайоты–Мура–Виттена.

Ниже мы приводим гипотетическую схему разрешения следующей (минимальной) проблемы: число отображений из $\mathrm{P}^1 \times \mathrm{P}^1 \to \mathrm{P}^d$ бистепени (p, q), проходящих через заданный набор циклов в P^d. Алгоритм пока имеет статус гипотезы, однако допускает два важных теста. Внутренний тест работы алгоритма это равенство ответов для (p, q) и (q, p), совершенно неочевидное из его внутренней структуры. Второй важный тест — внешний. Небольшая модификация этого алгоритма проходит для произвольного многообразия Фано, при этом методы, которыми можно было бы доказать его для многообразий Фано, неясны совершенно. Таким образом, если и в случае многообразий Фано ответы для (p, q) и (q, p) будут совпадать, это может косвенно свидетельствовать о наличии новой структуры на пространстве модулей поверхностей.

4.7.1. Рассматриваемые исчислительные инварианты

Рассматриваются числа отображений из $\mathrm{P}^1 \times \mathrm{P}^1$ с n вертикальными и m горизонтальными прямыми в P^d бистепени (p, q), такие, что точки пересечений вертикальных и горизонтальных прямых проходят через циклы $c_{ij} \in H^?(\mathrm{P}^d)$. Классическая задача получается при $c_{ij} = 1$ при $i \neq j$.

Также будут рассматриваться отображения из произведения вырожденных стабильных кривых рода 0 с аналогичными данными.

4.7.2. Горизонтальное соотношение WDVV

Рассмотрим отображения из произведения $\mathrm{P}^1 \times C$, где C — стабильная кривая рода 0 с двумя компонентами, на одной из которых имеются отмеченые точки (либо точки пересечения с другими компонентами) A и B, на другой — C и D (соответствующие вертикальные прямые будем обозначать теми же буквами). Тогда стандартное соотношение WDVV выполнено для чисел отображения поверхностей (т.е. сумма по всем способам разместить столбцы матрицы циклов c_{ij} A, B и любой другой набор столбцов на 1 компоненте, а C, D и оставшиеся столбцы на 2 компоненте равна аналогичной сумме для A, C и B, D).

Док-во: Компактифицируем пространство модулей отображений как одну из связных компонент пространства модулей кривых с m отмеченными точками в пространстве модулей кривых с n отмеченными точками в $\mathbb{P}^d$. Поскольку пространство модулей кривых с n отмеченными точками в $\mathbb{P}^d$ — гладкий орбифолд, вышеуказанное соотношение доставляется теорией Чена–Руана.

Если бы у нас был в наличии эффективный способ представления когомологий Чена–Руана пространства модулей кривых, то числа подобного рода отображений из произведений стабильных кривых можно было бы вычислять через числа отображений из $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$. Наш метод обходит эту проблему тем что изучает такого толка вырожденные корреляторы и продолжает вырождать кривую.

Лемма 4.1. *Используя данное соотношение, можно свести задачу к изучению отображений* $\mathbb{P}^1 \times C$, *где* C *— стабильная кривая, каждая из компонент которой отображается степенью* 1.

4.7.3. Замена компактификации

Когомологии пространства отображений стабильных кривых т.ч. каждая компонента имеет степень 1 ("ломаных"), легко описываются. Поэтому, интерпретируя поверхности вышеуказанного вида как кривые в пространстве ломаных, можно индуктивным образом вычислить все корреляторы.

Алгоритм находится в статусе гипотезы потому как непонятно, куда при данной замене компактификации пропадают секторы Чена–Руана.

4.8. Вектора Витта

Сотрудник ЛАГ Дмитрий Каледин продолжил начатую в прошлом году работу по некоммутативному обобщению классического функтора p-типических векторов Витта.

Напомним, что, как отмечено в отчете за прошлый год, исходная конструкция Витта и Тейхмюллера сопоставляет каждому коммутативному кольцу A другое коммутативное кольцо $W(A)$, которое является итерированным расширением A с помощью себя самого (например, если —

поле $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, то $W(A)$ – кольцо p-адических чисел $\mathbb{Z}_p$). Эта конкструкция замечательна своей функториальностью: мы получаем функториальный способ поднять кольцо характеристики p до кольца характеристики 0.

Для некоммутативных колец, вектора Витта были построены Л. Хесселхолтом в 1995 году. При этом $W(A)$, вообще говоря, кольцом уже не является, а является только абелевой группой, и получается не итерированным расширением A, а итерированным расширением $A/[A, A]$, т.е. фактора A по абелевой подгруппе, порожденной коммутаторами. Концептуальная причина такого поведения в том, что вектора Витта на самом деле обобщают не само кольцо A, а его гомологии Хохшильда $HH_*(A)$. В гомологической степени 0 имеем $HH_0(A) = A/[A, A]$; в высших степенях хотелось бы иметь новую гомологическую теорию, которая даже для коммутативных колец даст новую информацию — а именно, позволит совершенно инвариантно построить комплекс де Рама-Витта, некоторое расширение комплекса де Рама, важное в изучении кристаллических когомологий.

Кроме того, гомологии Хохшильда вообще говоря зависят от двух аргументов, алгебры A и A-бимодуля M, и естественно ожидать, что новая гомологическая теория также будет существовать в такой общности. При этом если A — просто конечное поле k, то теория сведется к некоторому полиномиальному функтору из k-векторных пространств в абелевы группы.

В прошлом году, сотрудниками лаборатории такие функторы были построены. Точнее, для каждого совершенного поля k фиксированной положительной хаактеристики p, была построена проективая система полиномиальных функторов W_n из k-векторных пространств в абелевы группы. Кроме того, показано, что W_n снабжены естественной структурой функторов следа (trace functors).

Как отмечалось в нашем отчете за прошлый год, такая структура позволяет, используя построенный нами некоторое время назад общий формализм функторов следа и теорий следа, построить скрученную версию теории гомологий Хохшильда над k — а именно, по каждой k-алгебре A и A-бимодулю M получаем скрученные группы гомологий Хохшильда.

В этом году такая теория $W_nHH_*(A, M)$ нами была в самом деле построена и подробно изучена. По построению, группы $W_nHH_*(A, M)$ функториальны по A и по M, а также Морита-инвариантны. Кроме того, они снабжены дополнительными структурами: имеем функториальный морфизм Фробениуса

$$W_{n+1}HH_*(A, M) \to W_nHH_*(A, M),$$

функториальный морфизм переноса (Verschiebung)

$$V : W_nHH_*(A, M) \to W_{n+1}HH_*(A, M),$$

а кроме того, в ситуации, когда $M = A$ есть диагональный бимодуль, имеем дифференциал Конна–Цыгана

$$B : W_nHH_*(A, A) \to W_{n+1}HH_*(A, A).$$

Нами было доказано, что эти дополнительные операторы удовлетворяют ряду естественных соотношений, основые из который следующие: $FV = VF = p$, $VBF = B$. Кроме того, было показано, что построенная теория мультипликативна в следующем смысле: если даны две k-алгебры A, B, снабженные бимодулями M,N, то имеем естественное внешнее произведение

$$W_nHH_*(A, M) \otimes W_nHH_*(B, N) \to W_nHH_*(A \otimes B, M \otimes N).$$

Это произведение ассоциативно, коммутативно и унитально в надлежащем смысле, совместимо с заменой n, а также функториально по всем участвующим в нем объектам (т.е. по A, B, M и N). Мы также имеем соотношения, связывающие между собой произведение и отображения F и V — а именно, имеем $F(xy) = F(x)F(y)$ и $xV(y) = V(F(x)y)$.

Кроме того, гомологии $W_nHH_*(A, A)$ были нами вычислены в следующих частных случаях: во-первых, для свободных ассоциативных алгебр, и во-вторых, для свободных коммутативных алгебр. В первом случае, как и следовало ожидать, оказалось, что гомологии есть только в степенях 0 и 1, причем они тесно связаны с полиномиальными векторами Витта от пространства образующих алгебры. Второй случай наиболее важен с практической точки зрения: напомним, что, по классической теореме Хохшильда–Костанта–Розенберга, гомологии Хохшильда свободной коммутативной алгебры — и, более общо, конечно-порожденной коммутативной алгебры с гладким спектром — имеется естественное отождествление гомологий Хохшильда и пространств глобальных дифференциальных форм на спектре. Хотелось бы ожидать, поэтому, что наши группы $W_n HH_*(A, A)$ для таких алгебр A будут отождествляться с пространствами так называемых форм де Рама–Витта, введенными в эпохальной работе Л.Иллюзи. Именно это и было нами доказано, причем в полной возможной общности — ровно в той же, в какой верна теорема Хохшильда–Костанта–Розенберга. При этом отождествлении наши операторы F и V переходят в операторы F и V , известные в теории Иллюзи, а оператор B переходит в дифференциал де Рама-Витта d. Формула $F BV$ при этом специализируется в классическое соотношение $F dV = V$, критически важное для построения теории Иллюзи.

Отметим, что наша теорема сравнения не только обобщает классическую конструкцию комплекса де Рама–Витта, и но и значительно проясняет ее. Так, в классической теории, хотя комплекс имеет естественную убывающую фильтрацию, присоединенные градуированные факторы по ней довольно загадочны, а сама конструкция опирается на ряд чудес и счастливых совпадений. Наша конструкиця, напротив, совершенно прозрачна и прямолинейна, и ни от каких совпадений не зависит. Что до факторов по фильтрации в полученном комплексе, они получают совершенно естественную и простую интерпретацию в терминах теории тилтинга (tilting) для циклических групп и циклической категории Λ, введенной А. Конном.

Литература

[1] Brown, Francis, Carr, Sarah, Schneps, Leila, “The algebra of cell-zeta values”, Compos. Math. 146 (2010), no. 3, 731–771.

[2] D. Gaitsgory, N. Rozenblyum “A study in derived algebraic geometry”, Mathematical Surveys and Monographs, Volume: 221, Print ISBN: 978-1-4704-3568-4

[3] U. Jannsen, M. Rovinsky, *Smooth representations and sheaves,* Moscow Math. Journal 10 (1), 189–214.

[4] G. Kondyrev, A. Prihodko, “Categorical proof of Holomorphic Atiyah-Bott formula”, ArXiv preprint https://arxiv.org/abs/1607.06345

[5] Markarian, Nikita, “Weyl n-algebras and the Kontsevich integral of the unknot”, J. Knot Theory Ramifications 25 (2016), no. 12, 1642008, 18 pp.

[6] Markarian, Nikita, "Weyl n-algebras", Comm. Math. Phys. 350 (2017), no. 2, 421–442.

[7] Willwacher, Thomas, "M. Kontsevich's graph complex and the Grothendieck–Teichmüller Lie algebra", Invent. Math. 200 (2015), no. 3, 671–760.

5. Геометрическая теория представлений

5.1. Многочлены Макдональда в бесконечности и кольцо модулей Вейля

Модули Вейля являются естественным аналогом неприводимых модулей в теории представлений алгебр токов и алгебр Ивахори. Хотя они и не являются ни неприводимыми, ни проективными, они имеют очень много важных свойств. В частности, модули Вейля как представления алгебр токов являются ext-ортогональными. Эти модули имеют естественное обобщение — обобщенные модули Вейля. Они являются аналогом модулей Демазюра в теории представлений алгебр Ивахори. Теория обобщенный модулей Вейля имеет связи с геометрией полубесконечных многообразий флагов, теорией представлений аффинных алгебр Ли, несимметрическими многочленами Макдональда.

Связь многочленов Макдональда и характеров модулей Вейля изучалась во многих работах [6, 4]. В этих работах для разных типов доказывается, что характеры модулей Вейля совпадают со специализациями несимметрических многочленов Макдональда в бесконечности. В статье [5] доказывается, что специализации несимметрических многочленов Макдональда в бесконечности также являются многочленами с целыми неотрицательными коэффициетнами, поэтому возникает естественный вопрос — существуют ли модули над алгеброй Ивахори, характеры которых совпадают со специализациями многочленов Макдональда в бесконечности. Для антидоминантных многочленов Макдональда такие представления построены в работе [3]. В статье [1] такие модули (названные U-модулями) были построены для произвольного веса. Эти модули впервые были определены Сью Като как модули глобальных сечений некоторого линейного расслоения. В работе [1] эти модули были определены с помощью образующих и соотношений а также они были отождествлены с некоторыми обобщенными модулями Вейля с характеристиками. Было доказано, что эти модули гомологически двойственны модулям Демазюра.

В работе [2] изучается алгебра двойственных модулей Вейля в типе A. Эта алгебра является координатным кольцом полубесконечного многообразия флагов.В данной работе эта алгебра определяется явно с помощью образующих и соотношений (названных полубесконечными соотношениями Плюккера).В частности, доказывается,что этот набор соотношений больше, чем “наивный” полубесконечный аналог соотношений Плюккера. Из этого следует, что “наивные” многообразия квазиотображений и многообразие застав не являются приведенными. Доказывается, что алгебра двойственных модулей Вейля совпадает с алгеброй, порожденной коэффициентами полубесконечных миноров. Вычисляется формула характеров для модулей Вейля типа A в терминах таблиц Юнга и q-мультиномиальных коэффициентов.

5.2. Шубертовы колчанные грассманианы и обобщенные модули Вейля для скрученных алгебр токов

Работы Е.Б.Фейгина 2017 года посвящены изучению колчанных грассманианов типа Шуберта, а также представлений скрученных алгебр токов простых алгебр Ли. Известно (см. [9, 10, 11, 12]), что колчанные грассманианы тесно связаны с многообразиями флагов и их вырождениями. В частности, колчанные грассманианы, соответствующие прямой сумме инъективного и проективного представлений однонаправленного колчана типа A дают явную реализацию абелевого вырождения Пуанкаре–Биркгофа–Витта для многообразий флагов групп SL_n (см. [7, 15]). В работе [13] описано обобщение таких грассманианов,так называемые Шубертовы колчанные грассманианы.Изучено действие унипотентных групп на этих проективных многообразиях, построено клеточное разбиение, вычислены полиномы Пуанкаре.

Как показано в работе [8] фильтрация Пуанкаре–Биркгофа–Витта на модулях Вейля [18, 19], соответствующим простым алгебрам Ли тесно связана со специализациями в бесконечности несимметрических полиномов Макдональда (см. [14, 20, 22]). В работах [16, 3] построены обобщённые модули Вейля, параметризованные доминантными весами конечномерной алгебры (как в случае классических модулей Вейля) и элементом группы Вейля. Эти представления алгебр токов позволяют описывать различные специализации несимметрических полиномов Макдональда, а также строить теоретико-представленческую версию комбинаторной конструкции Орра–Шимозоно [21]. В работе [17] конструкция обобщённых модулей Вейля обобщена на случай скрученных аффинных алгебр Ли. В частности, построена процедура теоретико-представлеческая реализации конструкции Орра–Шимозоно в скрученном случае и вычислены размерности модулей Вейля в единственном до сих пор неизвестном случае алгебр типа $A_2^{(2)}$.

5.3. Исчисление Шуберта для типов B и C через симплектические многогранники Гельфанда–Цетлина

В [P] была сформулирована гипотеза, выражающая циклы Шуберта на полном многообразии флагов в типе C через суммы граней симплектического многогранника Гельфанда–Цетлина. Ключевым ингредиентом был митоз на косых пайп дримах, разработанный в [K16II, Section 5] для Sp_{2n} с помощью формального применения методов [K16I]. Этот митоз позволяет по каждой *знаковой перестановке* (то есть, по элементу из группы Вейля типов B и C) выписать набор косых пайп дримов. Полученные пайп-дримы можно отождествить со специальными гранями симплектического многогранника Гельфанда–Цетлина. Для типа C_2 (и тем самым, B_2) грани, построенные таким образом по знаковой перестановке, реализуют характеры Демазюра многообразий Шуберта, соответствующего этой перестановке. Однако вычисления для типа C_3 показали расхождения в коэффициентах [P].

Оказывается, небольшая модификация гипотезы позволяет получить наборы граней, реализующие характеры Демазюра как в типе B, так и в типе C (заметим, что группы Вейля в этих двух типах одинаковые, поэтому один и тот же митоз работает в обоих случаях). А именно, в случае C_n и линейного расслоения на симплектическом многообразии флагов с доминантным весом $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ (разложение в базисе фундаментальных весов, причём нумерация простых корней идёт с особого, то есть, более длинного корня) нужно взять симплектический многогранник Гельфанда–Цетлина (см. [L, Section 4]) для набора

$$(\lambda_1 + \dots + \lambda_n, \lambda_1 + \dots + \lambda_{n-1}, \dots, \lambda_1).$$

В случае B_n (нумерация простых корней опять идёт с особого, теперь более короткого, корня) нужно применить к этому многограннику линейную замену (меняющую целочисленную решётку), при которой часть неравенств вида $x < y$ перейдёт в неравенства вида $x < 2y$ (в соответствии с [L, Section 4]). Для доказательства новой гипотезы планируется использовать выпукло-геометрические методы из [K17, Section 5].

5.4. Многогранники Гельфанда–Цетлина и K-теория многообразий флагов

Это продолжение проекта, начатого в работе В. А. Кириченко, Е. Ю. Смирнова и В. А. Тиморина [23].

Рассматривается кольцо Гротендика $K(G/B)$ многообразия полных флагов G/B (здесь и далее $G = \mathrm{GL}(n)$). Это кольцо, порождённое классами векторных расслоений $[F]$ над G/B с соотношениями вида $[F_1] - [F] + [F_2] = 0$ для всех коротких точных последовательностей $0 \to F_1 \to F \to F_2 \to 0$. Умножение в этом кольце отвечает тензорному произведению расслоений. Кольцо $K(G/B)$ во многом схоже с кольцом $H^*(G/B)$. Для него имеется аналог теоремы Бореля, принадлежащий Б. Костанту и Ш. Кумару [25] и описывающий его как фактор кольца $\mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n]$ многочленов от n переменных. Классы расслоений $[\mathcal{O}_{X_w}]$, отвечающие многообразиям Шуберта X_w, образуют базис этого кольца, однако, в отличие от кольца когомологий, этот базис уже не является самодвойственным. У элементов этого базиса существуют “хорошие” представители $G_w(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n]$ — аналоги многочленов Шуберта. Они называются *многочленами Гротендика*. Для них, так же как и для многочленов Шуберта, имеется описание при помощи операторов разделенных разностей (аналог теоремы Бернштейна–Гельфанда–Гельфанда) и комбинаторное описание при помощи rc-графов, также принадлежащее Ан. Кириллову и С. Фомину [24].

