Правительство Российской Федерации
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
ВЫСШАЯ ШКОЛА ЭКОНОМИКИ
(НИУ ВШЭ)

УДК 512.66
Рег. N НИОКТР АААА-А18-118032390254-6
Рег. N ИКРБС

УТВЕРЖДАЮ

Проректор НИУ ВШЭ
канд. экон. наук, доц.

____________________ М.М. Юдкевич

«_____» _________________ 2018 г.

ОТЧЕТ
О НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОЙ РАБОТЕ

АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

(заключительный)

Руководитель НИР,
зав. Лабораторией алгебраической геометрии
и ее приложений д-р физ.-мат. наук, проф. ______________________ Д.Б. Каледин

Москва 2018

СПИСОК ИСПОЛНИТЕЛЕЙ

Руководитель темы:

д.ф.-м.н., научный руководитель	_____________ подпись, дата	Ф.А. Богомолов (раздел 3)

Исполнители:

стажер-исследователь	____________ подпись, дата	С.А. Абрамян (раздел 3)
к.ф.-м.н., научный сотрудник	____________ подпись, дата	А.А. Авилов (раздел 5)
д.ф.-м.н., научный сотрудник	____________ подпись, дата	Е.А. Америк (раздел 6)
PhD, заместитель заведующего лабораторией	_____________ подпись, дата	М.С. Вербицкий (раздел 6)
стажер-исследователь	_____________ подпись, дата	В.С. Гавран (раздел 2)
стажер-исследователь	_____________ подпись, дата	Л.А. Гусева (раздел 2)
к.ф.-м.н., научный сотрудник	_____________ подпись, дата	А.Д. Елагин (раздел 2)
к.ф.-м.н., научный сотрудник	____________ подпись, дата	В.С. Жгун (раздел 6)
к.ф.-м.н., научный сотрудник	_____________ подпись, дата	И.Ю. Ждановский (раздел 2)
д.ф.-м.н., PhD, заведующий лабораторией	_____________ подпись, дата	Д.Б. Каледин (раздел 1, 3)
к.ф.-м.н., PhD, научный сотрудник	_____________ подпись, дата	В.А. Кириченко (раздел 4)
стажер-исследователь	____________ подпись, дата	Г.М. Кондырев (раздел 3)
стажер-исследователь	______________ подпись, дата	Д.О. Коршунов (раздел 6)

стажер-исследователь	____________ подпись, дата	В.В. Крылов (раздел 4)
д.ф.-м.н., научный сотрудник	____________ подпись, дата	А.Г. Кузнецов (раздел 2)
к.ф.-м.н., научный сотрудник	____________ подпись, дата	Н.М. Курносов (раздел 6)
стажер-исследователь	____________ подпись, дата	К.В. Логинов (раздел 5,7)
к.ф.-м.н., научный сотрудник	____________ подпись, дата	С.М. Львовский (раздел 5)
к.ф.-м.н., научный сотрудник	____________ подпись, дата	Е. Македонский (раздел 4)
к.ф.-м.н., научный сотрудник	____________ подпись, дата	Н.С. Маркарян (раздел 3)
к.ф.-м.н., научный сотрудник	____________ подпись, дата	И.В. Нетай (раздел 4)
д.ф.-м.н., научный сотрудник	____________ подпись, дата	Ю.Г. Прохоров (раздел 5)
д.ф.-м.н., PhD, научный сотрудник	____________ подпись, дата	М.З. Ровинский (раздел 3)
стажер-исследователь	____________ подпись, дата	В.К. Рогов (раздел 6)
к.ф.-м.н., научный сотрудник	____________ подпись, дата	А.А. Рослый (раздел 2)
к.ф.-м.н., научный сотрудник	____________ подпись, дата	С.Ю. Рыбаков (раздел 3)
к.ф.-м.н., PhD, научный сотрудник	____________ подпись, дата	Е.Ю. Смирнов (раздел 4)
PhD, научный сотрудник	____________ подпись, дата	Д.А. Сустретов (раздел 6)
стажер-исследователь	____________ подпись, дата	Л.А. Суханов (раздел 3)
стажер-исследователь	____________ подпись, дата	А.Ю. Томберг (раздел 6)

к.ф.-м.н., научный сотрудник	___________ подпись, дата	А.С. Трепалин (раздел 5)
д.ф.-м.н., научный сотрудник	____________ подпись, дата	Е.Б. Фейгин (раздел 4)
к.ф.-м.н., PhD, научный сотрудник	_____________ подпись, дата	М.В. Финкельберг (раздел 4)
д.ф.-м.н., PhD, научный сотрудник	____________ подпись, дата	И.А. Чельцов (раздел 5)
к.ф.-м.н., научный сотрудник	_____________ подпись, дата	К.А. Шрамов (раздел 5)

Нормоконтролер Кузнецова В.В.

РЕФЕРАТ

Отчет 115 стр., 7 ч., 0 рис., 0 табл., 159 источников, 0 прил.

Ключевые слова: производные категории, исключительные наборы на грассманианах, изотропный грассманиан, диаграммы Юнга, полуортогональное разложение, эквивариантные производные категории, триангулированные категории, некоммутативные деформации, квантовая теория информации, самодуальная теория Янга–Миллса, конструкция Атьи–Дринфельда–Хитчина–Манина, гипотеза о геометрическом сечении, башня Лежандра, группы Чжоу, n-алгебры Вейля, инварианты Аксельрода–Зингера, инварианты Громова–Виттена, теорема Кемпбелла–Бейкера–Хаусдорфа, теорема Гротендика–Римана–Роха, кристаллические когомологии, теорема Хохшильда–Костанта–Розенберга, циклическая категория, полубесконечное многообразие флагов, бесконечномерные алгебры Ли, подмногообразия Бора–Зоммерфельда, перекладывания отрезков, многообразия Фано, колчанные грассманианы типа Шуберта, полиномы Пуанкаре, характеры Демазюра, диски Зигеля, примитивные формы Сайто, гепнеровские особенности, кристаллы Кашивары, аффинный грассманиан, аффинная группа Каца–Муди, поверхность дель Пеццо, обобщенные модули Вейля, несимметрические многочлены Макдональда, исчисление Шуберта, симплектические многогранники Гельфанда–Цетлина, комплекс Кошуля, исчисление Шуберта, колчанные многообразия, многочлены Костки–Шоджи, гепнеровская особенность, K3 поверхность, пространство модулей, рациональные кривые, голоморфно симплектическое многообразие, кэлерово многообразие, гиперкэлерово многообразие, многообразия Фано, группа Кремоны, субриманова метрика, теорема Торелли, отображение периодов, специ-

альное лагранжево подмногообразие, лагранжево слоение, гиперкомплексное многообразие, некэлерово многообразие, зеркальная симметрия, монодромия, биголоморфизм, эргодическое действие, метрики Кобаяши, гиперболические многообразия, теорема Торелли, пространство Тейхмюллера, некоммутативная геометрия, вектора Витта, аддитивные категории, K-теория Моравы, циклические когомологии, геометрическое квантование, когомологии Хохшильда.

Объектом исследования являются
-геометрическая теория представлений,
-арифметическая алгебраическая геометрия,
-бесконечномерные алгебры Ли,
-гомологические и мотивные методы в некоммутативной геометрии,
-производные категории,
-классическая геометрия,
-гиперкэлеровы многообразия и специальные многообразия.

Цель проекта: исследования в области алгебраической геометрии и пограничных с ней областях- теория чисел, дифференциальная и комплексная геометрия, геометрический анализ.

Результаты носят теоретический характер и являются существенно новыми. Возможны приложения к теоретической физике, дифференциальной геометрии, теории чисел и задачам классификации комплексных многообразий.

СОДЕРЖАНИЕ

1 Введение

За отчетный период (2018) Лаборатория алгебраической геометрии и ее приложений организовала 2 международные конференции "Бирациональная геометрия"(26.03.2018 - 30.03.2018 и 29.10.2018 - 31.10.2018). Основные научные организаторы конференции: научные сотрудники Лаборатории Ю.Г.Прохоров и К.А.Шрамов. В период с 25.06.2018 по 29.06.2018 была проведена международная конференция по группам Брауэра (организатор: научный сотрудник Лаборатории С.Ю.Рыбаков). Лаборатория также выступила со-организатором совместно с факультетом математики НИУ ВШЭ, Междисциплинарным центром Понселе, Сколковским институтом науки и технологий и Независимым Московским Университетом, международной конференции "L-функции и алгебраические многообразия"памяти А.И.Зыкина (05.02.2018 -09.02.2018).

Была проведена ставшая традиционной Восьмая летняя математическая школа "Алгебра и геометрия"(23.07.2018 - 31.07.2018), в которой приняло участие около 90 человек. Впервые в этом году в одновременно со школой была проведена Международная конференция "Алгебра и геометрия"(29.10.2018 - 31.10.2018).

Лаборатория организовала визиты 10 ученых из мировых научных центров, которые провели совместные научные исследования с сотрудниками, консультации стажеров Лаборатории и студентов факультета математики, а также сделали доклады на еженедельном семинаре Лаборатории. По результатам исследований в 2018 году сотрудниками лаборатории было опубликовано 34 работы, в т.ч. 35 - в журналах, индексируемых WoS / Scopus, из них в журналах квартиля Q1 / Q2 - 27.

Сотрудники лаборатории принимали участие в международных конференциях, семинарах, воркшопах, где выступили с 47 докладами, в которых представили результаты своих исследований в лаборатории. 6 сотрудников лаборатории, в т.ч. 4 стажера-исследователя, приняли участие в программах повышения квалификации в ведущих мировых научных центров.

Научная деятельность сотрудников лаборатории была отмечена различными премиями и наградами:

- Евгений Фейгин стал лауреатом премии правительства Москвы молодым ученым

- Дмитрий Каледин, Константин Шрамов и Никон Курсносов стали победителями конкурсов на получение исследовательских грантов фонда "БАЗИС"

- сотрудники лаборатории получили 2 гранта РНФ: группа сотрудников Лаборатории под руководством Ю.Г.Прохоров с проектом "Автоморфизмы алгебраических многообразий"и группа Д.Б.Каледина с проектом "Гомологические основы некоммутативной алгебраической геометрии это совместный проект факультета математики и ассоциированных научных лабораторий;

- стажер-исследователь Семен Абрамян стал лауреатом премии НИУ ВШЭ "Серебряный птенец";

- стажер лаборатории, выпускница факультета математики Ляля Гусева стала аспиранткой НИУ ВШЭ.

Сотрудники лаборатории продолжали вести активную педагогическую работу, ими были прочитаны курсы на факультете математики НИУ ВШЭ, в Независимом Московском Университете, НОЦ МИАН, программе Math in Moscow, на школах для студентов, аспирантов и молодых ученых, проводимых как лабораторией, так и крупными международными научными и учебными центрами. Часть курсов была прочитана впервые. По итогам студенческого голосования научный сотрудник Лаборатории, доцент факультета математики Е.Ю.Смирнов был выбран "Лучшим преподавателем НИУ ВШЭ".

На протяжении года шел студенческий семинар "Геометрические структуры на многообразиях"(3-4 часа в неделю), где выступали стажеры лаборатории и студенты факультета математики. Продолжал свою работу Еженедельный семинар Лаборатории алгебраической геометрии (почти 50 двухчасовых докладов в 2018 году), среди докладчиков - сотрудники Лаборатории и факультета, ассоциированные члены научного коллектива Лаборатории, ученые из российских и мировых научных центров.

Сотрудниками лаборатории были получены значительные результаты по основным темам, заявленным на 2018 год:

- Производные категории

- Гомологические и мотивные методы в некоммутативной геометрии

- Геометрическая теория представлений

- Классическая геометрия

- Специальные многообразия

Результаты работ по этим темам составляют содержание настоящего отчета.

2 Производные категории

2.1 Производные категории особых поверхностей

Сотрудник лаборатории А. Кузнецов (совместно с Д. Кармазиным и Е. Шиндером) занимался изучением структуры производных категорий когерентных пучков на рациональных поверхностей с циклическими факторособенностями. В отличии от гладких поверхностей, такие поверхности не могут иметь полного исключительного набора. Однако, оказывается, что в большом числе случаев рациональные поверхности такого типа допускают полуортогональное разложение, каждая из компонент которого эквивалентна производной категории модулей над локальной конечномерной алгеброй. Ожидается, что полуортогональные разложения такого вида являются естественным обобщением исключительных наборов на случай особых многообразий.

Опишем полученные результаты более явно. Наиболее точные результаты получены для нормальных торических поверхностей. Пусть X — такая поверхность. Предположим, что группа классов дивизоров Вейля $\mathrm{Cl}(X)$ не имеет кручения. Тогда применяется следующая конструкция.

Рассмотрим минимальное разрешение особенностей $\pi\colon \tilde{X} \to X$ поверхности X (оно задается минимальным подразбиением ее веера, каждый из конусов которого насыщен). Обозначим через

$$E_{1,0}, E_{1,1} \dots, E_{1,m_1};\ E_{2,0}, E_{2,1}, \dots, E_{2,m_2};\ \dots;\ E_{n,0}, E_{n,1}, \dots, E_{n,m_n}$$

неприводимые торически-инвариантные дивизоры на $\tilde{X}$, так что $E_{i,p}$ с $p \geq 1$ являются исключительными дивизорами морфизма π, а $E_{i,0}$ являются собственными прообразами торически-инвариантных дивизоров на X, причем относительно указанного выше циклического порядка эти дивизоры образуют “колесо” (иначе говоря, два дивизора пересекаются тогда и только тогда, когда они являются соседними относительно циклического порядка).

Рассмотрим построенный Хилле [10] исключительный набор

$$\mathcal{O}(E_{1,0}), \mathcal{O}(E_{1,0} + E_{1,1}), \dots, \mathcal{O}(E_{1,0} + E_{1,1} + \dots + E_{n,m_n})$$

линейных расслоений на $\tilde{X}$ и рассмотрим подкатегории, порожденные его блоками

$$\tilde{\mathcal{A}}_i = \langle \mathcal{O}(E_{1,0} + E_{1,1} + \dots + E_{i,0}), \dots, \mathcal{O}(E_{1,0} + E_{1,1} + \dots + E_{i,m_i}) \rangle.$$

Заметим, что подкатегории $\tilde{\mathcal{A}}_i$ с одной стороны являются допустимыми подкатегориями в $\mathrm{D}^b(\tilde{X})$, а с другой стороны, порождаются одним линейным расслоением $\mathcal{O}(E_{1,0} + E_{1,1} + \cdots + E_{i,0})$ и последовательностью пучков

$$\mathcal{O}_{E_{i,1}}(-1 + b_{i,1}), \ldots, \mathcal{O}_{E_{i,m_i}}(-1 + b_{i,m_i})$$

сосредоточенных на исключительных дивизорах морфизма π (здесь $b_{i,p}$ — целые числа, зависящие от индексов самопересечения дивизоров $E_{i,p}$).

Оказывается, что если группа $\mathrm{Cl}(X)$ не содержит кручения, то найдется линейное расслоение $\tilde{\mathcal{L}}$ на $\tilde{X}$, такое что

$$\tilde{\mathcal{L}}|_{E_{i,p}} \cong \mathcal{O}_{E_{i,p}}(b_{i,p})$$

для всех i и $p \geq 1$. Подкручивая исходный исключительный набор на двойственное расслоение можно добиться того, что пучки сосредоточенные на исключительных дивизорах в компонентах полуортогонального разложения производной категории $\mathrm{D}^b(\tilde{X})$, являются пучками $\mathcal{O}_{E_{i,p}}(-1)$, порождающими ядро производного функтора прямого образа

$$\pi_*\colon \mathrm{D}^b(\tilde{X}) \to \mathrm{D}^b(X).$$

Отсюда следует, что категории

$$\mathcal{A}_i := \pi_*(\tilde{\mathcal{A}}_i \otimes \tilde{\mathcal{L}}^\vee) \subset \mathrm{D}^b(X)$$

образуют полуортогональное разложение

$$\mathrm{D}^b(X) = \langle \mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \ldots, \mathcal{A}_n \rangle.$$

Компоненты полученного разложения можно явно описать.

Во-первых, можно использовать описание компоненты $\tilde{\mathcal{A}}_i$, по существу полученное в [11], как производной категории над некоторой квазинаследственной алгеброй Λ_i с $m_i + 1$ простым модулем, при котором пучки $\mathcal{O}_{E_{i,p}}(-1 + b_{i,p})$ соответствуют всем простым модулям кроме одного. Отсюда следует, что категория $\mathcal{A}_i$ эквивалентна производной категории модулей над алгеброй эндоморфизмов проективного Λ_i-модуля, соответствующего оставшемуся простому Λ_i-модулю. Эта алгебра была явно вычислена в [12] как

$$K_i := \frac{\Bbbk\langle z_1, \ldots, z_l \rangle}{\left\langle \begin{array}{r} z_j \left(z_j^{c_j-2}\right) \left(z_{j+1}^{c_{j+1}-2}\right) \ldots \left(z_{k-1}^{c_{k-1}-2}\right) \left(z_k^{c_k-2}\right) z_k = 0 \quad \text{при } j \geq k \\ z_j z_k = 0 \quad \text{при } j < k \end{array} \right\rangle}.$$

Здесь $c_1, \dots, c_l$ — коэффициенты в цепной дроби Хирцебруха–Джунга, представляющей рациональное число $r_i/(r_i - a_i)$, где числа r_i и a_i описывают циклическую факторособенность на поверхности X, являющуюся образом цепочки рациональных кривых $E_{i,1}, \dots, E_{i,m_i}$. Алгебры K_i очевидно являются локальными конечномерными алгебрами и построенное полуортогональное разложение является искомым.

В случае, когда группа классов дивизоров Вейля $\mathrm{Cl}(X)$ поверхности X содержит кручение, приведенная выше конструкция не работает. Более того, в этом случае группа Гротендика производной категории когерентных пучков $\mathrm{D}^b(X)$ также содержит кручение и из-за этого не существует полуортогональных разложений этой категории на производные категории конечномерных локальных алгебр. Однако, оказывается возможной интересная модификация конструкции.

Во-первых, хотя необходимого линейного расслоения $\tilde{\mathcal{L}}$ на $\tilde{X}$ не существует, вместо него существует векторное расслоение $\tilde{\mathcal{V}}$ подходящего ранга r, такое что

$$\tilde{\mathcal{V}}|_{E_{i,p}} \cong \mathcal{O}_{E_{i,p}}(b_{i,p})^{\oplus r}.$$

Его алгебра эндоморфизмов $\tilde{\mathcal{R}} := \tilde{\mathcal{V}}^\vee \otimes \tilde{\mathcal{V}}$ является Морита-тривиальной алгеброй Адзумаи на $\tilde{X}$, которая тривиально ограничивается на все исключительные дивизоры морфизма π, и значит является обратным образом

$$\tilde{\mathcal{R}} \cong \pi^*\mathcal{R}$$

алгебры Адзумаи $\mathcal{R}$ на X (уже не Морита-тривиальной). При этом функтор

$$\pi_*^{\tilde{\mathcal{V}}} \colon \mathrm{D}^b(\tilde{X}) \to \mathrm{D}^b(X, \mathcal{R}), \qquad \mathcal{F} \mapsto \pi_*(\mathcal{F} \otimes \tilde{\mathcal{V}}^\vee)$$

является категорным разрешением особенностей скрученной производной категории $\mathrm{D}^b(X, \mathcal{R})$ поверхности X, а категории

$$\mathcal{A}_i := \pi_*^{\tilde{\mathcal{V}}}(\tilde{\mathcal{A}}_i) = \pi_*(\tilde{\mathcal{A}}_i \otimes \tilde{\mathcal{V}}^\vee) \subset \mathrm{D}^b(X, \mathcal{R})$$

по прежнему эквивалентны производным категориям K_i-модулей и образуют полуортогональное разложение

$$\mathrm{D}^b(X, \mathcal{R}) = \langle \mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \dots, \mathcal{A}_n \rangle.$$

Тем самым, в данном случае мы получаем полуортогональное разложение подходящим образом скрученной производной категории поверхности X, каждая из компонент которого является производной категорией модулей над локальной конечномерной алгеброй.

2.2 Диагональная размерность триангулированных категорий

Около десяти дет назад Р. Рукье дал определение размерности триангулированной категории, измеряющее её "сложность". Для триангулированной категории T и её генератора G время порождения определяется как минимум таких n, что любой объект в T есть прямое слагаемое объекта, допускающего "фильтрацию" длины n, факторы которой суть конечные прямые суммы сдвигов G. Размерность Рукье категории определяется как минимум времени порождения по всем генераторам категории. Основной недостаток данного определения — размерность Рукье трудно вычислять.

При этом трудности связны и с оценками размерности снизу, и с оценками сверху. В большинстве случаев, когда размерность Рукье известна, оценка сверху получается при помощи построения исключительного набора. А именно, если в триангулированной категории имеется полный исключительный набор из $n+1$ блока, то размерность Рукье этой категории не превышает n. Исторически первые примеры полных исключительных наборов на алгебраических многообразиях строились при помощи резольвенты диагонали. Для алгебраического многообразия X резольвента диагонали — это резольвента структурного пучка диагонали на $X \times X$ при помощи расслоений, имеющих вид $F_1 \boxtimes F_2$ для некоторых расслоений F_1, F_2 на X. Такая резольвента позволяет написать для любого объекта F категории $D^b(\operatorname{coh} X)$ фильтрацию с факторами, являющимися прямыми суммами фиксированного конечного множества расслоений. Причём длина этой фильтрации равна длине резольвенты. Кроме того, такая фильтрация функториальна относительно объекта F. Тем самым, резольвента диагонали позволяет ограничивать сверху размерность Рукье производной категории многообразия.

Понятие резольвенты диагонали мотивирует определение диагональной размерности многообразия, данное М. Баллардом и Д. Фаверо в [3]. А именно, диагональная размерность X определяется как минимальное число n, для которого структурный пучок диагонали на $X \times X$ допускает (с точностью до прямого слагаемого) "фильтрацию" длины n с факторами, имеющими вид $F_1 \boxtimes F_2$ для некоторых объектов F_1, F_2 производной категории X. Диагональная размерность — это более сильный аналог размерности Рукье, её оценка сверху.

Сотрудник Лаборатории А. Елагин (совместно с В. Лунцем) занимался изучением диагональной размерности для произвольных оснащённых триангулированных категорий, см. [5]. Было дано более общее определение диагональной размерности для гладких оснащённых триангулированных категорий, проверена его независимость от оснащения. Была установлена субаддитивность для диагональной размерности при тензорном произведении категорий. А именно, было показано, что для DG-алгебр A и B диагональная размерность категории $\mathrm{Perf}(A \otimes B)$ не больше суммы диагональных размерностей категорий $\mathrm{Perf}(A)$ и $\mathrm{Perf}(B)$. Это утверждение позволяет оценивать сверху диагональную размерность (а значит, и размерность Рукье) произведений алгебраических многообразий. В то же время, аналогичное свойство для размерности Рукье не выполнено, были построены примеры конечномерных алгебр, для которых нарушается субаддитивность размерности Рукье.

2.3 Склейки абелевых категорий и гомотопы

В работе Франжу и Пирашвили [6] было введено понятие “склейки” (recollement) абелевых категорий. Ранее понятие “склейки” было введено в работе Бейлинсона–Бернштейна–Делиня для триангулированных категорий. “Склейка” между абелевыми категориями — тройка абелевых категорий $(\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C})$ и набор функторов:

$$i \colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}, \qquad e \colon \mathcal{B} \to \mathcal{C}$$

и сопряженные им:

$$q \colon \mathcal{B} \to \mathcal{A}, \quad p \colon \mathcal{B} \to \mathcal{A}, \quad \text{и} \quad l \colon \mathcal{C} \to \mathcal{B}, \quad r \colon \mathcal{C} \to \mathcal{B},$$

удовлетворяющие следующим условиям: функторы i, l, r — строго полные и образ i совпадает с ядром e. Примером данной ситуации является следующая ситуация: пусть у нас есть алгебра R и e — идемпотент в R. Тогда $\mathcal{A} = (R/ReR)\text{-}Mod$, $\mathcal{B} = R\text{-}Mod$ и $\mathcal{C} = (ReR)\text{-}Mod$. Функторы строятся естественным образом.

В работе Псарудакиса [20] была построена гомологическая теория “приклеивания” абелевых категорий. Подобная ситуация встречается и при изучении гомотопов ассоциативных алгебр. Напомним понятие гомотопа: пусть R — ассоциативная алгебра с единицей и $x \in R$ — фиксированный элемент. Тогда гомотоп алгебры R с помощью элемента x — есть ассоциативная алгебра R_x. R_x как пространство — изоморфно R, но с новой операцией умножения:

$$r_1 *_x r_2 = r_1 x r_2.$$

Получившаяся алгебра вообще говоря не является алгеброй с единицей. Поэтому рассматривают алгебру $\widehat{R}_x$ — формально добавляют единицу к алгебре R_x.

В работе Бондала и Ждановского [4] было показано, что для ассоциативной k-алгебры R категория модулей гомотопа $\widehat{R}_x$-Mod является “склейкой” категорий R-Mod и k-Mod в случае “правильного” выбора элемента x. Такой выбор элемента называется хорошо-темперированным. В этом случае есть естественные оценки на глобальную гомологическую размерность $\widehat{R}_x$-Mod через глобальную размерность R-Mod. В случае конечномерной алгебры R автором предлагается классификация хорошо-темперированных элементов и кроме того показывается, что если в качестве x выбрать не хорошо-темперированный элемент, то гомологическая размерность $\widehat{R}_x$ — бесконечна. В данный момент эта работа готовится к печати.

2.4 Взаимно-несмещенные базисы

Изучались приложения алгебраической геометрии и производных категорий к различным вопросам квантовой теории информации и смежным вопросам. Напомним, что два ортонормированных базиса $\{e_i\}$ и $\{f_j\}$ в эрмитовом пространстве $\mathbb{C}^n$ — взаимно-несмещенные базисы, если

$$(e_i, f_j) = \frac{1}{n}.$$

Несложно показать, что существуют не более чем $n+1$ попарно взаимно-несмещенных базисов в $\mathbb{C}^n$. Давно сформулирована гипотеза о том, что в $\mathbb{C}^n$ существуют $n+1$ этих базисов тогда и только тогда, когда $n = p^k$ для некоторого простого p. Эта проблема пока далека от решения — есть несколько частичных решений в малых размерностях. Сложность решения заключается в решении сложной сильно нелинейной системы алгебраических уравнений.

Отметим, что естественной алгебраической формулировкой задачи является изучение определенного вида представлений редуцированных алгебр Темперли–Либа полного двудольного (в случае изучения пар базисов) и $n+1$-дольного (в случае изучения $n+1$ базисов) графа. Вообще, редуцированная алгебра Темперли–Либа строится по графу Γ без кратных ребер и петель следующим образом: порождающие этой алгебры —

проекторы x_v, индексируемые вершинами графа. Для этих порождающих выполнены соотношения: $x_v x_w = x_w x_v = 0$ если нет ребра между вершинами v, w. Если есть ребро, то $x_v x_w x_v = r x_v, x_w x_v x_w = r x_w$. Для соответствия взаимно-несмещенным базисам нужно положить $r = \frac{1}{n}$. Было показано, что редуцированная алгебра Темперли–Либа является гомотопом алгебры путей графа, что стимулировало исследование гомологической теории гомотопов.

В случае $n = 7$ было построено одномерное семейство пар взаимно-несмещенных базисов. Однако, касательное пространство в каждой точке не меньше 2. Таким образом, естественным образом возникает гипотеза, что эта семейство — частный случай двумерного семейства взаимно-несмещенных базисов. Для построения этого семейства было бы естественно алгебраически проинтерпретировать построенное одномерное семейство. Для этой цели в работе Ждановского и Кочеровой [24] были введены алгебры Нишоары (он первый заметил, что в одномерном семействе выполнено соотношение на ортогональные проекторы, соответствующие базисам). Была построена теория представлений этих алгебр, а также с помощью этих представлений было построено это одномерное семейство. Также в пользу существования двумерности — были построены векторные поля, порождающие двумерное касательное пространство в каждой точке одномерного семейства.