Проект посвящен построению комбинаторной модели для кольца Гротендика многообразия флагов при помощи операций над гранями многогранника Гельфанда–Цетлина, аналогично тому, как это уже было сделано для кольца когомологий. Каждому пучку $\mathcal{O}_{X_w}$ при этом будет сопоставляться некоторая линейная комбинация $\Gamma(X_w)$ граней многогранника (при этом, в отличие от предыдущего случая, в неё уже могут входить грани разной размерности, а коэффициенты при гранях уже не всегда будут положительными).Тензорному произведению расслоений, т.е. умножению в кольце $K(G/B)$, будет отвечать пересечение наборов граней. Со сложением в $K(G/B)$ дело обстоит несколько иначе: сумме элементов $[\mathcal{O}_{X_1}] + [\mathcal{O}_{X_2}]$ должно отвечать не просто объединение наборов граней, как в случае $H^*(G/B)$, а объединение минус пересечение: $\Gamma(X_1) + \Gamma(X_2) - \Gamma(X_1 \cap X_2)$ (в этом состоит основное отличие K-теории и когомологий). При этом, как и в случае кольца когомологий, имеется соответствие между гранями, входящими в набор $\Gamma(X_w)$, и мономами соответствующего многочлена Гротендика $\mathcal{G}_w(x_1, \ldots, x_n)$.

Нами была построена реализация кольца Гротендика многообразия флагов G/B при помощи граней многогранника Гельфанда–Цетлина для первых примеров: для многообразия флагов группы GL(3) и GL(4). Кроме того, сформулирована гипотеза о том, как должно выглядеть соответствие между структурными пучками циклов Шуберта, и наборами граней в общем случае.

5.5. Сизигии проективных вложений однородных пространств

Сотрудник лаборатории И. Нетай занимался вычислением резольвент локально свободных пучков на проективных вложениях однородных пространств вида G/P, где G — редуктивная алгебраическая группа, P — её параболическая подгруппа.

Решается задача построения минимальных резольвент однородных расслоений на проективных вложениях однородных пространств. В общем случае эта задача неизбежно сталкивается с проблемой вычисления плетизмов, известной в качестве трудной нерешённой задачи теории представлений.Однако удаётся получить некоторые новые резльтаты, где ответы можно дать в разумной формулировке.

Задача сводится к комбинаторике теории представлений редуктивных алгебраических групп. Задача эффективно решается для некоторых конкретных вложений и случая обратимых пучков, однако интересна и важна и в более широкой постановке. Часть задач в данной постановке допускает классификацию, также произведённую в работе.

В целом задача построения минимальных резольвент расслоений даёт возможность производить вычисления с этими расслоениями, аккумулируя комбинаторные сложности в вычислении резольвент и позволяя далее при вычислениях получать непосредственный результат, пропуская некоторые технические вычислительные сложности. Однако некоторые из этих сложностей становятся едва ли преодолимым препятствием для решения задачи построения таких резольвент в общем случае. Тем не менее, в существующем зазоре между уже решёнными задачами и задачами, где ответ скорее всего лишён возможности разумной формулировки ответа, находятся новые случаи решаемых задач, где удаётся получать новые результаты, а также остаётся поле для дальнейшего развития техники.

5.6. Динамика кубических полиномов с дисками Зигеля

Развивая и усиливая результаты, полученные в недавних публикациях [29, 30, 31], в готовящейся работе [32] авторы изучают динамику кубических полиномов с дисками Зигеля.

Любой кубический многочлен от одной комплексной переменной аффинно сопряжен многочлену вида

$$f_{\lambda,b}(z) = \lambda z + bz^2 + z^3.$$

Таким образом, изучать динамику многочленов $f_{\lambda,b}$ — все равно, что изучать динамику любых кубических многочленов. Множество всех многочленов $f_{\lambda,b}$ с фиксированным $\lambda \in \mathbb{C}$ обозначается через F_λ. Семейство многочленов F_λ — комплексная прямая.

Класс аффинной сопряженности комплексного многочлена f обозначается через $[f]$. *Главная гиперболическая компонента* PHD_3 по определению состоит из классов $[f]$ таких многочленов f, обе критические точки которых находятся в непосредственном бассейне притяжения одной и той же неподвижной притягивающей точки. Таким образом, PHD_3 является кубическим аналогом внутренности главной кардиоиды множества Мандельброта. Определим $\mathcal{P}_\lambda$ как множество многочленов $f \in F_\lambda$, таких, что $[f] \in \overline{\mathrm{PHD}}_3$.

Для всякого компактного подмножества $A \subset \mathbb{C}$ обозначим через $\mathrm{Th}(A)$ *топологическую оболочку* множества A, то есть объединение множества A со всеми ограниченными компонентами дополнения $\mathbb{C} \setminus A$. В [29] доказано, что при $|\lambda| \leqslant 1$ все многочлены одной и той же компоненты множества $\mathrm{Th}(\mathcal{P}_\lambda) \setminus \mathcal{P}_\lambda$ сопряжены на множестве Жюлиа. Более того, они либо все имеют диск Зигеля вокруг нуля (причем одна из критических точек через несколько итераций отображается внутрь этого диска Зигеля), либо имеют *странный тип* (см. ниже).

Напомним, что *диск Зигеля* для многочлена f — это максимальный по включению топологический открытый диск, который переходит в себя под действием f и на котором f сопряжен повороту на иррациональный угол.

Определение. Пусть W — ограниченная компонента множества $\mathrm{Th}(P_\lambda) \setminus P_\lambda$. Скажем, что компонента W имеет *странный* тип, если, для каждого многочлена $f \in W$, множество Жюлиа $J(f)$ многочлена f имеет положительную меру, и существует инвариантное поле направлений с носителем $J(f)$. Гипотетически, странных компонент не существует. Однако эта гипотеза не доказана даже для квадратичного множества Мандельброта.

Следующая теорема усиливает полученное в [29] описание множества $\mathrm{Th}(P_\lambda) \setminus P_\lambda$.

Теорема. *Пусть W — ограниченная компонента множества* $\mathrm{Th}(P_\lambda) \setminus P_\lambda$*, где* $|\lambda| \leqslant 1$. *Тогда W имеет* странный *тип.*

Таким образом, случай с дисками Зигеля исключается. Чтобы исключить этот случай, потребовалось отдельное изучение динамики кубических многочленов с дисками Зигеля.

Если компонент странного типа не бывает, то множество P_λ с $|\lambda| \leqslant 1$ имеет связное дополнение в F. В этом случае, как следует из [28], все многочлены из дополнения непосредственно ренормализуемы, ренормализация совпадает с некоторым квадратичным многочленом из заполненной главной кардиоиды.

Приведенный в теореме результат готовится к публикации.

5.7. Кристаллические когомологии dg-категорий

У когомологий де Рама гладкого многообразия над полем имеется некоммутативный аналог, – периодические циклические гомологии DG-категории, построенные Аланом Конном, Борисом Цыганом и Борисом Фейгиным, см. [38]. Для гладкого многобразия X над полем характеристики 0 или совершенным полем характеристики $p > \dim X$ периодические циклические гомологии DG-категории $D^b(Coh(X))$ канонически изоморфны

2-периодизации когомологий де Рама X:

$$HP_i(D^b(Coh(X))/k) = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} H_{dR}^{i+2n}(X/k) \qquad (5.7.1)$$

Также для гладких многообразий над совершенным полем характеристики $p > 0$ имеется теория кристаллических когомологий, построенная Александром Гротендиком и Пьером Бертло (см. [35],[33]) — многообразию X/k она сопоставляет объект $R\Gamma_{cris}(X/W(k))$ производной категории модулей над кольцом p-типических векторов Витта $D(W(k)\text{-}Mod)$, который, во-первых, после редукции по модулю p (то есть применения функтора $-\otimes^L_{W(k)} k$) канонически квази-изоморфен $R\Gamma(\Omega^\bullet_{X/k}, d_{dR})$ — комплексу, вычисляющему когомологии де Рама и, во-вторых, для любого подъема X до гладкой формальной схемы $\tilde{X}$ над Spf $W(k)$ квази-изоморфен ее комплексу $R\Gamma(\Omega^\bullet_{\tilde{X}/W(k)}, d_{dR})$. Аналогичная конструкция, конечно, существует на уровне конечных векторов Витта — положим $R\Gamma_{cris}(X/W_n(k)) = R\Gamma_{cris}(X/W(k))\otimes^L_{W(k)} W_n(k)$ и для любой гладкой схемы $\tilde{X}$ над $W_n(k)$ с редукцией, изоморфной, X имеется квази-изоморфизм $R\Gamma_{cris}(X/W_n(k)) \simeq R\Gamma(\Omega^\bullet_{\tilde{X}/W_n(k)}, d_{dR})$ (это свойство не следует формально из сказанного раньше, так как совсем не любая схема $\tilde{X}/W_n(k)$ поднимается до гладкой схемы на полных векторах Витта $W(k)$).

Вадим Вологодский и я определили аналогичную кристаллическим когомологиям теорию когомологий для DG-категорий. А именно, любой DG-категории C над совершенным полем k характеристики p можно функториально сопоставить объект производной категории $W(k)$-модулей, редукция которого по модулю p канонически квази-изоморфна преиодическому циклическому комплексу данной DG-категории и, для любого подъема C до DG-категории $\tilde{C}$ над $W(k)$, имеется квази-изоморфизм с периодическим циклическим комплексом подъема $CP(\tilde{C}/W(k))$. Из этого, в частности, следует что периодические циклические комплексы двух DG-категорий над $W(k)$ с эквивалентными редукциями по модулю p квази-изоморфны. Точно как с кристаллическими когмологиями многообразий, аналогичный инвариант получается и над конечными векторами Витта $W_n(k)$.

Конструкция основана на наличии связности Гаусса-Манина на периодических циклических гомологиях (построенной Эзрой Гетцлером в [34] и Дмитрием Калединым в [37]). А именно, благодаря параллельному переносу вдоль плоских сечений связности Гаусса-Манина имеется квазиизоморфиз DG-алгебр

$$CP(k/W(k)) \simeq CP(cone(W(k) \xrightarrow{0} W(k)/W(k))$$

(будучи моноидальным функтором, периодический циклический комплекс любой коммутативной алгебры канонически обладает структрурой DG-алгебры) так что имеется морфизм алгебр $CP(k/W(k)) \xrightarrow{\alpha} W(k)$. Для любой DG категории C/k периодический циклический комплекс $CP(C/W(k))$ (взятый именно над $W(k)$!) умножим тензорно на $W(k)$ при помощи морфизма α — получится комплекс $W(k)$-модулей, который, по формальным причинам, удовлетворяет описанным выше свойствам.

Эта конструкция чисто алгебраическая, но совпадает с конструкцией Ларса Хесселхолта топлогических периодических циклических гомологий TP, которая, в частности, сопоставляет DG-категории C периодические циклические гомологии над спектром сфер (конечно, эта формулировка не имеет буквального смысла — см. [36] для полного определения). Согласно результатам Баргава Батта, Мэттью Морроу и Петера Шольце, для гладкой алгебры A над k на $TP(A)$ имеется каноническая фильтрация τ_n, $n \in (-\infty, +\infty)$, все присоединенные градуированные факторы которой канонически квази-изоморфны кристаллическому комплексу $R\Gamma_{cris}(A/W(k))$ — это утверждение можно считать аналогом разложения (5.7.1). TP не зависит от базового поля, тогда как определенный выше алгебраический инварин, на первый взгляд, зависит, но для любого совершенного поля k характеристики p имеем $CP(C/W(k)) \simeq CP(C/W(\mathbb{F}_p))$, так что этот инвариант от базы тоже не зависит.

5.8. Примитивные формы, Гепнеровские особенности и двойственности в теориях поля

Понятие примитивных форм Саито было введено в [46] и с тех пор является важным объектом изучения теории особенностей, теории деформаций и математической физики.

В работе [44] автором был предложен способ построения примитивных форм Саито для некоторого класса особенностей, называющихся *Гепнеровскими особенностями*. Гепнеровская особенность $G_{k,n}$ — это фактор особенности $F_{k,n} = \sum_{i=1}^{n} x_i^k$ по действию группы S_n перестановками координат. Говоря точнее, автор в духе работы [41] строит для таких особенностей аналог абелева/неабелева соответствия, где абелева сторона это особенность $F_{k,n}$ с действием S_n, а неабелева — её фактор $G_{k,n}$.

Конструкция [44] имеет много связей с различными двойственностями в теориях поля. Наличие некоторых из таких связей стало понятно только после появления изначального препринта.

Во-первых, ещё в работе [43] были обнаружены первые примеры связи теории особенностей для $G_{k,n}$ и моделями топологической конформной теорией поля Казама-Сузуки $SU(n+1)_{k-n-1}/(SU(n)_{k-n}\times U(1))$. В классической работе [42] было показано, что примитивная форма для особенности z^{k+1} даёт деформацию потомками Виттена для модели Казама-Сузуки $SU(2)_k/U(1)$, также известной как минимальная модель типа A_k. Это наблюдение может быть обобщено до гипотезы [40], утверждающей аналогичное соответствие для примитивной формы Саито для $G_{k,n}$ и деформациями общей модели Казама-Сузуки $SU(n+1)_{k-n-1}/(SU(n)_{k-n}\times U(1))$. Конструкция [44] гипотетически даёт описание этой примитивной формы чисто в терминах теории особенностей. Кроме того, в таком случае, наличие абелева/неабелева соответствия для особенности может свидетельствовать о его существовании для соответствующих моделей теории поля. В данном случае, это должно быть соответствие между моделью $SU(n+1)_{k-n-1}/(SU(n)_{k-n}\times U(1))$ на неабелевой стороне и произведением n копий минимальной модели $SU(2)_k/U(1)$, на которой S_n действует перестановкой сомножителей, на абелевой стороне.

Во-вторых, важными частными случаями Гепнеровских особенностей являются некоторые унимодальные эллиптические особенности. Для таких особенностей и связанных с ними теорий поля известно, что имеют место LG/GW и LG/FJRW зеркальные симметрии с эллиптическими орбифолдами и эквивариантными эллиптическими особенностями соответственно. Эти зеркальные симметрии были изучены в работе [45]. В частности, этим двойственностям соответствуют выделенные примитивные формы на стороне LG. Для унимодальных Гепнеровских особенностей эти примитивные формы должны совпадать с формами полученными в [44]. Это даёт ещё один способ описания зеркальной симметрии в данном случае, а также указывает на связь зеркально симметричных теорий типа GW или FJRW с теориями Казама-Сузуки и на существование абелева/неабелева соответствия для них. Осуществляют ли примитивные формы [44] какую-либо зеркальную симметрию в случае непростых, неунимодальных особенностей, остаётся интересным вопросом.

Наконец, в-третьих, можно заметить, что основная конструкция [44] при замене x^k на особенность $y_1 + \ldots + y_k + \frac{1}{y_1 \cdots y_k}$ зеркально двойственную проективному пространству $\mathbb{P}^k$ вместе с результатом работы [41] даёт конструкцию LG/GW зеркальной симметрии для многообразия Грассмана $Gr(n, k)$ альтернативную известным ранее.

Работа [44] дополненная вышеуказанными соображениями, находится на рассмотрении в «Moscow Mathematical Journal». Работа во многих из перечисленных направлений продолжается.

5.9. Геометрическая конструкция кристаллов Кашивары через обобщённые срезы в аффинном Грассманниане

Пусть G — связная присоединенная редуктивная линейная алгебраическая группа над комплексными числами $\mathbb{C}$. Пусть $\check{G}$ — двойственная по Ленглендсу группа. Пусть $\mathrm{Rep}(\check{G})$ — категория конечномерных представлений группы $\check{G}$. Пусть $\check{\mathfrak{g}}$ — алгебра Ли группы $\check{G}$, $U(\check{\mathfrak{g}})$ — универсальная обертывающая алгебры Ли $\check{\mathfrak{g}}$, $U_q(\check{\mathfrak{g}})$ — квантовая универсальная обертывающая алгебры Ли $\check{\mathfrak{g}}$. Заметим, что $U(\check{\mathfrak{g}})$ есть предел $U_q(\check{\mathfrak{g}})$ при q, стремящемся к 1. Пусть $\mathrm{Rep}(U_q(\check{\mathfrak{g}}))$ — категория конечномерных представлений алгебры $U_q(\check{\mathfrak{g}})$. Пусть $T \subset G$ — максимальный тор в группе G. Пусть Λ_G^+ — полугруппа доминантных кохарактеров группы G. Любому $\lambda \in \Lambda_G^+$ мы можем сопоставить неприводимый конечномерный модуль $V^\lambda \in \mathrm{Rep}(\check{G})$ старшего веса λ. Также любому $\lambda \in \Lambda_G^+$ мы можем сопоставить неприводимый конечномерный $U_q(\check{\mathfrak{g}})$-модуль старшего веса λ, который мы будем обозначать V_q^λ. Следует заметить, что V^λ есть предел V_q^λ при q, стремящемся к 1. В работе [52] Кашивара построил в V_q^λ некоторый выделенный "кристальный" базис, являющийся инвариантным относительно действий операторов e_i, f_i по модулю q. Тем самым, каждому доминантному кохарактеру $\lambda \in \Lambda_G^+$ мы можем сопоставить некоторое множество (будем обозначать его $\mathbf{B}(\lambda)$), обладающее структурой кристалла Кашивары старшего веса λ. Также для любых двух доминантных кохарактеров $\lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda_G^+$ имеется естественная проекция на старшую компоненту $\mathbf{p}_{\lambda_1,\lambda_2} : \mathbf{B}(\lambda_1) \otimes \mathbf{B}(\lambda_2) \to \mathbf{B}(\lambda_1 + \lambda_2)$. В работе [50] Джозеф ввел понятие замкнутого семейства кристаллов старшего веса. Напомним его определение: пусть для каждого $\lambda \in \Lambda_G^+$ нам дан кристалл $\mathbf{B}^{\check{G}}(\lambda)$ старшего веса λ. Тогда семейство кристаллов $\{\mathbf{B}^{\check{G}}(\lambda)\}$ называется замкнутым семейством кристаллов, если для любых λ_1, λ_2 существует морфизм проекции $\mathbf{p}^{\check G}_{\lambda_1,\lambda_2} : \mathbf{B}^{\check G}(\lambda_1) \otimes \mathbf{B}^{\check G}(\lambda_2) \to \mathbf{B}(\lambda_1 + \lambda_2)$. Джозеф доказал, что любое замкнутое семейство кристаллов изоморфно семейству $\{\mathbf{B}(\lambda)\}$.