2.5 Свойство сюръективности в семействах рациональных отображений

В работе Ждановского и Каржеманова [13] изучались свойства рациональных отображений проективных пространств $f : \mathbb{P}^n \dashrightarrow \mathbb{P}^n$. В работе [1] был поставлен вопрос об открытости множества сюръективных рациональных отображений в пространстве всех рациональных отображений. В данной работе было показано, что при достаточно общих предположениях на семейство отображений $f_t, t \in T$ выполнено следующее: допустим f_0 — сюръективное, тогда и общий элемент семейства f_t — сюръективное отображение.

2.6 Четырехмерная конформная теория и твисторы

2.6.1 Описание рассматриваемой квантовой модели

Твисторное преобразование предназначено для того, чтобы переформулировать конформно-инвариантные уравнения четырехмерной теории поля в терминах геометрии трехмерного комплексного проективного пространства — пространства твисторов. В случае квантовой теории также можно ожидать подобного соответствия. Примеров твисторного соответствия в квантовой теории пока не много (см., в частности, [22]). Конформные свойства сохраняются в тех квантовых теориях, в которых происходит удачное сокращение ультрафиолетовых расходимостей. Это, как правило суперсимметричные теории. Имеется, однако, пример несуперсимметричной квантовой теории, у которой можно предполагать интересные конформные свойства. Это так называемая самодуальная теория Янга–Миллса.

Простота этой модели определяется конечностью ряда теории возмущений, но при этом в ней присутствуют ультрафиолетовые расходимости и соответствующие перенормировки, которые однако не должны испортить конформные свойства этой модели. Дело в том, что в данной модели нет константы связи, а перенормировки имеются следующих двух типов [18]. Во-первых, это перенормировка топологического члена в действии, а во-вторых, перенормировка поля, которая приводит только к появлению так называемых контактных членов и не портит конформное поведение корреляционных функций конформных наблюдаемых. Задача, к исследованию которой мы теперь перешли, — это задача построения таких наблюдаемых. Мы ожидаем, что это исследование позволит связать свойства рассматриваемой четырехмерной квантовой теории и алгебро-геометрические объекты на твисторном пространстве, что подтверждается в простейшем случае абелевой теории (см. об этом ниже).

2.6.2 Твисторное соответствие применительно к квантовой теории

В задачах теории поля, обладающих конформной инвариантностью естественным математическим орудием является так называемая твисторная конструкция, или твисторное преобразование. В первую очередь этот подход применяется при исследовании классических уравнений поля. Самый знаменитый результат здесь — построение инстантонных решений с помощью геометрии голоморфных расслоений на $\mathbb{CP}^3$ — конструкция Атьи–Дринфельда–Хитчина–Манина. Представляется разумным ожидать большего от твисторной конструкции, в том числе и в ситуации квантовой теории. Мы ожидаем, что самодуальная теория Янга–Миллса даст новые интересные примеры.

На классическом уровне рассматриваемая самодуальная теория эквивалентна голоморфной теории типа Черна–Саймонса [21] в твисторном пространстве. Точнее говоря функционал действия имеет вид

$$S = \int_{\mathbb{CP}^3} \operatorname{tr} B \wedge (dA + A \wedge A)\,,$$

где A — (0,1)-форма со значениями в алгебре Ли калибровочной группы (это $\bar{\partial}$-связность в векторном расслоении), а B — (0,1)-форма с коэффициентами в тензорном произведении $\mathcal{O}(-4)$ с алгеброй Ли (иначе говоря, (3,1)-форма на $\mathbb{CP}^3$ со значениями в алгебре Ли). Слова "со значениями в алгебре Ли калибровочной группы", как всегда, следует понимать как "принимает значения в эндоморфизмах расслоения", структурная группа которого и есть калибровочная группа.

В квантовом случае надо в первую очередь найти правильные наблюдаемые. Согласно общей идеологии ожидается некоторое соответствие между конформными корреляционными функциями четырехмерной квантовой теории и определенными геометрическими объектами в твисторном пространстве. Последние будут иметь смысл, обобщающий понятие голоморфного индекса зацепления [2, 14, 15, 16, 7]. Четырехмерная квантовая теория должна подсказать правильное определение таких "голоморфных инвариантов узлов".

Пример подобной ситуации был рассмотрен Атьей [2]. В этой работе Атья показал, что коррелятор свободной безмассовой скалярной теории (то есть просто функция Грина оператора Лапласа) при твисторном преобразовании приобретает смысл голоморфного индекса зацепления двух (комплексных) прямых в $\mathbb{CP}^3$. Если обобщить эту идею на случай взаимодействующей квантовой теории, можно ожидать появление интересных "голоморфных инвариантов узлов". Пока же мы в состоянии описать только геометрию, отвечающую абелевой теории. В этом случае формулировка рассматриваемой квантовой теории в терминах голоморфной теории типа Черна–Саймонса подсказывает, что в твисторном пространстве следует рассмотреть голоморфное зацепление двух комплексных кривых.

В соответствии с полями в этой теории (поля A и B, описанные выше) нам подходит случай, когда одна из кривых — эллиптическая кривая, а вторая — прямая в $\mathbb{CP}^3$. (Последняя должна быть снабжена еще сечением расслоения $\mathcal{O}(2)$, мы имеем дело, на самом деле, с индексом зацепления "циклов" с коэффициентами в локально свободных пучках.)

Действительно, рассмотрим сначала эллиптическую кривую $X \subset \mathbb{CP}^3$. На X имеется голоморфная 1-форма α и в *абелевом* случае хорошая наблюдаемая имеет вид

$$A(X) = \int_X \alpha \wedge A.$$

Аналогичным образом, пусть $Y \subset \mathbb{CP}^3$ — прямая, а β — 1-форма с коэффициентами в $\mathcal{O}(4)$ на Y. Мы получаем вторую наблюдаемую

$$B(Y) = \int_Y \beta \wedge B.$$

(Напомним, что B — это (0,1)-форма с коэффициентами в $\mathcal{O}(-4)$, так что $\beta \wedge B$ — это просто уже (1,1)-форма на $Y \cong \mathbb{CP}^1$.) Тогда корреляционная функция $\langle A(X)\, B(Y) \rangle$ в рассматриваемой теории на $\mathbb{CP}^3$ равняется голоморфному индексу зацепления кривых, аналогичному рассмотренным в работах [2, 14]. Прямой в $\mathbb{CP}^3$ отвечает при твисторном соответствии точка в пространстве-времени. Интересно, какой геометрический объект в пространстве-времени можно сопоставить эллиптической кривой в $\mathbb{CP}^3$. Пока на этот вопрос легко ответить в случае, когда эллиптическая кривая вырождена в колесо N прямых линий. Тогда в пространстве-времени мы получаем N-угольник с изотропными (светоподобными) сторонами. В этом случае голоморфный индекс зацепления комплексных кривых в $\mathbb{CP}^3$ равен корреляционной функции в 4-мерном пространстве-времени, которая описана ниже.

2.6.3 Корреляционные функции

Сотрудник лаборатории А. Рослый в работе [18] изучил свойства первой нетривиальной двухточечной (однопетлевой) корреляционной функции. Это, на самом деле, полный ответ: напомним, что теория возмущений в рассматриваемой модели обрывается на первой петле. Теперь мы нашли явное выражение и для трехточечной корреляционной функции. С технической точки зрения было бы очень хорошо найти явную формулу для n-точечной функции. Простота модели дает надежду, что эта задача может быть решена. Такой результат дал бы, в частности, описание якобиана замены полевых переменных, рассмотренной в работе [8].

Мы изучили конформные свойства указанных корреляторов. Как уже было сказано, перенормировка поля в самодуальной модели сводится к появлению контактных членов в корреляторах. Рассмотрев одночастично неприводимые диаграммы Фейнмана мы показали, что эти контактные члены обеспечивают конформную инвариантность эффективного действия в квадратичном и кубическом членах. (Под эффективным действием здесь понимается производящая функция для одночастично неприводимых диаграмм.)

С геометрической точки зрения наиболее интересным представляется однако рассмотрение корреляционной функции оператора вильсоновской петли (то есть след оператора голономии связности, $\mathrm{tr}\, Pexp \oint A$, где A — квантовое калибровочное поле) со вставками поля анти-самодуального тензора P. Нам пока удалось найти только явный вид такого коррелятора в случае, когда контур вильсоновской петли представляет из себя светоподобный N-угольник и имеется один оператор P. Явный вид коррелятора удалось найти с помощью твисторного преобразования. Последнее, как известно, основано на том, что уравнения самодуальности можно записать в виде уравнения нулевой кривизны со спектральным параметром (что и означает переход к твисторным переменным). В нашей теории мы имеем дело с пропагатором, то есть такой двухточечной функцией, которая имеет определенную особенность на диагонали, а вне диагонали удовлетворяет абелевым уравнениям самодуальности. Поэтому для нее можно найти описание в виде “полной производной”, что и было сделано. Это позволило нам явным образом вычислить интеграл по светоподобному N-угольнику. Для полученной корреляционной функции мы явно продемонстрировали конформную инвариантность.

Мы нашли еще одно подтверждение конформной инвариантности самодуальной теории Янга–Миллса. Если, как сказано выше, мы еще не умеем записать выражение для n-точечной функции Грина при произвольном $n \in \mathbb{N}$, ее on-shell аналог, то есть n-частичная амплитуда рассеяния известна давно [19]. Она совпадает с амплитудой рассеяния глюонов одинаковой спиральности в стандартной теории Янга–Миллса. Мы показали, что эта амплитуда инвариантна относительно конформных преобразований.

2.7 Исключительные наборы на изотропных грассманианах

Стажером лаборатории Лялей Гусевой был построен полный исключительный набор в ограниченной производной категории когерентных пучков изотропного грассманиана $\mathrm{IGr}(3,8)$ — многообразия, параметризующего трехмерные изотропные подпространства в симплектическом векторном пространстве размерности 8.

Пусть $\mathcal{U}$ — тавтологическое расслоение на $\mathrm{IGr}(3,8)$. Полный исключительный набор выглядит следующим образом:

$$(F, \mathfrak{E}, \mathfrak{E}(1), \mathfrak{E}(2), F(3), \mathfrak{E}(3), \mathfrak{E}(4), \mathfrak{E}(5)),$$

где $\mathfrak{E}(i)$ обозначает следующий набор из пяти элементов

$$\mathfrak{E}(i) := (\Sigma^{2,1}\mathcal{U}^\vee(-1+i), \mathcal{O}(i), \mathcal{U}^\vee(i), S^2\mathcal{U}^\vee(i), \Lambda^2\mathcal{U}^\vee(i)),$$

а F обозначет следующую композицию перестроек

$$F := \mathbb{R}_{\Sigma^{2,1}\mathcal{U}^\vee(-1)}\mathbb{L}_{\mathfrak{E}}(\Sigma^{3,1}\mathcal{U}^\vee))[-3],$$

где $\mathbb{R}_{\Sigma^{2,1}\mathcal{U}^\vee(-1)}$ обозначает правую перестройку через $\Sigma^{2,1}\mathcal{U}^\vee(-1)$, а $\mathbb{L}_{\mathfrak{E}}$ обозначает левую перестройку через набор $\mathfrak{E}$.

Таким образом построенный исключительный набор состоит из 32 элементов $(E_1, \ldots, E_{32})$ и производная категория $\mathrm{D}^b(\mathrm{IGr}(3,8))$ может быть явно описана. А именно любой элемент из $\mathrm{D}^b(\mathrm{IGr}(3,8))$ допускает единственную фильтрацию, такую что ее i-ый фактор изоморфен прямой сумме сдвигов E_i.

Доказанный результат является подтверждением частного случая гипотезы о том, что ограниченная производная категория когерентных пучков любого проективного однородного пространства полупростой алгебраической группы над алгебраически замкнутым полем характеристики 0 допускает полный исключительный набор.

По результатам работы подготовлен препринт [9], который в ближайшее время будет подан в один из реферируемых журналов для публикации.

2.8 Слабые структуры Калаби–Яу

Стажер Лаборатории Владимир Гавран изучал слабые структуры Калаби–Яу на некоторых дифференциально-градуированных категориях. Понятие алгебры Калаби–Яу было введено В. Гинзбургом как естественное обобщение гладких алгебраических многообразий с тривиальным каноническим расслоением. Б. Келлер показал, что любую гладкую дг-категорию $\mathcal{A}$ можно “пополнить” до d-Калаби–Яу дг-категории $\Pi_d(\mathcal{A})$, взяв тензорную дг-категорию обратного дуализирующего комплекса исходной категории $\mathcal{A}$, сдвинутого на $d-1$. В. Юонг в работе [23] ввел понятие слабой n-Калаби–Яу структуры на гладкой дг-категории $\mathcal{A}$, которое определяется как элемент Муавра–Картана для некоторой дг-алгебры Ли, строящейся по $(n-1)$-Калаби–Яу пополнению $\Pi_{n-1}(\mathcal{A})$. Такая структура связана с $(2-n)$-сдвинутой обобщенной структурой Пуассона на категории $\mathcal{A}$. Существование и явное построение таких структур может быть важным источником информации при изучении пространств представлений ассоциативных алгебр, пространств объектов производных категорий гладких алгебраических многообразий, а также категорий Фукаи.

В случае многообразия Фано X размерности d, используя теорему Хохшильда–Костанта–Розенберга, несложная проверка показывает, что для $(d-1)$-Калаби–Яу пополнения младшая компонента пуассоновой структуры определяется выбором сечения антиканонического расслоения X, а из некоторых гомологических соображений должно следовать, что все последующие компоненты уже определяются однозначно. Для получения явных примеров структур Пуассона в дальнейшем можно ограничиться случаями малой размерности, которые допускают тилтинг-эквивалентность (например, проективной прямой и проективной плоскостью) и выписать Пуассоновы структуры для соответствующих алгебр. Ожидается, что полученные техники вычислений можно развить для некоторого класса градуированных алгебр, производные категории которых эквивалентны частично обернутым категориям Фукаи гладких ориентированных поверхностей, как было показано в недавней работе Я. Лекили и А. Полищука [17].

Список литературы

[1] Arutyunov, A. V.; Zhukovskii, S. E. (Russian); Sb. Math. 207 (2016), no. 9–10, 1187–1214.

[2] M. F. Atiyah. Green's Functions for Self-Dual Four-Manifolds. Adv. Math., Suppl. Stud. 7A (1981) 129–158.

[3] Ballard, Matthew; Favero, David. Hochschild dimensions of tilting objects. Int. Math. Res. Not. IMRN 2012, no. 11, 2607–2645.

[4] A. Bondal, I. Zhdanovskiy. Representation theory for system of projectors and discrete Laplace operators. Preprint IPMU13-0001, IPMU, Kashiwa, Japan, 2013, 48 pp.

[5] A. Elagin, V. Lunts, Three dimensions of a triangulated category, in preparation.

[6] Franjou, Vincent; Pirashvili, Teimuraz. Comparison of abelian categories recollements. Doc. Math. 9 (2004), 41–56.

[7] S. Gorchinskiy, A. Rosly. A polar complex for locally free sheaves. Int. Math. Res. Notices 2015 (2015) 2784–2829.

[8] A. Gorsky, A. Rosly. From Yang–Mills Lagrangian to MHV Diagrams. JHEP 01, 101 (2006).

[9] Guseva, Lyalya. On the derived category of $\mathrm{IGr}(3,8)$. Preprint `arXiv:1810.07777`.

[10] L. Hille. Exceptional sequences of line bundles on toric varieties. Mathematisches Institut Universität Göttingen, Seminars WS03-04, 2004, 175–190.

[11] L. Hille, D. Ploog. Tilting chains of negative curves on rational surfaces. Preprint `arxiv:1703.09350`.

[12] M. Kalck, J. Karmazyn. Noncommutative Knörrer type equivalences via noncommutative resolutions of singularities. Preprint `arxiv:1707.02836`.

[13] Karzhemanov, Ilya; Zhdanovskiy, Ilya. Some properties of surjective rational maps. Eur. J. Math. 4 (2018), no. 1, 326–329.

[14] B. Khesin and A. Rosly. Polar Linkings, Intersections, and Weil Pairing. Proc. Roy. Soc. Lond. A461 (2005) 3505–3524.

[15] B. Khesin and A. Rosly. Polar homology. Canad. J. Math. 55 (2003) 1100–1120.

[16] B. Khesin, A. Rosly, R. Thomas. A Polar de Rham Theorem. Topology 43 (2004) 1231–1246.

[17] Yanki Lekili, Alexander Polishchuk. Derived equivalences of gentle algebras via Fukaya categories. Preprint `arxiv.org/abs/1801.06370`.

[18] A. Losev, I. Polyubin, A. Rosly. Ultraviolet Properties of the Self-Dual Yang–Mills Theory. J. High Energ. Phys. (2018) 2018: 41.

[19] G. Mahlon. Multi-gluon helicity amplitudes involving a quark loop. Phys. Rev. D 49, 4438 (1994).

[20] Psaroudakis, Chrysostomos. Homological theory of recollements of abelian categories. J. Algebra 398 (2014), 63–110.

[21] E. Witten. Chern–Simons Gauge Theory As A String Theory. Prog. Math., 133 (1995) 637–678.

[22] E. Witten. Perturbative Gauge Theory As A String Theory In Twistor Space. Commun. Math. Phys., 252 (2004) 189–258.

[23] Wai-kit Yeung. Weak Calabi–Yau structures and moduli of representations. Preprint `arxiv.org/abs/1802.05398`.

[24] И.Ю.Ждановский, А.С.Кочерова. Алгебры проекторов и взаимно-несмещенные базисы в размерности 7. Итоги науки и техники. Сер. Современная математика. Темат. обзор 138 (2017), 19–49.

3 Гомологические и мотивные методы в некоммутативной геометрии

За отчетный период, в рамках темы “Гомологические и мотивные методы в некоммутативной геометрии”, сотрудники лаборатории работали над следующими вопросами.

3.1 Эллиплтические кривые, лагранжевы расслоения и конечные группы.

Научный руководитель Лаборатории Ф.А. Богомолов работал над несколькими проблемами.

В совместной работе с Hang Fu, он рассмотрел вопрос о структуре j-отображения из семейства модулярных кривых $Y_{\omega,4}$ параметризующих наборы точек кручения на эллиптических кривых. Это отображение сопоставляет каждому такому набору его образ в пространстве модулей наборов точек на проективной прямой при естественной гиперэллиптической проекции. Авторы в точности описали все типы наборов из четырех точек, для которых образом j отображения является точка. Помимо ранее известных случаев точек порядка 3 и 4 имеется одна бесконечная серия таких наборов которые включают точки разного порядка. Это наборы типа $(0, t, -t, \infty$, где t произвольная точка фиксированного конечного порядка на эллиптической кривой Якоби $x^4 + ax^2y^2 + y^4 = 0$. Для всех остальных наборов четырех точек кручения отображение j сюрьективно. Метод доказательства основан на анализе поведения точек крученя при мультипликативном вырождении гладкой эллиптической кривой к особой рациональной кривой. Авторы воспользовались для доказательства формулами Сильвермана, которые описывают поведение индивидуальных точек кручания про вырождении.

Текст в настояще время готовится к публикации на архиве и к подаче в журнал.

Совместно с сотрудником Лаборатории Никоном Курносовым, Ф.А. Богомолов рассмотрел лагранжевы расслоения на простых компактных гиперкэлеровых многообразиях комплексной размерности четыре. Давно стоит вопрос о том какие особенности может иметь база такого многообразия. Дело в том что, если баз является гладкой, то как показал Хванг она является проективным пространством. Н. Курносов и Ф. Богомолов смогли доказать, что база лагранжева расслоения не имеет особенностей в случае многообразий размерности 4. Как следствие, получен такой результат

Теорема. Базой любого лагранжева расллоения простого компактного гиперкэлерова многообразия комплексной размерности четыре всегда является комплексная проективная плоскость P^2

Одним из следствий этого является конечность числа возможных топологических типов таких лагранжевых расслоений в размерности 4. Подход Богомолова и Курносова, основанный на изучении слоев над особыми точками базы и их неразветвленных накрытий, дает существенные ограничения на структуру таких лагранжевых раслоений и в старших размерностях. Авторы надеются завершить общий случай в ближайшее время. Этот результат уже находится на архиве и отправлен для публикации в журнал.

`arXiv:1810.11011` *Lagrangian fibrations for IHS fourfolds*, Fedor Bogomolov, Nikon Kurnosov

Совместно с Ben Blum-Smith. Ф.А. Богомолов исследовал структуру конечных групп, допускающих для каждой пары некоммутирующих элементов комплексное линейное представление, в котором эти элементы не имеют общего ненулевого собственного вектора. Были доказали следующие результаты:

1) Любая нильпотентная конечная группа имеет такое представление для каждой пары некоммутирующих элементов.

   Следствием этого факта является то что после проективизации регулярного представления на факторе по действию группы имеются только абелевы особенности.

2) В любом представлении простой конечной группы всегда пара некоммутирующих элементов с общим ненулевым собственным вектором.

3) Имеются разрешимые конечные группы, у которых есть пара некоммутирующих элементов с общим ненулевым собственным вектором в любом представлении.

Этот результат уже находится на архиве и отправлен для публикации в журнал.

`arXiv:1810.05336`, *Purely noncommuting groups*, Ben Blum-Smith, Fedor Bogomolov

Совместно с C Boening и A. Pirutka. Ф. Богомолов показал, что для центрального Z_2-расширения элементарной абелевой группы ранга 6 (группа Гейзенберга) отображение из стабильных когонологий имеет нетривиальное ядро. Именно это ядро не порождается двумерным классом соответствующего центрального Z_2-расширения. В доказательстве авторы опирались на тот факт, что фактор точного линейного представления этой группы Гейзенберга рационален. В общем случае этот результат, или хотя бы тривиальность группы неразветвленных когомологий фактора пока не доказан. Этот результат уже находится на архиве и отправлен для публикации в журнал.

`arXiv:1809.11023`, *On stable cohomology of central extensions of elementary abelian groups*, Fedor Bogomolov, Christian Boening, Alena Pirutka

Авторы также получили набросок доказательства тривиальности группы неразветвленных когомологий для произвольной 2-группы Гейзенберга и в ближайшее время закончат статью с полным его доказательством.

3.2 Бесконечномерные неприводимые представления проективных групп

Для данного поля F довольно редко удаётся построить «нетривиальные» примеры неприводимых представлений некоторой группы G. В некоторой степени, исключение составляют конечные и абелевы группы. В случае топологических групп изучаются обычно только непрерывные представления: унитарные, гладкие, алгебраические, локально аналитические и т.п.

Представления дискретных групп рациональных точек алгебраических групп также изучались, но только конечномерные, см. [A.Borel, J.Tits, *Homomorphismes «abstraits» de groupes algébriques simples,* Ann. of Math. (2) 97 (1973), 499–571; J. Tits, Homomorphismes «abstraits» de groupes de Lie, in "Convegno di Gruppi e loro Rappresentazioni, INDAM, Rome, 1972," Symposia Mathematica, Vol. 13, 479–499, Academic Press, London, 1974; L.Lifschitz, A.Rapinchuk, *On abstract homomorphisms of Chevalley groups with nonreductive image. I,* J. Algebra 242 (2001), no. 1, 374–399.]

С другой стороны, ограничение пучков в доминантной топологии на определённые группы приводит к вопросу о гладких представлениях «бесконечномерных» групп. Например, в [M. Rovinsky, *Semilinear representations of symmetric groups and of automorphism groups of universal domains.* Selecta Math., 24, Issue 3 (2018), 2319–2349] изучается ограничение на бесконечномерные симметрические группы. Однако, существенно меньше информации теряется при ограничении доминантных пучков на бесконечномерные группы PGL, в которых конечномерные подфакторгруппы PGL рассматриваются как дискретные группы.

Возникает вопрос о существовании достаточно «универсальных» конструкций неприводимых представлений. Например, имеется следующая очевидная конструкция представлений группы G над F. Пусть $H \subset G$ – подгруппа группы G. Пусть W – ядро естественной проекции $F[G/H] \to F[G]$. Необходимым условием неприводимости W является максимальность H среди собственных подгрупп G. Исходный вопрос вопрос можно интерпретировать как поиск примеров, в которых это представление оказывается неприводимым.

Пусть теперь G – группа автоморфизмов некоторого векторного пространства V, и H – максимальная параболическая подгруппа в G. Тогда G/H – множество r-мерных подпространств в V, а W – пространство 0-циклов степени 0 на грассманнианах над полем k с коэффициентами в поле F.

Доказана неприводимость модуля 0-циклов степени 0 на грассманнианах над бесконечным полем k с коэффициентами в некоторых полях, который рассматривается как представление соответствующей проективной группы.

Пусть $r \geqslant 1$ – целое число, k – бесконечное поле характеристики $p \geqslant 0$, V – k-векторное пространство размерности $\geqslant 2$, A – ассоциативное кольцо с единицей.

Обозначим через $\mathrm{PGL}(V)$ соответствующую проективную группу. Пусть $A[\mathrm{PGL}(V)]$ – групповое кольцо, где коммутируют элементы A и $\mathrm{PGL}(V)$. Обозначим через $A[\mathrm{Gr}(r,V)]^\circ$ множество формальных конечных сумм вида $\sum_i a_i[L_i]$, где L_i – векторные подпространства в V размерности r, $a_i \in A$ и $\sum_i a_i = 0$. Множество $A[\mathrm{Gr}(r,V)]^\circ$ может рассматриваться как левый $A[\mathrm{PGL}(V)]$-модуль и как правый A-модуль.

Теорема 3.1. *Предположим, что или*

- A *–* $\mathbb{F}_\ell$*-алгебра для некоторого простого* $\ell \neq p$*, или*
- $p > 0$ *и* A *–* $\mathbb{Z}[1/p]$*-алгебра, или*

- *A содержит поле, а объединение конечных подполей в k бесконечно.*

Тогда имеется биекция

$$\{\text{левые идеалы кольца } A\} \leftrightarrow \{\text{левые } A[\mathrm{PGL}(V)]\text{-подмодули в } A[\mathrm{Gr}(r,V)]^{\circ}\}.$$

А именно, каждому левому идеалу $I \subseteq A$ сопоставляется левый $A[\mathrm{PGL}(V)]$-подмодуль $IA[\mathrm{Gr}(r,V)]^{\circ}$. Обратно, подмодулю $M \subseteq A[\mathrm{Gr}(r,V)]^{\circ}$ сопоставляется множество элементов a_1 для всех $\alpha \in M$, где $\alpha = \sum_{i=0}^{N} a_i[L_i]$ с попарно различными L_i (которое образует левый идеал).

В общем случае получен следующий более слабый результат.

Теорема 3.2. *Существует такая последовательность подмодулей*

$$M_1 := A[\mathrm{Gr}(r,V)]^{\circ} \supseteq M_2 \supseteq M_3 \supseteq M_4 \supseteq \dots,$$

что любой ненулевой подмодуль в M_1 ненулевой подмодуль вида $M_n \cdot a$ для некоторых $a \in A$ и $n \in \mathbb{N}$.

3.3 Различные конструкции башен оптимальных кривых над конечными полями

У алгебраической кривой C над конечным полем $\mathbb{F}_q$ из q элементов есть два основных инварианта: ее род $g(C)$ и количество точек на кривой $N(C) = |C(\mathbb{F}_q)|$. Теорема Дринфельда–Влэдуца описывает связь между этими инвариантами, когда род стремится к бесконечности: для любого счетного семейства кривых C_n над $\mathbb{F}_q$, у которых род стремится к бесконечности

$$\beta(C_\bullet) = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{N(C_n)}{g(C_n)} \leq \sqrt{q} - 1.$$

Как только было доказано это неравенство, возник вопрос об оптимальности этой оценки, то есть существует ли семейство кривых, для которого $\beta(C_\bullet) = \sqrt{q} - 1$. Такое семейство называется *оптимальным.* Ответ положительный, если q является квадратом. При этом в качестве примеров удобно брать башни кривых. Башня кривых – это последовательность кривых C_n и конечных отображений $C_n \to C_{n-1}$, при этом род C_n стремится к бесконечности. Основные примеры оптимальных башен алгебраических кривых над конечными полями можно построить либо при помощи явных рекуррентных формул, либо как башни модулярных кривых.

Если порядок конечного поля не является квадратом, то неизвестно, существуют ли над ним оптимальные башни или семейства. Сотрудником Лаборатории С. Рыбаковым была предложена новая конструкция, которая обобщает модулярные башни и дает надежду построить оптимальные семейства кривых без ограничений на конечное поле.

Пусть дана последовательность локально постоянных пучков V_n в этальной топологии на открытом подмножестве U гладкой проективной кривой C над полем $\mathbb{F}_q$. При этом каждый V_n локально свободен над $\mathbb{Z}/\ell^n\mathbb{Z}$ ранга b, который не зависит от и n, и заданы аддитивные по слоям отображения пучков $V_n \to V_{n-1}$. Можно определить послойную "проективизацию" V_n, которая будет схемой U_n, конечной над U. Если выполняются некоторые технические условия на семейство V_n, эта схема будет геометрически неприводимой кривой. Определим C_n как гладкую проективную кривую, содержащую U_n.

Например, пусть дано семейство $X \to C$ алгебраических многообразий над кривой C. Предположим, что семейство является гладким над открытым подмножеством U. Тогда V_n — это i-й высший этальный прямой образ постоянного пучка $\mathbb{Z}/\ell^n\mathbb{Z}$. Простейший пример, в котором выполняются упомянутые условия — это семейство Лежандра эллиптических кривых над полем $\mathbb{F}_{p^2}$, которому наша конструкция сопоставляет *башню Лежандра*. В статье [Ry] доказано, что эта башня оптимальна.

Одно из условий на семейство $X \to C$ связано с суперсингулярностью слоев. Будем говорить, что алгебраическое многообразие Y над $\mathbb{F}_q$ строго суперсингулярно в степени i, если обратные корни действия Фробениуса на i-ых этальных когомологиях Y одинаковы. В этом случае они равны $\pm q^{i/2}$. Боле того, эти числа всегда целые, поэтому, если q не квадрат, то i должно быть четным. Для того, чтобы башня кривых была оптимальной необходимо, чтобы у исходного семейства многообразий было много строго суперсингулярных слоев. В частности, для семейств эллиптических кривых это сразу означает, что q должно быть квадратом. Подобные соображения подсказывают, что для построения оптимальной башни кривых над $\mathbb{F}_p$ нужно начинать с семейства поверхностей, у которых тривиальны первые этальные когомологии. В частности, семейства абелевых поверхностей нам не подходят.

Другое важное условие на семейство связано с представлением монодромии. Возьмем точку $x \in (\bar{k})$ из дополнения U в C, над которой слой f особый. Локальное представление монодромии позволяет вычислить ветвление над точкой x в нашей башне: имеется биекция между орбитами действия оператора локальной монодромии на проективизации этальных когомологий общего слоя с коэффициентами в $\mathbb{Z}/\ell^n\mathbb{Z}$ и точками $y \in C_n(\bar{k})$ над x, причем индекс ветвления равен длине орбиты.

В то же время компоненты связности кривой C_n можно изучать при помощи глобальной монодромии. Например, можно всегда выбрать башню кривых из компонент связности, в частности, род кривой в башне будет стремиться к бесконечности, если образ представления глобальной монодромии достаточно большой в следующем смысле: будем говорить, что группа G *большая*, если в ней есть бесконечная подгруппа $H \subset G$, и фактормножество G/H тоже бесконечно.

Были исследованы семейства поверхностей К3, которые возникают из зеркальной симметрии трехмерных многообразий Фано ранга 4. У этих семейств можно вычислить монодромию в характеристике нуль, тем самым будет известно ветвление в соответствующей башне, а затем взять редукцию в положительную характеристику. Разумеется, надо выбирать семейство с хорошей редукцией.

Монодромию можно вычислить при помощи следующего наблюдения. Наше семейство определяется как семейство гиперповерхностей в торическом многообразии, которое при ограничении на тор можно задать многочленом Лорана с целыми коэффициентами: $f \in \mathbb{Z}[x, y, z, 1/x, 1/y, 1/z]$. Рассмотрим ряд:

$$\sum_i (f^i)_0 t^i,$$

где $(g)_0$ обозначает свободный член многочлена Лорана g. Этот ряд является формальным решением уравнения Пикара–Фукса нашего семейства. Теперь вычислить само уравнение и его монодромию — дело (вычислительной) техники.

Список литературы

[Ry] Rybakov S., Families of algebraic varieties and towers of algebraic curves over finite fields. https://arxiv.org/abs/1710.05395

3.4 Операды, операды и характеристические классы

В прошедшем году было продолжено построение характеристических классов расслоений со значениями в кристаллических когомологиях. Основной целью такого построения является доказательство того факта, что характеристические классы кристалла равны нулю. В рамках этого проекта сотрудником ЛАГ Н. Маркаряном был построен герб над кристаллическим сайтом, являющийся аналогом алгеброида Атьи.

Основой новой конструкции характеристических кристаллических классов расслоений является обобщенная конструкция Черна–Вейля. Для конструкции обобщенной конструкции Черна–Вейля было введено понятие циклической тотализации. Был разработан подход, позволяющий использовать симплициальные методы для работы в категории циклических объектов.

Также была продолжена работа над исследованием новой планарной операды, введенной в недавней работе J. Alma. Пространство деформаций этой операды тесно связаны с алгеброй Ли Гротендика-Тейхмюллера. Была сформулирована гипотеза о том, каково это пространство. Прямое его вычисление пока представляется очень сложной задачей.

Кроме того, Н. Маркаряном начато новое исследование, совместное с Л. Рыбниковым. Оно касается исследования безмонодромных sl_2-операх на проколотой проективной прямой. Понятие операх было введено Бейлинсоном и Дринфельдом в рамках программы построения двойственности Ленглендса для функционального поля. Согласно этой двойственности, пучки на пространстве операх должны соответствовать Гекке-собственным пучкам на пространстве расслоений над кривой. Случай безмонодромных операх — в некотором смысле, простейший. Они образуют дискретное множество, которое есть базис в пространстве инвариантов тензорного произведения конечномерных представлений старшего веса. Существует много комбинаторных описаний таких базисов, но наше описание напрямую связано с геометрией операх. Мы надеемся в дальнейшем распространить нашу конструкцию на другие группы.

3.5 Формула Атьи–Ботта

Используя конструкцию следов в симметрических моноидальных $(\infty, 2)$-категориях из [1] было получено несколько результатов, позволяющий обобщить классическую формулу Атьи-Ботта на случай соответствий.

А именно, пусть дано соответствие $X \xleftarrow{g} Y \xrightarrow{f} X$ производных схем, пучок $\mathcal{G} \in \mathsf{QCoh}(Y)$ и дуализируемый пучок $E \in \mathsf{QCoh}(X)$ вместе с фиксированной лакс эквивариантой структурой $E \xrightarrow{t} f_*(\mathcal{G} \otimes g^*E)$ относительно соответствия, где под $\mathsf{QCoh}(X)$ (и соответственно $\mathsf{QCoh}(Y)$) здесь подразумевается неограниченная производная категория квазикогерентых пучков, а все функторы являются производными. Было доказано, что морфизм следов

$$k \simeq \mathsf{Tr}_{2\,\mathsf{Cat}_k}(\mathsf{Id}_{\mathsf{Vect}}) \longrightarrow \mathsf{Tr}_{2\,\mathsf{Cat}_k}\big(f_*(\mathcal{G} \otimes g^*-)\big) \simeq \Gamma(X^{(g,f)}, j^*\mathcal{G})$$

из [1], индуцированный диаграммой

$$\begin{tikzcd}
\mathsf{Vect}_k \arrow[r, "\mathsf{Id}_{\mathsf{Vect}_k}"] \arrow[d, bend right, "E"'] & \mathsf{Vect}_k \arrow[d, bend right, "E"'] \arrow[dl, Rightarrow, "T"'] \\
\mathsf{QCoh}(X) \arrow[r, "f_*(\mathcal{G}\otimes g^*-)"'] \arrow[u, bend right] & \mathsf{QCoh}(X) \arrow[u, bend right]
\end{tikzcd}$$

совпадает со скрученным следом, заданным композицией

$$\mathcal{O}_{X^{(g,f)}} \longrightarrow i^*E \otimes i^*E^\vee \simeq j^*f^*E \otimes i^*E^\vee \xrightarrow{j^*(b)\otimes \mathsf{Id}_{i^*E^\vee}} j^*(\mathcal{G} \otimes g^*E) \otimes i^*E^\vee$$

и

$$j^*(\mathcal{G} \otimes g^*E) \otimes i^*E^\vee \simeq j^*\mathcal{G} \otimes i^*E \otimes i^*E^\vee \longrightarrow j^*\mathcal{G},$$

где $X^{(g,f)}$- схема неподвижных точек, заданная расслоенной диаграммой

$$\begin{tikzcd}
X^{(g,f)} \arrow[r, "j"] \arrow[d, "i"'] & Y \arrow[d, "(g,f)"] \\
X \arrow[r, "\Delta"'] & X \times X,
\end{tikzcd}$$

$2\,\mathsf{Cat}_k$- симметрическая моноидальная $(\infty, 2)$-категория k-линейных представимых категорий и непрерывных k-линейных функторов, а морфизм $f^*E \xrightarrow{b} \mathcal{G} \otimes g^*E$ получен из морфизма $t \in \mathsf{Hom}_{\mathsf{QCoh}(X)}\big(E, f_*(\mathcal{G} \otimes g^*E)\big)$ путем сопряженности между функторами f^* и f_*.

Кроме того было показано, что морфизм следов

$$X^{(g,f)} \simeq \mathsf{Tr}\left(\langle {}^{g}_{X}Y^{f}_{X}\rangle\right) \xrightarrow{\mathsf{Tr}\left(\langle {}^{\mathsf{Id}}_{X}X^{s}_{U}\rangle, T\right)} \mathsf{Tr}\left(\langle {}^{b}_{U}V^{a}_{U}\rangle\right) \simeq U^{(b,a)}$$

в $(\infty, 2)$-категории соответствий, заданный диаграммой

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\langle {}^{g}_{X}Y^{f}_{X}\rangle"] \arrow[d, "\langle {}^{\mathsf{Id}}_{X}X^{s}_{U}\rangle"'] & X \arrow[d, "\langle {}^{\mathsf{Id}}_{X}X^{s}_{U}\rangle"] \arrow[dl, Rightarrow, "T"'] \\
U \arrow[r, "\langle {}^{b}_{U}V^{a}_{U}\rangle"'] & U,
\end{tikzcd}$$

где $X \xrightarrow{\langle {}^{g}_{X}Y^{f}_{X}\rangle} X$ обозначает соответствие $X \xleftarrow{g} Y \xrightarrow{f} X$ (и аналогично с остальными морфизмами), а 2-морфизм T индуцирован выбором коммутативной диаграммы

$$\begin{tikzcd}
& Y \arrow[dl, "g"'] \arrow[dr, "s\circ f"] \arrow[dd, "t"] & \\
X & & U \\
& X\ {}^{s}\times^{b}_{U} V \arrow[ul, "\mathsf{pr}_X"] \arrow[ur, "a\circ\mathsf{pr}_V"'] &
\end{tikzcd}$$

$$\alpha_1 : b \circ \mathsf{pr}_V \circ t \simeq s \circ \mathsf{pr}_X \circ t$$

$$\alpha_2 : \mathsf{pr}_X \circ t \simeq g$$

$$\alpha_3 : a \circ \mathsf{pr}_V \circ t \simeq s \circ f$$

для некоторого морфизма $t \in \mathsf{Hom}(Y, X\ {}^{s}\times^{b}_{U} V)$, совпадает с вертикальным отображением r расслоенных произведений в диаграмме

$$\begin{tikzcd}
X^{(g,f)} \arrow[rr] \arrow[dr] \arrow[dd, "r"'] & & X^{(g,f)} \arrow[dr] \arrow[dd, "s\circ i_X" near start] & \\
& X^{(g,f)} \arrow[rr] \arrow[dd, "\mathsf{pr}_V \circ t\circ j_X" near end] & & X^{(g,f)} \arrow[dd, "{(s\circ i_X, s\circ i_X)}"] \\
U^{(b,a)} \arrow[rr, "i_U" near end] \arrow[dr, "j_U"'] & & U \arrow[dr, "\Delta"] & \\
& V \arrow[rr, "{(b,a)}"] & & U \times U,
\end{tikzcd}$$

где коммутативность передней грани задана эквивалентностями

$$b \circ \mathsf{pr}_V \circ t \circ j_X \overset{\alpha_1 \circ j_X}{\simeq} s \circ \mathsf{pr}_X \circ t \circ j_X \overset{s\circ\alpha_2\circ j_X}{\simeq} s \circ g \circ j_X \simeq s \circ i_X$$

и

$$a \circ \mathsf{pr}_V \circ t \circ j_X \overset{\alpha_3 \circ j_X}{\simeq} s \circ f \circ j_X \simeq s \circ i_X.$$

В качестве следствия было показано, что морфизм следов

$$\Gamma(X^{(g,f)}, \omega_{X^{(g,f)}}) \simeq \mathsf{Tr}_{2\,\mathsf{Cat}_k}(f_* g^!) \longrightarrow \mathsf{Tr}_{2\,\mathsf{Cat}_k}(a_* b^!) \simeq \Gamma(U^{(b,a)}, \omega_{U^{(b,a)}})$$

в $2\,\mathsf{Cat}_k$, заданный диаграммой

$$\begin{tikzcd}
\mathsf{ICoh}(X) \arrow[r, "f_* g^!"] \arrow[d, bend right, "s_*"'] & \mathsf{ICoh}(X) \arrow[d, bend right, "s_*"'] \arrow[dl, Rightarrow] \\
\mathsf{ICoh}(U) \arrow[r, "a_* b^!"'] \arrow[u, bend right, "s^!"'] & \mathsf{ICoh}(U) \arrow[u, bend right, "s^!"']
\end{tikzcd}$$

совпадает с коединицей сопряжения $r_* \dashv r^!$.

Список литературы

[1] G. Kondyrev, A. Prihodko, "Categorical proof of Holomorphic Atiyah-Bott formula”, ArXiv preprint https://arxiv.org/abs/1607.06345

[2] D. Gaitsgory, N. Rozenblyum "A study in derived algebraic geometry”, Mathematical Surveys and Monographs, Volume: 221, Print ISBN: 978-1-4704-3568-4

3.6 Момент-угол комплексы

Момент-угол-комплексы — клеточные пространства, которые ставятся в соответсвие симплициальным комплексам. Они являются отличным "полигоном"для применения аппаратов теории гомотопий. Момент-угол-комплексы являются частным случаем полиэдральных произведений, которые в свою очередь являются обобщениями букетов, толстых букетов и произведений пространств. Произведения Уайтхеда являются важным инструментом изучения топологии полиэдральных произведений.

В результате проведенных исследований, стажером Лаборатории С. Абрамяном был построен контр-пример к гипотезе Бухштабера-Панова: если момент-угол-комплекс гомотопически эквивалентен букету сфер, то каждая сфера реализуется линейной комбинацией итерированных высших произведений. Именно, момент-угол-комплекс, соответствующий симплициальному комплексу $\partial\Delta(1,2,3) * \partial\Delta(4,5,6) \cup \Delta(1,2,3) \cup \Delta(4,5,6)$, гомотопически эквивалентен букету $(S^7)^{\vee 6} \vee (S^8)^{\vee 6} \vee (S^9)^{\vee 2} \vee S^{10}$, но сфера S^{10} не реализуется никакой линейной комбинацией итерированных высших произведений Уайтхеда.

Тем не менее, класс симплициальных комплексов, для которых соответствующий момент-угол-комплекс гомотопически эквивалентен букету сфер достаточно широк: замкнут относительно склейки вдоль грани и подстановки в качестве вершины в границу симплекса.

Также для произовольного итерированного высшего произведения Уайтхеда w предъявлен симплициальный комплекс, реализующий w. В некоторых частных случаях доказано, что описанный комплекс является наименьшим в смысле включения. Таким образом, в этом частном случае высшие произведения в момент-угол-комплексах описаны чисто в комбинаторных терминах.

3.7 Коммутирующие векторные поля.

Пускай M - гладкое риманово многообразие, снабженное функциями f_1, f_2, такими, что их градиентные векторные поля коммутируют. Стажером ЛАГ Л. Сухановым изучен вопрос о комбинаторике орбит группы, порождённой парой этих градиентных векторных полей: возможные вырождения орбит, возникающие в коразмерности 1.

Большая часть из этих результатов доступна в препринте по ссылке https://arxiv.org/abs/1810.08776 . Комбинаторика этих орбит подчиняется в точности тем же законам, что и решения $\overline{\partial}$-градиентного уравнения Виттена, тем самым реализуя структуру из статьи "Algebra of the Infrared"Гайотты, Мура и Виттена.

Конструкция, в Algebra of the Infrared строящая категорию Фукаи исходя из энумеративной геометрии решений градиентного уравнения Виттена, в случае пары вещественных полей должна описывать dg-категорию одного из этих градиентных полей (объекты - критические точки, морфизмы - цепи на пространстве траекторий).

Также рассмотрены два простейших примера, в которых есть зависимость от весов (т.е. конфигурации точек на плоскости) - $\mathbb{RP}^n$ и $\mathbb{CP}^n$. В обоих из них выполняется формула категорного wall-crossing'а из той же самой статьи.

Также изучалась связь "инфракрасной алгебры" и теории шоберов Капранова и Шехтмана, гипотетически - они эквивалентны (т.е. набор данных вида "факторизуемый пучок на вторичном многограннике + элемент Маурера-Картана в соответствующей L_∞-алгебре"однозначно позволяет построить структуру шобера на диске). Обратное утверждение (видимо) - неопубликованный результат Капранова и Сойбельмана.

3.8 Нелинейная теория деформаций

Теория деформаций абелевых категорий может рассмативаться и как часть обшей теории деформации ДГ и/или оснащенных триангулированных категорий, или как самостоятельный предмет – и второй подход тоже имеет смысл, поскольку именно в абелевом случае некоторые части теории становятся проще и естественнее. Общая теория деформаций для абелевых категорий была построена В. Ловен, ассоциированным членом Лаборатории, в начале 2000 годов. В частности, было доказано, что деформации контролируются надлежащим образом определенной группой $HH^2(\mathcal{C})$ вторых когомологий Хохшильда категории $\mathcal{C}$.

Однако теория Ловен описывает только деформации, линейные над базовым кольцом или полем. Стандартный простой, но практически важный пример деформации, которая линейной теорией описана быть не может, это расширение с квадратом ноль конечного поля $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ какой-то простой характеристики p до кольца $\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}$. В алгебраической топологии это отвечает так называемому гомоморфизму Бокштейна. Поскольку категория векторных пространств над любым полем полупроста, ее вторые когомологии Хохшильда тождественно обращаются в ноль, т.е. описать гомоморфизм Бокштейна с помощью когомологий Хохшильда нельзя.

Как поправить теорию деформаций для колец, известно довольно давно – требуется заменить когомологии Хохшильда на когомологии Маклейна. На языке триангулированных категорий, это отвечает замене категории эндофункторов нашей категории, линейных над базовым полем или кольцом, на категорию триангулированных эндофункторов без каких-либо условий. Однако получить оснашение для такой категории непросто: поскольку нам требуется выйти за рамки линейных тринагулированных категорий, ДГ техника работать перестает, и требуется применять какое-либо оснащение, используемое в алгебраической топологии (например, спектральное оснащение, или оснащение в смысле стабильных ∞-категорий). Такая теория в принципе может быть построена, однако она будет весьма громоздкой и неявной, и применять ее к практически важным задачам будет нелегко.

Как раз в этом месте представляется разумным ограничить общность, и рассматривать абелевы категории вместо общих триангулированных. Тогда, следуя работам Т. Пирашвили начала 80-х годов, можно надеятся получить элементарную и явную интерпретацию когомологий Маклейна в рамках теории неаддитивных эндофункторов, которая будет легко применима и к задачам теории деформации.

Такое изучение когомологий Маклейна действительно было проведено В. Ловен в соавторстве с научным сотрудником лаборатории Д. Калединым, и получаемые нелинейные теории когомологий аккуратно построены и классифицированы. В этом году, в продолжение этой работы, начата работа по применению полученных теорий к изучению деформаций.

В качестве первого шага, был детально изучен описанный выше базовый пример – деформация $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ до $\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}$, т.е. гомоморфизм Бокштейна. Выяснено, что правильная категория эндофункторов, которая позволяет описывать такое расширение – это функторы из векторных пространств в себя, которые не обязательно аддитивны над базовым полем, но переводят короткие точные последовательности в так называемые "квазиточные" последовательности. Как вариант конструкции, можно ограничиться полиномиальными функторами, а также комплексами функторов, гомологии которых аддитивны. Такой комплекс автоматически индуцирует триангулированный эндофунктор категории векторных пространств, но содержит строго больше информации, и позволяет получить правильные "нелинейные" группы когомологий Хохшильда (которые совпадают в рассматриваемом случае с когомологиями Маклейна). С точки зрения применений к когомологиям Маклейна и теории деформаций, все варианты конструкции работают одинаково хорошо, и дают один и тот же ответ. Был детально разобран и прояснен механизм, по которому вторые классы комологий порождают деформации, и выявлено, почему для получения общих деформаций необходимо использовать именно нелинейные функторы.

Отметим – и это большое достоинство работы именно с абелевыми категориями – что конструкция класса когомологий по деформации весьма прямая и концептуально прозрачная, и она, в отличие от известных в литературе конструкций, не использует сведения абелевых категорий к аддитивным (т.е. по сути, к алгебрам). А именно, пусть у нас есть абелева категория $\mathcal{C}$, и ее полное вложение $i : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ в абелеву категорию $\mathcal{C}'$, которое в надлежащем смысле является расширением с квадратом ноль. Тогда, в частности, у i есть левый сопраженный функтор j и его производные функторы L^*j. Поскольку i полный, композиция $j \circ i = \mathsf{Id}$ есть тождественный эндофунктор категории $\mathcal{C}$. Композиция $T = L^1 j \circ i$ тогда служит касательным пространством к нашей деформации, а естественный класс в $\operatorname{Ext}^2(\mathsf{Id}, T)$, задаваемый соотвествующим каноническим обрезанием всей композиции $L^*j \circ i$ – это как раз и есть класс когомологий, отвечающий деформации.

В случае категории модулей над кольцом, нами была дана также и обратная конструкция, строящее расширение по классы когомологий, а затем детально исследован частный случай гомоморфизма Бокштейна. В этом случае было показано, что класс когомологий допускает чрезвычайно явное и простое описание по Йонеде – средние члены соответствующей четырехчленной точной последовательности суть функторы p-х циклических степеней, переводящие векторное пространство V над $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ в инварианты $H^0(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, V^{\otimes p})$ и коинварианты $H_0(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, V^{\otimes p})$ циклической группы, которая действует перестановкой по длинному циклу, Такое описание также совместимо с тензорной структурой, легко обобщается на комплексы функторов, и позволяет доказывать теоремы сравнения с полиномиальными функторами векторов Витта, построенными Д. Калединым в прошлом году.

Список литературы

[1] D. Kaledin, *Bokstein homomorphism as a universal object*, Adv. Math., 324 (2018), 267-325.

4 Геометрическая теория представлений

4.1 Квадратичные минорные ламинации

Локальное подобие между множеством Мандельброта и множествами Жюлиа — глубокое явление, которое разные авторы изучали с разных сторон. В готовящейся совместной работе [3] А. Блоха, Л. Оверстигена и В. Тиморина рассматривается комбинаторный аспект этого явления. А именно, квадратичная минорная ламинация QML, которая моделирует множество Мандельброта, описывается в терминах (явно определенных) итерированных прообразов листов на границе комбинаторной главной кардиоиды и копий самой ламинации QML.

Геодезической ламинацией в диске $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z| < 1\}$ называется любой набор попарно непересекающихся хорд (за исключением, возможно, концов). Хорды, принадлежащие ламинации, называются *листами*. Замыкания компонент дополнения до объединения всех листов называются *щелями* ламинации. На окружности $S^1 = \{z \,|\, |z| = 1\}$ действует отображение удвоения угла $\sigma_2(z) = z^2$. Если $G \subset S^1$ совпадает с выпуклой оболочкой множества $G \cap S^1$, то мы полагаем $\sigma_2(G) = \mathrm{conv}(\sigma_2(G \cap S^1))$.

Понятие геодезической ламинации ввел У. Терстон в [4]. Там же определена ламинация QML (Quadratic Minor Lamination). Если стянуть все хорды и все многоугольники из QML в точки, то получится факторпространство M^c единичного диска, моделирующее множество Мандельброта в следующем смысле. Имеется естественная монотонная проекция из множества Мандельброта M в M^c. Гипотетически, все слои этой проекции — точки, а следовательно, множество Мандельброта гомеоморфно M^c. Эта гипотеза вытекает из (недоказанного на настоящий момент) утверждения о том, что M локально связно.

Ламинацию QML можно рассматривать как пространство параметров динамических ламинаций, каждая из которых моделирует множество Жюлиа некоторого квадратичного многочлена. Динамические ламинации строятся при помощи взятия итерированных прообразов. *Прообразом* хорды ℓ называется такая хорда ℓ', что $\sigma_2(\ell') = \ell$. Прообраз определен неоднозначно. В работе [3] предложено динамическое построение множества Мандельброта, при помощи специальной конструкции прообразов. Для каждой хорды ℓ, обозначим через $H(\ell)$ меньшую открытую дугу единичной окружности, ограниченную концами хорды ℓ.

Теорема A. *Пусть $m \in QML$ — невырожденный лист. Для каждой точки $a \in H(m)$, такой что $\sigma_2^n(a) \in m$ при некотором $n \geq 0$, существует итерированный прообраз m' листа m, также являющийся листом ламинации QML.*

Листы m' описанного в теореме A вида называются *потомками* листа m. Потомки могут быть определены явно (алгоритмически).

Множество Мандельброта M и его аналог M^c обладают свойством самоподобия: каждое из этих множеств содержит бесконечно много специальных гомеоморфных копий самого себя. Эти специальные гомеоморфные копии — так называемые младенческие множества Мандельброта (baby Mandelbrot sets) — определяются при помощи явления ренормализации. Соответствующее представления для QML заключается в том, что все листы этой ламинации делятся на так называемые *почти неренормализуемые листы* и листы, принадлежащие младенческим QML. *Комбинаторной главной кардиоидой* называется щель ламинации QML, содержащая центр диска.

Теорема B. *Все почти неренормализуемые листы ламинации QML получаются как пределы потомков листов на границе комбинаторной главной кардиоиды.*

Таким образом, имеется следующее самоподобное описание ламинации QML. Сначала отметим листы на границе комбинаторной главной кардиоиды (эти листы можно задать явно). Потом рассмотрим всех их потомков и пределы этих потомков. Наконец, в образующиеся щели вставляются копии ламинации QML.

Подобное описание может быть распространено на другие параметрические срезы пространства многочленов. Только вместо самоподобного описания мы получим описание, ссылающееся на QML (после перехода к правильным образом определенным потомках и их пределам, в получившиеся щели надо вставить копии ламинации QML, а не исходной параметрической ламинации).

В отчетный период была опубликована статья [1], закончена работа над препринтом [2], и начата работа над препринтом [3].