Тем самым, мы можем сопоставить алгебраической группе G два различных теоретико-представленческих объекта: (моноидальную) категорию конечномерных представлений $\mathrm{Rep}(\check G)$ ($q = 1$) и замкнутое семейство кристаллов старшего веса $\{\mathrm{B}(\lambda)\}$ ($q = 0$). Также предположим, что $\check L \subset \check G$ - подгруппа Леви в $\check G$. Пусть $\mathrm{Res}^{\check G}_{\check L} : \mathrm{Rep}(\check G) \to \mathrm{Rep}(\check G)$ — функтор ограничения. Оказывается, что (моноидальная) категория $\mathrm{Rep}(\check G)$, замкнутое семейство кристаллов $\{\mathbf{B}(\lambda)\}$ и функтор $\mathrm{Res}^{\check G}_{\check L}$ могут быть построены геометрически (при помощи геометрии аффинного Грассманниана группы G).

А именно, пусть $K := \mathbb{C}((t))$, $O := \mathbb{C}[[t]]$, $\mathrm{Gr}_G := G(K)/G(O)$ — аффинный Грассманниан группы G. Пусть $\mathrm{Perv}_{G(O)}(\mathrm{Gr}_G)$ — абелева категория $G(O)$-эквивариантных извращенных пучков на Gr_G (где $G(O)$ действует на Gr_G умножением слева). В работе [54] показано, что категория $\mathrm{Perv}_{G(O)}(\mathrm{Gr}_G)$ может быть наделена моноидальной структурой и как моноидальная категория изоморфна категории $\mathrm{Rep}(\check G)$ (искомый изоморфизм называют геометрическим изоморфизмом Сатаке). В работе [47] показано, что относительно этого отождествления функтор ограничения $\mathrm{Rep}(\check G)$ совпадает с гиперболическим ограничением с Gr_G на Gr_L. Опишем теперь семейство $\{\mathbf{B}(\lambda)\}$ геометрически (следуя работе [51]).

Зафиксируем доминантный кохарактер $\lambda \in \Lambda^+_G$ и произвольный кохарактер $\mu \in \Lambda_G$. Пусть V^λ_μ — весовое пространство $\check T$-веса μ представления V^λ. Опишем его, используя геометрический изоморфзм Сатаке. Для этого рассмотрим действие $\mathbb{C}^*$ на Gr_G при помощи регулярного доминантного кохарактера 2ρ. Легко видеть, что $(\mathrm{Gr}_G)^{\mathbb{C}^*} = (\mathrm{Gr}_G)^T = \mathrm{Gr}_T = \{t^\mu | \mu \in \Lambda_G\}$. Имеет место следующее разложение: $\mathrm{Gr}_G = \bigsqcup_{\mu\in\Lambda_G} U_-(K)t^\mu$ (тем самым, $T_\mu := U_-(K)t^\mu$ суть репеллент к точке t^μ относительно описанного выше действия $\mathbb{C}^*$). Оказывается, что $H^{top}_c(\overline{\mathrm{Gr}}^\lambda \cap T_{-w_0(\mu)}, \mathbb{C}_{\overline{\mathrm{Gr}}^\lambda \cap T_{-w_0(\mu)}}) \simeq V^\lambda_\mu$. Таким образом, множество $\mathbf{B}^G(\lambda) := \bigsqcup_{\mu\in\Lambda_G} \mathrm{Irr}(\overline{\mathrm{Gr}}^\lambda \cap T_\mu)$ есть базис в представлении V^λ. В работе [51] авторы строят на множестве $\mathbf{B}^G(\lambda)$ структуру кристалла старшего веса λ. Затем они доказывают, что семейство $\{\mathbf{B}^G(\lambda)\}$ есть замкнутое семейство кристаллов.

Предположим теперь, что μ — доминантный кохарактер группы G.

В работе [53] авторы строят некоторое подмногообразие (обозначаемое $\overline{W}^{\lambda}_{\mu}$) внутри $\overline{\mathrm{Gr}}^{\lambda}$, являющееся трансверсальным срезом к Gr^{μ} внутри $\overline{\mathrm{Gr}}^{\lambda}$ в точке t^{μ}. Многообразие $\overline{W}^{\lambda}_{\mu}$ является $\mathbb{C}^*$-инвариантным относительно описанного выше действия $\mathbb{C}^*$ (при помощи $2\rho_G$). Пусть $\overline{R}^{\lambda}_{\mu}$ — реппелент внутри $\overline{W}^{\lambda}_{\mu}$ к точке t^{μ} относительно $\mathbb{C}^*$. Мы показали, что естественное вложение $\overline{R}^{\lambda}_{\mu} \hookrightarrow \mathrm{Gr}_G$ индуциует изоморфизм $\overline{R}^{\lambda}_{\mu} \xrightarrow{\sim} \overline{\mathrm{Gr}}^{\lambda} \cap T_{\mu}$. Тем самым, при доминантном μ многообразия $\overline{\mathrm{Gr}}^{\lambda} \cap T_{\mu}$ могут быть восстановлены по трансверсальным срезам $\overline{W}^{\lambda}_{\mu}$. В работе [49] авторы для произвольного $\mu \in \Lambda_G$ определяют обобщенный трансверсальный срез $\overline{W}^{\lambda}_{\mu}$ (он совпадает с обычным трансверсальным срезом в случае, когда μ — доминантный ковес). Обобщенные срезы все еще обладают действием $\mathbb{C}^*$, и мы можем определить $\overline{R}^{\lambda}_{\mu}$ как соответствующие репелленты. Из определения имеется естественный морфизм $p : \overline{W}^{\lambda}_{\mu} \to \overline{\mathrm{Gr}}^{\lambda}$. Мы показали, что морфизм p индуцирует изоморфизм между $\overline{R}^{\lambda}_{\mu}$ и $\overline{\mathrm{Gr}}^{\lambda} \cap T_{\mu}$ (уже для произвольного μ). Тем самым, из [51] следует, что на множестве $\mathbf{B}^{G}(\lambda) := \bigsqcup_{\mu\in\Lambda_G} \mathrm{Irr}(\overline{R}^{\lambda}_{\mu})$ имеется структура кристалла Кашивары старшего веса λ. Мы явно описываем эту структуру, используя только геометрию обобщенных трансверсальных срезов $\overline{W}^{\lambda}_{\mu}$. Затем мы строим морфизм проекции $\mathbf{p}^{G}_{\lambda_1,\lambda_2} : \mathbf{B}^{G}(\lambda_1) \otimes \mathbf{B}^{G}(\lambda_2) \to \mathbf{B}^{G}(\lambda_1 + \lambda_2)$, как морфизм, индуцированный естественным морфизмом "умножения" $k^{\lambda_1,\lambda_2}_{\mu_1,\mu_2} : \overline{W}^{\lambda_1}_{\mu_2} \times \overline{W}^{\lambda_2}_{\mu_2} \to \overline{W}^{\lambda_1+\lambda_2}_{\mu_1+\mu_2}$ между обобщенными срезами. Тем самым, мы строим замкнутое семейство кристаллов $\mathbf{B}(\lambda)$, используя только геометрию обобщенных срезов (не пользуясь всем аффинным Грассманианом группы G). Также мы описываем функтор Res^{G}_{L} как гиперболическое ограничение с обобощенного среза группы G на обобщенный срез группы L.

Основное достоинство нашей конструкции состоит в следующем.

Пускай теперь группа G — аффинная группа Каца–Муди. В этом случае мы все еще можем интересоваться геометрической конструкцией замкнутого семейства кристаллов старшего веса для G. Проблема в том, что на нынешний момент нет никакой конструкции аффинного Грассманиана группы G. Тем самым, нет возможности определить многообразия $\overline{\mathrm{Gr}}^{\lambda} \cap T_{\mu}$ при помощи аффинного Грассманиана. С другой стороны, в работе [48] авторы строят многообразия, которые должны быть трансверсальными срезами в (несуществующем) Gr. Таким образом, наша конструкция, восстанавливающая замкнутое семейство кристаллов старшего веса по срезам $\overline{W}^{\lambda}_{\mu}$, гипотетически может быть применена в этой (аффинной) ситуации.

5.10. Многочлены Костки–Шоджи для циклических колчанов

Пусть G — редуктивная комплексная алгебраическая группаВ работе [55] показывается, что многочлены Костки задают градуированные кратности в глобальных сечениях линейного расслоения на кокасательном пространстве к пространству флагов для двойственной по Ленглендсу группы $G^{\vee}$. Авторы работы [56] замечают,что классические многочлены Костки–Шоджи ([59]) схожим образом задают градуированные кратности в глобальных сечениях линейного расслоения на тотальном пространстве некоторого векторного расслоения на квадрате многообразия флагов для GL_N. Оказывается,что это векторное расслоение является итерированной диаграммой свёртки для циклического колчана $\tilde{A}_1$ ([58]). При этом зануление высших когомологий линейного расслоения следует из Фробениус-расщепимости диаграм свёртки,что в свою очередь следует из существование разрешения типа Ботта–Самельсона–Демазюра–Хансена в типе A ([57]).

Действие мультипликативной группы послойными растяжениями на Люстиговской диаграмме свёртки продолжается до действия $\mathbb{G}_m\times\mathbb{G}_m$, из которого происходит вариант многочленов $\bar{K}_{\boldsymbol{\lambda\mu}}(t_1,t_2)$ Костки–Шоджи, зависящий от двух переменных, обладающий свойством $\bar{K}_{\boldsymbol{\lambda\mu}}(1,t) = \bar{K}_{\boldsymbol{\lambda\mu}}(t)$ (обычный многочлен Костки–Шоджи). Заметим, что реализации многочленов Костки–Шоджи как многочленов Пуанкаре слоёв пучков Горески–Макферсона на мираболическом аффинном Грассманниане не позволяет получить их обобщение,зависящее от двух переменных,так как вышеупомянутые слои являются чистыми Тэйтовыми, согласно работам Ачара, Хендерсона и Травкина.

В работе [56] исследуется обобщение этих утверждений, дающее связь между версией многочленов Костки–Шоджи ([59]), зависящей от r переменных $\bar{K}_{\boldsymbol{\lambda\mu}}(t_1,\dots,t_r)$ (где $\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\mu}$ — это r-мультиразбиения) и (мульти)градуированными кратностями в глобальных сечениях расслоений на итерированной диаграмме свёртки циклического колчана $\tilde{A}_{r-1}$. Для доказательства отсутствия высших когомологий применяется метод Д. И. Паршина, восходящий к Дж.Кемпфу. Заметим, что в частности из этого утверждения следует неотрицательность коэффициентов многочленов $K^-_{\lambda\mu}(t_1, \ldots, t)$. Совсем недавно Т.Шоджи построил чисто комбинаторную интерпретацию этих многочленов, а Д.Орр и М.Шимозоно обобщили эту теорию на произвольный колчан. Наконец, доказывается, что Люстиговская диаграмма свёртки для циклического колчана Фробениус-расщепима. Интересно было бы выяснить, верна ли Фробениус-расщепимость для диаграмм свёртки произвольных колчанов.

Литература

[1] E. Feigin, I. Makeodnskyi, S. Kato *Representation theoretic realization of non-symmetric Macdonald polynomials at infinity*, arXiv:1703.04108.

[2] E. Feigin, I. Makedonskyi, *Semi-infinite Pl"ucker relations and Weyl modules* arXiv:1709.05674.

[3] E. Feigin, I. Makedonskyi, *Generalized Weyl modules, alcove paths and Macdonald polynomials*, Selecta Mathematica, 23, no. 4 (2017), pp. 2863–2897.

[4] K.Naoi, *Weyl modules, Demazure modules and finite crystals for non-simply laced type*, Adv. Math. 229 (2012), no. 2, 875–934.

[5] D. Orr and M. Shimozono. Specializations of nonsymmetric Macdonald-Koornwinder polynomials. arXiv:1310.0279

[6] Y. Sanderson, *On the Connection Between Macdonald Polynomials and Demazure Characters*, Journal of Algebraic Combinatorics, 11 (2000), 269–275.

[7] I. Arzhantsev, *Flag varieties as equivariant compactifications of* $\mathbb{G}_a^n$, Proceedings of the American Mathematical Society, vol. 139 (2011), no. 3, pp. 783–786.

[8] I. Cherednik, E.Feigin, *Extremal part of the PBW-filtration and E-polynomials*, Advances in Mathematics (2015) vol. 282, pp. 220-264.

[9] G. Cerulli Irelli, E. Feigin, M. Reineke, *Quiver Grassmannians and degenerate flag varieties*, Algebra & Number Theory, 6-1 (2012), 165–194.

[10] G. Cerulli Irelli, E. Feigin, M. Reineke, *Homological approach to the Hernandez-Leclerc construction and quiver varieties*, Representation Theory 2014, no. 18, pp.1–14..

[11] G. Cerulli Irelli, E. Feigin, M. Reineke, *Desingularization of quiver Grassmannians for Dynkin quivers*, Advances in Mathematics (2013), no. 245, pp. 182–207.

[12] G. Cerulli Irelli, E. Feigin, M. Reineke, *Degenerate flag varieties: moment graphs and Schröder numbers*, Journal of Algebraic Combinatorics, Volume 38, Issue 1 (2013), pp. 159–189.

[13] G. Cerulli Irelli, E. Feigin, M. Reineke, *Schubert Quiver Grassmannians*, Algebras and Representation Theory (2017), vol. 20 (1), pp. 147–161.

[14] V. Chari, B. Ion, *BGG reciprocity for current algebras*, Compositio Mathematica 151 (2015), pp. 1265–1287.

[15] E. Feigin, G_a^M *degeneration of flag varieties*, Selecta Mathematica: Volume 18, Issue 3 (2012), pp. 513–537.

[16] E.Feigin, I.Makedonskyi, *Nonsymmetric Macdonald polynomials, Demazure modules and PBW filtration*, Journal of Combinatorial Theory, Series A. 2015. P. 60–84.

[17] Е.Б.Фейгин, Е.А.Македонский, *Обобщенные модули Вейля для скрученных алгебр токов*, Теоретическая и математическая физика (2017), Т. 192, номер 2, стр. 284–306.

[18] G.Fourier, P.Littelmann, *Tensor product structure of affine Demazure modules and limit constructions*, Nagoya Math. Journal 182 (2006), 171–198.

[19] G.Fourier, P.Littelmann, *Weyl modules, Demazure modules, KR-modules, crystals, fusion products and limit constructions*, Advances in Mathematics 211 (2007), no. 2, 566–593.

[20] B. Ion, *Nonsymmetric Macdonald polynomials and Demazure characters*, Duke Mathematical Journal 116:2 (2003), 299–318.

[21] D.Orr, M.Shimozono, *Specializations of nonsymmetric Macdonald-Koornwinder polynomials*, J. Algebr. Comb. (2017), https://doi.org/10.1007/s10801-017-0770-6.

[22] Y. Sanderson, *On the Connection Between Macdonald Polynomials and Demazure Characters*, J. of Algebraic Combinatorics, 11 (2000), 269–275.

[K16I] V. Kiritchenko, *Divided difference operators on convex polytopes*, Advanced Studies in Pure Mathematics, Mathematical Society of Japan, 2016, 161–185.

[K16II] V. Kiritchenko, *Geometric mitosis*, Math. Res. Lett., **23** (2016), no. 4, 1069–1096.

[K17] V. Kiritchenko, *Newton–Okounkov polytopes of flag varieties*, Transform. Groups, **22** (2017), no. 2, 387–402.

[L] P. Littelmann, *Cones, crystals and patterns*, Transform. Groups, **3** (1998), pp. 145–179.

[P] M. Padalko, *Schubert calculus and symplectic Gelfand-Zetlin polytopes*, Master thesis, National Research University Higher School of Economics, 2017.

[23] V. A. Kirichenko, E. Yu. Smirnov, and V. A. Timorin, *Schubert calculus and Gelfand-Tsetlin polytopes*, Uspekhi Mat. Nauk **67** (2012), no. 4(406), 89–128.

[24] Sergey Fomin and Anatol N. Kirillov, *The Yang-Baxter equation, symmetric functions, and Schubert polynomials*, Proceedings of the 5th Conference on Formal Power Series and Algebraic Combinatorics (Florence, 1993), vol. 153, 1996, pp. 123–143.

[25] Bertram Kostant and Shrawan Kumar, *T-equivariant K-theory of generalized flag varieties*, J. Differential Geom. **32** (1990), no. 2, 549–603.

[26] И. В. Нетай ”Сизигии квадратичного вложения Веронезе“, Матем. сб., 2017 **208**: 2, 31–54

[27] Syzygies of Quadratic Veronese Embedding, I. V. Netay, https://arxiv.org/abs/1610.04558

[28] A. Blokh, L. Oversteegen, R. Ptacek, V. Timorin, *Quadratic-like dynamics of cubic polynomials*, Comm. Math. Phys. **341** (2016), 733–749.

[29] A. Blokh, L. Oversteegen, R. Ptacek, V. Timorin, *Complementary components to the cubic principal domain*, preprint arXiv:1411.2535 (2014), to appear in Proc. Amer. Math. Soc.

[30] A. Blokh, L. Oversteegen, R. Ptacek, V. Timorin, *Combinatorial models for spaces of cubic polynomials*. Comptes Rendus Mathematique. 2017. Vol. **355**. No. 5. P. 590–595.

[31] A. Blokh, L. Oversteegen, V. Timorin, *Non-degenerate locally connected models for plane continua and Julia sets*. Discrete and Continuous Dynamical Systems. 2017. Vol. **37**. No. 11. P. 5781–5795.

[32] A. Blokh, A. Ch´eritat A., L. Oversteegen, V. Timorin, *Siegel capture domains complementary to the cubioid do not exist*, in preparation.