4.2 Вырождение спектральной последовательности Ходжа-деРама в конечной характеристике

Если $f : X \to S$ – гладкий собственный морфизм схем характеристики $p > 0$, зафиксирован подъем $\tilde{S}$ схемы S над $\mathbb{Z}/p^2$ вместе с подъемом абсолютного морфизма Фробениуса $\tilde{F}_S : \tilde{S} \to \tilde{S}$, то выбор подъема $\tilde{X}$ схемы X до схемы над $\tilde{S}$ задает структуру модуля Фонтена-Лаффэ на относительных когомологиях де Рама $H^n_{dR}(X/S)$ снабженных фильтрацией Ходжа для $n < p$. Напомним, что модуль Фонтена-Лаффе это локально свободный пучок $\mathcal{O}_S$-модулей M конечного ранга снабженный плоской связностью и фильтрацией $0 = F^N M \subset F^{N-1} M \subset \cdots \subset F^1 M \subset F^0 M = M$, удовлетворяющей условию трансверсальности Гриффитса вместе с изоморфизмом $\bigoplus\limits_{i=0}^{N} F^i M/F^{i+1} M \cong M$. Например, если имелся подъем морфизма $f : X \to S$ над $\mathbb{Z}_p$ вместе с подъемом Фробениуса $\tilde{F}_{\tilde{X}}$, то структура модуля Фонтена-Лаффэ задана отображениями $\frac{\tilde{F}^*_{\tilde{X}}}{p^i} : F^i H^n_{dR}(X/S) \to H^n_{dR}(X/S)$. Более того, если относительная размерность $\dim(X/S)$ меньше p(так что условие $n < p$ пусто), то спектральная последовательность Ходжа-де Рама для семейства X/S вырождается. В частности, модули $F^i H^n_{dR}(X/S)/F^{i+1} H^n_{dR}(X/S)$ отождествлены с $H^{n-i}(X, \Omega^i_{X/S})$, см. [5],[6], [7]

Совместно с Вадимом Вологодским и Дмитрием Вайнтробом, ассоциированным сотрудником Лаборатории А. Петровым было закончено построение аналогичной конструкции в некоммутативной геометрии. А именно, если $S = Spec\, R$ гладкая аффинная схема над совершенным полем k характеристики p с выбранным подъемом $Spec\, \tilde{R}$ над $W_2(k)$ вместе с подъемом эндоморфизма Фробениуса и A – гомологически гладкая собственная dg-алгебра над R, удовлетворяющая условию $HH_m(A/R)$ при $|m| \geq p - 2$(это аналог условия $\dim(X/S) < p$) то имеет место.

Теорема.([12]) Подъем A до почленно плоской dg-алгебры $\tilde{A}$ над $\tilde{R}$ задает структуру модуля Фонтена-Лаффе на периодических циклических гомологиях $HP_\bullet(A/R)$, и относительная спектральная последовательность Ходжа-де Рама вырождается в первом листе.

Структура модуля Фонтена-Лаффе включает в себя связность и фильтрацию – связность, имеющая полное право называться связностью Гаусса-Манина, была построена Калединым и Гетцлером в [10] и [8] соответственно. Их конструкции различны и, в [12], в частности, проверено, что эти конструкции индуцируют одинаковые плоские связности на группах когомологий. Фильтрация на периодических циклических гомологиях приходит из u-адической фильтрации на периодическом циклическом комплексе, см. [11]. Из явной конструкции Гетцлера условие трансверсальности Гриффитса выполнено автоматически, в остальном конструкция Каледина удобнее для наших целей.

Идея доказательства следует работам Каледина([9]), где был доказан аналогичный факт в случае $R = k$. Главным ингредиентом является рассмотрение обрезания комплекса Тейта циклической группы $\mathbb{Z}/p$ с коэффициентами в $A^{\otimes p}$.

Далее, вместе с Вадимом Вологодским, А. Петров изучал другие приложения этого двучленного обрезания. Рассмотрим следующий пример: X – гладкое многообразие над k и E – векторное расслоение на нем. На тензорной степени $E^{\otimes p}$ имеется действие циклической группы $\mathbb{Z}/p$. Возьмем комплекс Тейта этого действия и рассмотрим его каноническое обрезание $T(E) : \tau^{[-1,0]}\hat{C}(\mathbb{Z}/p, E^{\otimes p})$в градуировках -1 и 0. Несложно увидеть(это наблюдение является важным уже в [9]), что группы когомологий Тейта этого модуля во всех градуировках канонически изоморфны F_X^*E. Таким образом, $T(E)$ задает расширение длины два F_X^*E с помощью F_X^*E. Важным наблюдением в [12] является то, что $T(E)$ имеется плоская связность(этому понятию нужно придать точный смысл так как $T(E)$ это объект производной категории) и это расширение длины 2 является расширением в категории модулей над X с плоской связностью.

Такое расширение задает класс в $Ext^2_{dR}(F_X^*E, F_X^*E)$ где Ext_{dR} обозначает Ext-группы в данной категории. Применяя функтор i-ой внешней степени это дает класс в группе $Ext^{2i}_{dR}(\Lambda^i F_X^*E, \Lambda^i F_X^*E)$. Применяя к нему отображение следа, получаем классы в группах $H^{2i}_{dR}(X/k)$. Оказывается, что это в точности классы Черна векторного расслоения E. Таким образом, получается конструкция классов Черна в алгебраических когомологиях де Рама в положительной характеристике в духе конструкции Черна-Вейля.

4.3 Интерполяционный Грассманниан Дринфельда-Гайцгори-Винберга и геометрическое соответствие Сатаке

В работе [18], сотрудникам Лаборатории удалось добиться следующих результатов.

4.3.1

Обозначим за $\Lambda = \bigoplus_n \Lambda^n$ кольцо симметрических функций с базисом из многочленов Шура s_λ. На этом кольце есть естественное коумножение. Классическое исчисление Шуберта есть базированный изоморфизм между биалгебрами Λ и $H^\bullet(\mathrm{Gr}, \mathbb{Z})$, переводящий s_λ в фундаментальный класс соответствующего многообразия Шуберта σ_λ. Здесь Gr есть бесконечномерный Грассманниан $\mathrm{Gr} = \varinjlim \mathrm{Gr}(k, m) \simeq BU(\infty)$, и коумножение на $H^\bullet(\mathrm{Gr}, \mathbb{Z})$ возникает из структуры H-пространства на классифицирующем пространстве $BU(\infty)$.

Опишем алгебро-геометрический подход к конструкции коумножения на $H^\bullet(\mathrm{Gr}, \mathbb{Z})$. Мы имеем: $H^{2n}(\mathrm{Gr}, \mathbb{Z}) = H^{2n}(\overline{\mathrm{Sch}}_n, \mathbb{Z}) = H^{2n}_c(\overline{\mathrm{Sch}}_n, \mathbb{Z}) = H^{2n}_c(\mathrm{Sch}_n, \mathbb{Z})$, где $\mathrm{Sch}_n \subset \mathrm{Gr}$ (соотв. $\overline{\mathrm{Sch}}_n \subset \mathrm{Gr}$) есть объединение всех n-мерных (соотв. $\leq n$-мерных) клеток Шуберта (относительно некоторого фиксированного флага).

Фазовое пространство Калоджеро-Мозера $\mathcal{C}_n$ есть пространство пар $n \times n$-матриц (X, Y) по модулю одновременного сопряжения таких, что оператор $[X, Y] + \mathrm{Id}$ имеет ранг 1. Интегрируемая система $\pi_n \colon \mathcal{C}_n \to \mathbb{A}^{(n)}$ переводит (X, Y) в спектр оператора X. Вилсон в [21] открыл следующие два важных свойства этой интегрируемой системы.

(a) Для $n_1 + n_2 = n$ имеет место изоморфизм *факторизации*

$$\mathcal{C}_n \times_{\mathbb{A}^{(n)}} (\mathbb{A}^{(n_1)} \times \mathbb{A}^{(n_2)})_{\mathrm{disj}} \xrightarrow{\sim} (\mathcal{C}_{n_1} \times \mathcal{C}_{n_2}) \times_{(\mathbb{A}^{(n_1)} \times \mathbb{A}^{(n_2)})} (\mathbb{A}^{(n_1)} \times \mathbb{A}^{(n_2)})_{\mathrm{disj}}.$$

(b) Для $x \in \mathbb{A}^1$ имеется изоморфизм $\pi_n^{-1}(n \cdot x) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Sch}_n$.
Теперь искомое копроизведение

$$\Delta = \bigoplus_{n_1+n_2=n} \Delta_{n_1,n_2} \colon H^{2n}_c(\mathrm{Sch}_n, \mathbb{Z}) \to \bigoplus_{n_1+n_2=n} H^{2n_1}_c(\mathrm{Sch}_{n_1}, \mathbb{Z}) \otimes H^{2n_2}_c(\mathrm{Sch}_{n_2}, \mathbb{Z})$$

есть не что иное, как морфизм коспециализации[1] между когомологиями

[1] терминология из [20, 6.2.7].

с компактным носителем слоев морфизма π_n, ограниченных на подсемейство $\pi_n^{-1}(n_1 \cdot x + n_2 \cdot y) \subset \mathcal{C}_n$.

4.3.2

Стартуя с редуктивной комплексной алгебраической группы G, Шидер в [20] построил биалгебру $\mathcal{A}$, играющую роль $\bigoplus_n H_c^{2n}(\mathrm{Sch}_n, \mathbb{C})$ для аффинного Грассманниана Gr_G вместо Gr. Для того, чтобы описать его конструкцию, мы напомним основные обозначения, касающиеся группы G и аффинного Грассманниана Gr_G.

Мы фиксируем Борелевскую и Картановскую подгруппы $G \supset B \supset T$ и обозначаем символом W группу Вейля для (G, T). Пусть N есть унипотентный радикал Борелевской подгруппы $B \subset G$, и N_- обозначает унипотентный радикал противополжной Борелевской подгруппы B_-. Обозначим за Λ (соотв. $\Lambda^\vee$) решетку ковесов (соотв. весов), и пусть $\Lambda^+ \subset \Lambda$ (соотв. $\Lambda^{\vee +} \subset \Lambda^\vee$) обозначает конус доминантных ковесов (соотв. весов). Мы также обозначим за $\Lambda_+ \subset \Lambda$ (соотв. $\Lambda_+^\vee \subset \Lambda^\vee$) подмоноид, порожденный простыми кокорнями (соотв. корнями) $\alpha_i,\ i \in I$ (соотв. $\alpha_i^\vee,\ i \in I$). Мы обозначаем символом $G^\vee \supset T^\vee$ двойственную по Ленглендсу группу, так что Λ (соотв. $\Lambda^\vee$) есть решетка весов (соотв. ковесов) группы $G^\vee$.

Пусть $\mathcal{O}$ обозначает кольцо рядов Тэйлора $\mathbb{C}[[z]]$, и пусть $\mathcal{K}$ обозначает его поле частных $\mathbb{C}((z))$. Аффинный Грассманниан $\mathrm{Gr}_G = G_\mathcal{K}/G_\mathcal{O}$ есть инд-проективная схема, объединение $\bigsqcup_{\lambda \in \Lambda^+} \mathrm{Gr}_G^\lambda$ $G_\mathcal{O}$-орбит. Замыкание Gr_G^λ – это проективное многообразие $\overline{\mathrm{Gr}}_G^\lambda = \bigsqcup_{\mu \leq \lambda} \mathrm{Gr}_G^\mu$. Множество неподвижных точек Gr_G^T естественно отождествляется с решеткой ковесов Λ; $\mu \in \Lambda$ лежит в Gr_G^λ, если и только если $\mu \in W\lambda$.

По ковесу $\nu \in \Lambda = \mathrm{Gr}_G^T$ мы строим инд-схему $S_\nu \subset \mathrm{Gr}_G$ (соотв. $T_\nu \subset \mathrm{Gr}_G$) – $N(\mathcal{K})$-орбиту (соотв. of $N_-(\mathcal{K})$) точки ν. Пересечения $S_\nu \cap \overline{\mathrm{Gr}}_G^\lambda$ (соотв. $T_\nu \cap \overline{\mathrm{Gr}}_G^\lambda$) являются *аттракторами* (соотв. *репеллентами*) действия $\mathbb{C}^\times$ при помощи гомоморфизма 2ρ в Картановский тор $T \curvearrowright \overline{\mathrm{Gr}}_G^\lambda$: $S_\nu \cap \overline{\mathrm{Gr}}_G^\lambda = \{x \in \overline{\mathrm{Gr}}_G^\lambda : \lim\limits_{c \to 0} 2\rho(c) \cdot x = \nu\}$ и $T_\nu \cap \overline{\mathrm{Gr}}_G^\lambda = \{x \in \overline{\mathrm{Gr}}_G^\lambda : \lim\limits_{c \to \infty} 2\rho(c) \cdot x = \nu\}$. Переходя к пределу имеем: $\mathrm{Gr}_G = \lim\limits_{\lambda \in \Lambda^+} \overline{\mathrm{Gr}}_G^\lambda$, S_ν (соотв. T_ν) – аттрактор (соотв. репеллент) к точке ν в Gr_G. Замыкание $\overline{S}_\nu$ есть объединение $\bigsqcup_{\mu \leq \nu} S_\mu$, $\overline{T}_\nu = \bigsqcup_{\mu \geq \nu} T_\mu$.

Стартуя с $\theta \in \Lambda_+$, мы обозначаем символом Sch_θ (соотв. $\overline{\mathrm{Sch}}_\theta$) пересечение $S_\theta \cap T_0$ (соотв. $\overline{S}_\theta \cap \overline{T}_0$). Оно равноразмерно размерности $\langle \rho^\vee, \theta \rangle$.

Обозначим $\mathcal{A}_\theta := H_c^{\langle 2\rho^\vee,\theta\rangle}(\mathrm{Sch}_\theta,\mathbb{C}) = H_c^{\langle 2\rho^\vee,\theta\rangle}(\overline{\mathrm{Sch}}_\theta,\mathbb{C})$, и $\mathcal{A} := \bigoplus_{\theta\in\Lambda_+}\mathcal{A}_\theta$.

Зафиксируем гладкую комплексную кривую X и $\theta\in\Lambda_+$. Пространство открытых застав $\overset{\circ}{Z}{}^\theta$ (смотри [15]) снабжено морфизмом $\pi_\theta\colon \overset{\circ}{Z}{}^\theta \to X^\theta$ на конфигурационное пространство дивизоров степени θ на X. Морфизм π_θ обладает свойством факторизации, и для любой точки $x\in X$ мы имеем канонический изоморфизм $\pi_\theta^{-1}(\theta\cdot x) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Sch}_\theta$. Зафиксируем $\theta_1,\theta_2\in\Lambda_+$ такие, что $\theta_1+\theta_2=\theta$. Коумножение $\Delta_{\theta_1,\theta_2}\colon \mathcal{A}_\theta\to\mathcal{A}_{\theta_1}\otimes\mathcal{A}_{\theta_2}$ определяется аналогично 4.3.1 при помощи морфизма фаторизации для подсемейства $\pi_\theta^{-1}(\theta_1\cdot x+\theta_2\cdot y)$.

Для того, чтобы построить морфизм умножения $\mathsf{m}\colon \bigoplus_{\theta_1+\theta_2=\theta}\mathcal{A}_{\theta_1}\otimes\mathcal{A}_{\theta_2}\to\mathcal{A}_\theta$, нам нужна деформация Дринфельда-Гайцгори $\widetilde{\mathrm{Sch}}_\theta\to\mathbb{A}^1$ [16], строящаяся при помощи $\mathbb{C}^\times$-действия на $\overline{\mathrm{Sch}}_\theta$, приходящего из кохарактера 2ρ тора T. Основное свойство семейства $\widetilde{\mathrm{Sch}}_\theta\to\mathbb{A}^1$ состоит в том, что слои над точками $a\neq 0$ изоморфны $\overline{\mathrm{Sch}}_\theta$, в то время как нулевой слой $(\widetilde{\mathrm{Sch}}_\theta)_0$ изоморфен несвязному объединению $\bigsqcup_\lambda \overline{\mathrm{Sch}}{}_\theta^{+,\lambda}\times\overline{\mathrm{Sch}}{}_\theta^{-,\lambda}$. Здесь λ (ковес в Λ_+ такой, что $\lambda\le\theta$) пробегает множество $\mathbb{C}^\times$-неподвижных точек $\overline{\mathrm{Sch}}_\theta$, и $\overline{\mathrm{Sch}}{}_\theta^{+,\lambda}$ (соотв. $\overline{\mathrm{Sch}}{}_\theta^{-,\lambda}$) обозначает соответствующий аттрактор (соотв. репеллент). Легко показать, что $H_c^{\langle 2\rho^\vee,\theta\rangle}((\widetilde{\mathrm{Sch}}_\theta)_0,\mathbb{C}) = \bigoplus_{\theta_1+\theta_2=\theta} H_c^{\langle 2\rho^\vee,\theta_1\rangle}(\mathrm{Sch}_{\theta_1},\mathbb{C})\otimes H_c^{\langle 2\rho^\vee,\theta_2\rangle}(\mathrm{Sch}_{\theta_2},\mathbb{C})$, и желаемое произведение m есть не что иное, как морфизм коспециализации между когомологиями с компактным носителем слоев семейства Дринфельда-Гайцгори.

Шидер предположил, что биалгебра $\mathcal{A}$ изоморфна универсальной обертывающей алгебр $U(\mathfrak{n}^\vee)$ алгебры $\mathrm{Lie}(N^\vee)$, где $N^\vee\subset B^\vee\subset G^\vee$ есть унипотентный радикал двойственной Борелевской подгруппы в $G^\vee$. Гипотеза доказана в работе:

4.3.3

Для того, чтобы построить изоморфизм $\mathcal{A}\xrightarrow{\sim}U(\mathfrak{n}^\vee)$, авторы определяют действие биалгебры $\mathcal{A}$ на геометрическом функторе слоя Сатаке. Точнее, обозначим символом $r_{\nu,+}$ (соотв. $r_{\nu,-}$) локально замкнутое вложение $S_\nu\hookrightarrow\mathrm{Gr}_G$ (соотв. $T_\nu\hookrightarrow\mathrm{Gr}_G$). Обозначим также символом $\iota_{\nu,+}$ (соотв. $\iota_{\nu,-}$) замкнутое вложение точки ν в S_ν (соотв. в T_ν).

Согласно [13, 16], существует канонический изоморфизм функторов $\iota_{\nu,-}^* r_{\nu,-}^! \simeq \iota_{\nu,+}^! r_{\nu,+}^*\colon\ D^b_{G_\mathcal{O}}(\mathrm{Gr}_G)\to D^b(\mathrm{Vect})$. Гиперболический слой пучка $\mathcal{P}\in D^b_{G_\mathcal{O}}(\mathrm{Gr}_G)$ в точке ν определяется как $\Phi_\nu(\mathcal{P}) := \iota_{\nu,-}^* r_{\nu,-}^!\mathcal{P}\simeq\iota_{\nu,+}^! r_{\nu,+}^*\mathcal{P}$.

Согласно [19], для $\mathcal{P} \in \mathrm{Perv}_{G_\mathcal{O}}(\mathrm{Gr}_G)$ гиперболический слой $\Phi_\nu(\mathcal{P})$ сосредоточен в степени $\langle 2\rho^\vee, \nu\rangle$, и имеет место каноническое разложение в прямую сумму $H^\bullet(\mathrm{Gr}_G, \mathcal{P}) = \bigoplus_{\nu\in\Lambda} \Phi_\nu(\mathcal{P})$. Более того, абелева категория $\mathrm{Perv}_{G_\mathcal{O}}(\mathrm{Gr}_G)$ является тензорной относительно операции свертки $\star$, и функтор $H^\bullet(\mathrm{Gr}_G, -)\colon (\mathrm{Perv}_{G_\mathcal{O}}(\mathrm{Gr}_G), \star) \to (\mathrm{Vect}, \otimes)$ является функтором слоя. Геометрическая эквивалентность Сатаке есть эквивалентность тензорных категорий $(\mathrm{Perv}_{G_\mathcal{O}}(\mathrm{Gr}_G), \star)$ и $\mathrm{Rep}(G^\vee)$.

Авторы определяют морфизм функторов $\mathcal{A}_\theta \otimes \Phi_\nu \to \Phi_{\nu+\theta}$. Для построения этого функтора авторы определяют *деформацию Дринфельда-Гайцгори-Винберга аффинного Грассманниана* $\mathrm{VinGr}_G^{\mathrm{princ}}$. Искомое семейство является относительной компактификацией деформации Дринфельда-Гайцгори $\widetilde{\mathrm{Gr}}_G \to \mathbb{A}^1$. Авторы также рассматривают расширенную версию $\mathrm{VinGr}_G \to T_{\mathrm{ad}}^+ := \mathrm{Spec}\,\mathbb{C}[\Lambda_+^\vee]$ и аналогичную версию VinGr_{G,X^n} для Грассманниана Бейлинсона-Дринфельда. Эти семейства сами по себе являются крайне интересными объектами для изучения. К примеру, пусть $\omega \in \Lambda^+$ – минискульный доминантный ковес. Тогда многообразие Шуберта Gr_G^ω изоморфно параболическому многообразию флагов G/P_ω, и соответствующее подмногообразие VinGr_G^ω в VinGr_G изоморфно деформации Бриона Δ_{G/P_ω} в $\mathrm{Hilb}(G/P_\omega \times G/P_\omega) \times T_{\mathrm{ad}}^+$ [14, §3].

Из геометрического соответствия Сатаке для $\mathcal{P} \in \mathrm{Perv}_{G_\mathcal{O}}(\mathrm{Gr}_G)$ когомологии $H^\bullet(\mathrm{Gr}_G, \mathcal{P})$ обладают структурой модуля над алгеброй $U(\mathfrak{g}^\vee)$. Авторы строят это действие геометрически – как известно, действие подалгебры Картана $U(\mathfrak{t}^\vee) \subset U(\mathfrak{g}^\vee)$ возникает из градуировки $H^\bullet(\mathrm{Gr}_G, \mathcal{P}) = \bigoplus_{\nu\in\Lambda} \Phi_\nu(\mathcal{P})$. Действие алгебры $U(\mathfrak{n}^\vee)$ приходит из геометрического действия биалгебры $\mathcal{A}$ на функторе слоя Сатаке и изоморфизма $\mathcal{A} \xrightarrow{\sim} U(\mathfrak{n}^\vee)$. Наконец, действие алгебры $U(\mathfrak{n}_-^\vee)$ сопряжено действию $U(\mathfrak{n}^\vee)$ относительно билинейной формы Лефшеца на $H^\bullet(\mathrm{Gr}_G, \mathcal{P})$.

Авторы также предлагают гипотетическую геометрическую конструкцию алгебры $U(\mathfrak{g}_Q^+)$ (универсальной обертывающей положительной подалгебры в симметрической алгебре Каца-Муди) в контексте Кулоновских ветвей соответствующих колчанных калибровочных теорий.

4.4 Кластерная структура на тригонометрических заставах

4.4.1 Заставы и евклидовы монополи

Пусть G почти простая односвязная связная алгебраическая группа над $\mathbb{C}$. Будем обозначать $\mathcal{B}$ многообразие флагов G. Фиксируем пару противоположных борелевских подгрупп B, B_-, пересечение которых является максимальным тором T. Пусть Λ обозначает решетку кохарактеров тора T; поскольку G предполагается односвязной, эта решетка совпадает с решеткой кокорней группы G. Обозначим $\Lambda_+ \subset \Lambda$ под-полугруппу, порождённую положительными кокорнями.

Хорошо известно, что $H_2(\mathcal{B}, \mathbb{Z}) = \Lambda$ и что элемент $\alpha \in H_2(\mathcal{B}, \mathbb{Z})$ представим эффективной алгебраической кривой тогда и только тогда, когда $\alpha \in \Lambda_+$. Пусть $\overset{\circ}{Z}{}^{\alpha}$ обозначает пространство отображений $C = \mathbb{P}^1 \to \mathcal{B}$ степени α, переводящих $\infty \in \mathbb{P}^1$ в $B_- \in \mathcal{B}$. Известно [26], что это гладкое симплектическое аффинное алгебраическое многообразие, которое можно отождествить с гиперкэлеровым пространством модулей оснащенных G-монополей на $\mathbb{R}^3$ с максимальным нарушением симметрии на бесконечности, с топологическим зарядом α [29], [30].

Пространство монополей $\overset{\circ}{Z}{}^{\alpha}$ обладает естественной частичной компактификацией Z^{α} (пространство *застав*). Оно может быть реализовано как пространство модулей базированных *квазиотображений* степени α; теоретико-множественно оно может быть описано следующим образом:

$$Z^{\alpha} = \bigsqcup_{0 \leq \beta \leq \alpha} \overset{\circ}{Z}{}^{\beta} \times \mathbb{A}^{\alpha - \beta},$$

где для $\gamma \in \Lambda_+$ мы обозначаем $\mathbb{A}^{\gamma}$ пространство всех крашенных дивизоров $\sum \gamma_i x_i$ с $x_i \in \mathbb{A}^1$, $\gamma_i \in \Lambda_+$, таких что $\sum \gamma_i = \gamma$.

Пространство застав снабжено морфизмом *факторизации* $\pi_\alpha : \ Z^{\alpha} \to \mathbb{A}^{\alpha}$, ограничение которого на $\overset{\circ}{Z}{}^{\alpha} \subset Z^{\alpha}$ имеет прозрачный геометрический смысл: для базированного отображения $\varphi \in \overset{\circ}{Z}{}^{\alpha}$, крашенный дивизор $\pi_\alpha(\phi)$ — это просто обратный образ крашенного дивизора Шуберта $D \subset \mathcal{B}$, равного дополнению открытой B-орбиты в $\mathcal{B}$. Морфизм $\pi_\alpha : \ \overset{\circ}{Z}{}^{\alpha} \to \mathbb{A}^{\alpha}$ является интегрируемой системой *Атии-Хитчина* (относительно вышеупомянутой симплектической структуры): все слои π_α лагранжевы.

Система этальных рациональных координат на $\overset{\circ}{Z}{}^{\alpha}$ была введена в [26]. Напомним её определние для $G = SL(2)$. В этом случае $\overset{\circ}{Z}{}^{\alpha}$ состоит из всех отображений $\mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1$ степени α, переводящих ∞ в 0. Такое отображение можно записать как рациональную функцию $\frac{R}{Q}$, где Q является многочленом со старшим коэффициентом 1 степени α, а R является многочленом степени $< \alpha$. Пусть $w_1, \dots, w_\alpha$ — корни многочлена Q. Положим $y_r = R(w_r)$. Тогда функции $(y_1, \dots, y_\alpha, w_1, \dots, w_\alpha)$ образуют этальную рациональную систему координат на $\overset{\circ}{Z}{}^\alpha$, а вышеупомянутая симплектическая форма в этих координатах имеет вид $\Omega_{\mathrm{rat}} = \sum_{r=1}^{\alpha} \frac{dy_r \wedge dw_r}{y_r}$.

Для общей группы G определение аналогичных координат весьма похоже. А именно, для точки $\overset{\circ}{Z}{}^\alpha$ можно определить многочлены R_i, Q_i, где i пробегает множество I вершин диаграммы Дынкина G, $\alpha = \sum a_i \alpha_i$, а

(1) Q_i является многочленом со старшим коэффициентом 1 степени a_i,

(2) R_i является многочленом степени $< a_i$.

Теперь можно определить искомые (этальные, рациональные) координаты $(y_{i,r}, w_{i,r})$, где $i \in I$, а $r = 1, \dots, a_i$. А именно, $w_{i,r}$ являются корнями Q_i, а $y_{i,r} = R_i(w_{i,r})$. Скобка Пуассона этих координат относительно вышеупомянутой симплектической структуры вычисляется следующим образом: $\{w_{i,r}, w_{j,s}\}_{\mathrm{rat}} = 0,\ \{w_{i,r}, y_{j,s}\}_{\mathrm{rat}} = \check{d}_i \delta_{ij} \delta_{rs} y_{j,s},\ \{y_{i,r}, y_{j,s}\}_{\mathrm{rat}} = (\check{\alpha}_i, \check{\alpha}_j) \frac{y_{i,r} y_{j,s}}{w_{i,r} - w_{j,s}}$ для $i \neq j$, и наконец, $\{y_{i,r}, y_{i,s}\}_{\mathrm{rat}} = 0$. Здесь $\check{\alpha}_i$ является простым корнем, $(,)$ обозначает инвариантное скалярное произведение на $(\mathrm{Lie}\, T)^*$, такое что квадрат длины простого корня равен 2, и $\check{d}_i = (\check{\alpha}_i, \check{\alpha}_i)/2$.

Напомним теперь, что стандартная *рациональная* r-матрица для $\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}\, G$ задаёт структуру биалгебры Ли на $\mathfrak{g}[z^{\pm 1}]$, отвечающую тройке Манина $\mathfrak{g}[z], z^{-1}\mathfrak{g}[z^{-1}], \mathfrak{g}[z^{\pm 1}]$. В свою очередь, эта тройка Манина задаёт Пуассонову структуру на аффинном Грассманниане $\mathrm{Gr}_G = G[z^{\pm 1}]/G[z]$. Трансверсальные срезы $\mathcal{W}^\lambda_\mu$ от одной $G[z]$-орбиты Gr^μ_G к другой орбите Gr^λ_G (здесь $\mu \leq \lambda$ являются доминантными ковесами группы G) являются примерами симплектических листов вышеупомянутой Пуассоновой структуры. Следуя [22], можно отождествить пространства застав со "стабильными пределами"вышеупомянутых срезов. Точнее, для $\alpha = \lambda - \mu$ имеется бирациональное Пуассоново отображение $s^\lambda_\mu :\ \mathcal{W}^\lambda_\mu \to Z^\alpha$.

4.4.2 Тригонометрические заставы и периодические монополи

Рассмотрим открытое подмножество $\mathbb{G}_m^\alpha \subset \mathbb{A}^\alpha$ (крашеные дивизоры, не содержащие точки $0 \in \mathbb{A}^1$), и соответствующее открытое подпространство *тригонометрических застав* ${}^\dagger Z^\alpha := \pi_\alpha^{-1} \mathbb{G}_m^\alpha \subset Z^\alpha$, а также его открытое гладкое аффинное подмногообразие *периодических монополей*

${}^{\dagger}\overset{\circ}{Z}{}^{\alpha} := {}^{\dagger}Z^{\alpha} \cap \overset{\circ}{Z}{}^{\alpha}$. Эти пространства являются решениями следующих проблем модулей.

Пусть $C^{\dagger}$ неприводимая нодальная кривая арифметического рода 1, полученная склеиванием точек $0, \infty \in C = \mathbb{P}^1$, так что $\pi : \ C \to C^{\dagger}$ является нормализацией. Пусть $\mathfrak{c} \in C^{\dagger}$ — особая точка. Пространство модулей $\mathrm{Bun}_T^0(C^{\dagger})$ T-расслоений степени 0 на $C^{\dagger}$ канонически отождествляется с картановским тором T. Фиксируем T-расслоение $\mathcal{F}_T$, отвечающее *регулярной* точке $t \in T^{\mathrm{reg}}$. Тогда ${}^{\dagger}\overset{\circ}{Z}{}^{\alpha}$ является пространством модулей следующих данных:
(a) тривиализация $\tau_{\mathfrak{c}}$ слоя $\mathcal{F}_T$ в особой точке $\mathfrak{c} \in C^{\dagger}$;
(b) B-структура ϕ степени α в индуцированном G-расслоении $\mathcal{F}_G = \mathcal{F}_T \overset{T}{\times} G$, трансверсальная $\mathcal{F}_B = \mathcal{F}_T \overset{T}{\times} B$ в точке $\mathfrak{c}$.
Схема ${}^{\dagger}Z^{\alpha}$ является пространством модулей аналогичных данных с единственной разницей: мы допускаем *обобщённые* B-структуры в пункте (b), т.е. позволяем им иметь дефекты в различных точках кривой $C^{\dagger}$, но требуем, чтобы в точке $\mathfrak{c}$ дефекта не было.

Если допустить вариацию регулярного картановского элемента t, вышеописанные пространства модулей образуют слои единого семейства. Точнее, рассмотрим следующую проблему модулей:
(t) T-расслоение $\mathcal{F}_T$ степени 0 на $C^{\dagger}$, отвечающее регулярному элементу тора T;
(a,b) как выше;
(c) тривиализация $f_{\mathfrak{c}}$ в точке $\mathfrak{c}$ T-расслоения ϕ_T, индуцированного из B-расслоения ϕ пункта (b).

Эта проблема модулей представима схемой $\overset{\circ}{Y}{}^{\alpha} \subset Y^{\alpha}$ (в зависимости от того, является ли B-структура в (b) настоящей или обобщённой). Заметим, что Y^{α} снабжена действием $T \times T$ заменами тривиализаций в (a,c). Мы доказали, что $\overset{\circ}{Y}{}^{\alpha}$ является гладким аффинным многообразием, снабжённым естественной проекцией $\varpi : \ \overset{\circ}{Y}{}^{\alpha} \to {}^{\dagger}\overset{\circ}{Z}{}^{\alpha}$, и построили невырожденное бивекторное поле на $\overset{\circ}{Y}{}^{\alpha}$, происходящее из дифференциала в спектральной последовательности, включающей касательное и кокасательное расслоения $\overset{\circ}{Y}{}^{\alpha}$ (эта конструкция является тригонометрическим вырождением конструкции [25] для эллиптических кривых; её рациональный аналог был разработан в [26]). Это бивекторное поле спускается на ${}^{\dagger}\overset{\circ}{Z}{}^{\alpha}$ относительно проекции $\varpi : \ \overset{\circ}{Y}{}^{\alpha} \to {}^{\dagger}\overset{\circ}{Z}{}^{\alpha}$. Пуассоновы скобки координат в соответствующей симплектической структуре ${}^{\dagger}\mathring{Z}^{\alpha}$ задаются следующими формулами: $\{w_{i,r}, w_{j,s}\}_{\mathrm{trig}} = 0$, $\{w_{i,r}, y_{j,s}\}_{\mathrm{trig}} = \check{d}_i \delta_{ij} \delta_{rs} w_{j,s} y_{j,s}$, $\{y_{i,r}, y_{j,s}\}_{\mathrm{trig}} = (\check{\alpha}_i, \check{\alpha}_j) \frac{(w_{i,r}+w_{j,s}) y_{i,r} y_{j,s}}{2(w_{i,r}-w_{j,s})}$ для $i \neq j$, и наконец $\{y_{i,r}, y_{i,s}\}_{\mathrm{trig}} = 0$. В частности, проекция $\pi_\alpha : {}^{\dagger}\mathring{Z}^{\alpha} \to \mathbb{G}_m^{\alpha}$ является *тригонометрической интегрируемой системой Атии-Хитчина* (для $G = SL(2)$ эта интегрируемая система восходит по крайней мере к [24]).

Теперь напомним, что стандартная *тригонометрическая* r-матрица для $\mathfrak{g}$ задаёт структуру биалгебры Ли на $\mathfrak{g}((z^{-1}))$, которая в свою очередь задаёт пуассонову структуру на аффинном пространстве флагов $\mathcal{F}\ell_G$ (факторе группы петель $G[z^{\pm 1}]$ по подгруппе Ивахори). Примерами симплектических листов этой пуассоновой структуры служат некоторые пересечения $\mathcal{F}\ell_y^w$ противоположных орбит Ивахори (также известные под именем *открытых многообразий Ричардсона*). Здесь w, y являются элементами аффинной группы Вейля $W_a = W \ltimes \Lambda$. Для доминантных ковесов $\mu \leq \lambda \in \Lambda$ и длиннейшего элемента w_0 конечной группы Вейля W, проекция $\mathrm{pr} : \mathcal{F}\ell_{w_0 \times \mu}^{w_0 \times \lambda} \to \mathcal{W}_\mu^\lambda$ является открытым вложением, и композиция $s_\mu^\lambda \circ \mathrm{pr} : \mathcal{F}\ell_{w_0 \times \mu}^{w_0 \times \lambda} \to Z^\alpha$ является *симплектоморфизмом* на свой образ ${}^{\dagger}\mathring{Z}^{\alpha} \subset Z^\alpha$, снабжённый тригонометрической симплектической структурой.

4.4.3 Кластерные фантазии

Нет никаких сомнений, что конструкция Б. Леклерка [31] для многообразий Ричардсона в конечных многообразиях флагов работает точно так же и для аффинных многообразий флагов и снабжает $\mathcal{F}\ell_y^w$ кластерной структурой. Эту структуру можно перенести с $\mathcal{F}\ell_{w_0 \times \mu}^{w_0 \times \lambda}$ на ${}^{\dagger}\mathring{Z}^{\alpha}$ с помощью вышеупомянутого симплектоморфизма. В случае $G = SL(2)$ полученная кластерная структура на пространстве модулей периодических монополей была открыта в [28], что и послужило отправной точкой для наших исследований. Также представляется весьма и весьма вероятным, что для произвольной группы G суперпотенциал Гайотто-Уиттена на Z^α (см. например. [23]), ограниченный на ${}^{\dagger}\mathring{Z}^{\alpha}$, является вполне положительным в этой кластерной структуре.

Замечание. В вышеприведённом обсуждении неявно содержится утверждение, что если α *доминантен* (как ковес группы G), то имеет место аффинное открытое вложение ${}^{\dagger}\mathring{Z}^{\alpha} \subset \mathring{Z}^{\alpha} \hookrightarrow \mathbb{A}^{2|\alpha|}$ тригонометрических застав в аффинное пространство. Вот его модулярная интерпретация: $\mathbb{A}^{2|\alpha|}$ является пространством модулей B-расслоений ϕ_B на $\mathbb{P}^1$, снабжённых тривиализацией $(\phi_B)_\infty \xrightarrow{\sim} B$ слоя в точке $\infty \in \mathbb{P}^1$, такой что индуцироанное T-расслоение (относительно проекции $B \twoheadrightarrow T$) имеет степень α.

Всё это и многое другое заинтересовавшиеся читатели найдут в работе [27].

4.5 Обобщенные глобальные модули Вейля, комбинаторика характеров и многообразия флагов

В работах 2018 года сотрудника Лаборатории Е.Б.Фейгина изучаются алгебро-геометрические, теоретико представленческие и комбинаторные свойства полубесконечных глобальных модулей Вейля, связанных с формальными моделями полубесконечных многообразий флагов [49, 50], и симплектических/ортогональных аналогов вырожденных многообразий флагов типа A [32, 41].

В работах последнего десятилетия [35, 36, 37, 38, 39] была установлена тесная связь между вырождениями Пуанкаре-Биркгофа-Витта классических многообразий флагов типа A и колчанными грассманманами, связанными с представлениями однонаправленных колчанов типа A. В частности, были изучены топологические свойства этих многообразий, построены клеточные разбиения, вычислена эйлерова характеристика в терминах диаграмм Деллака и чисел Дженокки. Естественный вопрос состоит в обобщении полученных результатов на другие классические группы, в частности, для симплектических и ортогональных групп. В работе [33] были получены первые результаты в этом направлении. Используя кососимметричесие и симметрические формы были определены ортогональные и симплектические версии вырожденных многообразий флагов типа A. При этом конструкция носит ярко выраженный колчанный характер. Построено клеточное разбиение этих многообразий. Используя понятие симплектических диаграмм Деллака из работы [40], вычислены эйлеровы характеристики и полиномы Пуанкаре.

Фильтрация Пуанкаре-Биргкофа-Витта на локальных модулях Вейля над алгебрами токов простых алгебр Ли тесно связана со специализациями несимметрическими полиномами Макдональда ([46, 47, 48]). В работе [45] получены результаты, аналогичные [42, 43, 44], для глобальных модулей Вейля. Определены и изучены обобщенные глобальные модули Вейля – бесконечномерные циклические представления подалгебр Ивахори в аффинных алгебрах Каца-Муди. Как известно, классические глобальные модули Вейля после локализации в нуле становятся изоморфны локальным модулям Вейля. В частности, характеры глобального и локального модулей Вейля различаются на простой множитель. Мы доказываем аналогичный факт для обобщённых модулей Вейля. Также приведен глобальный вариант так называемой процедуры разборки, позволяющей выражать характеры обобщённых глобальных модулей Вейля через характеры меньших модулей. Этот результат можно рассматривать как представленческий аналог комбинаторной конструкции Орра-Шимозоно [51]. Также показано, что характеры обобщённых модулей Вейля равны q-функциям Уиттэкера для соответсвующей алгебры Ли.

4.6 Несимметрические многочлены Макдональда и модули Вейля

Связь несимметрических многочленов Макдональда и модулей Вейля изучалась во многих работах. В работах [52, 53, 44] было даказано, что специализации несимметрических многочленов Макдональда в $t = 0$ совпадают с характерами модулей Вейля для всех типов. В работах [52, 53] это доказывается с помощью связи с модулями Демазюра. В работах [43, 44] эта связь изучается с помощью комбинаторной конструкции Орра-Шимозоно для многочленов Макдональда. В этих работах строится базис модулей Вейля, который биективен альковным путям Орра-Шимозоно, отвечающим специализации несимметрического многочлена Макдональда в $t = 0$. Для этого определяется некоторое обобщение модулей Вейля (обобщенные модули Вейля с характеристиками) и фильтрация на них, такая что члены этой фильтрации и подфакторы также являются обобщенными модулями Вейля с характеристиками.

В работе [54], сотрудниками Лаборатории этот же подход применен для изучения специализаций несимметрических многочленов Макдональда в $t = \infty$. С. Като в работе [49] построил линейные расслоения на частичных резольвентах Ботта-Саммельсона полубесконечных многообразий Шуберта, такие что характеры модулей, двойственных к их модулям глобальных сечений, совпадают со специализациями несимметрических многочленов Макдональда в $t = \infty$. Мы доказываем, что эти расслоения могут быть определены на самом полубесконечном многообразии Шуберта. Мы изучаем модули, двойственные модулям глобальних сечений этих расслоений. Мы пишем образующие и соотношения на эти модули и доказываем, что эти модули совпадают с обобщенными модулями Вейля с характеристиками. Мы строим их базисы, биективные слагаемым формулы Орра-Шимозоно для специализаций несимметрических многочленов Макдональда в $t = \infty$. Обобщенные модули Вейля с характеристиками имеют глобальную версию. Мы доказываем, что глобальная версия данных модулей является Ext-двойственной модулям Демазюра в типах A, D, E_6, E_7. На уровне характеров эта двойственность следует из ортогональности несимметрических многочленов Макдональда в скалярном произведении Чередника.

4.7 Многогранники Ньютона-Окунькова многообразий флагов классических групп

Сотрудниками Лаборатории подготовлен препринт [60], в котором единым образом построено нормирование на многообразиях полных флагов для классических групп $SL_n(\mathbb{C})$, $SO_n(\mathbb{C})$ и $Sp_{2n}(\mathbb{C})$. В типе A и C вычислены многограннники Ньютона-Окунькова относительно этого нормирования, причём результат совпадает с многогранниками Винберга–Литтельманна–Фейгина–Фурье (ВЛФФ). Это дает надежду, что соответствующие многогранники в типах B и D можно использовать для параметризации ПБВ-базисов в этих типах (пока примеры ПБВ-базисов построены только для случаев B_3 [BK] и D_4 [G]).

Зафиксируем полный флаг подпространств $F^\bullet := (F^1 \subset F^2 \subset \ldots \subset F^{n-1} \subset \mathbb{C}^n)$ (иными словами, зафиксируем борелевскую подгруппу $B \subset GL_n(\mathbb{C})$), а также базис $e_1, \ldots, e_n$ в $\mathbb{C}^n$, совместимый с $F^\bullet$ (или максимальный тор в B), то есть, $F^i = \langle e_1, \ldots, e_i \rangle$. Напомним, что открытая клетка Шуберта C (относительно $F^\bullet$) в многообразии полных флагов G/B, где $G = SL_n(\mathbb{C})$, определяется как множество всех флагов $M^\bullet$, которые находятся в общем положении со стандартным флагом $F^\bullet$, то есть, все пересечения $M^i \cap F^j$ трансверсальны. Если $G = Sp_n(\mathbb{C})$ — симплектическая группа (для чётного n) или ортогональная группа $SO_n(\mathbb{C})$, то открытую клетку в G/B можно определить аналогично, рассматривая только изотропные или ортогональные флаги, соответственно.

Обозначим через d размерность многообразия флагов G/B. Для $G = SL_n(\mathbb{C})$ можно отождествить открытую клетку Шуберта C с аффинным пространством $\mathbb{C}^d$, выбрав для каждого флага $M^\bullet$ базис $v_1, \ldots, v_n$ в $\mathbb{C}^n$ вида:

$$v_1 = e_n + x_1^{n-1}e_{n-1} + \ldots + x_1^1 e_1,$$

$$v_2 = e_{n-1} + x_2^{n-2}e_{n-2} + \ldots + x_2^1 e_1, \quad \ldots, \quad v_{n-1} = e_2 + x_{n-1}^1 e_1, \quad v_n = e_n,$$

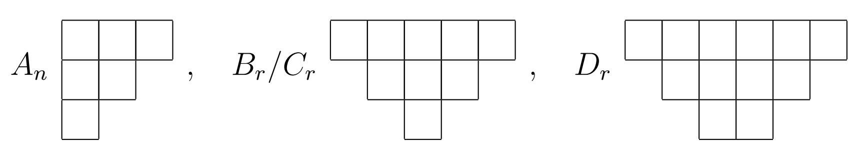
так чтобы $M^i = \langle v_1, \ldots, v_i \rangle$. Такой базис единственен, поэтому коэффициенты $(x_j^i)_{i+j<n}$ являются координатами на открытой клетке C. Иными словами, каждый флаг $M^\bullet \in C$ отождествляется с треугольной матрицей:

$$\begin{pmatrix} x_1^1 & x_2^1 & \ldots & x_{n-1}^1 & 1 \\ x_1^2 & x_2^2 & \ldots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & & & 0 \\ x_1^{n-1} & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad (*),$$

а мы упорядочиваем коэффициенты $(x_j^i)_{i+j<n}$ этой матрицы, начиная с $(n-1)$-го столбца, двигаясь сверху вниз в каждом столбце и справо налево по столбцам. Например, при $n = 4$ получаем упорядочивание:

$$\begin{pmatrix} y_4 & y_2 & y_1 & 1 \\ y_5 & y_3 & 1 & 0 \\ y_6 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Для типов B_r, C_r и D_r можно построить кординаты аналогичным образом, выбирая таблицы в матрице $(*)$ (для $n = 2r+1$, $n = 2r$, $n = 2(r+1)$, соответственно) той же формы, что и таблицы Гельфанда–Цетлина в соответствующих типах (см. детали в [60, Section 3]):



Зафиксируем лексикографический порядок на мономах в координатах $y_1, \ldots, y_d$ относительно упорядочивания $y_1 \succ y_2 \succ \ldots \succ y_n$. Пусть v обозначает нормирование младшим мономом на $\mathbb{C}(G/B)$, связанное с этими координатами и порядком. Пусть $\lambda := (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{Z}^n$ — невозрастающий набор целых чисел. Тогда λ задаёт доминантный вес группы

G и линейное расслоение L_λ на G/B. Обозначим через $\Delta_v(G/B, L_\lambda) \subset \mathbb{R}^d$ выпуклое тело Ньютона-Окунькова, соответствующее G/B, L_λ и v. В типах A и C выпуклое тело $\Delta_v(G/B, L_\lambda)$ оказывается многогранником и явно описывается неравенствами:

Теорема 4.1. *[58, Theorem 2.1] Многогранник Ньютона–Окунькова $\Delta_v(SL_n/B, L_\lambda)$ совпадает с ВЛФФ-многогранником $FFLV(\lambda)$ в типе A.*

Напомним определение $FFLV(\lambda)$. Обозначим координаты в $\mathbb{R}^d$, соответствующие $(y_1, \ldots, y_d)$ через $(u^1_{n-1}; u^1_{n-2}, u^2_{n-2}; \ldots; u^1_1, u^2_1, \ldots, u^{n-1}_1)$. Организуем координаты в таблицу:

$$\begin{array}{ccccc} u^1_1 & u^1_2 & \ldots & u^1_{n-1} & \lambda_1 \\ u^2_1 & u^2_2 & \ldots & \lambda_2 & \\ \vdots & \vdots & & & \\ u^{n-1}_1 & \lambda_{n-1} & & & \\ \lambda_n & & & & \end{array} \tag{FFLV}$$

Многогранник $FFLV(\lambda)$ в типе A определяется неравенствами $u^l_m \geq 0$ и

$$\sum_{(l,m)\in D} u^l_m \leq \lambda_i - \lambda_j$$

для всех путей Дика D из λ_i в λ_j в таблице $(FFLV)$, где $1 \leq i < j \leq n$. *Путём Дика* мы называем ломаную, состоящую из отрезков, которые соединяют либо u^i_j с u^{i+1}_j, либо u^i_j с u^i_{j+1}. В типе C определение аналогично, но пути Дика в таблице $FFLV(\lambda)$ должны лежать не ниже диагонали и могут заканчиваться на диагонали. Если путь Дика начинается в λ_i, а заканчивается в u^j_j, то он определяет неравенство

$$\sum_{(l,m)\in D} u^l_m \leq \lambda_i.$$

Пример 4.2. *Легко проверить, что если*

$$\lambda = (\underbrace{1, \ldots, 1}_{s}, \underbrace{0, \ldots, 0}_{n-s}),$$

то нормирование v, применённое к $H^0(SL_n/B, L_\lambda)$, в точности даст все целые точки в $FFLV(\lambda)$. Действительно, в координатах $(y_1, \ldots, y_d)$

можно отождествить $H^0(SL_n/B, L_\lambda)$ *с пространством многочленов от* $y_1, \dots, y_d$*, которые являются линейными комбинациями всех возможных миноров левой угловой* $s \times (n-s)$ *подматрицы матрицы* $(*)$ *(мы считаем, что* 1 *тоже входит в это пространство, соответствуя пустому минору). Нормирование выбирает в каждом миноре моном, полученный перемножением коэффициентов на главной диагонали минора. С другой стороны, каждая такая главная диагональ соответствует набору координат в таблице* $(FFLV)$*, никакие две из которых не лежат ни на одном пути Дика, а следовательно могут быть все одновременно равны единице без нарушения неравенств, задающих* $FFLV(\lambda)$*.*

Например, при $n = 4$ *и* $s = 2$ *получается 6-мерное пространство*

$$\langle 1,\ y_2,\ y_3,\ y_4,\ y_5,\ y_3y_4 - y_2y_5 \rangle.$$

Нормирование v *переводит это пространство в набор целых точек* $(0,0,0,0,0,0)$, $(0,1,0,0,0,0)$, $(0,0,1,0,0,0)$, $(0,0,0,1,0,0)$, $(0,0,0,0,1,0)$, $(0,0,1,1,0,0)$ *многогранника* $FFLV(\lambda)$*.*

Это рассуждение можно довести до полного доказательства теоремы в типе A (см. [58, Example 2.9, Remark 2.10]). Более того, его модификация позволяет доказать аналогичный результат для $G = Sp_{2n}(\mathbb{C})$:

Теорема 4.3. *[60, Theorem 3.3] Выпуклое тело Ньютона–Окунькова* $\Delta_v(Sp_{2n}(\mathbb{C})/B, L_\lambda)$ *совпадает с ФФЛВ многогранником* $FFLV(\lambda)$ *в типе* C*.*

4.7.1 Исчисление Шуберта на многогранниках Ньютона–Окунькова

Сотрудниками Лаборатории также подготовлен препринт [61], в котором приводится общая конструкция выпукло-геометрических моделей исчисления Шуберта на многообразии полных флагов с помощью произвольного многогогранника Ньютона-Окунькова. Приводится выпукло-геометричесикий алгоритм (комбинаторная реализация геометрического митоза [57]) для представления циклов Шуберта гранями многогранника, так что произведение циклов соответствует теоретико-множественному пересечению граней (когда последние трансверсальны).

Также приводится обзор конкретных реализаций этой конструкции в типах A, B и C с помощью многогранников Гельфанда-Цетлина и многогранников, полученных с помощью выпукло-геометрических операторов Демазюра из [56] (в недавнем препринте [Fu18] доказано, что эти многогранники совпадают с полиэдральными реализациями Накаджимы-Зелевинского кристалльных базисов).

4.7.2 Многогранники Ньютона–Окунькова многообразий Ботта–Самельсона в типе A

Также подготовлен препринт [59], в котором явно вычисляются выпуклые тела Ньютона–Окунькова линейных расслоений на разрешении Ботта-Самельсона многообразия полных флагов для SL_n в случае геометрического нормирования, приходящего из флага сдвинутых подмногообразий Шуберта.

Разрешение Ботта-Самельсона $X_{\overline{w_0}}$ соответствует разложению

$$\overline{w_0} = (s_1)(s_2s_1)(s_3s_2s_1)(\ldots)(s_{n-1}\ldots s_1)$$

самого длинного элемента w_0 в группе Вейля. Здесь $s_i := (i\ i+1)$ обозначает i-тую элементарную транспозицию (простое отражение в случае группы Вейля S_n). Многообразия Шуберта соответствуют терминальным подсловам в разложении $\overline{w_0}$. Ниже $\overline{w_k}$ для $l = 1,\ldots, d$ обозначает подслово $\overline{w_0}$, которое получается вычёркиванием l простых отражений в $\overline{w_0}$, а w_l обозначает соответствующий элемент в S_n. Рассмотрим флаг сдвинутых многообразий Шуберта:

$$w_0X_{\mathrm{id}} \subset w_0w_{d-1}^{-1}X_{w_{d-1}} \subset w_0w_{d-2}^{-1}X_{w_{d-2}} \subset \ldots \subset w_0w_1^{-1}X_{w_1}, \qquad (**)$$

где многообразия Шуберта определяются по флагу $F^\bullet$, то есть, $X_w = \overline{BwB/B}$. Скажем, что координаты $y_1, \ldots, y_d$ на C *совместимы* с $(**)$, если $w_0w_l^{-1}X_{w_k} \cap C = \{y_1 = \ldots = y_l = 0\}$. Легко проверить, что координаты, заданные с помощью матрицы $(*)$ совместимы с флагом $(**)$. В [58, Section 2.2] приводится другой пример координат, совместимых с $(*)$, более естественный с точки зрения геометрии многообразий Ботта–Самельсона. Их можно выразить как миноры матрицы $(**)$, соответствующие наборам из столбцов $i, i+1,\ldots j$ и строк $n-j, n-j+1, n-i$ для всех пар (i, j), таких что $1 \le i < j \le n$. Как и раньше используя координаты $y_1,\ldots, y_d$, мы определяем нормирование v на $\mathbb{C}(X_{\overline{w_0}}) = \mathbb{C}(SL_n/B)$.

Мы доказываем, что многогранники Ньютона-Окунькова для глобально порождённых расслоенийн на $X_{\overline{w_0}}$ удовлетворяют свойству аддитивности. В частности, они совпадают с суммами по Минковскому многогранников Ньютона–Окунькова линейных расслоений на многообразиях полных флагов для $SL_2, \ldots, SL_n$ (как обсуждалось выше, последение совпадают с ФФЛВ могогранниками). Заметим, что ранее известные вычисления для других нормирований в работах Фуджиты и Харады-Янг свойству аддитивности не удовлетворяют.

4.8 Комплексы rc-графов и слайд-многочлены

Многочлены Шуберта — это семейство целочисленных многочленов $\mathfrak{S}_w \in \mathbb{Z}[x_1, x_2, \ldots]$ от счетного числа переменных, где $w \in S_\infty$ — множество финитных перестановок, определяющееся свойством

$$\partial_i \mathfrak{S}_w = \begin{cases} \mathfrak{S}_{ws_i}, & \ell(ws_i) < \ell(w), \\ 0, & \ell(ws_i) > \ell(w), \end{cases}$$

где $\ell(w)$ — длина перестановки w, а $\partial_i f = \frac{f - s_i f}{x_i - x_{i+1}}$ — это i-й оператор разделенной разности.

Эти многочлены были определены в работах И.Н.Бернштейна, И.М.Гельфанда и С.И.Гельфанда [63] и А.Ласку и М.-П.Шютценберже [67] на рубеже 1970-х и 80-х гг. и с тех пор являются объектами постоянного интереса как геометров, так и специалистов по алгебраической комбинаторике. Их важность обусловлена тем, что они представляют классы соответствующих многообразий Шуберта $[X_w] \in H^*(\mathrm{GL}(n)/B)$ в кольце когомологий многообразия полных флагов в $\mathbb{C}^n$ при эпиморфизме Бореля $R \to H^*(\mathrm{GL}(n)/B)$.

Многочлены Шуберта обладают многими замечательными комбинаторными свойствами. Так, например, они образуют базис кольца $\mathbb{Z}[x_1, x_2, \ldots]$. Так, например, их коэффициенты неотрицательны, и им можно придать комбинаторный смысл: они нумеруются так называемыми *rc-графами*, которые можно рассматривать как обобщение понятия таблиц Юнга для многочленов Шура (см., например, [64]). С другой стороны, до сих пор неизвестно комбинаторное доказательство положительности структурных констант c_{wv}^u («коэффициентов Литтлвуда–Ричардсона») для умножения в этом базисе; при этом геометрическое доказательство этого факта легко следует из теоремы Клеймана о трансверсальности ([68]).