[33] P. Berthelot; A. Ogus, *Notes on crystalline cohomology*. Princeton University Press, Princeton, N.J.; University of Tokyo Press, Tokyo, 1978. vi+243 pp. ISBN: 0-691-08218-9

[34] E. Getzler, *Cartan homotopy formulas and the Gauss-Manin connection in cyclic homology*. Quantum deformations of algebras and their representations (Ramat-Gan, 1991/1992; Rehovot, 1991/1992), 65-78, Israel Math. Conf. Proc., 7, Bar-Ilan Univ., Ramat Gan, 1993.

[35] A. Grothendieck. *Crystals and the de Rham cohomology of schemes*. Notes by I. Coates and O. Jussila. Adv. Stud. Pure Math., 3, Dix exposr la cohomologie des sch´emas, 306-358, North-Holland, Amsterdam, 1968.

[36] L. Hesselholt, *Topological Hochschild homology and the Hasse-Weil zeta function*, доступно в электронном виде https://arxiv.org/abs/1602.01980

[37] D. Kaledin, *Cyclic homology with coefficients.* Algebra, arithmetic, and geometry: in honor of Yu. I. Manin. Vol. II, 23–47, Progr. Math., 270, Birkhauser Boston, Inc., Boston, MA, 2009.

[38] J. Loday, *Cyclic homology,* Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences], 301. Springer-Verlag, Berlin, 1992.

[39] A. Petrov, D. Vaintrob, V. Vologodsky; *The Gauss-Manin connection on the periodic cyclic homology*, доступно в электронном виде https://arxiv.org/abs/1711.02802

[40] A. Belavin, D. Gepner, Y. Kononov *Flat coordinates for Saito Frobenius manifolds and String theory*, Pis'ma v Zh. Eksper. Teoret. Fiz., 103:3 (2016), 168-172.

[41] I. Ciocan-Fontanine, B. Kim, C. Sabbah *The abelian/nonabelian correspondence and Frobenius manifolds*, Invent. math. (2008) 171: 301.

[42] R. Dijkgraaf, E. Verlinde, H. Verlinde *Topological strings in* $d < 1$, Nuclear Physics B 352 (1), 59-86, 1991.

[43] D. Gepner *Fusion rings and geometry*, Commun.Math. Phys. (1991) 141: 381.

[44] A. Ionov *Primitive forms for Gepner singularities* , arXiv: submit/1720869.

[45] T. Milanov, Y. Shen, "Global mirror symmetry for invertible simple elliptic singularities", preprint arXiv:1210.6862 (2012).

[46] K. Saito *Period mapping associated to a primitive form*, Publ. R.I.M.S. 19 (1983), 1231-1261.

[47] A. Beilinson and V. Drinfeld, *Quantization of Hitchin's Hamiltonians and Hecke eigen-sheaves*, Preprint available at http://math.uchicago.edu/~mitya/langlands/hitchin/BD-hitchin.

[48] A. Braverman, M. Finkelberg, *Pursuing the double affine Grassmannian I: Transversal slices via instantons on* A_k*-singularities*, Duke Math. J. **152** (2010), no. 2, 175–206.

[49] A. Braverman, M. Finkelberg and H. Nakajima, *Towards a mathematical definition of Coulomb branches of 3-dimensional* $N = 4$ *gauge theories, II*, arXiv:1601.03586.

[50] A. Joseph, *Quantum groups and their primitive ideals*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (3) [Results in Mathematics and Related Areas (3)], **29**. Springer-Verlag, Berlin, 1995. x+383 pp.

[51] A. Braverman and D. Gaitsgory, *Crystals via the affine Grassmannian*, Duke Math. J. **107** (2001), no. 3, 561–75.

[52] M. Kashiwara, *On crystal bases*. CMS Conf. Proc. **16**, Amer. Math. Soc., Providence, RI (1995), 155-197.

[53] M. Kashiwara, T. Tanisaki, *Kazhdan-Lusztig conjecture for affine Lie algebras with negative level*, Duke Math. J. **77** (1995), 21–62.

[54] I. Mirkovi´c and K. Vilonen, *Geometric Langlands duality and representations of algebraic groups over commutative rings*, Ann. of Math. (2) **166** (2007), no. 1, 95–143.

[55] R. Brylinski *Limits of weight spaces, Lusztig's q-analogs, and fiberings of adjoint orbits*, J. Amer. Math. Soc. **2** (1989), 517–533.

[56] M. Finkelberg, A. Ionov *Kostka-Shoji polynomials and Lusztig's convolution diagram*, Bulletin of the Institute of Mathematics Academia Sinica **12**, no. 4 (2017), 98–110.

[57] G. Lusztig *Canonical bases arising from quantized enveloping algebras*, J. Amer. Math. Soc. **3** (1990), 447–498.

[58] G. Lusztig, *Quivers, perverse sheaves, and quantized enveloping algebras*, J. Amer. Math. Soc. **4** (1991), 365–421.

[59] T. Shoji, *Green functions attached to limit symbols*, Adv. Stud. Pure Math. **40** (2004), 443–467.

6. Классическая геометрия

6.1. Исследование факторов рациональных поверхностей над незамкнутыми полями

Мы продолжаем изучать вопрос, в каких случаях фактор k-рациональной поверхности X над алгебраически незамкнутым полем k характеристики 0 по действию конечной группы G является рациональным многообразием, а в каких нет.

При помощи программы минимальных моделей этот вопрос сводится к исследованию факторов G-минимальных k-рациональных поверхностей. Всякая такая поверхность либо обладает структурой G-эквивариантного расслоения на коники, либо является поверхностью дель Пеццо.

Ранее были исследованы факторы расслоений на коники (см. [T16]) и факторы поверхностей дель Пеццо степени 3 и выше (см. [T13], [T16a]). Для поверхностей дель Пеццо были получены следующие результаты.

Теорема 6.1 ([T13, Theorem 1.1]). *Пусть* k *— поле характеристики* 0, X *— поверхность дель Пеццо над* k *такая, что* $X(\mathrm{k}) \neq \emptyset$, *а* G *— конечная группа автоморфизмов* X. *Если* $K_X^2 > 5$, *то факторповерхность* X/G *рациональна. Если* $K_X^2 = 4$, *порядок* G *равен* 1, 2, *или* 4, *и все нетривиальные элементы* G *не имеют неподвижных кривых, то фактор* X/G *может быть нерациональным. Для всех других случаев* G *и* $K_X^2 = 4$ *фактор* X/G *всегда рационален.*

Следствие 6.1 ([T13, Corollary 1.2]). *Пусть* k *— поле характеристики* 0, X *— гладкая рациональная поверхность над* k *такая, что* $X(\mathrm{k}) \neq \emptyset$, *а* G *— конечная группа автоморфизмов* X. *Если* $K_X^2 > 5$, *то фактор* X/G *рационален.*

Теорема 6.2 ([T16a, Theorem 1.3]). *Пусть* k *— поле характеристики* 0, X *— поверхность дель Пеццо над* k *степени* 3 *такая, что* $X(\mathrm{k}) \neq \emptyset$, *а* G *— подгруппа в* $\mathrm{Aut}_{\mathrm{k}}(X)$. *Предположим, что* G *не тривиальная и* G *не является группой порядка* 3, *не имеющей кривых, состоящих из неподвижных точек. Тогда факторповерхность* X/G *является рациональной.*

Кроме того, для всех нетривиальных групп, действующих на поверхностях дель Пеццо степени 4 и 3, для которых фактор может быть нерациональным над k, явно построены примеры нерациональных факторов G-минимальных k-рациональных поверхностей дель Пеццо.

В этом году основным объектом исследований были факторы поверхностей дель Пеццо степени 2. Результаты этих исследований были изложены в препринте [T17].

Для поверхностей дель Пеццо степени 3 и 4 факторы оказывались нерациональными только в случаях, когда каждый нетривиальный элемент группы имел только изолированные неподвижные точки.Однако для поверхности дель Пеццо степени 2 это не так: имеется инволюция, обладающая кривой, состоящей из неподвижных точек, для которой фактор может быть нерациональным над k. Этот фактор бирационально эквивариантен минимальной поверхности, допускающей структуру расслоения на коники специального типа с четырьмя вырожденными слоями. Эта поверхность называется *поверхностью Исковских*. Также эта поверхность бирационально эквивалентна фактору прямого произведения $\mathbb{P}^1_k$ на эллиптическую кривую. За счёт этого такая поверхность может «бирационально накрывать» саму себя (эти преобразования соответствуют изогениям эллиптической кривой), то есть у неё имеется большой набор нерациональных факторов.Поэтому для поверхностей дель Пеццо степени 2 получается большое количество групп автоморфизмов, фактор по которым может быть нерациональным.

Теорема 6.3 ([T17, Theorem 1.6]). *Пусть* k *— поле характеристики* 0*, X — поверхность дель Пеццо над* k *степени* 2*, а G — подгруппа в* $\mathrm{Aut}_k(X)$*, такая что на факторе X/G есть гладкая* k*-точка. Тогда фактор X/G является* k*-рациональной для любой группы G, кроме следующих:*

- *тривиальная группа;*
- *группа порядка* 2*;*
- *группа порядка* 4*, содержащая уникальную инволюцию, имеющую кривую, состоящую из неподвижных точек;*
- *неабелева группа порядка* 8*, содержащая уникальную инволюцию, имеющую кривую, состоящую из неподвижных точек;*
- *группа порядка* 3*, имеющая только изолированные неподвижные точки;*
- *симметрическая группа степени* 3*, порождённая инволюциями, имеющими только изолированные неподвижные точки.*

Для каждой из перечисленных групп существуют примеры нерациональных над k *факторов X/G для подходящего поля* k.

Кроме того, для всех перечисленных групп кроме тривиальной и группы, порождённой инволюцией, имеющей только изолированные неподвижные точки, построены примеры нерациональных факторов G-минимальных k-рациональных поверхностей (см. [T17, Section 6]). Для группы, порождённой инволюцией, имеющей только изолированные неподвижные точки, показано, что в случае её минимального действия поверхность не может быть k-рациональной, а её фактор всегда нерационален над k (см. [T17, Remark 4.8 и Lemma 5.1]). Также аналогичный результат был получен для инволюции, действующей на поверхности дель Пеццо степени 1 и отличной от инволюции Бертини (см. [T17, Remark 5.2]).

Дальнейшим целью является исследование факторов поверхностей дель Пеццо степени 1, которое завершит работу над исследованием факторов рациональных поверхностей над незамкнутыми полями.

6.2. Двойная проекция для многообразий Фано–Мукаи

Гладкое проективное многообразие X называется многообразием Фано, если его антиканоническое расслоение ω_X^* обильно. Индексом i многообразия Фано называется, наибольшее натуральное число делящее канонический класс в группе Пикара. Коиндексом многообразия Фано называется число $n - i + 1$, где n — размерность, а i — индекс. Далее речь будет идти о многообразия Фано коиндекса 3 с одномерной решёткой Пикара.

Естественным инвариантом для них является род g, определяемый по формуле $H^n = 2g - 2$. Род может принимать значения от 2 до 12, за исключением числа 11. Многообразия Фано коиндекса 3 в произвольной размерности были классифицированы С. Мукаи [Muk89]. Если род многообразия Фано больше трёх, то линейная система $|H|$ даёт вложение в проективное пространство. В работе [Sho79] В. В. Шокуров доказал, что относительно этого вложения трёхмерные многообразия содержат некоторую прямую Z. Используя этот результат, В. А. Исковских построил рациональное отображение [Isk90], задаваемое линейной системой $|H - 2Z|$ гиперплоских сечений особых в некоторой прямой для трёхмерных многообразий Фано рода не меньше 7.

Стажер лаборатории Ренат Абугалиев изучал аналог этого рационального отображения для четырёхмерных многообразий Фано индекса 2. Более конкретно, существует следующая диаграмма морфизмов.

$$\begin{tikzcd} X^0 \arrow[r, "\varphi^+"] \arrow[d, "\pi"] & X^+ \arrow[d, "\xi"] \\ X \arrow[r] & Y \end{tikzcd} \tag{6.2.1}$$

где $\pi : X^0 \to X$ – раздутие X с центром в прямой Z, φ^+ – флоп, а Y — замыкание образа при рациональном морфизме заданном линейной системой $|H - 2Z|$. Доказано, что X^+ является гладким. Ниже описывается морфизм ξ и многообразие Y в зависимости от рода X.

- $g = 7$, $Y = \mathbb{P}^1$ и ξ — расслоение на трёхмерные многообразия дель Пеццо степени 5.
- $g = 8$, $Y = \mathbb{P}^2$ и ξ — расслоение на двумерные квадрики.
- $g = 9$, $Y = \mathbb{P}^3$ и ξ — $\mathbb{P}^1$-расслоение.
- $g = 10$, Y — гладкая трёхмерная квадрика и ξ — $\mathbb{P}^1$-расслоение.

6.3. K-стабильность

В совместной работе [ChMG17] Чельцова и Хесуса Мартинез-Гарсии изучалась K-стабильность поляризованных гладких поверхностей дель Пеццо. Данная задача мотивирована следующей гипотезой:

Гипотеза 6.2 (Яо–Тиан–Дональдсон)**.** *Пусть X — гладкое комплексное многообразие, а H — обильный дивизор на нем. Тогда на многообразии X существует метрика постоянной скалярной кривизны в классе $c_1(H)$ если и только если пара (X, H) является K-стабильной.*

В торическом случае эта гипотеза была доказана Дональдсоном. Более того, Дональдсон также показал необходимость K-стабильности для существование метрик постоянной скалярной кривизны. Для многообразий Фано с естественной антиканонической поляризацией, эта гипотеза была недавно доказана Ченом, Дональдсоном и Саном.

Пусть S — неособая поверхность дель Пеццо, а L — обильный $\mathbb{Q}$-дивизор на ней. В этом случае S торическая поверхность если $K_S^2 > 6$.

Чельцов и Мартинез-Гарсия получили несколько простых условия на дивизор L которые гарантируют что пара (S, L) является K-нестабильной.

Чтобы описать эти условия, удобно разделить обильные $\mathbb{Q}$-дивизоры на поверхности S на три типа: дивизоры $\mathbb{P}^2$-типа, дивизоры $\mathbb{F}_1$-типа, и дивизоры $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$-типа. А именно, с точностью до умножения на скаляр, выполнена рациональная эквивалентность:

$$L \sim_{\mathbb{Q}} -K_S + bB + \sum_{i=1}^{r} a_i F_i,$$

где $F_1, \ldots, F_r$ — непересекающиеся (-1)-кривые, B — неособая гладкая рациональная кривая такая что $B^2 = 0$, а $b, a_1, \ldots, a_r$ — неотрицательные рациональные числа такие что $1 \geqslant a_r \geqslant \cdots \geqslant a_1 \geqslant 0$. Если $b \neq 0$, то кривая B также не пересекает ни одну из кривых $F_1, \ldots, F_r$.

Пусть $\varphi : S \to \widehat{S}$ стягивания кривых $F_1, \ldots, F_r$. Тогда мы скажем, что L является дивизором $\mathbb{P}^2$-типа, дивизором $\mathbb{F}_1$-типа, дивизором $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$-типа если $\widehat{S} = \mathbb{P}^2$, $\widehat{S} = \mathbb{F}_1$ или $\widehat{S} = \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$, соответственно. В частности, если L является дивизором $\mathbb{P}^2$-типа, то $r = 9 - K_S^2$. Аналогично, если L является дивизором $\mathbb{F}_1$-типа или дивизором $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$-типа, то $r = 8 - K_S^2$.

Несложно видеть, что каждый обильный $\mathbb{Q}$-дивизор на поверхности S принадлежит одному из перечисленных типов. Для того чтобы сделать эти типы взаимно исключающими, можно потребовать выполнение неравенств $b > 0$ и $a_1 > 0$ для дивизоров $\mathbb{F}_1$-типа, а также выполнения неравенств $b > 0$ или $a_1 > 0$ для дивизоров $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$-типа. В этом случае решение Гипотезы 6.2 для торических поверхностей дель Пеццо выглядит следующим образом:

Теорема 6.4 (Дональдсон). *Предположим, что $K_S^2 = 6$. Тогда пара (S, L) является K-полистабильной если и только если выполнено одно из следующих условий:*

- *либо L является дивизором $\mathbb{P}^2$-типа и $a_1 = a_2 = a_3$,*
- *либо L является дивизором $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$-типа и $a_1 = a_2$.*

В частности, если $K_S^2 = 6$ и L является дивизором $\mathbb{F}_1$-типа, то пара (S, L) является K-нестабильной. Чельцов и Мартинез-Гарсия доказали следующий аналог этого результата:

Теорема 6.5. *Предположим, что* $K_S^2 \leqslant 5$*, дивизор* L *является дивизором* $\mathbb{F}_1$*-типа или* $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$*-типа, а также выполнено неравенство*

$$a_1^2 + 6 - K_S^2 < \sum_{i=2}^{r} a_i^2.$$

Тогда пара (S, L) *является* K*-нестабильной при* $b \quad 0$.

Использую ту же технику, они доказали следующую теорему:

Теорема 6.6. *Предположим, что* $K_S^2 \leqslant 5$*. Если* L *является дивизором* $\mathbb{P}^2$*-типа и* $a_4 \quad a_3 > a_1$*, то пара* (S, L) *является* K*-нестабильной. Если* L *является дивизором* $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$*-типа и* $a_3 \quad a_2 > a_1$*, то пара* (S, L) *является* K*-нестабильной. Если* L *является дивизором* $\mathbb{F}_1$*-типа и* $a_3 \quad a_2$*, то пара* (S, L) *является* K*-нестабильной.*

Два приведенных результата имеют *качественную* природу. Техника Чельцова и Мартинез-Гарсия также позволяет получить *количественные* результаты. Например, ими была доказана следующая теорема:

Теорема 6.7. *Предположим, что* $K_S^2 \leqslant 5$*. Если* L *является дивизором* $\mathbb{P}^2$*-типа и*

$$a_2 - a_1 > \begin{cases} 0.8717 \text{ если } K_S^2 = 1, \\ 0.8469 \text{ если } K_S^2 = 2, \\ 0.8099 \text{ если } K_S^2 = 3, \\ 0.7488 \text{ если } K_S^2 = 4, \\ 0.6248 \text{ если } K_S^2 = 5, \end{cases} \tag{6.3.1}$$

то пара (S, L) *является* K*-нестабильной.*

Если L *является дивизором* $\mathbb{P}^2$*-типа и*

$$a_3 - a_1 > \begin{cases} 0.9347 \text{ если } K_S^2 = 1, \\ 0.9206 \text{ если } K_S^2 = 2, \\ 0.8985 \text{ если } K_S^2 = 3, \\ 0.8595 \text{ если } K_S^2 = 4, \\ 0.6798 \text{ если } K_S^2 = 5, \end{cases} \tag{6.3.2}$$

то пара (S, L) *является* K*-нестабильной.*

Если L является дивизором $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$*-типа и*

$$a_2 - a_1 > \begin{cases} 0.9305 \text{ если } K_S^2 = 1, \\ 0.9150 \text{ если } K_S^2 = 2, \\ 0.8911 \text{ если } K_S^2 = 3, \\ 0.8480 \text{ если } K_S^2 = 4, \\ 0.7452 \text{ если } K_S^2 = 5, \end{cases} \tag{6.3.3}$$

то (S, L) *является K-нестабильной.*

Пара (S, L) *также является K-нестабильной если L является дивизором* $\mathbb{F}_1$*-типа и*

$$a_2 - a_1 > \begin{cases} 0.9347 \text{ если } K_S^2 = 1, \\ 0.9206 \text{ если } K_S^2 = 2, \\ 0.8985 \text{ если } K_S^2 = 3, \\ 0.8595 \text{ если } K_S^2 = 4, \\ 0.7701 \text{ если } K_S^2 = 5. \end{cases} \tag{6.3.4}$$

Статья [ChMG17] выложена на Архив и подана в журнал. Она является продолжением работы [ChMG16], написанной в 2016 году.

6.4. G-бирациональная жесткость проективного пространства

В работе [ChSh] Чельцов и Шрамов классифицируют все конечные подгруппы G в $\mathrm{PGL}_4(\mathbb{C})$ для которых проективное пространство $\mathbb{P}^3$ является G-бирационально жестким.

Конечные подгруппы в группе $\mathrm{Aut}(\mathbb{P}^3) \cong \mathrm{PGL}_4(\mathbb{C})$ были классифицированы Блишфельдом ровно 100 лет назад. Он поделил их на два типа: транзитивные и интранзитивные. Геометрически, транзитивные группы это группы, которые не имеют неподвижных точек в $\mathbb{P}^3$ и не оставляют инвариантными никакую прямую. Интранзитивные группы это просто группы, которые не являются транзитивными.Транзитивные группы Блишфельд поделил на импримитивные и примитивные. Импримитивные группы оставляют инвариантными пару скрещивающихся прямых или имеют орбиту длины 4. Все остальные конечные подгруппы в $\mathrm{PGL}_4(\mathbb{C})$ называются примитивными.

Для данной конечной подгруппы $G \subset \mathrm{PGL}_4(\mathbb{C})$, естественно рассмотреть следующую естественную бирациональную задачу: описать все G-бирациональные перестройки проективного пространства $\mathbb{P}^3$ в другие трехмерные многообразия с действием группы G. Программа Минимальных Моделей позволяет упростить эту задачу и свести ее к рассмотрения всех G-бирациональные перестроек проективного пространства $\mathbb{P}^3$ в G-Мори расслоенные пространства. Если $\mathbb{P}^3$ является единственным G-Мори расслоенным пространством в которое его можно G-бирационально перестроить, то $\mathbb{P}^3$ принято называть G-бирационально жестким. В этом случае поставленная задача имеет очень простой ответ.

Чельцов и Шрамов доказали следующий результат:

Теорема 6.8. *Пусть G — конечная подгруппа в $\mathrm{PGL}_4(\mathbb{C})$. Тогда проективное пространство $\mathbb{P}^3$ является G-бирационально жестким если и только если G является примитивной подгруппой, которая не изоморфна группе A_5 и группе S_5.*

В двумерном случае аналогичное утверждение было ранее доказано Саковичем:

Теорема 6.9. *Пусть G — конечная подгруппа в $\mathrm{PGL}_3(\mathbb{C})$. Тогда проективная плоскость $\mathbb{P}^2$ является G-бирационально жестким если и только если G является транзитивной подгруппой, которая не изоморфна группе A_4 и группе S_4.*

Статья [ChSh] в ближайшее время будет выложена на Архив и подана в журнал.

6.5. Монодромия семейств эллиптических кривых над $\mathbb{C}$

Пусть $\pi : X \to B$ "— гладкое семейство эллиптических кривых над $\mathbb{C}$ (стандартный трюк с переходом к относительному Pic^0 показывает, что вместо семейства эллиптических кривых, т. е. вместо семейства с выделенным сечением можно также рассмотреть семейство кривых рода 1). Если зафиксировать базисную точку $b_0 \in B$ и обозначить через X слой над b_0, то имеется гомоморфизм монодромии из $\pi_1(B, b_0)$ в $\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$ "— группу автоморфизмов $H^1(X, \mathbb{Z})$, сохраняющих форму пересечения. Образ гомоморфизма монодромии называется группой монодромии семейства.

С каждым таким семейством связан морфизм $J_X : B \to \mathbb{A}^1$, сопоставляющий каждой точке $b \in B$ j-инвариант слоя над ней (в терминологии Кодаиры [Ko] этот морфизм называется аналитическим инвариантом семейства). Морфизм J_X постоянен тогда и только тогда, когда семейство X изотривиально.

Основной результат состоит в следующем.

Теорема 6.10. *Пусть семейство X не является изотривиальным, и пусть общий слой морфизма J_X имеет m связных компонент. Тогда индекс группы монодромии в $SL(2, \mathbb{Z})$ не превосходит $2m$. В частности, этот индекс конечен.*

Из этой теоремы получаются такие следствия.

Следствие 6.3. *Всякое гладкое семейство эллиптических кривых (или кривых рода 1) над гладкой базой B, у которой фундаментальная группа коммутативна, является изотривиальным.*

Следствие 6.4. *Если в семействе эллиптических кривых (или кривых рода 1) над $\mathbb{P}^1$ j-инварианты слоев не постоянны, то в этом семействе имеется не менее трех вырожденных слоев.*

Следствие 6.5. *Пусть X — гладкое семейство эллиптических кривых (или кривых рода 1) над гладкой базой B, у которой фундаментальная группа порождена r элементами. Тогда индекс группы монодромии этого семейства в $SL(2, \mathbb{Z})$ не превосходит $12(r - 1)$.*

Следующее следствие основывается на результатах из лекции Миранды [Mi].

Следствие 6.6. *Пусть $\pi : X \to C$ — минимальная гладкая эллиптическая поверхность с сечением. Для $s \in C$ обозначим через X_s слой над точкой $s \in C$, и пусть $G \subset SL(2, \mathbb{Z})$ — группа монодромии. Тогда*

$$(SL(2, \mathbb{Z}) : G) \leqslant 2 \sum_{s \in S} e(s),$$

где $S \subset C$ — множество точек, слои над которыми особы, и $e(s) = n$, если X_s — «колесо» из n компонент или слой типа I_n^* в терминологии Кодаиры и $e(s) = 0$ в остальных случаях.

Результаты, аналогичные вышеописанным, известны для этальных когомологий с коэффициентами в конечных группах (см., например, [CH] или [Ha]) и, возможно, могут быть получены аналогичными методами. Стоит, однако, заметить, что аналогия между когомологиями с конечными коэффициентами и когомологиями с коэффициентами в Z заходит не слишком далеко. Именно, хотя данная аналогия подсказывает, что, ввиду результатов работы [Ha], по крайней мере для некоторых семейств гиперэллиптических кривых группа монодромии, действующая на $H^1(\cdot, \mathrm{Z})$, должна совпадать со всей группой $\mathrm{Sp}(2g, \mathrm{Z})$. Однако же имеется следующий результат.

Предложение 6.7. *Пусть $\pi : X \to B$ — гладкое семейство гиперэллиптических кривых рода $g > 2$; обозначим его группу монодромии через g. Тогда*

$$(\mathrm{Sp}(2g, \mathrm{Z}) : G) > \frac{2^{g^2}(2^{2g}-1)(2^{2(g-1)}-1)\cdot\cdots\cdot(2^2-1)}{(2g+2)!}.$$

В частности, этот индекс строго больше единицы.

План доказательства теоремы следующий. Если бы существовало универсальное семейство эллиптических кривых над аффинной прямой, параметризующей j-инварианты, результат (с улучшенной вдвое оценкой) легко бы следовал из основных свойств топологически локально тривиальных расслоений. Поскольку это не так, применяется следующий обходной путь.

Положим $\Sigma = \{(p, q) \in \mathrm{A}^2\} : 4p^3 + 27q^2 \neq 0$ и рассмотрим семейство Y эллиптических кривых над $\mathrm{A}^2 \setminus \Sigma$, в котором слой над (p, q) — гладкая проективная модель кривой $y^2 = x^3 + px + q$. Рассмотрим теперь расслоенное произведение базы B данного семейства X и $\mathrm{A}^2 \setminus \Sigma$ над A^1, где морфизмы в A^1 суть J_X и J_Y. Подняв X и Y получаем два семейства с одинаковым «аналитическим инвариантом». Такие семейства отличаются на квадратичную подкрутку, т. е. после подъема на (возможно, разветвленное) накрытие степени 2 они становятся изоморфными. После этого проходит указанный выше наивный план, с возможным ухудшением.

Описанные выше результаты изложены в работе [Lv].

6.6. Многообразия Фано с большими группами симметрий

Многообразия Фано с большими группами симметрий представляют интерес с точки зрения классификации конечных подгрупп в группах бирациональных автоморфизмов рационально связных многообразий, а также по той причине, что для них часто удаётся явно провести геометрические конструкции, существование которых в других случаях известно только при дополнительных условиях общности. Одним из интересных семейств трехмерных квартик с большими группами симметрий является одномерное семейство *квартик Бовиля*, заданных в проективном пространстве $\mathbb{P}^5$ с однородными координатами $x_1, \ldots, x_6$ уравнениями

$$0 = x_1 + \ldots + x_6 = x_1^4 + \ldots + x_6^4 - t\left(x_1^2 + \ldots + x_6^2\right)^2,$$

где $t \in \mathbb{C}$ — параметр.

Это семейство содержит несколько классических многообразий. Некоторые из квартик X_t изучались ещё классиками. В частности, многообразие $X_{1/4}$ известно как *квартика Игусы*; оно возникает в теории многообразий модулей абелевых поверхностей. Многообразие $X_{1/2}$ известно как *квартика Бурхарда*; на $X_{1/2}$ имеется 45 обыкновенных двойных особых точек, что является максимальным возможным значением для трёхмерных квартик. Из определения очевидно, что на квартиках Бовиля действует автоморфизмами симметрическая группа $\mathfrak{S}_6$; можно проверить, что при $t \neq 1/2$ это полная группа автоморфизмов квартики X_t. Менее очевидно (хотя и известно с 19 века), что полной группой автоморфизмов квартики $X_{1/2}$ является простая группа $\mathrm{PSp}_4(\mathbb{F}_3)$.

Квартики Бовиля изучались разными авторами с точки зрения вопросов рациональности. Так, Дж. Тоддом [Tod36] было доказано, что квартика Бурхарда рациональна. При этом она не является G-рациональной, где G — любая подгруппа в группе её автоморфизмов, содержащая стандартную группу $\mathfrak{A}_5$ (например, это выполнено для $G = \mathfrak{S}_6$ и для $G = \mathrm{PSp}_4(\mathbb{F}_3)$); это утверждение было недавно доказано В. Пржиялковским, И. Чельцовым и К. Шрамовым [CPS16]. Рациональность квартики Игусы хорошо известна: она следует из того, что проективно двойственное к ней многообразие является особой кубической гиперповерхностью (а именно, так называемой *кубикой Сегре*, имеющей 10 обыкновенных двойных особенностей), рациональность которой очевидна. Рациональность многообразий $X_{1/6}$ и $X_{7/10}$ доказали в И. Чельцов и К. Шрамов

[CS16], следуя идеям, предложенным Дж. Тоддом в [Tod33, Tod35]. Наконец, А. Бовиль доказал, что при $t \notin \{1/2, 1/4, 1/6, 7/10\}$ квартика X_t нерациональна.

В 2017 году А. Кузнецов, И. Чельцов и К. Шрамов подробно исследовали квартики Бовиля, и нашли единую конструкцию, позволяющую восстановить результаты [Tod36], [CS16] и [Bea13]. Они рассмотрели двойное накрытие Y проективного пространства $\mathbb{P}^3$ с ветвлением в квартике Игусы $X_{1/4}$, известное как *многообразие Кобла*, см. [Cob15, Cob16, Cob17, Hun96]. В многообразии Y было указано семейство дивизоров X_τ, члены которого изоморфны квартикам X_t при $t = (\tau^2 + 1)/4$. Многообразие Y имеет особенности, причём его особое множество имеет размерность 1. А. Кузнецов, И. Чельцов и К. Шрамов построили два малых разрешения особенностей многообразия Y, одно из этих разрешений эквивариантно относительно группы $\mathrm{S}_4 \times \mathrm{S}_2$, а другое — относительно группы S_5. Рассмотрим более подробно второе из этих разрешений

$$\rho_{5,1} : Y_{5,1} \to Y.$$

А. Кузнецов, И. Чельцов и К. Шрамов показали, что на $Y_{5,1}$ существует структура $\mathbb{P}^2$-расслоения над поверхностью дель Пеццо степени 5, причём это расслоение эквивариантно относительно группы S_5. На собственных прообразах дивизоров X_τ это $\mathbb{P}^2$-расслоение индуцирует структуру A_5-эквивариантных расслоений на коники, причём дискриминантными кривыми этих расслоений являются так называемые *кривые Вимана–Эджа*, которые изучались в [Wim96, Edg81].

Используя характеризацию промежуточного якобиана стандартного расслоения на коники в терминах многообразия Прима его дискриминантной кривой, А. Кузнецов, И. Чельцов и К. Шрамов получили новое доказательство нерациональности квартик X_t при $t \notin \{1/2, 1/4, 1/6, 7/10\}$. Исследовав особенности дискриминантных кривых этих расслоений на коники при $t \in \{1/2, 1/4, 1/6, 7/10\}$, они также получили новые доказательства рациональности квартик $X_{1/2}$, $X_{1/4}$, $X_{1/6}$ и $X_{7/10}$. Наконец, они применили свою конструкцию для того, чтобы полностью описать группы классов дивизоров Вейля квартик X_t как представления их групп автоморфизмов.

6.7. Исследование групп автоморфизмов трёхмерных многообразий Фано и приложения к группе Кремоны

Мы продолжаем изучать вопрос классификации конечных подгрупп в трёхмерной группе Кремоны $\mathrm{Cr}_3(\mathrm{k})$, где k – алгебраически замкнутое поле характеристики нуль. Аналогичный вопрос для поверхностей был полностью решен в знаменитой работе И. Долгачева и В. Исковских [DI]. При помощи эквивариантного разрешения особенностей и эквивариантной программы минимальных моделей этот вопрос сводится к исследованию конечных подгрупп $G \subset \mathrm{Aut}(X)$ в группах автоморфизмов k-рациональных трёхмерных многообразий X специального вида. А именно, особенности X являются терминальными $G\mathbb{Q}$-факториальными, и либо ранг инвариантной группы Пикара $\mathrm{Pic}(X)^G$ равен 1, либо имеется морфизм $f\colon X \to Y$ на многообразие меньшей размерности такой, что канонический пучок является относительно антиобильным, а ранг относительной инвариантной группы Пикара $\mathrm{Pic}(X/Y)^G$ равен 1. Мы рассматриваем многообразия первого типа с дополнительным условием: канонический класс делится на 2 в группе Пикара (такие многообразия называются G-многообразиями дель Пеццо).

В предыдущих работах ([Av16], [Av16a], [Av16b]) были классифицированы многообразия дель Пеццо степеней 4 и 3, не допускающие эквивариантной перестройки в более простые многообразия Фано и не имеющие структуры расслоения Мори. Мы классифицируем именно такие многообразия, поскольку они могут дать новые интересные подгруппы в группе Кремоны. Например, было показано, что только за исключением 6 конкретных многообразий все многообразия дель Пеццо степени 3 имеют эквивариантную перестройку в $\mathbb{P}^3$, трёхмерную квадрику или G-расслоение Мори с базой положительной размерности.

Теорема 6.11. *Пусть $X = X_3 \subset \mathbb{P}^4$ — кубическая гиперповерхность, являющееся рациональным G-многообразием Фано (в частности, выполнено $\mathrm{rk\,Cl}^G = 1$). Предположим, G не линеаризуема и не является группой расслоенного типа. Тогда все особенности X являются обыкновенными двойными точками, а X описывается следующей таблицей:*

type_1	type_2	$r(X)$	$s(X)$	$\mathrm{Aut}(X)$	G
J15	31°	6	10	S_6	A_5, S_5, A_6, $\mathrm{Aut}(X)$
J14	30°	5	9	$S_3^2 \circ C_2$	S_3^2, $C_3^2 \circ C_4$, $\mathrm{Aut}(X)$
J9a	28°	2	6	S_5	$\mathrm{Aut}(X)$
J9b	28°	2	6	$S_3^2 \circ C_2$	S_3^2, $\mathrm{Aut}(X)$
J5a	27°	1	5	S_5	$C_5 \circ C_4$, A_5, $\mathrm{Aut}(X)$
J5b	27°	1	5	A_5	$\mathrm{Aut}(X)$

где $r(X)$ — ранг группы классов дивизоров, а $s(X)$ — количество особенностей.

В каждом из этих случаев можно написать явное уравнение многообразия.

В этом году была продолжена работа по изучению трёхмерных кубических гиперповерхностей. В частности, для четырёх многообразий из перечисленных выше шести были построены перестройкиДля оставшихся двух изучалась их бирациональная жёсткость. Была показана бирациональная жесткость кубики Сегре с нестандартным действием группы A_5. Для оставшегося многообразия была показана бирациональная жесткость относительно двух из трёх возможных подгрупп, последний случай сведён к изучению одного конкретного линка Саркисова. Статья об этом будет в ближайшее время подана в журнал.