Как было показано в работах А.Кнутсона и Э.Миллера [66, 65], rc-графы для перестановки w можно отождествить с неприводимыми компонентами в некотором торическом вырождении матричного многообразия Шуберта $\overline{X_w} \subset \mathrm{Mat}(n)$. В тех же работах был определен симплициальный комплекс RC-графов $C(w)$, гиперграни которого нумеруются мономами многочлена $\mathfrak{S}_w$, и было показано, что этот комплекс является диском или сферой. Из этого топологического результата следует ряд геометрических фактов, в частности, нормальность и коэн-маколеевость многообразий Шуберта.

Недавно С. Ассаф и Д. Сирлз [62] определили новое семейство многочленов с похожими на многочлены Шуберта свойствами — *слайд-многочлены* $S_{w,I}$, которые также образуют базис в кольце $\mathbb{Z}[x_1, x_2, \dots]$. Многочлены Шуберта получаются как их положительные линейные комбинации; более того, положительность структурных констант для произведения слайд-многочленов также удается доказать. Есть надежда, что с помощью этого базиса получится найти комбинаторное описание коэффициентов Литтлвуда–Ричардсона. Кроме того, аналоги этих результатов были получены и для так называемых *многочленов Гротендика*, отвечающих структурным пучкам многообразий Шуберта $[\mathcal{O}_{X_w}]$ в K-группе многообразия флагов; соответствующие многочлены, описанные в работе [69], называются *глайд-многочленами* $G_{w,I}$.

Сотрудником Лаборатории Е. Ю. Смирновым в совместной работе с А. А. Тутубалиной были определены симплициальные комплексы $C(w, I)$ для слайд- и глайд-многочленов, названные *слайд-комплексами.* Они образуют подразбиение соответствующего многочлена C_w, причем их гиперграни отвечают мономам соответствующего слайд-многочлена $S_{w,I}$, а грани произвольной размерности — мономам глайд-многочлена $G_{w,I}$. Кроме того, доказан аналог результата Кнутсона и Миллера о комплексах rc-графов:

Теорема. *Слайд-комплексы $C(w, I)$ являются шеллинговыми симплициальными комплексами, гомеоморфными дискам.*

Данные результаты в настоящее время готовятся к публикации.

Список литературы

[1] A. Blokh, L. Oversteegen, R. Ptacek, V. Timorin, *Complementary components to the cubic principal domain*, Proc. Amer. Math. Soc., Vol. 146 (2018), No. 11. P. 4649–4660

[2] A. Blokh, A. Chéritat A., L. Oversteegen, V. Timorin, *Location of Siegel capture polynomials in parameter spaces*, preprint `http://arxiv.org/abs/1809.02586`

[3] A. Blokh, L. Oversteegen, V. Timorin, *Dynamical generation of parameter laminations*, in preparation

[4] W. Thurston. *The combinatorics of iterated rational maps* (1985), with appendix by D. Schleicher, *Laminations, Julia sets, and the Mandelbrot set*, published in: “Complex dynamics: Families and Friends”, ed. by D. Schleicher, A K Peters (2009), 1–137.

[5] P. Berthelot, A. Ogus, *Notes on crystalline cohomology.* Princeton University Press, Princeton, N.J.; University of Tokyo Press, Tokyo, 1978. vi+243 pp. ISBN: 0-691-08218-9

[6] J.-M. Fontaine, W. Messing, *p-adic periods and p-adic etale cohomology.* Current trends in arithmetical algebraic geometry (Arcata, Calif., 1985), 179–207, Contemp. Math., 67, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1987.

[7] P. Deligne, L. Illusie, *Relévements modulo p2 et décomposition du complexe de de Rham.* Invent. Math. 89 (1987), no. 2, 247–270.

[8] E. Getzler, *Cartan homotopy formulas and the Gauss-Manin connection in cyclic homology.* Quantum deformations of algebras and their representations (Ramat-Gan, 1991/1992; Rehovot, 1991/1992), 65-78, Israel Math. Conf. Proc., 7, Bar-Ilan Univ., Ramat Gan, 1993.

[9] D. Kaledin, *Non-commutative Hodge-to-de Rham degeneration via the method of Deligne-Illusie* Pure Appl. Math. Q. 4 (2008), no. 3, Special Issue: In honor of Fedor Bogomolov. Part 2, 785–875.

[10] D. Kaledin, *Cyclic homology with coefficients.* Algebra, arithmetic, and geometry: in honor of Yu. I. Manin. Vol. II, 23–47, Progr. Math., 270, Birkhauser Boston, Inc., Boston, MA, 2009.

[11] J. Loday, *Cyclic homology,* Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences], 301. Springer-Verlag, Berlin, 1992.

[12] Petrov, A., Vaintrob, D., Vologodsky V., *The Gauss-Manin connection on the periodic cyclic homology.* V. Sel. Math. New Ser. (2018) 24: 531.

[13] T. Braden, *Hyperbolic localization of intersection cohomology*, Transform. Groups 8 (2003), 209–216.

[14] M. Brion, *Group completions via Hilbert schemes*, J. Algebraic Geom. 12 (2003), no. 4, 605–626.

[15] A. Braverman, M. Finkelberg, D. Gaitsgory and I. Mirković, *Intersection cohomology of Drinfeld's compactifications*, Selecta Math. 8 (2002), no. 3, 381–418. *Erratum*: Selecta Math. 10 (2004), no. 3, 429–430.

[16] V. Drinfeld, D. Gaitsgory, *On a theorem of Braden*, Transform. Groups 19 (2014), 313–358.

[17] B. Feigin, M. Finkelberg, A. Kuznetsov and I. Mirković, *Semi-infinite flags. II.Local and Global Intersection Cohomology of Quasimaps' Spaces*, Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2 194 (1999), 113–148.

[18] M. Finkelberg, V. Krylov, *Drinfeld-Gaitsgory interpolation Grassmannian and geometric Satake equivalence* (with appendix by Dennis Gaitsgory); arXiv:1805.07721.

[19] I. Mirković, K. Vilonen, *Geometric Langlands duality and representations of algebraic groups over commutative rings*, Ann. of Math. (2) 166 (2007), no. 1, 95–143.

[20] S. Schieder, *Monodromy and Vinberg fusion for the principal degeneration of the space of G-bundles*, arXiv:1701.01898.

[21] G. Wilson, *Collisions of Calogero-Moser particles and an adelic Grassmannian*, Invent. Math. 133 (1998), 1–41.

[22] A. Braverman, M. Finkelberg, *Semi-infinite Schubert varieties and quantum K-theory of flag manifolds*, J. Amer. Math. Soc. 27 (2014), 1147–1168.

[23] A. Braverman, G. Dobrovolska, M. Finkelberg, *Gaiotto-Witten superpotential and Whittaker D-modules on monopoles*, arXiv:1406.6671, to appear in Advances in Mathematics.

[24] L. Faybusovich, M. Gekhtman, *Poisson brackets on rational functions and multi-Hamiltonian structure for integrable lattices*, Phys. Lett. A 272 (2000), no. 4, 236–244.

[25] B. Feigin, A. Odesskii, *Vector bundles on Elliptic Curves and Sklyanin Algebras*, Topics in quantum groups and finite-type invariants, Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2, 185, Amer. Math. Soc., Providence, RI (1998), 65–84.

[26] M. Finkelberg, A. Kuznetsov, N. Markarian, I. Mirković, *A note on a symplectic structure on the space of G-monopoles*, Commun. Math. Phys. 201 (1999), 411–421. *Erratum*, Commun. Math. Phys. 334 (2015), 1153–1155; arXiv:math/9803124, v6.

[27] M. Finkelberg, A. Kuznetsov, L. Rybnikov, *Towards a cluster structure on trigonometric zastava* (with appendix by Galyna Dobrovolska), Selecta Mathematica (New Series) 24 (2018), no 1, 187–225.

[28] M. Gekhtman, M. Shapiro, A. Vainshtein, *Generalized Bäcklund-Darboux transformations for Coxeter-Toda flows from a cluster algebra perspective*, Acta Math. 206 (2011), no. 2, 245–310.

[29] S. Jarvis, *Euclidean monopoles and rational maps*, Proc. Lond. Math. Soc. (3) 77 (1998), no.1, 170–192.

[30] S. Jarvis, *Construction of Euclidean monopoles*, Proc. Lond. Math. Soc. (3) 77 (1998), no.1, 193–214.

[31] B. Leclerc, *Cluster structures on strata of flag varieties*, arXiv:1402.4435.

[32] I. Arzhantsev, *Flag varieties as equivariant compactifications of* $\mathbb{G}_a^n$, Proceedings of the American Mathematical Society, vol. 139 (2011), no. 3, pp. 783–786.

[33] A.Bigeni, E.Feigin, *Symmetric Dellac configurations and symplectic/orthogonal flag varieties*, Cornell University, arxiv.org, 2018, no. 1804.10804.

[34] I. Cherednik, E.Feigin, *Extremal part of the PBW-filtration and E-polynomials*, Advances in Mathematics (2015) vol. 282, pp. 220-264.

[35] G. Cerulli Irelli, E. Feigin, M. Reineke, *Quiver Grassmannians and degenerate flag varieties*, Algebra & Number Theory, 6-1 (2012), 165–194.

[36] G. Cerulli Irelli, E. Feigin, M. Reineke, *Homological approach to the Hernandez-Leclerc construction and quiver varieties*, Representation Theory 2014, no. 18, pp.1–14..

[37] G. Cerulli Irelli, E. Feigin, M. Reineke, *Desingularization of quiver Grassmannians for Dynkin quivers*, Advances in Mathematics (2013), no. 245, pp. 182–207.

[38] G. Cerulli Irelli, E. Feigin, M. Reineke, *Degenerate flag varieties: moment graphs and Schröder numbers*, Journal of Algebraic Combinatorics, Volume 38, Issue 1 (2013), pp. 159–189.

[39] G. Cerulli Irelli, E. Feigin, M. Reineke, *Schubert Quiver Grassmannians*, Algebras and Representation Theory (2017), vol. 20 (1), pp. 147–161.

[40] X. Fang, G. Fourier, *Torus fixed points in Schubert varieties and normalized median Genocchi numbers*, Sém. Lothar. Combin. 75 (2015), Art. B75f, 12 pp.

[41] E. Feigin, $\mathbb{G}_a^M$ *degeneration of flag varieties*, Selecta Mathematica: Volume 18, Issue 3 (2012), pp. 513–537.

[42] E.Feigin, I.Makedonskyi, *Nonsymmetric Macdonald polynomials, Demazure modules and PBW filtration*, Journal of Combinatorial Theory, Series A. 2015. P. 60–84.

[43] E.Feigin, I.Makedonskyi, *Generalized Weyl modules, alcove paths and Macdonald polynomials*, Selecta Mathematica, New Series (2017), vol. 23, no. 4, pp. 2863–2897.

[44] Е.Б.Фейгин, Е.А.Македонский, *Обобщенные модули Вейля для скрученных алгебр токов*, Теоретическая и математическая физика (2017), Т. 192, номер 2, стр. 284–306.

[45] E.Feigin, I.Makedonskyi, D.Orr D, *Generalized Weyl modules and nonsymmetric q-Whittaker functions*, Advances in Mathematics, 2018, vol. 30, pp. 997–1033.

[46] G.Fourier, P.Littelmann, *Tensor product structure of affine Demazure modules and limit constructions*, Nagoya Math. Journal 182 (2006), 171–198.

[47] G.Fourier, P.Littelmann, *Weyl modules, Demazure modules, KR-modules, crystals, fusion products and limit constructions*, Advances in Mathematics 211 (2007), no. 2, 566–593.

[48] B. Ion, *Nonsymmetric Macdonald polynomials and Demazure characters*, Duke Mathematical Journal 116:2 (2003), 299–318.

[49] S. Kato, *Demazure character formula for semi-infinite flag varieties*, Math. Ann. (2018). https://doi.org/10.1007/s00208-018-1652-5

[50] S. Kato, S. Loktev, with an appendix by Ryosuke Kodera, *A Weyl Module Stratification of Integrable Representations*, arXiv:1712.03508.

[51] D.Orr, M.Shimozono, *Specializations of nonsymmetric Macdonald-Koornwinder polynomials*, J. Algebr. Comb. (2017), https://doi.org/10.1007/s10801-017-0770-6.

[52] Y. Sanderson, *On the Connection Between Macdonald Polynomials and Demazure Characters*, J. of Algebraic Combinatorics, 11 (2000), 269–275.

[53] K.Naoi, *Weyl modules, Demazure modules and finite crystals for non-simply laced type*, Adv. Math. 229 (2012), no. 2, 875–934.

[54] E.Feigin, S. Kato, I.Makedonskyi, *RRepresentation-theoretic realization of nonsymmetric Macdonald polynomials at infinity*, arXiv:1703.04108.

[55] S. Kato, *Demazure character formula for semi-infinite flag manifolds*, arxiv:1605.049532.

[BK] T. Backhaus, D. Kus, *The PBW filtration and convex polytopes in type B*, J. Pure Appl. Algebra 223 (2019), no.1, 245–276

[Fu18] N. Fujita, *Polyhedral realizations of crystal bases and convex-geometric Demazure operators*, arXiv:1810.12480 [math.AG]

[Fu] N. Fujita, *Newton-Okounkov bodies for Bott–Samelson varieties and string polytopes for generalized Demazure modules*, arXiv:1503.08916 [math.RT]

[G] A. A. Gornitskii, *Essential Signatures and Canonical Bases for Irreducible Representations of D_4*, preprint arXiv:1507.07498 [math.RT]

[HY16] M. Harada, J. Yang, *Newton-Okounkov bodies of Bott-Samelson varieties and Grossberg-Karshon twisted cubes*, Michigan Math. J., 65 (2016), no. 2, 413–440

[56] V. Kiritchenko, *Divided difference operators on convex polytopes*, Advanced Studies in Pure Mathematics, Mathematical Society of Japan, 2016, 161–185

[57] V. Kiritchenko, *Geometric mitosis*, Math. Res. Lett., 23 (2016), no. 4, 1069–1096

[58] V. Kiritchenko, *Newton–Okounkov polytopes of flag varieties*, Transform. Groups, 22 (2017), no. 2, 387–402

[59] V.Kiritchenko, *Newton-Okounkov polytopes of Bott-Samelson varieties as Minkowski sums*, arXiv:1801.00334 [math.AG]

[60] V. Kiritchenko, *Newton–Okounkov polytopes of flag varieties for classical groups*, подан в Arnold journal.

[61] V. Kiritchenko, M. Padalko, *Schubert calculus on Newton–Okounkov polytopes*, подан в сборник трудов конференции “Workshop on lattice polytopes”, Magdeburg 2017

[62] Sami Assaf and Dominic Searles. Schubert polynomials, slide polynomials, Stanley symmetric functions and quasi-Yamanouchi pipe dreams. *Adv. Math.*, 306:89–122, 2017.

[63] I. N. Bernstein, I. M. Gelfand, and S. I. Gelfand. Schubert cells, and the cohomology of the spaces G/P. *Uspehi Mat. Nauk*, 28(3(171)):3–26, 1973.

[64] Sergey Fomin and Anatol N. Kirillov, *The Yang-Baxter equation, symmetric functions, and Schubert polynomials*, Proceedings of the 5th Conference on Formal Power Series and Algebraic Combinatorics (Florence, 1993), vol. 153, 1996, pp. 123–143.

[65] Allen Knutson and Ezra Miller. Subword complexes in Coxeter groups. *Adv. Math.*, 184(1):161–176, 2004.

[66] Allen Knutson and Ezra Miller. Gröbner geometry of Schubert polynomials. *Ann. of Math.* (2) 161 (2005), no. 3, 1245–1318.

[67] Lascoux, Alain; Schützenberger, Marcel-Paul Polynômes de Schubert. C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 294 (1982), no. 13, 447–450.

[68] Manivel, Laurent *Fonctions symétriques, polynômes de Schubert et lieux de dégénérescence.* Cours Spécialisés, 3. Société Mathématique de France, Paris, 1998. vi+179 pp.

[69] Pechenik, Oliver, and Searles, Dominic. Decompositions of Grothendieck polynomials. *International Mathematics Research Notices*, to appear.

5 Классическая геометрия

5.1 Существование метрик Кэлера–Эйнштейна на многообразиях Фано

Вопрос о существовании метрик Кэлера–Эйнштейна на многообразиях Фано является одним из наиболее интересных и важных вопросов, лежащих на стыке дифференциальной и бирациональной геометрии. В то время как многообразия с обильным или нулевым коническим классом всегда допускают метрику Кэлера–Эйнштейна, в классе многообразий Фано известны как примеры с метрикой Кэлера–Эйнштейна, так и явные препятствия к ее существованию. При этом вопрос о существовании таких метрик на поверхностях дель Пеццо давно и полностью изучен, так что наибольшее внимание с этой точки зрения привлекают трехмерные многообразия Фано.

Явная классификация гладких трехмерных многообразий Фано была получена в работах В.А.Исковских [Isk77, Isk78]. Наиболее трудная часть этой классификации относится к многообразиям, ранг группы Пикара которых равен 1; большинство остальных трехмерных многообразий Фано конструируются исходя из этих многообразий. Интересно, что даже в этом более узком классе многообразий во многих случаях вопрос о существовании метрик Кэлера–Эйнштейна не решен. В основном это относится к многообразиям индекса 1 и большой антиканонической степени (для малых степеней как правило имеются примеры многообразий с метрикой Кэлера–Эйнштейна).

Наибольшую антиканоническую степень среди гладких трехмерных многообразий Фано индекса 1 с рангом группы Пикара 1 имеют многообразия типа V_{22}. Они образуют 6-мерное семейство, и их антиканоническая степень равна 22. По историческим причинам это семейство достаточно подробно изучено, и многие многообразия из него обладают интересными свойствами. В частности, в этом семействе содержится однопараметрическое семейство многообразий, группа автоморфизмов которого содержит мультипликативную группу поля; одним из этих многообразий является многообразие Мукая–Умемуры [MU83] с группой автоморфизмов, изоморфной PGL_2. Согласно результатам Ю.Г.Прохорова [Pro90], за исключением этих многообразий, а также еще ровно одного многообразия, чья группа автоморфизмов содержит в качестве связной компоненты единицы аддитивную группу поля, все остальные многообразия типа V_{22} имеют конечные группы автоморфизмов. Интересно, что, как было доказано недавно А.Г.Кузнецовым, Ю.Г.Прохоровым и К.А.Шрамовым [KPS18], остальные гладкие трехмерные многообразия Фано индекса 1 с рангом группы Пикара 1 всегда имеют конечные группы автоморфизмов.

Вопрос о существовании метрик Кэлера–Эйнштейна на многообразиях Фано типа V_{22} изучался достаточно давно. Так, на примере многообразия Мукая–Умемуры С.Дональдсон продемонстрировал эффективность применения эквивариантных относительно редуктивной группы альфа-инвариантов для доказательства существования таких метрик. Кроме этого, Дональдсон доказал, что среди многообразий типа V_{22} имеется (бесконечное) подсемейство многообразий, не допускающих метрик Кэлера–Эйнштейна; одним из таких многообразий является многообразие, группа автоморфизмов которого содержит в качестве связной компоненты единицы аддитивную группу поля. Таким образом, вопрос о существовании метрик Кэлера–Эйнштейна на многообразиях типа V_{22} весьма нетривиален: в этом семействе есть как многообразия с метриками Кэлера–Эйнштейна, так и многообразия без них.

Дональдсон поставил вопрос о том, имеются ли метрики Кэлера–Эйнштейна на многообразиях типа V_{22} с действием мультипликативной группы поля. Из общих его результатов следовало, что для открытого подмножества в семействе этих многообразий метрика Кэлера–Эйнштейна существует, но доказательство этого факта не позволяло сказать ничего конкретного о соответствующем подмножестве.

За отчетный период сотрудники Лаборатории И.А.Чельцов и К.А.Шрамов [CS18] дали практически полный ответ на вопрос Дональдсона. А именно, они доказали, что на всех многообразиях типа V_{22} из семейства $V_{22}^{\star}$ с действием мультипликативной группы поля есть метрика Кэлера–Эйнштейна, за возможным исключением двух конкретных многообразий. Для доказательства этого были вычислены альфа-инварианты всех многообразий из $V_{22}^{\star}$ относительно группы G, являющейся полупрямым произведением мультипликативной группы поля на группу из двух элементов. Оказалось, что во всех случаях, кроме двух, соответствующие альфа-инварианты равны 4/5; другими словами, они достаточно велики, чтобы можно было применить критерий Тиана существования метрики Кэлера–Эйнштейна. В остальных двух случаях альфа-инварианты равны 3/4 и 2/3, соответственно, что не позволяет сделать определенных выводов о метриках Кэлера–Эйнштейна. Таким образом, ими была доказана следующая теорема.

Теорема. *Пусть* V_u *— многообразие из семейства* $V_{22}^{\star}$. *Тогда*

$$\alpha_G(V_u) = \begin{cases} \dfrac{4}{5} & \text{при } u \neq \dfrac{3}{4} \text{ и } u \neq 2, \\ \dfrac{3}{4} & \text{при } u = \dfrac{3}{4}, \\ \dfrac{2}{3} & \text{при } u = 2. \end{cases}$$

В частности, при $u \neq \frac{3}{4}$ *и* $u \neq 2$ *многообразие* V_u *допускает метрику Кэлера–Эйнштейна.*

Подход Чельцова и Шрамова основан на явной конструкции многообразий из семейства $V_{22}^{\star}$, полученной менее года назад в работе А.Г.Кузнецова и Ю.Г.Прохорова [KP18]. Кузнецов и Прохоров получили многообразия из $V_{22}^{\star}$ как результаты бирациональных перестроек (так называемых линков Саркисова), начинающихся с раздутия рациональных кривых степени 6 на гладкой трехмерной квадрике. Одним из преимуществ их конструкции является то, что соответствующая перестройка оказывается G-эквивариантной. С другой стороны, геометрия трехмерной квадрики намного проще и намного лучше поддается явному анализу, чем геометрия многообразий типа V_{22}. Это позволило Чельцову и Шрамову полностью описать G-орбиты и G-инвариантные кривые малых степеней на многообразиях из семейства $V_{22}^{\star}$. В свою очередь, это дало возможность классифицировать особенности G-инвариантных дивизоров и G-инвариантных подвижных линейных систем малой степени.

Список литературы

[CS18] Ivan Cheltsov and Constantin Shramov. Kähler-Einstein Fano threefolds of degree 22. *Arxiv e-print*, 1803.02774, 2018.

[DKK17] Sławomir Dinew, Grzegorz Kapustka, and Michał Kapustka. Remarks on Mukai threefolds admitting $\mathbf{C}^*$ action. *Mosc. Math. J.*, 17(1):15–33, 2017.

[KP18] Alexander Kuznetsov and Yuri Prokhorov. Prime Fano threefolds of genus 12 with a $\mathbf{G}_m$-action. *Épijournal de Géométrie Algébrique*, 2(epiga:4560), 2018.

[KPS18] Alexander Kuznetsov, Yuri Prokhorov, and Constantin Shramov. Hilbert schemes of lines and conics and automorphism groups of Fano threefolds. *Japanese J. Math.*, 13(1):109–185, 2018.

[MU83] Shigeru Mukai and Hiroshi Umemura. Minimal rational threefolds. In *Algebraic geometry (Tokyo/Kyoto, 1982)*, volume 1016 of *Lecture Notes in Math.*, pages 490–518. Springer, Berlin, 1983.

[Isk77] В. А. Исковских. Трехмерные многообразия Фано. I. *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, 41(3):516–562, 1977.

[Isk78] В. А. Исковских. Трехмерные многообразия Фано. II. *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, 42(3):506–549, 1978.

[Pro90] Ю. Г. Прохоров. Группы автоморфизмов многообразий Фано. *Успехи мат. наук.*, 45(3):195–196, 1990.

5.2 Существование метрик Кэлера-Эйнштейна на особых логповерхностях дель Пеццо

В совместной работе [CRZ18] Чельцова, Рубинштейна и Жанга было доказано существование особых метрик Кэлера-Эйнштейна на определенном классе лог поверхностей дель Пеццо. В частности, была практически полностью доказана гипотеза Чельцова–Рубинштейна, поставленная ими несколько лет назад в статье [CR15].

Напомним, что пара (X, D), состоящая из гладкого многообразия X и гладкого неприводимого дивизора D на нем, называется асимптотическим лог-многообразием Фано если дивизор

$$-(K_X + (1-\beta)D)$$

обилен для всех достаточно малых $\beta \in (0,1]$. Этот класс многообразий включает в себя гладкие многообразия Фано (при $D = 0$), а также класс гладких лог-многообразий Фано, изучавшихся Маедой. Из теоремы Кавамата-Шокурова следует, что для асимптотического лог-многообразия Фано (X, D), линейная система $|n(K_X + D)|$ свободна от базисных точек при $n \gg 0$ и задает сюръективный морфизм

$$\eta \colon X \to Z,$$

слоями которого являются лог-многообразия Фано. Заметим, что морфизм η бирационален если и только если $(K_X + D)^n = 0$.

Гипотеза (Чельцов, Рубинштейн). *Пусть (X, D) — асимптотическое лог-многообразие Фано. Тогда на многообразии X существует метрика Кэлера–Эйнштейна, имеющая конические особенности вдоль D с углом $2\pi\beta$ для всех достаточно малых $\beta > 0$, в том и только в том случае когда морфизм η не бирационален.*

Необходимое условие для существует особой метрика Кэлера–Эйнштейна в этой гипотезе было показано Чельцовым и Рубинштейном [CR15] (в размерности два) и Фуджитой (во всех размерностях). Чельцов, Рубинштейн и Жанг доказали достаточность этого условия в размерности два для почти всех семейств асимптотических лог-многообразий Фано, который принято называть асимптотическими лог-поверхностями дель Пеццо. В этом случае для небирационального морфизма η имеются следующие возможности:

1. X — гладкая поверхность дель Пеццо, а D — гладкая эллиптическая кривая в антиканонической линейной системе $|-K_X|$;
2. $X \cong \mathbb{F}_1$, а D — гладкая кривая в линейной системе $|2(Z + F)|$, где F – слой естественной проекции $X \to \mathbb{P}^1$, а Z — сечение этой проекции с $Z^2 = -1$;
3. $X \cong \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$, а D — гладкая кривая бистепени $(2, 1)$;
4. X — раздутие $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ в $m \geqslant 1$ различных точках, которые содержаться в гладкой кривой бистепени $(2, 1)$, такие что никакие две из них не содержаться в кривой бистепени $(0, 1)$, а кривая D является собственных прообразом этой кривой бистепени $(2, 1)$.

Согласно гипотезе Чельцова–Рубинштейна, все такие пары обладают метриками Кэлера–Эйнштейна с коническими особенностями вдоль кривой D с углом $2\pi\beta$ для всех достаточно малых $\beta > 0$. В первом случае это было доказано Берманом. Во втором и в третьем случаях это было доказано Чельцовым и Рубинштейном в их совместной статье [CR15] 2015 года. Вопрос существования особых метрик Кэлера–Эйнштейна в последнем случае долгое время оставался открытым. В этом году сотрудник Лаборатории Чельцов, вместе с Рубинштейном и Жангом [CRZ18] доказал следующий результат:

Теорема. *Пусть* X *— раздутие* $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ *в* m *различных точках, которые содержаться в некоторой гладкой кривой* C *бистепени* $(2,1)$*, такие что никакие две из них не содержаться в кривой бистепени* $(0,1)$. *Пусть* D *— собственный прообраз на* X *кривой* C. *Если* $m \geqslant 7$*, то пара* $(X,(1-\beta)D)$ *является* K*-стабильной для всех достаточно малых* $\beta > 0$.

Из недавних результатов Чена, Дональдсона, Сана, Тиана и Ванга, следует что K-стабильность в теореме Чельцова, Рубинштейна и Жанга влечет существование особых метрик Кэлера–Эйнштейна на поверхности X, которые имеют конические особенности вдоль D с углом $2\pi\beta$ для всех достаточно малых $\beta > 0$. В процессе доказательства своей теоремы, Чельцов, Рубинштейн и Жанг получили ряд новых важных локальных неравенств, которые связывают между собой лог-канонические пороги дивизоров на гладких поверхностях и кратности этих дивизоров.