Изучался случай рациональных многообразий дель Пеццо степени 2 с большим количеством особенностей. Была доказана теорема о том, что в случае пятнадцати особых точек такие многообразия являются гиперплоскими сечениями некоторого объемлющего четырёхмерного многообразия, а группа автоморфизмов его гиперплоского сечения индуцируется с группы автоморфизмов всего многообразияИз этого была получена классификация минимальных G-многообразий такого типа, велась работа по изучению их бирациональной жёсткости. В случае шестнадцати особых точек были классифицированы группы автоморфизмов и частично минимальные группы.

В случае многообразий степени 1 были классифицированы группы автоморфизмов в случае, когда они не допускают простую перестройку в расслоение на поверхности дель Пеццо (именно такие многообразия нас интересуют, поскольку ранее И. Чельцовым была высказана гипотеза, что такие многообразия являются G-бирационально жёсткими, если они минимальны). В настоящее время является открытым вопрос о том, какие многообразия дель Пеццо являются рациональными, а какие нет, даже в случае простейших особенностей. Были построены примеры рациональных многообразий дель Пеццо степени 1 с относительно небольшим количеством особенностей, что позволяет высказать гипотезу: многообразия дель Пеццо степени 1 с не более чем 14 нодальными особенностями нерациональны. Была построена перестройка такого многообразия в некоторое расслоение на коники, проводилась работа по перестройке его в стандартное расслоение (для них существуют критерии рациональности).

6.8. Расслоения на поверхности дель Пеццо и их стандартные модели

Одной из классических задач алгебраической геометрии является задача классификации алгебраических многообразий с точностью до бирациональной эквивалентности. Для решения этой задачи бывает удобно найти в каждом классе бирациональной эквивалентности многообразий некоторого “хорошего” представителя.

Одним из средств, позволяющих это сделать, является Программа минимальных моделей, также известная как теория Мори. Она представляет собой последовательность операций, применяемых к произвольному проективному многообразию с достаточно “хорошими” особенностями. Если исходное многообразие было рационально связным, то результат применения этой программы будет многообразием, обладающим структурой расслоения Фано–Мори. Альтернативным итогом применения программы может быть минимальная модель.

В размерности 2 программа минимальных моделей естественным образом работает в категории гладких многообразий. Хорошо известно, что для поверхностей минимальная модель единственна. С другой стороны, существуют различные бирационально изоморфные двумерные расслоения Фано–Мори. Они связаны некоторыми стандартными преобразованиями, называемыми линками Саркисова.

В трехмерном случае естественной категорией для Программы минимальных моделей является категория многообразий с Q-факториальными терминальными особенностями. Можно рассматривать многообразия, определенные над произвольным полем K характеристики 0 и снабженные действием конечной группы G. В этом случае существует G-эквивариантная программа минимальных моделей. Изучение таких многообразий мотивировано, среди прочего, задачей классификации конечных подгрупп в группе Кремоны, то есть группы бирациональных автоморфизмов n-мерного проективного пространства над полем K.

Пусть результатом применения G-Программы минимальных моделей к многообразию X является расслоение Фано–Мори. Ставится следующая задача: построить для данного расслоения Фано–Мори модель с наилучшими возможными особенностями. Под моделью здесь понимается расслоение Фано–Мори, бирационально изоморфное над базой данному расслоению.

Случай расслоений на коники над поверхностью был рассмотрен Саркисовым [Sa82]. Он построил стандартную модель таких расслоений, а именно перестройку многообразия и базы на такое расслоение на коники, что и база, и тотальное пространство неособы. Аналогичный результат в случае G-многообразий над произвольным полем характеристики 0 был получен Авиловым [Av14].

Случай расслоений на поверхности дель Пеццо над кривой более сложный. Он был рассмотрен в работах Корти [Co96], Коллара [Ko97], см. также [MP08]. Известно, что перестройки на гладкое многообразие в этом случае может не существовать. Тогда естественно потребовать, чтобы канонический класс являлся дивизором Картье (горенштейнова модель), а особенности многообразия удовлетворяли одному из известных условий (терминальность, каноничность и т. д.)

Расслоения на поверхности дель Пеццо обладают естественной характеристикой — степенью общего слоя. В работе [Lo17] была построена стандартная модель таких расслоений степени 1, а именно модель с каноническими горенштейновыми особенностями, не имеющая кратных слоев. В работе [Co96] утверждается, что для некоторых расслоений на дель Пеццо степени 1 не существует горенштейновой терминальной модели, поэтому наш результат неулучшаем в горенштейновом случае. Горенштейнова модель хороша тем, что она допускает послойное вложение в относительное взвешенное проективное пространство $\mathbb{P}_C(1, 1, 2, 3)$ над кривой C, которое на каждом слое совпадает с хорошо известным вложением поверхности дель Пеццо степени 1 во взвешенное проективное пространство P(1, 1, 2, 3). Такое вложение построено в [Lo17]. Кроме того, классификация горенштейновых поверхностей дель Пеццо хорошо известна, что позволяет нам описать вырожденные слои.

6.9. Особенности экстремальных трехмерных терминальных окрестностей.

Ю. Прохоровым совместно с С. Мори (RIMS, Kyoto University) продолжалась работа над долгосрочным проектом по классификации аналитических типов экстремальных стягиваний трехмерных терминальных особенностей со слоями размерности ≤ 1.

Экстремальным ростком (X, C) называется росток трехмерного нормального комплексного пространства X с терминальными особенностями вдоль компактной неприводимой кривой C такой, что имеется морфизм-стягивание $f : X \to Z \ni o$ с $C = f^{-1}(o)$ и относительно обильным антиканоническим дивизором $-K_X$ [Mor88]. Работа продолжает серию публикаций [KM92], [MP14], [MP11], [MP09], [MP08a], [MP08b], [MP16]. Полностью изучены экстремальные ростки,содержащие исключительную особенность типа (IIA). (Работа над этим случае была начата в прошлом году и теперь полностью закончена). Детально исследован случай, когда общее гиперплоское сечение $H \subset X$, проходящее через C, не является нормальной поверхностьюПолучена полная классификация.Она формулируется в терминах нормализации и последующего минимального разрешения особенностей поверхности H и инфинитезимальной структуры X вдоль C. Написана статья [MP17] (выложена в архив и принята к печати).

Полученные результаты находят применение в бирациональной геометрии и классификации алгебраических многообразий, см. [PR16], [PS16].

6.10. Научно-педагогическая деятельность

- В течение всего года активно работал научный семинар “Геометрия алгебраических многообразий им В. А. Исковских” (МИАН–МГУ) в работе которого принимали участие многие сотрудники лаборатории. Руководители семинара: Ю.Г. Прохоров, Д.О. Орлов, В.В. Пржиялковский, К.А. Шрамов.

- В течение всего года работал учебный семинар “Алгебраическая геометрия” (НОЦ МИАН) в работе которого принимали участие многие студенты и аспиранты факультета математикиРуководители семинара: Ю.Г. Прохоров, Д.О. Орлов, К.А. Шрамов.

- В осеннем семестре Ю. Прохоров прочитал специальный курс “Многообразия Фано” (НОЦ МИАН). Имеются видеозаписи лекций курса.
- В весеннем семестре Ю. Прохоров и К. Шрамов прочитали специальный курс “Классическая алгебраическая геометрия (продолжение)” (НОЦ МИАН). Имеются видеозаписи лекций курса.
- Ю. Прохоров и К. Шрамов организовали две школы-конференции на математическом факультете ВШЭ:
  - Workshop “Birational geometry in positive characteristic”, April 3–7, 2017.
  - Workshop on birational geometry, November 22–24, 2017.

Литература

[Av14] A. Avilov *Existence of standard models of conic fibrations over non-algebraically-closed fields.* Math. Sb., 205:12 (2014), 3–16.

[Av16] А. Авилов, Автоморфизмы трехмерных многообразий, представимых в виде пересечения двух квадрик, Матем. сб. 2016, 207:3, 3–18.

[Av16a] А. Авилов, Автоморфизмы особых трехмерных кубических гиперповерхностей и группа Кремоны, Матем. заметки 2016, 100:3, 461–464.

[Av16b] A. Avilov, Automorphisms of singular three-dimensional cubic hypersurfaces, Препринт, доступен по адресу http://arxiv.org/abs/1603.04087

[Bea13] A. Beauville. Non-rationality of the S_6-symmetric quartic threefolds. *Rend. Semin. Mat. Univ. Politec. Torino*, 71(3-4):385–388, 2013.

[ChMG16] Ivan Cheltsov and Jesus Martinez-Garcia.Stable polarized del Pezzo surfacesjun 2016.

[ChMG17] Ivan Cheltsov and Jesus Martinez-Garcia. Unstable polarized del Pezzo surfacesjul 2017.

[CPS16] I. Cheltsov, V. Przyjalkowski, and C. Shramov. Burkhardt quartic, Barth sextic, and the icosahedron. *arXiv preprint arXiv:1606.04372*, 2016.

[CS16] I. Cheltsov and C. Shramov.Two rational nodal quartic 3-folds. *Q. J. Math.*, 67(4):573–601, 2016.

[ChSh] Ivan Cheltsov and C. Shramov.Finite collineation группы and birational rigidity. (готовится к печати).

[Cob15] Arthur B. Coble. Point sets and allied Cremona groups. I. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 16(2):155–198, 1915.

[Cob16] Arthur B. Coble. Point sets and allied Cremona groups. II. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 17(3):345–385, 1916.

[Cob17] Arthur B. Coble. Point sets and allied Cremona groups. III. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 18(3):331–372, 1917.

[CH] Alina Carmen Cojocaru and Chris Hall, *Uniform results for Serre's theorem for elliptic curves*, Int. Math. Res. Not. (2005), no. 50, 3065–3080.

[Co96] A. Corti. *Del Pezzo Surfaces over Dedekind Schemes.* Annals of Mathematics, Second Series,Vol. 144, No. 3 (Nov., 1996), pp. 641–683.

[DI] I. Dolgachev, V. Iskovskikh, Finite subgroups of the plane Cremona group, In Algebra, arithmetic, and geometry: in honor of Yu. I. Manin. Vol. I, Progr. Math., 269 (2009), 443–548.

[Edg81] W. L. Edge. A pencil of four-nodal plane sextics. *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 89(3):413–421, 1981.

[Ha] Chris Hall, *Big symplectic or orthogonal monodromy modulo l*, Duke Math. J. **141** (2008), no. 1, 179–203.

[Hun96] Bruce Hunt. *The geometry of some special arithmetic quotients*, volume 1637 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 1996.

[Isk90] Iskovskikh,V.A.: *Double projection from a line on Fano threefolds of first kind*, Mathematics of the USSR-Sbornik **66**(1):265 (1990)

[Ko] K. Kodaira, *On compact analytic surfaces. II*, Ann. of Math. (2) **77** (1963), 563–626.

[Ko97] J´a. Koll´ar. *Polynomials with integral coefficients, equivalent to a given polynomial.* ERA Amer. Math. Soc. 03 (1997), pp. 17–27.

[KM92] János Kollár and Shigefumi Mori. Classification of three-dimensional flips. *J. Amer. Math. Soc.*, 5(3):533–703, 1992.

[Lo17] K. Loginov *Standard models of degree 1 del Pezzo fibrations.* arXiv:1710.02482.

[Lv] Serge Lvovski, *On monodromy in families of elliptic curves over* C, preprint arXiv:1705.02129 [math.AG] [math.AG].

[Mi] Rick Miranda, *The basic theory of elliptic surfaces*, Dottorato di Ricerca in Matematica. [Doctorate in Mathematical Research], ETS Editrice, Pisa, 1989.

[Mor88] Shigefumi Mori. Flip theorem and the existence of minimal models for 3-folds. *J. Amer. Math. Soc.*, 1(1):117–253, 1988.

[MP08] Sh. Mori, Yu. Prokhorov. *Multiple fibers of del Pezzo fibrations*. Proc. Steklov Inst. Math., 2009, 264, 131–145.

[MP08a] Shigefumi Mori and Yuri Prokhorov. On **Q**-conic bundles. *Publ. Res. Inst. Math. Sci.*, 44(2):315–369, 2008.

[MP08b] Shigefumi Mori and Yuri Prokhorov. On **Q**-conic bundles. II. *Publ. Res. Inst. Math. Sci.*, 44(3):955–971, 2008.

[MP09] S. Mori and Yu. Prokhorov. On **Q**-conic bundles, III. *Publ. Res. Inst. Math. Sci.*, 45(3):787–810, 2009.

[MP11] S. Mori and Yu. Prokhorov. Threefold extremal contractions of type IA. *Kyoto J. Math.*, 51(2):393–438, 2011.

[MP14] S. Mori and Yu. Prokhorov. Threefold extremal contractions of types (IC) and (IIB). *Proc. Edinburgh Math. Soc.*, 57(1):231–252, 2014.

[MP16] S. Mori and Yu. Prokhorov. Threefold extremal contractions of type (IIA). I. *Изв. РАН. Сер. матем.*, 80(5):77–102, 2016.

[MP17] S. Mori and Yu. Prokhorov. Threefold extremal contractions of type (IIA), II. ArXiv e-print, 2017, 1707.05047, to appear in Festschrift in honour of Nigel Hitchin, (2018), Oxford University Press

[Muk89] Mikai Sh.: *Biregular classification of Fano 3-folds and Fano manifolds of coindex 3*, Proc. Natl. Acad. Sci. USA **86**, pp. 3000-3002, (1989)

[PR16] Yuri Prokhorov and Miles Reid. On Q-Fano threefolds of Fano index 2. In *Minimal Models and Extremal Rays (Kyoto 2011)*, volume 70 of *Adv. Stud. Pure Math.*, pages 397–420. Mathematical Society of Japan, Kinokuniya, Tokyo, 2016.

[PS16] Yuri Prokhorov and Constantin Shramov. Jordan property for Cremona groups. *Amer. J. Math.*, 138(2):403–418, 2016.

[Sa82] V. G. Sarkisov *On conic bundle structures*. Izv. Akad. Nauk SSSR Ser.Mat., 46:2 (1982), 371–408;Math. USSR-Izv., 20:2 (1983), 355-390.

[Sho79] Shokurov, V. V.: *The existence of a straight line on Fano 3-folds*, Mathematics of the USSR-Izvestiya,1**5**(1):173 (1980)

[Tod33] J.A. Todd. Configurations defined by six lines in space of three dimensions. In *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, volume 29, pages 52–68. Cambridge Univ Press, 1933.

[Tod35] J.A. Todd. A note on two special primals in four dimensions. *Quarterly Journal of Mathematics*, (1):129–129, 1935.

[Tod36] J.A. Todd. On a quartic primal with forty-five nodes, in space of four dimensions. *The Quarterly Journal of Mathematics*, 7:168–174, 1936.

[T16] A. Trepalin, Quotients of conic bundles, Transformation Groups, 2016, 21(1), 275–295

[T13] A. Trepalin, Quotients of del Pezzo surfaces of high degree, Препринт, доступен по адресу http://arxiv.org/abs/1312.6904

[T16a] A. Trepalin, Quotients of cubic surfaces, European Journal of Mathematics, 2016, 2, 333–359

[T17] A. Trepalin, Quotients of del Pezzo surfaces of degree 2, Препринт, доступен по адресу http://arxiv.org/abs/1709.02006

[Wim96] A. Wiman. Zur Theorie der endlichen Gruppen von birationalen Transformationen in der Ebene. *Math. Ann.*, 48(1-2):195–240, 1896.

7. Специальные многообразия

7.1. Структуры Ходжа, автоморфизмы специальных многообразий и группа Мамфорда-Тэйта

В отчетный период, заместитель заведующего ЛАГ Миша Вербицкий продолжил цикл работ о группах автоморфизмов специальных многообразий.

Совместно с Е. Америк была опубликована статья [AV1], где были построены гиперкэлеровы многообразия, допускающие параболические и гиперболические автоморфизме в каждом классе деформаций, при условии некоторых ограничений на размерность второго числа Бетти. Эта работа была основана на решении фундаментальной гипотезы Моррисона-Кавамата [AV2], полученное Америк и Вербицким, и опубликованное в отчетный период. Среди прочего, из результатов [AV2] следует, что каждое гиперкэлерово многообразие имеет не более конечного числа неизоморфных гиперкэлеровых бирациональных моделей.

В статье [BKLV], совместной с научным руководителем ЛАГ Федором Богомоловым, Людмилой Каменовой (SUNY) и Стивеном Лю (UQAM) и опубликованной в отчетный период, изучается метрика Кобаяши и ее связь с группой автоморфизмов. Среди прочего, там посчитана динамическая энтропия автоморфизма гиперкэлерова многообразия, оказывается, что она целиком определяется собственными значениями этого автоморфизма во вторых когомологиях.

В работе [KV] (Людмила Каменова, Миша Вербицкий), опубликованной в отчетный период, структурные теоремы о группе автоморфизмов применяются, чтобы доказать алгебраическую негиперболичность гиперкэлеровых многообразий с рангом группы Пикара ≥ 3. Доказано, что такое многообразие содержит рациональную кривую, либо содержит последовательность неприводимых кривых ограниченного рода, и степени, стремящейся к бесконечности. Такое многообразие называется алгебраически негиперболическим. Понятие алгебраической гиперболичности было введено Ж.-П. Демайи, и гипотетически эквивалентно гиперболичности по Кобаяши; легко видеть, что из гиперболичности по Кобаяши следует алгебраическая гиперболичность, но обратное в настоящий момент неизвестно.

Идеи работы [KV] были применены в препринте [BKV] (Богомолов, Каменова, Вербицкий) к изучению группы автоморфизмов алгебраически гиперболических многообразий. Было доказано, что эта группа всегда конечна.

Изучение структур Ходжа на гиперкэлеровых многообразиях привело Вербицкого к открытию трансцендентной алгебры Ходжа, иначе говоря, алгебраической структуры на трансцендентной решетке Ходжа на любом проективном многообразии. Вербицкий посчитал эту алгебру явно для гиперкэлеровых многообразий, выразив ее в терминах группы Мафорда-Тэйта, посчитанной Ю. Зархиным в начале 1980-х. Эти разультаты были опубликованы в отчетный период в журнале Selecta Mathematica([V]).

Другая работа Вербицкого, посвященная группе Мамфорда-Тэйта – препринт [KSV] (совместный с Никоном Курносовым, стажером ЛАГ, и Андреем Солдатенковым), где строится вложение когомологий любого гиперкэлерова многообразия в когомологии тора, индуцирующее изоморфизм на группах Мамфорда-Тэйта, и перестановочное с действием SL(2)-троек Ходжа и двойственностью Пуанкаре.

Также М. Вербицкий продолжил работу в области симплектической геометрии гиперкэлеровых многообразий, доказав (совместно с М. Энтовым) возможность полных симплектических упаковок гиперкэлеровых многообразий и торов любыми наборами симплектических эллипсоидов ([EV]), и опубликовал ряд статей и препринтов о геометрии комплексных некэлеровых многообразий ([OV2, OV1, GLV]).

Наконец, совместно с Сухенду Мехротра и Эйялом Маркманом М. Вербицкий опубликовал препринт, где глобальная теорема Торелли (доказанная Вербицким для гиперкэлеровых многообразий) обобщается на деформации пары (многообразие, жесткий рефлексивный гиперголоморфный пучок на нем). Этот результат нужен Маркману в его фундаментальной программе построения циклов на гиперкэлеровых многообразиях посредством деформации гиперголоморфных пушков, уже принесшей доказательство гипотезы Тэйта для К3 (Маркман, Шарль) и версии гипотезы Ходжа для 2-циклов в произведении двух К3 (Бускин).

Литература

[AV1] Amerik, Ekaterina; Verbitsky, Misha, *Construction of automorphisms of hyperkähler manifolds*, Compos. Math. 153 (2017), no. 8, 1610-1621.

[AV2] Amerik, Ekaterina; Verbitsky, Misha Morrison-Kawamata cone conjecture for hyperk¨ahler manifolds.Ann. Sci. Éc. Norm. Sup’er. (4) 50 (2017), no. 4, 973-993.

[BKLV] Bogomolov, Fedor; Kamenova, Ljudmila; Lu, Steven; Verbitsky, Misha *On the Kobayashi pseudometric, complex automorphisms and hyperkähler manifolds. Geometry over nonclosed fields,* 1-17, Simons Symp., Springer, Cham, 2017.

[BKV] Fedor Bogomolov, Ljudmila Kamenova, Misha Verbitsky, *Algebraically hyperbolic manifolds have finite automorphism groups* arXiv:1709.09774

[EV] Michael Entov, Misha Verbitsky, *Unobstructed symplectic packing by ellipsoids for tori and hyperkahler manifolds*, arXiv:1704.00636

[GLV] Grantcharov, Gueo; Lejmi, Mehdi; Verbitsky, Misha Existence of HKT metrics on hypercomplex manifolds of real dimension 8. Adv. Math. 320 (2017), 1135-1157.

[KV] Kamenova, Ljudmila; Verbitsky, Misha *Algebraic nonhyperbolicity of hyperkähler manifolds with Picard rank greater than one* New York J. Math. 23 (2017), 489-495.

[KSV] Nikon Kurnosov, Andrey Soldatenkov, Misha Verbitsky, *Kuga-Satake construction and cohomology of hyperkahler manifolds*, arXiv:1703.07477, 25 pages; updated grant information.

[MMV] Eyal Markman, Sukhendu Mehrotra, Misha Verbitsky, *Rigid hyperholomorphic sheaves remain rigid along twistor deformations of the underlying hyparkahler manifold*, arXiv:1706.09348, 39 pages

[OV1] Liviu Ornea, Misha Verbitsky, *Embedding of LCK manifolds with potential into Hopf manifolds using Riesz-Schauder theorem*, arXiv:1702.00985.

[OV2] Liviu Ornea, Misha Verbitsky *Positivity of LCK potential,* arXiv:1705.08477, 14 pages.

[V] Verbitsky, Misha *Transcendental Hodge algebra* Selecta Math. (N.S.) 23 (2017), no. 3, 2203-2218.

7.2. Голоморфно симплектические многообразия

Этот раздел посвящен работам сотрудника ЛАГ Екатерины Америк.

Совместно с М. Вербицким, Америк начала изучение подмногообразий Z_C, покрываемых деформациями кривой C в заданном классе когомологий неприводимого голоморфно симплектического многообразия. Эти подмногообразия особенно интересны, если класс когомологий C отрицателен по отношению к форме Бовилля–Богомолова и, более того, ортогонал к нему определяет грань обильного конуса: в самом деле, в этом случае подмногообразие Z_C является компонентой исключительного множества соответствующего стягивания. Мы показали, что в таком случае топологический тип Z не зависит от объемлющего неприводимого голоморфно симплектического X (а только от типа деформации X), если только ранг группы Пикара X не максимален. Доказательство основано на варианте теоремы Вербицкого об эргодичности действия монодромии. Результат можно уточнить (например, показав, что инвариантен относительно деформаций бирациональный тип общего слоя рационального фактора).

Об этом написана статья “MBM curves in families of hyperkähler manifolds”, которая после окончательной правки в ближайшие недели будет обнародована на arxiv.org.

Мы также занимались некоторой переработкой наших статей, о которых подробно рассказано в прошлом отчете: Construction of automorphisms of hyperk¨ahler manifolds и Collections of parabolic orbits in homogeneous spaces, homogeneous dynamics and hyperkahler geometry, в соответствии с замечаниями рецензентов. В результате первая из них вышла в журнале Compositio Mathematica [4], вторая должна быть вскоре принята в International Mathematical Research Notices (все рецензии на последнюю версию положительны).

Совместно с Ф. Кампана Е. Америк занималась следующей проблемой. Пусть дано семейство многообразий, допускающих хорошее пространство модулей (например, кривых, или канонически поляризованных многообразий, или поляризованных многообразий с тривиальным каноническим классом) над квазипроективным многообразием. Когда можно утверждать, что это семейство изотривиально (т.е. достаточно общие слои изоморфны)? Гипотеза Кампаны состоит в том, что это верно, если база семейства является специальным орбифолдом (см. [7]). В случае гладкого семейства канонически поляризованных многообразий эта гипотеза доказана Берузом Таджи. Нас заинтересовал квазигладкий случай, который можно интерпретировать так: семейство многообразий является семейством листов голоморфного слоения без особенностей (этот случай естественным образом возникает при изучении характеристического слоения на коизотропных подмногообразиях — например, гиперповерхностях — голоморфно симплектических многообразий). В самом деле, в кэлеровом случае группы голономий конечны и по теореме стабильности Реба семейство, заданное гладким слоением, локально является фактором субмерсии по конечной группе. Мы доказали гипотезу Кампаны в этой ситуации и написали об этом статью [1]. Она представлена к печати.

Совместно с А. Кузнецовой, нам потребовалось дополнить нашу заметку Endomorphisms of projective bundles over a certain class of varieties (см. предыдущий отчет), так как рецензент обнаружил в ней серьезный пробел. После соответствующих уточнений она была опубликована в журнале [3], куда представлена по пожеланию И. Чельцова как составителя сборника вокруг магаданской конференции (декабрь 2015 года), вышедшего как номер этого журнала.

Кроме вышеупомянутых, в 2017 году опубликованы две работы предыдущих лет [2, 5].

7.3. Специальные бор–зоммерфельдовы лагранжевы подмногообразия.

В отчетном году сотрудником лаборатории Н.Тюриным были продолжены и развиты исследования специальной бор–зоммерфельдовой геометрии алгебраических многообразий. В прошлом нами было введено понятие специального бор–зоммерфельдова лагранжева подмногообразия или, более общо, цикла в симплектическом многообразии с целочисленной симплектической формой; тогда же было намечено дальнейшее направление исследований, а именно были определены конечномерные объекты, называемые многообразиями модулей специальных бор–зоммерфельдовых циклов в случае, если исходное симплектическое многообразие обладает согласованной интегрируемой комплексной структурой.

Кратко напомним основные определения и конструкции.

Пусть (M, ω) — компактное односвязное симплектическое многообразие вещественной размерности $2n$, такое что симплектическая форма ω представляет целочисленный класс когомологий. Тогда зафиксировав данные предквантования (L, a), а именно L — линейное эрмитово расслоение с первым классом Черна $c_1(L) = [\omega]$, и $a \in \mathcal{A}_h$ — эрмитову связность с формой кривизны $F_a = 2\pi i\omega$, можно ввести условия специальной бор–зоммерфельдовости на лагранжевы подмногообразия (гладкие или с простейшими особенностями) в симплектическом многообразии M. Подмногообразие $S \subset M$ вещественной размерности n является специальным относительно гладкого сечения $s \subset \Gamma(M, L)$ бор–зоммерфельдовым (s-SBS или, если сечение понятно из контекста, просто SBS), если форма $\mathrm{Im}\rho_s|_S \equiv 0$, где форма ρ_s определяется сечением s по правилу

$$\rho_s = \frac{\langle \nabla_a s, s \rangle_h}{\langle s, s \rangle_h}.$$

Данное определение подразумевает, что сечение s не зануляется на S; кроме того, отсюда видны типы особенностей S, которые возможны в рамках специальной бор–зоммерфельдовой геометрии.

Напомним, что следуя общей идеологии, мы хотим изучать не только гладкие лагранжевы подмногоообразия $S \subset M$, но и лагранжевы подмногообразия с особенностями, которые ниже именуются циклами. Для особенностей такого цикла условие SBS требует, чтобы ограничение формы $\mathrm{Im}\rho_s$ тождественно занулялось на касательном конусе каждой особой точки. Это требование связывает свойства сечения s с типами особенностей цикла S,в зависимости от типа особенности касательный конус может оказаться очень большим и порождать все касательное к M пространство,и тогда мы будем получать требование тотального обращения в нуль формы $\mathrm{Im}\rho_s$ в таких точках. На протяжении этой работы нас интересовали сечения, голоморфные относительно некоторой согласованной с ω интегрируемой комплексной структуры, и мы показали что такие сечения в общем случае имеют конечное число изолированных точек, в которых эта форма обращается в нуль, откуда будет следовать ограничение на возможный тип особенностей S.В более общем случае класс разрешенных особенностей можно варьировать в зависимости от рассматриваемого класса сечений.

Далее, пусть (M, ω) допускает существование согласованной с ω интегрируемой комплексной структурой I, так что по ω и I однозначно восстанавливается риманова метрика g,и тройка (g, I, ω) является кэлеровой тройкой, то есть задает кэлерову метрику на M. Так как класс $[\omega]$ целочислен,то эта кэлерова метрика имеет ходжев тип, таким образом M превращается в алгебраическое многообразие с положительной поляризацией,задаваемой расслоением L.При этом связность $a \in \mathcal{A}_h(L)$ задает голоморфную структуру на L, поскольку ее кривизна имеет тип (1,1) относительно комплексной структуры. Условие голоморфности $\bar\partial_a s = 0$ выделяет в пространстве $\Gamma(M, L)$ конечномерное подпространство $H^0(M, L)$ голоморфных сечений. Так как условие SBS зависит не от самого s, а от класса $\{\lambda s\}, \lambda \in \mathbb{C}^*$, то вместо векторного пространства $H^0(M, L)$ мы рассмотрим его проективизацию $|L|$, называемую также полным линейным рядом, поскольку класс голоморфных сечений с точностью до умножения на константу соответствует дивизору нулей этих сечений.

Ранее нами было определено отображение, проецирующее множество всех пар (S, s) таких что S является s-SBS, на вторую компоненту (точнее, на соответствующий класс), что дает

$$p_1 : U_{SBS} \to \mathbb{P}\Gamma(M, L)$$

и ограничение этой проекции на конечномерное проективное подпространство вырезает множество

$$\mathcal{M}_{SBS} = p_1^{-1}(\mathbb{P}H^0(M, L)),$$

которое мы называем многообразием модулей специальных бор–зоммерфельдовых циклов. Нетрудно заметить, что топологический тип такого множества не зависит от вариации непрерывных параметров, поэтому если мы сразу зайдем с другой стороны и рассмотрим компактное односвязное алгебраическое многообразие GM с (очень) обильным линейным расслоением $L \to M$ (дивизором $D \subset M$) на нем, то от выбора конкретной кэлеровой формы на M и эрмитовой структуры на L этот тип зависеть не будет. Топологический тип $\mathcal{M}_{SBS}$ будет зависеть от выбора L, что в односвязном случае может кодироваться классом $c_1(L) \in H^2(M, \mathbb{Z})$, а также топологическими данными лагранжевых подмногообразий S, а именно классом $[S] \in H_n(M, \mathbb{Z})$ и топологическим типом top$S$ самого подмногообразия. Выразим эту зависимость так $\mathcal{M}_{SBS}$ (top$S$; $[S]$; $c_1(L)$).

В настоящее время пример, представляющий в случае $M = \mathbb{C}\mathbb{P}^1$ многообразие модулей $\mathcal{M}_{SBS}$ $(S^1; 0; 2h)$ в виде $\mathbb{C}\mathbb{P}^2 \setminus C$, где C — невырожденная коника, может быть дополнен серией более содержательных примеров.

А именно мы нашли описание для случая $M = Q \subset \mathbb{C}\mathbb{P}^3$ — невырожденной двумерной квадрики, где имеем

$$\mathcal{M}_{SBS}(S^2; (1, -1); (1, 1)) \cong \mathbb{C}\mathbb{P}^3 \setminus Q^{\vee},$$

где $Q^{\vee}$ — проективно двойственная квадрика. В качестве следствия нетрудно видеть, что последнее многообразие модулей имеет естественную компактификацию.

Описание многообразий модулей специальных бор–зоммерфельдовых циклов в конкретных случаях является весьма трудной задачей, поэтому естественно возникает идея исследовать сначала более частный вопрос — о существовании s-SBS лагранжевых многообразий для частных голоморфных сечений $s \in H^0(M, L)$. Поскольку ответ зависит только от дивизора нулей $(s)_0 = D_s \subset M$, можно переформулировать вопрос, введя следующую терминологию.

Пусть $D \subset M$ — очень обильный дивизор, тогда соответствующий полный линейный ряд $|D|$ по самому определению обильности индуцирует вложение $\varphi(M)$ в некоторое проективное пространство $\mathbb{C}\mathbb{P}^N$, так что образ вложения D высекается в $\varphi(M)$ некоторой гиперплоскостью, то есть сечением расслоения $\mathcal{O}_{\mathbb{C}\mathbb{P}^N}(1)$. Выбор стандартной кэлеровой структуры на $\mathbb{C}\mathbb{P}^N$ и стандартной эрмитовой структуры на расслоении $\mathcal{O}_{\mathbb{C}\mathbb{P}^N}(1)$ приводит нас к ситуации, когда применима конструкция специальной бор–зоммерфельдовой геометрии, и получаемое в результате компактное лагранжево подмногообразие в M естественно назвать лагранжевой тенью D и обозначить $Sh^{Lag}(D) \subset M$. Так как имеется вариация в выборе стандартных структур на $\mathbb{CP}^N$ и $\mathcal{O}_{\mathbb{CP}^N}(1)$, то лагранжева тень определена неоднозначно — ровно как и всякая тень отбрасывается предметом в зависимости от положения солнца на небе (а у некоторых предметов тени вообще нет). Представленный выше пример с $M = Q \subset \mathbb{CP}^3$ — невырожденной квадрикой — в данных терминах представляется следующими фактами:

— в случае невырожденной двумерной квадрики $M = Q$ если D — неприводимый дивизор, представляющий класс $(1, 1) \in H^2(Q, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$, то лагранжева тень существует и гамильтоново изотопна S^2, антидиагонально вложенной в $Q = \mathbb{CP}^1 \times \mathbb{CP}^1$ (если D приводим, то $Sh^{Lag}(D) = \emptyset$);

— в том же случае $M = Q$ если D — неприводимый дивизор, представляющий класс $(2, 2) \in H^2(Q, \mathbb{Z})$, то лагранжева тень $Sh^{Lag}(D)$ непуста и изоморфна двумерному тору, представляющему нулевой класс гомологий;

— в случае $M = F^3$ — многообразия флагов в $\mathbb{C}^3$, — для неприводимого дивизора D, представляющего класс $(1, 1) \in H^2(F^3, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$, лагранжевой тенью будет лагранжева сфера S^3, гамильтоново изотопная лагранжевой сфере Гельфанда–Цейтлина.

Поскольку геометрия лагранжевых теней связана с градиентными потоками вещественных функций, индуцируемых голоморфными сечениями, несмотря на трудности в конкретных построениях лагранжевых теней нетрудно вывести критерий непустоты лагранжевой тени в когомологических терминах, а именно

Теорема 7.1. *Для обильного дивизора $D \subset M$ в компактном односвязном алгебраическом многообразии лагранжева тень непуста если и только если группа $H_n(M \setminus D, \mathbb{Z})$ нетривиальна.*

Еще раз подчеркнем, что нас интересует случай именно компактных лагранжевых подмногообразий, в том числе и лагранжевых теней.

В голоморфной ситуации мы доказали также, что если $s \in H^0(M, L)$, то множество s-SBS лагранжевых подмногообразий конечно. Ситуация с лагранжевыми циклами выглядит существенно более трудной поскольку в общей ситуации бывает не очень понятно, как считать число компонент, однако в этом абстрактном случае можно говорить о конечном ранге группы $H_n(M \setminus D, \mathbb{Z})$ и об образующих этой группы как о компонентах лагранжевой тени.

Эти результаты собраны в статье [20], принятой к публикации журналом Известия РАН, сер. мат.

7.4. Обобщенное вложение Куга-Сатаке

Сотрудник лаборатории Н. Курносов совместно с М. Вербицким и А. Солдатенковым построили обобщённое вложение Куга–Сатаке, показав что когомологии гиперкэлерового многообразия могут быть вложены в когомологии произведения нескольких копий абелевых многообразий. В классической конструкции Куга–Сатаке строится тор (абелево многообразие в случае наличия поляризации) по структуре Ходжа типа $K3$. В нашей работе мы показали, что возможно построить отображение из вторых когомологий гиперкэлерова многообразия $\Lambda^2 V^*$, где V — произвольный модуль над алгеброй Клиффорда, построенной по решётке вторых когомологий, образом вложения оказывается k-симплектическая структура (невырожденная квадрика форм половинного ранга).