В статье [CPS18] Чельцов, Парк и Шрамов получили эффективные оценки для δ-инвариантов поверхностей дель Пеццо, имеющих не более чем фактор-особенности. В качестве применения полученных неравенств, было доказано существование орбифолдных метрик Кэлера–Эйнштейна на многих таких поверхностях. Чтобы более явно описать эти результаты, рассмотрим квазигладкую и хорошо-сформированную поверхность S_d степени d во взвешенном проективном пространстве $\mathbb{P}(a_0, a_1, a_2, a_3)$, где $a_0 \leqslant a_1 \leqslant a_2 \leqslant a_4$. Тогда

$$K_{S_d} \sim_{\mathbb{Q}} \mathcal{O}_{\mathbb{P}(a_0,a_1,a_2,a_3)}\big(d - a_0 - a_1 - a_2 - a_3\big).$$

Положим $I = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 - d$ и предположим, что $I > 0$. В этом случае S_d является поверхностью дель Пеццо, которая имеет не более чем фактор-особенности.

При $I = 1$ имеет место один из следующих трех случаев:

1. поверхность S_d неособа и
$$\big(a_0, a_1, a_2, a_3, d\big) \in \Big\{(1,1,1,1,3),(1,1,1,2,4),(1,1,2,3,6)\Big\};$$
2. поверхность S_d особа и
$$\big(a_0, a_1, a_2, a_3, d\big) = (2, 2n+1, 2n+1, 4n+1, 8n+4)$$
для любого положительного целого числа n;

3. поверхность S_d особа, а (a_0, a_1, a_2, a_3, d) является одним из следующих пятерок:

$$(1,2,3,5,10),(1,3,5,7,15),(1,3,5,8,16),(2,3,5,9,18),$$
$$(3,3,5,5,15),(3,5,7,11,25),(3,5,7,14,28),(3,5,11,18,36),$$
$$(5,14,17,21,56),(5,19,27,31,81),(5,19,27,50,100),(7,11,27,37,81),$$
$$(7,11,27,44,88),(9,15,17,20,60),(9,15,23,23,69),(11,29,39,49,127),$$
$$(11,49,69,128,256),(13,23,35,57,127),(13,35,81,128,256).$$

В первом случае поверхность S_d обладает метрикой Кэлера–Эйнштейна по уже ставшей классической теореме Тиана о метриках Кэлера–Эйнштейна на гладких поверхностях дель Пеццо. Для оставшихся особых поверхностей с $I = 1$, Коллар и Джонсон [JK01] доказали существование орбифолдных метрик Кэлера–Эйнштейна кроме следующих четырех случаев:

- $(a_0, a_1, a_2, a_3, d) = (1, 2, 3, 5, 10)$;
- $(a_0, a_1, a_2, a_3, d) = (1, 3, 5, 7, 15)$;
- $(a_0, a_1, a_2, a_3, d) = (1, 3, 5, 8, 16)$;
- $(a_0, a_1, a_2, a_3, d) = (2, 3, 5, 9, 18)$.

Позднее в 2002 году, Араухо [Ara02] доказала существование орбифолдных метрик Кэлера–Эйнштейна на поверхности S_d в случае когда $(a_0, a_1, a_2, a_3, d) = (1, 2, 3, 5, 10)$, а также в случае когда $(a_0, a_1, a_2, a_3, d) = (1, 3, 5, 7, 15)$ и поверхность S_d общая. В 2008 году, в статье [CPS10] Чельцов, Парк и Шрамов доказали существование орбифолдных метрик Кэлера–Эйнштейна на поверхности S_d в случае когда $(a_0, a_1, a_2, a_3, d) = (1, 3, 5, 8, 16)$ или $(a_0, a_1, a_2, a_3, d) = (2, 3, 5, 9, 18)$. В работе [CPS18] Чельцов, Парк и Шрамов показали что $\delta(S_d) > 1$ в следующих семи случаях:

1. $(a_0, a_1, a_2, a_3, d) = (1, 3, 5, 7, 15)$;
2. $(a_0, a_1, a_2, a_3, d) = (2, 3, 4, 5, 12)$;
3. $(a_0, a_1, a_2, a_3, d) = (7, 10, 15, 19, 45)$;
4. $(a_0, a_1, a_2, a_3, d) = (7, 18, 27, 37, 81)$;

5. $(a_0, a_1, a_2, a_3, d) = (7, 15, 19, 32, 64)$;

6. $(a_0, a_1, a_2, a_3, d) = (7, 19, 25, 41, 82)$;

7. $(a_0, a_1, a_2, a_3, d) = (7, 26, 39, 55, 117)$.

Таким образом, из результатов Блюма, Джонсона, Фуджиты и Одаки следует, что в этим семи случаях поверхность S_d обладает орбифолдной метрикой Кэлера–Эйнштейна. Из этого результата, в частности, следует, что поверхность S_d всегда обладает орбифолдной метрикой Кэлера–Эйнштейна при $I = 1$.

Список литературы

[Ara02] C. Araujo. Kähler-Einstein metrics for some quasi-smooth log del pezzo surfaces. *Trans. Am. Math. Soc.*, 354:4303–3312, 2002.

[CPS10] Ivan Cheltsov, Jihun Park, and Constantin Shramov. Exceptional del Pezzo hypersurfaces. *J. Geom. Anal.*, 20(4):787–816, 2010.

[CPS18] I.A. Cheltsov, J. Park, and K.A. Shramov. Delta invariants of singular del pezzo surfaces. *ArXiV e-print*, 1809.09221, 2018.

[CR15] Ivan Cheltsov and Yanir Rubinstein. Asymptotically log fano varieties. *Adv. Math.*, 285:1241–1300, 2015.

[CRZ18] Ivan Cheltsov, Yanir Rubinstein, and Kewei Zhang. Basis log canonical thresholds, local intersection estimates, and asymptotically log del Pezzo surfaces. *ArXiV e-print*, 1807.07135, 2018.

[JK01] Jennifer M. Johnson and János Kollár. Kähler-Einstein metrics on log del Pezzo surfaces in weighted projective 3-spaces. *Ann. Inst. Fourier*, 51(1):69–79, 2001.

5.3 Монодромия гиперплоских сечений для поверхностей Дель Пеццо

Пусть $X \subset \mathbb{P}^N$ — гладкое проективное многообразие, $\dim X = n$ (основным полем всегда будет $\mathbb{C}$). Если $H \subset \mathbb{P}^N$ — гиперплоскость, трансверсальная к X и $Y = X \cap H$, то при вариации H (в классе гиперплоскостей, трансверсальных к X) на $H^{n-1}(Y, \mathbb{Z})$ действует группа монодромии. Даже в том случае, когда X — поверхность, про эту группу известно немногое. В 1973 году Ф.Л. Зак [Zak73] получил классификацию поверхностей , для которых группа монодромии тривиальна; оказалось, что это либо линейчатые поверхности, либо поверхности с гиперплоским сечением рода 0. Ниже исследуется следующий случай — поверхности с гиперплоским сечением рода 1. Если такая поверхность не является линейчатой, то это поверхность Дель Пеццо. Так как группа монодромии поверхности с гиперплоскими сечениями рода 1 сохраняет форму пересечения, эта группа содержится в $\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$. Основной результат, полученный сотрудниками Лаборатории, следующий.

Теорема. *Пусть $X \subset \mathbb{P}^n$ — поверхность Дель Пеццо вложенная с помощью антиканонической линейной системы (не обязательно полной). Тогда группа монодромии , действующая на $H^1(\cdot, \mathbb{Z})$ ее гладкого гиперплоского сечения, совпадает с полной группой $\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$.*

5.3.1 О монодромии в семействах кривых рода 1

Для доказательства теоремы нам понадобится общий результат о семействах кривых рода 1.

Предложение.*Пусть $\pi \colon \mathcal{X} \to B$ — семейство гладких прямых рода 1, и пусть $J \colon B \to \mathbb{A}^1$ — отображение, ставящее в соответствие точке $b \in B$ j-инвариант слоя $\pi^{-1}(b)$. Если общий слой отображения J связен, а семейство не изотривиально, то группа монодромии $H^1(\cdot, \mathbb{Z})$ слоев семейства π совпадает со всей группой $\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$.*

Набросок доказательства. Во-первых, не ограничивая общности, можно считать, что $\mathcal{X}$ — семейство эллиптических кривых (т. е. семейство с сечением). Далее, можно показать, что существуют семейства эллиптических кривых $\mathcal{X}_1$, $\mathcal{X}_2$ над некоторой базой B_1 (вообще говоря, отличной от B) со следующими свойствами:

(1) группа монодромии семейства $\mathcal{X}_1$ совпадает с группой монодромии семейства $\mathcal{X}_2$;

(2) слои (схемные) семейств $\mathcal{X}_1$ и $\mathcal{X}_2$ над общей точкой B_1 отличаются на квадратичную подкрутку (quadratic twist).

Из утверждения (2) вытекает, что, не меняя групп монодромии, можно уменьшить при необходимости базу B_1 таким образом, чтобы семейства $\mathcal{X}_1$ и $\mathcal{X}_2$ задавались следующими вейерштрассовыми уравнениями:

$$\begin{aligned} \mathcal{X}_1: &\quad y^2 = x^3 + Px + Q, \\ \mathcal{X}_2: &\quad y^2 = x^3 + D^2 \cdot Px + D^3 \cdot Q, \end{aligned}$$

где P, Q и D — рациональные функции на B_1, причем D не имеет нулей.

Из этих уравнений выводится, что если $\rho_1, \rho_2 \colon \pi_1(B_1) \to \mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$ — гомоморфизмы монодромии, соответствующие $\mathcal{X}_1$ и $\mathcal{X}_2$, то $\rho_2 = \chi_D \rho_1$, где $\chi_D \colon \pi_1(B_1) \to \{\pm 1\}$ — квадратичный характер, сопоставляющий замкнутому пути -1 в том и только том случае, когда аналитическое продолжение $\sqrt{-D}$ вдоль этого пути приводит к новой ветви.

Далее, элементарным рассуждением показывается, что если G — группа, $\rho \colon G \to \mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$ — сюръективный гомоморфизм и $\chi \colon G \to \{\pm 1\}$ — квадратичный характер, то гомоморфизм $\chi\rho \colon G \to \mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$ также сюръективен. Это доказывает предложение. $\square$

5.3.2 Доказательство основного результата

Начнем с редукций. Во-первых, не ограничивая общности, можно считать, что наша поверхность Дель Пеццо вложена с помощью *полной* антиканонической системы. Далее, пусть $X \subset \mathbb{P}^n$ — такая поверхность Дель Пеццо, и пусть $p \in X$ — достаточно общая точка. Тогда, если $n > 3$, образом (рациональной) проекции $\pi_p \colon X \dashrightarrow \mathbb{P}^{n-1}$ является поверхность Дель Пеццо X', также вложенная с помощью антиканонической линейной системы, причем π_p индуцирует изоморфизм между раздутием поверхности X в точке p и поверхностью X'.

При указанном изоморфизме гладкие гиперплоские сечения поверхности X' соответствуют гладким гиперплоским сечениям поверхности X, проходящим через p. Поэтому если мы установим теорему для X', она будет верна и для X: если максимально возможная группа монодромии получается уже при вариации гиперплоскостей в подсемействе, то тем более это верно для всего семейства гиперплоскостей, трансверсальных к X.

Итерируя эту конструкцию, получаем, что достаточно установить теорему для гладких кубик в $\mathbb{P}^3$. Далее, проектируя кубику из достаточно общей точки, лежащей на ней и повторяя приведенное выше рассуждение, получаем, что для доказательства теоремы достаточно установить следующий факт.

Пусть X — гладкая проективная поверхность, допускающая конечный морфизм $\pi\colon X \to \mathbb{P}^2$, разветвленный над гладкой квартикой $C \subset \mathbb{P}P^2$. Тогда группа монодромии, действующая на $H^1(\pi^{-1}(\ell), \mathbb{Z})$ при вариации прямой $\ell \subset \mathbb{P}^2$ в семействе прямых, трансверсальных к C, есть вся группа $\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$.

Для доказательства этого утверждения обозначим через $C^* \subset (\mathbb{P}^2)^*$ кривую, двойственную к C. Ввиду предложения из разд. 5.3.1 достаточно установить, что слои отображения $J\colon (\mathbb{P}^2)^* \setminus C^* \to \mathbb{A}^1$, ставящего в соответствие прямой $l \subset \mathbb{P}^2$ j-инвариант кривой $\pi^{-1}(\ell)$, являются связными. С этой целью заметим прежде всего, что отображение J можно продолжить до отображения

$$J_1\colon (\mathbb{P}^2)^* \setminus (C^*)_{\mathrm{sing}} \to \mathbb{P}^1 = \mathbb{A}^1 \cup \{\infty\}.$$

Это проверяется прямым вычислением с помощью известной формулы, выражающей j-инвариант через двойное отношение точек ветвления при морфизме степени 2 эллиптической кривой на $\mathbb{P}^1$. Далее используется следующая лемма, верная над произвольным алгебраически замкнутым полем. Конструкция показывает, что $J_1^{-1}(\infty) = C^* \setminus (C^*)_{\mathrm{sing}}$.

Лемма. *Пусть W — гладкое неприводимое многообразие размерности n, L — гладкая неприводимая кривая, $\varphi\colon W \to L$ — собственный и сюръективный морфизм с $(n-1)$-мерными слоями. Обозначим его разложение Штейна через $W \to Z \xrightarrow{v} L$.*

Если существует такая точка $p \in L$, что слой $\varphi^{-1}(p)$ неприводим и морфизм φ имеет максимальный ранг в достаточно общей точке слоя, то морфизм $v\colon Z \to L$ является изоморфизмом.

Пусть теперь

$$\begin{tikzcd} W \arrow[d, "\sigma"] \arrow[dr, "J_2"] & \\ (\mathbb{P}^2)^* \arrow[r, dashed, "J_1"] & \mathbb{P}^1 \end{tikzcd}$$

— минимальное разрешение точек неопределенности для J_1; легко видеть, что $J_2{-}1(\infty)$ — строгий прообраз C^* относительно σ. Вычисление показывает, что для ранг J_2 в достаточно общей точке слоя $J_2^{-1}(\infty)$ равен 1; теперь из леммы выше и определения разложения Штейна вытекает, что слои J_2 связны, откуда общий слой J_1 связен. Теперь доказательство завершается применением предложения из разд. 5.3.1.

Описанные выше результаты изложены в работе [Lvo17].

Список литературы

[Lvo17] Serge Lvovski. On monodromy in families of elliptic curves over $\mathbf{C}$. *ArXiv e-print*, 1705.02129, 2017.

[Zak73] Ф. Л. Зак. О поверхностях с нулевыми циклами Лефшеца. *Матем. заметки*, 13(6):869–880, 1973.

5.4 Исследование факторов рациональных поверхностей над незамкнутыми полями

В этом году по тематике исследований лаборатории было опубликовано две статьи [Tre18b] и [Tre18a].

В них изучался вопрос, в каких случаях фактор $\mathbb{k}$-рациональной поверхности X над алгебраически незамкнутым полем $\mathbb{k}$ характеристики 0 по действию конечной группы G является рациональным многообразием, а в каких нет.

В статье [Tre18b] исследовались факторы поверхностей дель Пеццо степеней 8, 5 и 4. Для этих поверхностей были получены следующие результаты.

Теорема ([Tre18b, Theorem 1.1]). *Пусть $\mathbb{k}$ — поле характеристики 0, X — поверхность дель Пеццо над $\mathbb{k}$ такая, что $X(\mathbb{k}) \neq \varnothing$, а G — конечная группа автоморфизмов X. Если $K_X^2 \geqslant 5$, то факторповерхность X/G рациональна. Если $K_X^2 = 4$, порядок G равен 1, 2, или 4, и все нетривиальные элементы G не имеют неподвижных кривых, то фактор X/G может быть нерациональным. Для всех других случаев G и $K_X^2 = 4$ фактор X/G всегда рационален.*

Следствие 1 ([Tre18b, Corollary 1.2]). *Пусть $\mathbb{k}$ — поле характеристики 0, X — гладкая рациональная поверхность над $\mathbb{k}$ такая, что $X(\mathbb{k}) \neq \varnothing$, а G — конечная группа автоморфизмов X. Если $K_X^2 \geqslant 5$, то фактор X/G рационален.*

Кроме того, для всех нетривиальных групп, действующих на поверхности дель Пеццо степени 4, для которых фактор может быть нерациональным над $\Bbbk$, явно построены примеры нерациональных факторов G-минимальных $\Bbbk$-рациональных поверхностей дель Пеццо.

В статье [Tre18a] исследовались факторы поверхностей дель Пеццо степени 2. Основным результатом является следующая теорема.

Теорема ([Tre18a, Theorem 1.6]). *Пусть $\Bbbk$ — поле характеристики 0, X — поверхность дель Пеццо над $\Bbbk$ степени 2, а G — подгруппа в $\mathrm{Aut}_{\Bbbk}(X)$, такая что на факторе X/G есть гладкая $\Bbbk$-точка. Тогда фактор X/G является $\Bbbk$-рациональной для любой группы G, кроме следующих:*

- *тривиальная группа;*
- *группа порядка 2;*
- *группа порядка 4, содержащая уникальную инволюцию, имеющую кривую, состоящую из неподвижных точек;*
- *неабелева группа порядка 8, содержащая уникальную инволюцию, имеющую кривую, состоящую из неподвижных точек;*
- *группа порядка 3, имеющая только изолированные неподвижные точки;*
- *симметрическая группа степени 3, порожденная инволюциями, имеющими только изолированные неподвижные точки.*

Для каждой из перечисленных групп существуют примеры нерациональных над $\Bbbk$ факторов X/G для подходящего поля $\Bbbk$.

Кроме того, для всех перечисленных групп кроме тривиальной и группы, порожденной инволюцией, имеющей только изолированные неподвижные точки, построены примеры нерациональных факторов G-минимальных $\Bbbk$-рациональных поверхностей (см. [Tre18a, Section 6]). Для группы, порожденной инволюцией, имеющей только изолированные неподвижные точки, показано, что в случае ее минимального действия поверхность не может быть $\Bbbk$-рациональной, а ее фактор всегда нерационален над $\Bbbk$ (см. [Tre18a, Remark 4.8 и Lemma 5.1]).

5.5 Стабильная рациональность поверхностей дель Пеццо

Новая тематика исследований касалась стабильной рациональности поверхностей дель Пеццо над алгебраически незамкнутыми полями. В конце прошлого года Ж.-Л. Кольо-Тэлен получил результат [CT17], что всякая нерациональная геометрически рациональная поверхность над квазиконечными полями не является стабильно рациональной. Этот результат пробудил интерес к исследованиям стабильной рациональности геометрически рациональных поверхностей над алгебраически незамкнутыми полями, и в феврале 2018 года при помощи хорошо организованного компьютерного перебора Ю. Чинкелем и К. Янгом был получен список нерациональных поверхностей дель Пеццо, которые могут быть стабильно рациональными, [TY18].

Результат Чинкеля и Янга состоит в том, что всякая поверхность дель Пеццо степени 3 или 1 с инвариантным числом Пикара 1 не является стабильно рациональной, а для поверхностей дель Пеццо степени 2 с инвариантным числом Пикара 2 имеется четыре типа, для которых поверхность может быть стабильно рациональной. Также ими был получен ряд возможностей для минимальных стабильно рациональных расслоений на коники с количеством вырожденных слоёв меньше 8 над кривой рода 0.

Эти же результаты был получен сотрудником Лаборатории А. Трепалиным независимо, без использования компьютерных методов. Вместо этого использовались методы эквивариантной программы минимальных моделей для поверхностей с сильным использованиям свойств решетки Пикара и групп Вейля, действующих на ней. Используемые методы позволяют наглядно объяснить сложный результат и сами по себе представляют интерес.

Список литературы

[CT17] Jean-Louis Colliot-Thélène. Surfaces stablement rationnelles sur un corps quasi-fini. *ArXiV e-print*, 1711.09595, 1917.

[Tre18a] Andrey Trepalin. Quotients of del Pezzo surfaces of degree 2. *Mosc. Math. J.*, 18(3):557–597, 2018.

[Tre18b] Andrey Trepalin. Quotients of del Pezzo surfaces of high degree. *Trans. Am. Math. Soc.*, 370(9):6097–6124, 2018.

[TY18] Y. Tschinkel and T. Yang. Potentially stably rational del pezzo surfaces over nonclosed fields. *ArXiV e-print*, 1808.09061, 2018.

5.6 Нерациональные слои трехмерных расслоений на поверхности дель Пеццо

Многообразие называется рациональным, если его поле функций изоморфно полю функций проективного пространства. Проблема рациональности состоит в том, чтобы определить, рационально ли данное многообразие. Эта проблема является одной из центральных задач бирациональной геометрии.

Проективное пространство является простейшим примером многообразия Фано. Это означает, что его канонический класс антиобилен. Известна классификация неособых многообразий Фано малой размерности. А именно, с точностью до изоморфизма имеется лишь одна кривая Фано — проективная прямая, 10 семейств поверхностей Фано (они называются поверхностями дель Пеццо) и 105 семейств трехмерных многообразий Фано.

Изучение многообразий Фано представляют интерес по нескольким причинам. Во-первых, в каждой размерности имеется лишь конечное число алгебраических семейств таких многообразий (неособых или с ограниченными особенностями). Это дает возможность классификации многообразий Фано с определенными свойствами, например, торических.

Во-вторых, из Программы минимальных моделей следует, что многообразия Фано служат “строительными блоками” для бирациональной классификации произвольных многообразий. Программа минимальных моделей — это процедура, строящая по данному многообразию X бирационально эквивалентное ему многообразие Y. При этом Y имеет не хуже, чем терминальные особенности. Для него есть две возможности. Либо канонический класс K_Y численно эффективен, тогда Y называется минимальной моделью. Либо Y обладает структурой расслоения Мори $\pi : Y \longrightarrow B$. Это означает, что Y отображается в многообразие B меньшей размерности так, что слои π есть многообразия Фано. Заметим, что слои также могут иметь особенности.

Хорошо известно, что если исходное многообразие X было рациональным (или более общим образом, рационально связным), то Y будет иметь структуру расслоения Мори. Таким образом, изучение рациональности многообразия X в некоторых случаях можно свести к изучению рациональности соответствующего тотального пространства Y расслоения π.

Также представляет интерес изучение рациональности слоев расслоения π. Эта задача является частным случаем вопроса о рациональности в семействах, см. напр. [Per17], [Tot17]. Заметим, что если B — точка, то она эквивалентна проблеме рациональности для Y. Для простоты будем считать базовым полем поле комплексных чисел. Тогда в размерности 1 проблема рациональности тривиальна. В размерности 2 имеется хорошо известный критерий Кастельнуово рациональности поверхности. Интересен случай размерности 3. Начиная с этой размерности существуют нерациональные многообразия Фано. Это показывает, что задача нетривиальна для размерности B, равной нулю.

Если размерность базы B равна двум, то π называется расслоением на коники. Общий слой такого расслоения изоморфен проективной прямой. Специальный слой представляет собой дерево рациональных кривых, быть может, с кратностями. Проблема рациональности для слоев π в этом случае тривиальна.

Сотрудником Лаборатории К. Логиновым изучался случай, когда размерность B равна единице. Тогда π называется расслоением на поверхности дель Пеццо. Основной инвариант такого расслоения — степень общего слоя. Общий слой π является неособой поверхностью дель Пеццо. Над полем комплексных чисел такая поверхность рациональна. Интерес представляют специальные слои. Известно, что любой слой расслоения на дель Пеццо, рассмотренный с приведенной структурой, бирационально эквивалентен произведению проективной прямой и кривой C некоторого рода $g \geq 0$. Классификация нерациональных поверхностей дель Пеццо изложена в [Fuj95].

Дж. Бланк поставил вопрос об ограниченности g для расслоений на поверхности дель Пеццо не хуже чем с терминальными особенностями. Похожая проблема ограниченности для кратности слоев расслоений на поверхности дель Пеццо имеет положительное решение, см. [MP09].

В работе [Log18] показано, что если тотальное пространство Y неособо, то нерациональный слой π является конусом над эллиптической кривой, и более того, его степень не превосходит трех. Похожее ограничение имеет место в случае терминальных горенштейновых особенностей Y. Имеется классификация ростков расслоений с нерациональным слоем в терминах некоторых гладких расслоений на поверхности дель Пеццо с действием циклической группы. Такая классификация имеет место при условии, что Y имеет не хуже чем обыкновенные двойные точки в качестве особенностей. Также приведены примеры расслоений, для которых в обозначениях, введенных выше, выполнено $g = 2, 3, 4$.

Список литературы

[Fuj95] T. Fujisawa. On non-rational numerical del pezzo surfaces. *Osaka J. Math.*, 32(3):613–636, 1995.

[Log18] Konstantin Loginov. On non-rational fibers of del Pezzo fibrations over curves. *ArXiV e-print*, 1811.04418, 2018.

[MP09] S. Mori and Yu. Prokhorov. Multiple fibers of del Pezzo fibrations. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 264(1):131–145, 2009.

[Per17] A. Perry. Rationality does not specialize among terminal fourfolds. *Algebra Number Theory*, 11(9):2193–2196, 2017.

[Tot17] Burt Totaro. Rationality does not specialize among terminal fourfolds. *Algebra Number Theory*, 11(9):2193–2196, 2017.

5.7 Особенности экстремальных трехмерных терминальных окрестностей.

Сотрудником Лаборатории Ю. Прохоровым совместно с С. Мори (RIMS, Kyoto University) продолжалась работа над долгосрочным проектом по классификации аналитических типов экстремальных стягиваний трехмерных терминальных стягиваний со слоями размерности ≤ 1.

Экстремальным ростком (X, C) называется росток трехмерного нормального комплексного пространства X с терминальными особенностями вдоль компактной неприводимой кривой C такой, что имеется морфизм-стягивание $f : X \to Z \ni o$ с относительно обильным антиканоническим дивизором $-K_X$ и $C = f^{-1}(o)$ [Mor88]. Известно, что экстремальный росток может содержать не более трех особых точек и не более двух негоренштейновых. Работа продолжает серию публикаций [KM92], [MP08a], [MP08b], [MP09], [MP11], [MP14], [MP16],[MP18]. Полностью изучены экстремальные ростки, содержащие одну негоренштейнову точку. Получена полная классификация. Она формулируется в терминах общего гиперплоского сечения $H \subset X$, проходящего через C и инфинитезимальной структуры X вдоль C. Результаты подытожены в работе [MP19] (принята к печати в Изв. РАН, сер. матем.).

Изучение экстремальных ростков очень важно для приложений в бирациональной геометрии и классификации алгебраических многообразий, см., напр., [PR16], [PS16].

Список литературы

[KM92] János Kollár and Shigefumi Mori. Classification of three-dimensional flips. *J. Amer. Math. Soc.*, 5(3):533–703, 1992.

[Mor88] Shigefumi Mori. Flip theorem and the existence of minimal models for 3-folds. *J. Amer. Math. Soc.*, 1(1):117–253, 1988.

[MP08a] Shigefumi Mori and Yuri Prokhorov. On $\mathbf{Q}$-conic bundles. *Publ. Res. Inst. Math. Sci.*, 44(2):315–369, 2008.

[MP08b] Shigefumi Mori and Yuri Prokhorov. On $\mathbf{Q}$-conic bundles. II. *Publ. Res. Inst. Math. Sci.*, 44(3):955–971, 2008.

[MP09] S. Mori and Yu. Prokhorov. On $\mathbf{Q}$-conic bundles, III. *Publ. Res. Inst. Math. Sci.*, 45(3):787–810, 2009.

[MP11] S. Mori and Yu. Prokhorov. Threefold extremal contractions of type IA. *Kyoto J. Math.*, 51(2):393–438, 2011.

[MP14] S. Mori and Yu. Prokhorov. Threefold extremal contractions of types (IC) and (IIB). *Proc. Edinburgh Math. Soc.*, 57(1):231–252, 2014.

[MP16] S. Mori and Yu. Prokhorov. Threefold extremal contractions of type (IIA), I. *Изв. РАН. Сер. матем.*, 80(5):77–102, 2016.