Доказательство основного результата основывается на построении такого модуля V над алгеброй Клиффорда, что в $\Lambda^{\bullet} V$ можно вложить всё кольцо когомологий гиперкэлерового многообразия. Для этого мы изучили алгебру эндоморфизмов $\mathrm{End}(\Lambda V^*)$, показав, что она совпадает с алгеброй Ли $\mathfrak{so}(\tilde{H}, \tilde{q})$ расширения Мукаи для решётки вторых когомологий (H, q). А затем использовали результат Демаи–Милна о отображении неприводимых представлений в тензорное произведение выделенного представления.

Результат опубликован в препринте и представлен в журнал к публикации. Помимо этого мы продолжаем исследования наличия обобщённой формы Бовилля–Богомолова–Фуджики, доказав, что она невырожденна для гиперкэлеровых многообразий малой размерности.

Также мы изучали порождающие в гиперкэлеровом кольце Ходжа с целью получить новые соотношения на числа Ходжа и Бетти гиперкэлеровых многообразий.

Совместно с Ф. Богомоловым и Ф. Буонерба Курносов получил новое доказательство теоремы Богомолова о том, что VII_0-поверхностями с $b_2 = 0$ могут быть только поверхности Хопфа и Иноэ. Доказательство носит скорее теоретико-групповой характер, одной из ключевых идей является построение слоения на V_0H-поверхности X с $b_2 = 0$ и изучение аффинных структур на торе.

Работа отправлена в журнал и доступна на ArXiv в качестве препринта.

7.5. Простые и послойно стабильные расслоения на твисторных пространствах гиперкэлеровых многообразий

Гиперкэлерова структура на гладком многообразии M задается тройкой интегрируемых почти-комплексных структур I, J, K, удовлетворяющих кватернионным соотношениям $I^2 = J^2 = K^2 = -1$, $IJ = -JI = K$, и римановой метрикой g, эрмитовой по отношению к этим трем структурам, и такой, что соответствующие эрмитовы формы замкнуты. Нетрудно видеть, что на таком многообразии имеется целая 2-сфера интегрируемых почти-комплексных структур

$$S^2 = \{aI + bJ + cK : a^2 + b^2 + c^2 = 1\},$$

называемых индуцированными структурами. Произведение $M \times S^2$, параметризующее индуцированные структуры в точках M, называется твисторным пространством гиперкэлерова многообразия и обозначается через $\mathrm{Tw}(M)$; отождествляя S^2 с $\mathbb{C}P^1$, можно показать [15], что $\mathrm{Tw}(M)$ обладает естественной комплексной структурой, такой что проекция $\pi : \mathrm{Tw}(M) \to \mathbb{C}P^1$ голоморфна.

Естественная эрмитова метрика произведения на $\mathrm{Tw}(M)$ не является кэлеровой [8], однако, как было доказано Д. Калединым и М. Вербицким в статье [9], она удовлетворяет более слабому условию сбалансированности (позднее это результат был обобщен на случай гиперкомплексных многообразий [18]). Сбалансированность многообразия $\mathrm{Tw}(M)$ является достаточным условием для корректного определения степени и наклона векторного расслоения E на $\mathrm{Tw}(M)$, что позволяет говорить о стабильности расслоений и соответствующем пространстве модулей.

В вышеуказанной статье Каледина и Вербицкого доказывается, среди прочего, что если расслоение E на $\mathrm{Tw}(M)$ стабильно ограничивается на хотя бы один слой твисторной проекции $\pi : \mathrm{Tw}(M) \to \mathbb{C}P^1$, оно будет стабильно и как расслоение на $\mathrm{Tw}(M)$, более того, оно не будет иметь подпучков строго меньшего ранга (в данном случае, мы называем расслоение E простым). В работе [19] приводится частичное доказательство обратного утверждения: простое векторное расслоение E на Tw(M) стабильно ограничивается на общий слой твисторной проекции π : Tw(M) $\to$ CP ^{1} в случае если ранг E равен 2, 3 или 5, а также в общем случае если для общей точки $I \in$ CP^1, ограничение $E_I = E|_{\pi^{-1}(I)}$ удовлетврояет условию Hom(E, E_I) = C. Ключевым моментом доказательства является обобщение результата А. Телемана об открытости по Зарисскому условия стабильности в семействах голоморфных расслоений на фиксированном комплексном многообразии [17] на случай твисторной проекции π : Tw(M) $\to$ CP ^{1}, в слоях которой комплексная структура на M варьируется. В [19] также приводится пример стабильного расслоения на твисторном пространстве Tw(M), которое нестабильно ограничивается на все слои твисторной проекции.

7.6. Субтвисторные метрики на пространствах периодов гиперкэлеровых многообразий

М. Вербицкий доказал в 2009 году глобальную теорему Торелли для гиперкэлеровых многообразий. Будем называть гиперкэлеровым многообразием компактное односвязное кэлерово многообразие M с голоморфной симплектической формой, которая порождает все $H^{2,0}(M)$. Нас интересует грубое пространство модулей гиперкэлеровых структур, под которым можно понимать пространство комплексных структур гиперкэлерового типа, уважающих фиксированную ориентацию, отфакторизованное по действию группы сохраняющих ориентацию диффеоморфизмов. Это нехаусдорфово многообразие, однако, благодаря теореме Хойбрехтса, над нехаусдорфовыми точками есть контроль — если две точки неотделимы, то соответсвующие многообразия бимероморфны. На вторых когомологиях гиперкэлеровых многообразий есть билинейная симметрическая невырожденная целочилсенная форма, называемая формой Бовиля–Богомолова, ее сигнатура $(3, b_2 - 3)$ и она топологически инвариантна.

Теоремы типа Торелли описывают пространства модулей в терминах структур Ходжа. Можно определить отображение периодов из пространства модулей поляризованных гиперкэлеровых структур в проективизацию вторых когомологий P$H^2(M,$ C) с формой Богомолова–Бовиля, отправляя голоморфно-симплектическую форму в прямую, порожденную ей в когомологиях. Назовем образ отображения периодов пространством периодов. Теорема Торелли Вербицкого утверждает, что на компоненте связности пространства модулей отображение периодов инъективно вне счетного набора гиперплоскостей.

Одним из шагов доказательства является заведение специальной метрики (субтвисторной) на пространстве периодов, и сведение задачи к вопросу общей топологии: доказать, что топология, индуцированная такой метрикой, совпадает со стандартной (то есть индуцированной римановой метрикой).

Гиперкэлерова комплексная структура всегда лежит в целом семействе гиперкэлеровых структур, параметризованом проективной прямой CP^1. Этому семейству соотвествует в пространстве периодов аналитическая кривая, называемая твисторной кривой.

Можно выбрать фоновую риманову метрику на пространстве периодов, а потом определить субтвисторное расстояние, по аналогии с субримановым расстоянием в теории оптимального управления: соединим две точки цепочкой твисторных кривых (это всегда можно сделать) и измерим расстояние вдоль этой цепочки, и возьмем в качестве субтвисторного расстояния инфимум таких чисел вдоль всевозможных цепочек.

Оригинальное доказательство утверждения об эквивалентности субтвисторной и римановой метрик опиралось на некоторый вариант пятой проблемы Гильберта — сложного технического утверждения, полное доказательство которого требует целой книги.

Сотрудником лаборатории Д. Коршуновым было найдено элементарное доказательство эквивалентности метрик (не только топологической, но и билипшицевой): с помощью аппроксимационной леммы, родственной теореме о выпуклом интегрировании Громова и теореме релаксации Филиппова, можно показать, что локально билипшицев тип метрики, определяемой как инфимум длин разрешенных путей (то есть путей, в каждой точке касающихся поля множеств разрешенных направлений, с правильно сформулированными условиями регулярности), зависит только от выпуклой оболочки поля множеств разрешенных направлений. В нашем случае множествами разрешенных направлений в точке являются конуса, образованные всеми касательными к твисторным кривым, проходящим через точку. Их выпуклая оболочка составляет всю касательную плоскость.

В настоящий момент готовится препринт с изложением деталей доказательства.

7.7. Геометрия гамильтоновых многообразий с инвариантными изотропными подмногообразиями.

Одним из основных инструментов для исследования геометрии действий редуктивных групп на алгебраических многообразиях являются симплектические многообразия, снабженные отображением моментов. Структура действия группы G на алгебраическом многообразии, а также структура орбит действия ее борелевской подгруппы тесно связана с G-эквивариантной симплектической геометрией их кокасательных расслоений. Научным сотрудником лаборатории В.С.Жгуном (совместно с Д. А. Тимашевым) были начаты исследования симплектических многообразий, содержащих G-инвариантные лагранжевы многообразия. Их цель — обобщение результатов об эквивариантной симплектической геометрии кокасательных расслоений на более общие классы симплектических многообразий. Ранее В.С.Жгуном (совместно с Д.А.Тимашевым) была доказана следующая теорема, описывающая образ отображения момента для симплектических многообразий, содержащих специальные коизотропные многообразия.В этом году была доказана теорема о равноразмерности слоев морфизма фактор-отображения моментов вне множества коразмерности 2 для симплектичских многообразий с инвариантными лагранжевыми подмногообразиями и нормальным прообразом нуля для отображения моментов максимальной унипотентной подгруппы. На основе этой теоремы было получено новое доказательство теоремы о том, что малая группа Вейля порождена оторажениями, которое потенциально может быть обобщено на малую группу Вейля связанную с орбитами максимальной сложности, но не обязательно максимального ранга. Эти результаты были опубликованы в работе [23].

Напомним, что для многообразия X сложность — это коразмерность типичной орбиты в X борелевской подгруппы B в G, а ранг — это ранг решетки характеров B-полуинвариантных функций на X. Представляет интерес обобщение этого понятия на алгебраически не замкнутые поля. В этом случае, группа B в определении сложности заменяется на минимальную параболическую подгруппу P . Совсем недавно Кнопом и Кретцем были получены новые результаты, дающие новые методы исследования P -сложности для многообразий над алгебраически незамкнутыми полями нулевой характеристики. Пользуясь их методами, мы показали, что P-сферическое многообразие над полем вещественных чисел, то есть многообразие содержащее открытую P-орбиту содержит конечное число P-орбит,с непустым множеством вещественных точек. Эти результаты вошли в доклад “Сложность однородных пространств над алгебраически незамкнутым полем” на семинаре Группы Ли и теория инвариантов в МГУ 04.10.17.

Также были исследован вопрос о возможности реализации обобщенных многообразий флагов в качестве орбиты цепочек вложенных подпространств, ассоциированных с ориентированной диаграммой Дынкина. Пусть G — редуктивная алгебраическая группа над алгебраически замкнутым полем k нулевой характеристики, а B — борелевская подгруппа в G (максимальная связная разрешимая подгруппа). В случае группы GL_n подгруппа B является группой треугольных матриц UT_n и является стабилизатором полного флага в k^n, то есть цепочки подпространств $0 \subset \langle e_1\rangle \subset \langle e_1, e_2\rangle \ldots \subset \langle e_1, \ldots, e_n\rangle$, где вектора $e_1, \ldots, e_n \in k^n$ образуют базис. Как хорошо известно, для группы G и ее борелевской подгруппы B существует вложение $G \subset \mathrm{GL}_n$ для некоторого n, такое что $B = \mathrm{UT}_n \cap G$. Таких вложений, безусловно, очень много, однако для классических групп SO_n и SP_n можно реализовать борелевскую подгруппу как стабилизатор флага изотропных подпространств (то есть тех, на которых билинейная форма тождественно обращается в нуль). Мы построили аналогичную конструкцию для произвольной группы G в терминах диаграмм Дынкина. Однако в конструкции рассматриваются не только флаги подпространств, а цепочки вложенных подпространств, графы вложений которых отвечают ориентированным диаграммам Дынкина. Эти результаты были опубликованы в работе [24].

7.8. Перекладывания отрезков с флипами

Этот раздел посвящен работам ассоциированного участника научного коллектива лаборатории, доцента НИУ ВШЭ Александры Скрипченко.

Перекладывания отрезков — простой комбинаторный объект, который возникает в теории динамических систем (при исследовании бильярдов в рациональных многоугольниках), топологии (в связи с измеримыми слоениями на поверхностях), алгебраической геометрии (при изучении пространств модулей и потока Тейхмюллера) и теории чисел и диофантовой геометрии. Перекладывания можно рассматривать как отображения первого возвращения на трансверсаль для измеримого ориентированного слоения на ориентированной поверхности. Более формально, речь идет о кусочно-линейном отображении отрезка действительной оси в себя, сохраняющем ориентацию.

Динамические свойства перекладываний объектов очень хорошо изучены. В частности, из работ [10], [12], [21] известно, что типичные (почти все по отношению к мере Лебега) перекладывания отрезков минимальны, и, более того, почти все перекладывания строго эргодичны.

Перекладывания отрезков с флипами — естественное обобщение перекладываний отрезков: соответствующему отображению на некоторых подотрезках разрешается обращать ориентацию (это называется флипом). С топологической точки зрения это означает, что слоение не обязано быть ориентированным. В [14] было показано, что наличие флипов коренным образом меняет динамику — почти все перекладывания с флипами имеют периодические точки.

В первой части работы А. Скрипченко (это совместный проект с Сержем Трубецким) мы изучаем минимальные перекладывания отрезков с флипами, то есть такие, у которых периодических точек нет, а все орбиты всюду плотны. Исследована комбинаторика (граф Рози) и геометрия (аналог потока Тейхмюлллера) таких отображений. Получены оценки на хаусдорфову размерность множества параметров, задающих такие перекладывания. Доказательство оценки справа опирается на изучение динамических свойств соответствующих марковских отображений (мы показываем, что оно является быстро распадающимся). Оценка слева получена с использованием идей из [14], по сравнению с версией 2016 года оценка была существенно улучшена. Статья подана в журнал.

Во второй части работы (совместной со студентами факультета математики ВШЭ Полиной Барон и Елизаветой Аржаковой) мы изучаем символическую динамику, связанную с перекладываниями отрезков с флипами. Мы обнаружили, что ассоциированный с такими перекладываниями марковский сдвиг не является топологически перемешивающим (что радикально отличает этот случай от других частичных изометрий отрезков, например, перекладываний или линейных инволюций). Текст работы в процессе написания.

Литература

[1] Amerik E., Campana F., "Specialness and Isotriviality for Regular Algebraic Foliations", arXiv:1709.07420.

[2] Amerik, Ekaterina, Campana, Frédéric, "Characteristic foliation on non-uniruled smooth divisors on hyperkähler manifolds". J. Lond. Math. Soc. (2) 95 (2017), no. 1, 115–127.

[3] Amerik E., Kuznetsova A., "Endomorphisms of projective bundles over a certain class of varieties", Bulletin of Korean Mathematical Society, 54 (2017), No. 5, pp. 1743–1755.

[4] Amerik, Ekaterina, Verbitsky, Misha, "Construction of automorphisms of hyperkähler manifolds", Compos. Math. 153 (2017), no. 8, 1610–1621.

[5] Amerik, Ekaterina, Verbitsky, Misha, "Morrison–Kawamata cone conjecture for hyperkähler manifolds", Ann. Sci. Ec. Norm. Supér. (4) 50 (2017), no. 4, 973–993.

[6] J. Athreya, J. Chaika, *The Hausdorff Dimension of Non-Uniquely Ergodic directions in* $H(2)$ *is almost everywhere* $1/2$; Geometry and Topology **19** (2015), 3537–3563.

[7] Campana, F., "Orbifoldes géométriques spéciales et classification biméromorphe des variétés kählériennes compactes", J. Inst. Math. Jussieu 10 (2011), no. 4, 809–934.

[8] N. J. Hitchin, "Kählerian twistor spaces", *Proc. London Math. Soc.* **43** (1981), pp. 133–150.

[9] D. Kaledin, M. Verbitsky, "Non-Hermitian Yang–Mills connections", *Selecta Math. New Series* **4** (1998), pp. 279–320.

[10] M. Keane. *Interval exchange transformations*, Math. Z. **141** (1975), 25–31.

[11] N.M. Kurnosov, "Constraints for Betti numbers of hyperkähler manifolds in dimension six", in preparation to Proceedings of miniPAGES (Warsaw).

[12] H. Masur, *Interval exchange transformations and measured foliations*, Ann. Math. (2) **115**, 1(1982), 169–200.

[13] M. L. Michelsohn, “On the existence of special metrics in complex geometry”, *Acta Math.* **149** (1982), no. 3-4, pp. 261–295.

[14] A.Nogueira, *Almost all interval exchange transformations with flips are nonergodic*, Ergod. Th. & Dynam. Sys. 9(1989), 515–525.

[15] S. Salamon, “Quaternionic K¨ahler manifolds”, *Inv. Math.* **67** (1982), pp. 143-171

[16] David Spring, “Convex integration theory”, Vol. 92. Monographs in Mathematics. Solutions to the *h*-principle in geometry and topology. Birkhauser Verlag, Basel, 1998, pp. viii+213.

[17] A. Teleman, “Families of holomorphic bindles” *Commun. Contemp. Math.* **10** (2008), pp. 523–551.

[18] A. Tomberg, “Twistor spaces of hypercomplex manifolds are balanced”, *Advances in Mathematics* **280** (2015), pp.282–300.

[19] A. Tomberg, “Fibrewise stable bundles on twistor spaces of hyperk¨ahler manifolds”, preprint.

[20] Н.А. Тюрин, “Специальные бор–зоммерфельдовы лагранжевы подмногообразия в алгебраических многообразиях”, to appear.

[21] W. Veech, *Gauss measures for transformations on the space of interval exchange maps*, Ann. Math. (2) **115**, 1 (1982), 201–242.

[22] Misha Verbitsky, “Mapping class group and a global Torelli theorem for hyperkähler manifolds”. In: Duke Math. J.162.15 (2013).Appendix A by Eyal Markman, pp. 2929–2986.

[23] Жгун В. С., “Свойства фактор-отображения моментов для симплектических многообразий с инвариантными лагранжевыми подмногообразиями”, Труды научно-исследовательского института системных исследований Российской академии наук. 2017. Т. 7, 3. С. 39–48.

[24] Жгун В. С., “О цепочках вложенных подпространств и многообразиях полных флагов”, Труды научно-исследовательского института системных исследований Российской академии наук 2017. Т. 7., 3. С. 57–60.