[MP18] Shigefumi Mori and Yuri Prokhorov. Threefold extremal contractions of type (IIA), II. In Andrew Dancer, Jørgen Ellegaard Andersen, and Oscar Garcia-Prada, editors, *Geometry and Physics: A Festschrift in Honour of Nigel Hitchin*, volume 2. Oxford University Press, 2018.

[MP19] S. Mori and Yu. Prokhorov. Threefold extremal curve germs with one non-Gorenstein point. *Izv. Math.*, 2019. to appear.

[PR16] Yuri Prokhorov and Miles Reid. On Q-Fano threefolds of Fano index 2. In *Minimal Models and Extremal Rays (Kyoto 2011)*, volume 70 of *Adv. Stud. Pure Math.*, pages 397–420. Mathematical Society of Japan, Kinokuniya, Tokyo, 2016.

[PS16] Yuri Prokhorov and Constantin Shramov. Jordan property for Cremona groups. *Amer. J. Math.*, 138(2):403–418, 2016.

5.8 Исследование групп автоморфизмов трёхмерных многообразий Фано и приложения к группе Кремоны

Также продолжалось изучение вопроса классификации конечных подгрупп в трёхмерной группе Кремоны $\mathrm{Cr}_3(\Bbbk)$, где $\Bbbk$ – алгебраически замкнутое поле характеристики нуль. Аналогичный вопрос для поверхностей был полностью решен в знаменитой работе И. Долгачева и В. Исковских [DI09]. При помощи эквивариантного разрешения особенностей и эквивариантной программы минимальных моделей этот вопрос сводится к исследованию конечных подгрупп $G \subset \mathrm{Aut}(X)$ в группах автоморфизмов $\Bbbk$-рациональных трёхмерных многообразий X специального вида. А именно, особенности X являются терминальными $G\mathbb{Q}$-факториальными, и либо ранг инвариантной группы Пикара $\mathrm{Pic}(X)^G$ равен 1, либо имеется морфизм $f : X \to Y$ на многообразие меньшей размерности такой, что канонический пучок является относительно антиобильным, а ранг относительной инвариантной группы Пикара $\mathrm{Pic}(X/Y)^G$ равен 1. Мы рассматриваем многообразия первого типа с дополнительным условием: канонический класс делится на 2 в группе Пикара (такие многообразия называются G-многообразиями дель Пеццо). Особый интерес представляют те G-многообразия, которые не перестраиваются эквивариантно в другие G-расслоения Мори, такие многообразия называются G-эквивариантно бирационально жёсткими. В предыдущих работах сотрудника Лаборатории А. Авилова (см.[Avi16b], [Avi16a]) были классифицированы эквивариантно бирационально жёсткие многообразия дель Пеццо степеней 3 и 4. В случае степени 4 оказалось, что G- бирационально жёсткими могут быть только 5 отдельных многообразий и одно однопараметрическое семейство. В случае степени 3 классификация устроена ещё проще – только два многообразия являются бирационально жёсткими относительно всей группы автоморфизмов. Для одного из них были классифицированы все подгруппы полной группы автоморфизмов, относительно которых многообразие является эквивариантно бирационально жёстким.

В отчетный период А. Авиловым исследовались многообразия дель Пеццо степени 2 и 1. В случае многообразий степени 2 классифицированы рациональные эквивариантно бирационально жёсткие относительно всей группы автоморфизмов многообразия, имеющие не более чем нодальные особенности, за исключением случая многообразий, имеющих 12 особых точек. Оказалось, что практически все они не являются эквивариантно бирационально жёсткими, за исключением некоторых многообразий с большим количеством особенностей (похожий результат получался и для многообразий степени 3). В некоторых случаях классифицированы все подгруппы в группах автоморфизмов, относительно которых многообразие является эквивариантно бирационально жёстким. Соответствующая статья принята к печати в журнале "Известия РАН: серия математическая", см. [Avi19]. Частично эти результаты докладывались на конференции "Subgroups of Cremona groups" (Обервольфах) ([Avi18]).

В случае степени 1 ранее были классифицированы группы многообразия, имеющие "достаточно большую" группу автоморфизмов, т.е. гипотетически являющиеся эквивариантно бирационально жёсткими. За отчетный период для некоторых из них эквивариантная бирациональная жёсткость относительно всей группы автоморфизмов была проверена явно. Остается открытым вопрос, какие из описанных многообразий являются рациональными (в частности, в каких случаях полученные результаты применимы к классификации конечных подгрупп в группе Кремоны). В отчетный период проводилась работа по классификации рациональных многообразий степени 1, аналогичная работе, проделанной в статье [CPS15] для многообразий степени 2.

Список литературы

[Avi18] A. A. Avilov. G-birational rigidity of del Pezzo threefolds. in "Subgroups of Cremona groups", report No. 28/2018, Oberwolfach, 9–11 (2018).

[CPS15] Ivan Cheltsov, Victor Przyjalkowski, and Constantin Shramov. Which quartic double solids are rational? *Arxiv e-print*, 1508.07277, 2015.

[DI09] Igor V. Dolgachev and Vasily A. Iskovskikh. Finite subgroups of the plane Cremona group. In *Algebra, arithmetic, and geometry: in honor of Yu. I. Manin. Vol. I*, volume 269 of *Progr. Math.*, pages 443–548. Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 2009.

[Avi16a] А. А. Авилов. Автоморфизмы особых трехмерных кубических гиперповерхностей и группа Кремоны. *Матем. заметки*, 100(3):461–464, 2016.

[Avi16b] А. А. Авилов. Автоморфизмы трехмерных многообразий, представимых в виде пересечения двух квадрик. *Мат. сб.*, 207(3):3–18, 2016.

[Avi19] А. А. Авилов. Бирегулярная и бирациональная геометрия двойных квартик с 15 обыкновенными двойными точками. *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2019. в печати.

6 Специальные многообразия

6.1 Работы по теории особенностей

В совместном препринте научных сотрудников Лаборатории Екатерины Америк и Миши Вербицкого arXiv:1804.00463, была доказана локальная тривиальность семейства локусов бирациональных контракций гиперкэлерова многообразия над релевантной частью пространства Тейхмюллера комплексных структур. Когда этот локус неособый, все локусы бирациональных контракций в одном семействе многообразий диффеоморфны. Когда он особый, локусы гомеоморфны, и гомеоморфизм можно выбрать таким образом, что он вещественно аналитичен на стратах стратификации Мазера-Тома этой особенности. Сейчас Америк и Вербицкий ведут работу над усилением этого результата, доказывая локальную тривиальность в вещественно-аналитической категории.

Эта работа основывается на изучении эргодического действия группы классов отображений на пространстве Тейхмюллера. Другая работа, опубликованная в 2018, Collections of Orbits of Hyperplane Type in Homogeneous Spaces, Homogeneous Dynamics, and Hyperkähler Geometry (Екатерина Америк, Миша Вербицкий), авторы изучают коллекции орбит подгрупп в однородных пространствах, доказывая, что замыкания таких коллекций - снова орбита, возможно, другой группе. Эта работа основана на классических результатах Мозеса-Шаха и теореме Ратнер. В другой работе Америк-Вербицкого, этот результат применялся для получения теоремы финитности для МБМ-классов, существенно усиливающую гипотезу Каваматы-Моррисона, доказанную Америк и Вербицким несколько лет назад.

В препринте 1801.06849, опубликованном совместно с бразильскими математиками Lev Birbrair, Alexandre Fernandes, J. Edson Sampaio, была решена классическая задача теории особенностей: авторы предъявили изолированные особенности, которые эквивалентны по Липшицу, но имеют разную кратность. Много лет считалось, что это невозможно, и есть богатая литература по теории особенностей, посвященная этой гипотезе и ее доказательствам в специальных случаях.

6.2 Симплектическая геометрия специальных многообразий

Совместно с Джейком Соломоном и Михаилом Энтовым, Миша Вербицкий работал над вопросами симплектической геометрии в применении к специальным многообразиям. В препринте 1805.00102, совместном с Соломоном, авторы доказали, что подкатегория категории Фукаи, порожденная вещественно-аналитическими специальными лагранжевыми подмногообразиями, формальна для достаточно общей симплектической структуры. В статье "Unobstructed symplectic packing by ellipsoids for tori and hyperkähler manifolds"(Selecta Math.), авторы доказали, что симплектические упаковки гиперкэлерова многообразия или тора симплектическими эллипсоидами не имеет препятствий, кроме объема.

6.3 Гиперкэлеровы многообразия и слоения

Сотрудник Лаборатории Е. Америк, совместно с Ф. Кампана, закончила работу над статьей Specialness and isotriviality for regular algebraic foliations , где отзыв рецензента потребовал существенных изменений. Статья выйдет в журнале Annales de l'Institut Fourier. В ней доказывается изотривиальность семейства многообразий, заданного слоением без особенностей, в том случае, когда база семейства как орбифолд специальна по Кампана, а слои либо канонически поляризованы, либо имеют тривиальное каноническое расслоение.

Совместно с М. Вербицким, Е. Америк выпустила препринт MBM loci for families of hyperkaehler manifolds and centers of birational contractions. Его главные результаты касаются поведения при деформациях подмногообразий в гиперкэлеровых многообразиях, заметаемых рациональными кривыми с отрицательным квадратом Бовилля-Богомолова.Известно, что минимальная рациональная кривая деформируется вместе со своим классом когомологий z. При этом может произойти вырождение, например, она перестает быть минимальной. Оказывается, что существует пространство деформаций $Teich_z^{min}$, с точностью до проблем несепарабельности совпадающее с пространством деформаций $Teich_z$, сохраняющим этот класс когомологий, над которым кривая остается минимальной, и заметаемые ее деформациями подмногообразия Z_t в соответствующих гиперкэлеровых $X_t, t \in Teich_z^{min}$ гомеоморфны и стратифицированно диффеоморфны, за исключением, возможно, тех t, что соответствуют многообразиям с максимальным числом Пикара (это изолированные точки в $Teich_z$). К тому же диффеоморфизмы можно выбрать так, что они сохраняют рациональные кривые, а значит, слои рациональных факторов Z_t бимероморфны.

В настоящий момент ведется работа в том же направлении, поскольку недавние результаты Б. Бэккера и К. Лена (B. Bakker, Ch. Lehn: A global Torelli theorem for singular symplectic varieties), по-видимому, позволяют существенно усилить наши. В качестве приложения мы приводим простое описание локусов бирациональных стягиваний на многообразиях типа K3 размерности 4 и 6 (работа в процессе).

Об этих результатах докладывалось на различных конференциях, например, Complex foliations: dynamics and geometry, ICM Satellite, Нитерой (Бразилия), июль; INDAM workshop "Birational geometry and Moduli Spaces Рим, июнь; Constructions and Obstructions in Birational Geometry, Эдинбург, ноябрь.

6.4 Голоморфно симплектические многообразия

6.4.1 Автоморфизмы проективных гиперкэлеровых многообразий и CAT(0)-пространства

Сотрудник Лаборатории Н. Курносов, совместно с Е. Ясинским, изучал свойства групп автоморфизмов проективных гиперкэлеровых многообразий. Как ранее доказал Огизо, группы биголоморфных и бимероморфных автоморфизмов непроективных гиперкэлеровых многообразий конечно-порождены (являются, более того, почти абелевыми ранга $max(\rho(M)-1,1)$, где $\rho(M)$ – число Пикара). В случае же проективных Огизо доказал аналог альтернативы Титса, что либо группа почти абелева конечного ранга, либо содержит свободную некоммутативную группу. Затем Буассье и Сарти, используя теорему Торелли, доказанную Вербицким, показали, что группа бимероморфных (бирациональных в проективном случае) автоморфизмов $Bir(M)$ конечно порождена. В работе с Е. Ясинским Н. Курносов смог доказать этот факт, а также конечно-порожденность группы биголоморфных автоморфизмов $Aut(M)$, а также разные свойства для них, в том числе усиление альтернативы Титса, используя CAT(0)-пространства. Конечно-порожденность группы $Aut(M)$ независимо доказана Каттанео и Фу с помощью доказательства Америк-Вербицкого гипотезы Каваматы-Моррисона для гиперкэлеровых многобразия и клейновых групп. В нашей работе мы также использовали результат Америк-Вербицкого, а именно существование фундаментального полиэдрального домена при действии $Aut(M)$ на обильный конус $Amp(M)$ (и аналогичный результат Маркмана для $Mov(M)$ в случае группы $Bir(M)$).

Согласно Хойбрехтсу, решетка Нерон-Севери проективного гиперкэлерового многообразия гиперболична (и обратное верно) и имеет сигнатуру $(1, \rho(M) - 1)$, поэтому мы можем связать с этим пространством одну из гиперболических моделей, в частности можем используя проекцию из центра перевести гиперболоид в шар Пункаре, который сам по себе является CAT(0)-пространством. Далее выкидывая возможно бесконечное число регионов с орокаспами (т.е. наборов непересекающихся орошаров), мы можем добиться, чтобы на оставшейся части шара Пуанкаре наша группа автоморфизмов действовала непрерывно разрывно, и при необходимости уменьшая радиус шаров еще, мы можем показать что действие будет кокомпактно. Важнейшим моментом этой конструкции, является то, что мы можем рассмотреть образ обильного конуса в шаре Пуанкаре, вырезав упомянутые орокаспы (возможно еще раз уменьшив радиус), мы имеем выпуклое в гиперболической метрике подпространство полного метрического пространства, те вновь CAT(0)-пространство. Несложно заметить, что действие остается непрерывно разрывным и кокомпактным. Из этого следуют все свойства конечности – конечно порожденность, конечное число классов сопряженности конечных групп, а также усиленная альтернатива Титса: Если $G \subseteq Bir(M)$ для проективного гиперкэлерового M, то она либо содержит свободную некоммутативную группу, либо подгруппу $\mathbb{Z}^n$ конечного индекса.

Более того, из данной конструкции следует, что похожие результаты могут иметь место для многообразий Калаби-Яу, для которых выполнена гипотеза Кавамата-Моррисона, а также используя ограничения на $b_2(M)$ можно получить оценку константы Жордана групп автоморфизмов, в случае K3 эта оценка известна и является точной (3840, результат Кондо).

Также совместно с А. Кузнецовой, Е. Ясинским, а также научным руководителем Лаборатории Ф. Богомоловым, Н. Курносов рассматривал аналогичные вопросы для некэлеровых голоморфно-симплектических многообразий, однако, ситуация там заметно сложнее, поскольку для многообразий Богомолова-Гуана неизвестны ни когомологии в размерности больше двух, ни форма Бовилля-Богомолова-Фуджики.

Работа отправлена в журнал и доступна на ArXiv в качестве препринта (1810.09730).

6.4.2 Форма ББФ для некэлеровых голоморфно-симплектических многообразий

Совместно с М. Вербицким, Н. Курносов показал, что пространство симплектических деформаций некэлеровых голоморфно-симплектических многообразий безпрепятственно (теорема Богомолова-Тяна-Тодорова), из этого мы смогли вывести наличие формы Бовилля-Богомолова-Фуджики на многообразии Богомолова-Гуана – примере односвязного некэлерового голоморфно-симплектического многообразия, которое строится по аналогии с обобщенным многообразием Куммера, но из примарной поверхности Кодаиры.

В ближайшее время планируется проверить невырожденность этой формы и опубликовать эти результаты.

6.4.3 База лагранжевого расслоения для гиперкэлерового четырехмерного многообразия

Совместно с Ф. Богомоловым, Н. Курносов показал, что база лагранжевого расслоения проективного гиперкэлерового четырехмерного многообразия всегда $\mathbb{C}P^2$. Недавно, Оу показал, что единственным негладким (гладкие всегда являются проективными пространствами согласно Хвангу) возможным примером является поверхность дель Пеццо степени один с особенностью E_8. Нам удалось исключить этот случай, используя локальные свойства и структуру особых слоев, полученную Хвангом и Огизо.

Дальнейшее обобщение является непростой задачей, так как доказательство Оу использует программу минимальных моделей, которая в старших размерностях заметно сложнее.

Работа отправлена в журнал и доступна на ArXiv в качестве препринта (1810.11011).

6.5 Семейства векторных расслоений на слоях твисторной проекции гиперкэлерова многообразия

Гладкое многообразие M называется гиперкэлеровым, если на нем существуют тройка интегрируемых почти-комплексных структур I, J, K, удовлетворяющих кватернионным соотношениям $I^2 = J^2 = K^2 = -1$, $IJ = -JI = K$, и метрика g, которая является кэлеровой по отношению к каждой из этих трех структур. Любая линейная комбинация $aI+bJ+cK$ с коэффицентами, удовлетворяющими $a^2 + b^2 + c^2 = 1$, также задает интегрируемую почти-комплексную структуру на M, а метрика g является кэлеровой по отношению к этой структуре. Множество этих индуцированных комплексных структур на M топологически представляет из себя двумерную сферу S^2. Твисторным пространством гиперкэлерова многообразия M называется топологическое произведение $\mathrm{Tw}(M) := M \times S^2$, параметризующее индуцированные структуры в точках M. Отождествляя S^2 с $\mathbb{CP}^1$, на твисторном пространстве $\mathrm{Tw}(M)$ можно построить естественную структуру комплексного многообразия [2], для которой проекция на вторую координату $\pi : \mathrm{Tw}(M) \to \mathbb{CP}^1$ является голоморфным отображением, а его слои соответствуют индуцированным комплексным структурам на M. В дальнейшем мы будем обозначать через $I \in \mathbb{CP}^1$ произвольную индуцированную комплексную структуру, а слой $\pi^{-1}(I)$ будет обозначаться через M_I. Для векторного расслоения E на M, обозначим через E_I его ограничение на $M_I = \pi^{-1}(I)$.

В статье [1], Д. Каледин и М. Вербицкий изучают голоморфные векторные расслоения E на твисторном пространстве $\mathrm{Tw}(M)$ компактного гиперкэлерова многообразия M как семейства расслоений на слоях $M_I = \pi^{-1}(I)$ твисторной проекции $\pi : \mathrm{Tw}(M) \to \mathbb{CP}^1$. В частности, они показывают, что если ограничение E_I на общий слой M_I твисторной проекции (в смысле топологии Зарисского на $\mathbb{CP}^1$) стабильно, то и E стабильно как расслоение на $\mathrm{Tw}(M)$. В работе [5] показывается что обратное утверждение, вообще говоря, неверно. А именно, строится пример голоморфного расслоения E ранга 2 на твисторном пространстве $\mathrm{Tw}(M)$, где M – поверхность K3, которое стабильно как расслоение на $\mathrm{Tw}(M)$, но все ограничения которого на слои проекции $\pi : \mathrm{Tw}(M) \to \mathbb{CP}^1$ нестабильны. Данный пример строится как некоторое нетривиальное расширение в $\mathrm{Ext}^1(L, \mathcal{O}(-1))$, где L – линейное расслоение на $\mathrm{Tw}(M)$, все ограничения которого на твисторные прямые $\{m\} \times \mathbb{CP}^1 \subset \mathrm{Tw}(M)$ тривиальны, а $\mathcal{O}(-1)$ есть обратный образ тавтологического линейного расслоения на $\mathbb{CP}^1$ по отображению $\pi : \mathrm{Tw}(M) \to \mathbb{CP}^1$.

На самом деле, из доказательства вышеуказанного результата о стабильности послойно стабильных расслоений E на $\mathrm{Tw}(M)$ в статье [1] Каледина и Вербицкого следует более сильное утверждение. А именно, если E стабильно ограничивается на общий слой твисторной проекции $\pi : \mathrm{Tw}(M) \to \mathbb{CP}^1$, то оно неприводимо, то есть не имеет ненулевых подпучков строго меньшего ранга. Имеется гипотеза, что обратное утверждение к этой более сильной версии результата верно. В данный момент доказан следующий частичный результат: для компактного односвязного гиперкэлерова многообразия M, неприводимое векторное расслоение E на твисторном пространстве $\mathrm{Tw}(M)$ стабильно ограничивается на общий слой проекции $\pi : \mathrm{Tw}(M) \to \mathbb{CP}^1$ в случае если ранг E равен 2, 3, 5, 7 или 11, а также в общем случае если ограничение E_I на общий слой π является простым расслоением, то есть удовлетврояет условию $\mathrm{Hom}(E_I, E_I) = \mathbb{C}$. Ключевым моментом доказательства является обобщение результата А. Телемана об открытости по Зарисскому условия стабильности в семействах голоморфных расслоений на фиксированном комплексном многообразии [3] на случай твисторной проекции $\pi : \mathrm{Tw}(M) \to \mathbb{CP}^1$, в слоях которой комплексная структура на M варьируется. Следуя от противного, предполагается, что неприводимое расслоение E на $\mathrm{Tw}(M)$ нестабильно ограничивается на бесконечное число слоев проекции $\pi : \mathrm{Tw}(M) \to \mathbb{CP}^1$, из чего ввиду вышеуказанного результата следует, что оно нестабильно ограничивается на все слои π. Таким образом, для каждого $I \in \mathbb{CP}^1$, ограничение E_I на M_I допускает дестабилизирующие подпучки, и дальнейший аргумент сводится к «склеиванию» этих подпучков в глобальный подпучок E на $\mathrm{Tw}(M)$, что противоречит неприводимости E. Данный результат представлен в работе стажера Лаборатории Артура Томберга [4].

Список литературы

[1] D. Kaledin, M. Verbitsky, “Non-Hermitian Yang-Mills connections”, *Selecta Math. New Series* 4 (1998), pp. 279-320.

[2] S. Salamon, “Quaternionic Kähler manifolds”, *Inv. Math.* 67 (1982), pp. 143-171.

[3] A. Teleman, “Families of holomorphic bindles” *Commun. Contemp. Math.* 10 (2008), pp. 523-551

[4] A. Tomberg, “Fibrewise stable bundles on twistor spaces of hyperkähler manifolds”, preprint.

[5] А. Томберг, “Пример стабильного, но послойно нестабильного расслоения на твисторном пространстве гиперкэлерова многообразия”, появится в *Математических заметках.*

6.6 Многообразия Ивасавы

В 2018 году стажер Лаборатории В. Рогов защитил бакалаврский диплом под руководством М.С. Вербицкого, посвященный комплексной геометрии многообразий Ивасавы. На основе этого диплома была написана статья, принятая к публикации в журнале International Mathematics Research Notices [R]. Кроме того, эта работа заняла II место на XXI конкурсе им. Августа Мебиуса в номинации « студенты и аспиранты»

Многообразием Ивасавы называется фактор группы G унипотентных комплексных матриц 3×3 по кокомпактной решетке (комплексная структура индуцирована с естественной комплексной структуры на G).

Многообразия Ивасавы это один из простейших примеров комплексных нильмногообразий. Комплексное нильмногообразие это компактное комплексное многообразие снабженное транзитивным действием связной односвязной нильпотентной группы Ли, сохраняющим комплексную структуру.

Известно, что комплексное нильмногообразие допускает кэлерову метрику тогда и только тогда, когда оно является тором [REF]. Таким образом, комплексные нильмногообразия дают большое количество примеров некэлеровых многообразий.

В своей работе Рогов изучал структуру голоморфных подмногообразий в многообразиях Ивасавы. Им было доказано, что всякая замкнутая комплексная кривая в многообразии Ивасавы содержится в некотором подторе, а всякая гладкая комплексная поверхность является либо абелевым многообразием, либо неалгебраической кэлеровой поверхностью, деформационно эквивалентной произведению эллиптической кривой и кривой общего типа.

Основным методом доказательства было изучение геометрии пространства Дуади кривых на многообразии Ивасавы. В частности, было доказано, что пространство Дуади кривых многообразия Ивасавы бимероморфно некоторому алгебраическому многообразию.

Теорема Фино, Гранчарова и Вербицкого утверждает, что всякое голоморфное отображение из нильмногообразия в проективное многообразие пропускается через тор ([FGV]). Из работы [R] следует двойственная теорема для многообразий Ивасавы: всякая голоморфная иммерсия из гладкого проективного многообразия в многообразие Ивасавы пропускается через тор. Кроме того, из нее следует, что, несмотря на то, что многообразия Ивасавы не являются кэлеровыми, все их собственные подмногообразия кэлеровы.

К сожалению, эти результаты не могут быть обобщены. Так, в монографии Винкельмана [W] приводятся конструкции кривых в комплексных нильмногообразиях, не содержащихся ни в каком собственном подмногообразии. Тот факт, что в многообразиях Ивасавы таких кривых не бывает, является следствием малой размерности.

Помимо этого, в той же работе была изучена алгебраическая геометрия торов в многообразиях Ивасавы. Было доказано, что всякая эллиптическая кривая в данном многообразии Ивасавы обладает (одним и тем же, зависящим от многообразия) комплексным умножением, а всякая абелева поверхность в многообразии Ивасавы изогенична произведению двух эллиптических кривых и имеет максимальное число Пикара.

Также в 2018 году вместе с Р. Деевым (Институт Куранта, Нью-Йорк) В. Рогов занимался исследованием проективных поверхностей в пространствах узлов трехмерных римановых многообразий. Пространством узлов $Kn(M)$ гладкого многообразия M называется фактор пространства иммерсий из S^1 в M по действию группы сохраняющих ориентацию диффеоморфизмов окружности. Это пространство является гладким многообразием Фреше. В случае когда M трехмерно, риманова структура на M канонически индуцирует оператор почти комплексной структуры на $Kn(M)$, формально интегрируемый в смысле Ньюландера-Ниренберга, и согласованную с ним симплектическую структуру. Симплектическую структуру можно выбрать целочисленной (см. например [Br])

Из всего этого следует, что конечномерные компактные подмногообразия в пространствах узлов трехмерных римановых многообразий, касательное пространство к которым сохраняется каноническим оператором почти комплексной структуры, является проективными комплексными многообразиями. Типичным примером является расслоение Хопфа $h\colon S^3 \to \mathbb{CP}^1$. Его слои могут быть проинтерпретированы как точки на рациональной кривой в пространстве узлов на трехмерной сфере с круглой метрикой.

Деев и Рогов изучали геометрию проективных многообразий, которые могут быть реализованы как компактные голоморфные семейства узлов на трехмерных римановых многообразиях. Особенно интересным оказался случай проективных поверхностей. Такие поверхности оказываются тесно связанными с твистерами ЛеБрюнна — канонической КР-структурой на сферизации касательного расслоения трехмерного конформного многообразия.

В 2018 году Рогов участвовал в летней школе по теории Ходжа в Москве и летней школе по некэлеровой геометрии в Четраро, Италия.

Наконец, в 2018 году В. Рогов продолжал участвовать в организации и проведении научно-учебного семинара "Геометрические структуры на многообразиях". Он сделал на нем несколько обзорных докладов, в том числе доклад о связи между фундаментальной группой компактного кэлерова многообразия и его голоморфным кокасательным расслоением (основан на работах Д.Арапуры, Й. Брюнбарба, Ф. Кампана, Б. Клинглера, Б.Тотаро и других).

Список литературы

[Br] Brylinksi J.-L. *Loop spaces, Characteristic classes and geometric quantization.* Modern Birkhäuser Classics (1993): XVI, 302

[BG] Benson C., Gordon C. S. 1988. *Kahler and symplectic structures on nilmanifolds.* Topology, 27-4 (1988): 513–518.

[FGV] Fino A., Grantcharov G., Verbitsky M. *Algebraic dimension of complex nilmanifolds.* J. Math. Pures Appl.(2017)

[R] Rogov V. *Complex geometry of Iwasawa manifolds.* arXiv: DG-1710.02180, *to appear in* IMRN.

[W] Winkelmann J.*Complex analytic geometry of complex parallelizable manifolds.* Mém. Soc. Math. Fr. (N.S.)Tome 72-73 (1998): III1-X216

6.7 Теоремы конечности для сферических многообразий над локально-компактными полями

Рассмотрим действие алгебраической редуктивной группы G на алгебраическом многообразии. Особый интерес представляет исследование орбит Борелевской подгруппы (максимальной разрешимой группы) на таких многообразиях, например на однородных пространствах. Это обусловлено тем, что орбиты действия борелевской подгруппы на полном однородном многообразии (обобщенном многообразии флагов) над полем комплексных чисел дают клеточное разбиение этого многообразия.

В 1986 Э.Б.Винбергом (и независимо М.Брионом) для сферических многообразий, то есть для алгебраических многообразий с действием редуктивной группы, обладающих открытой орбитой борелевской подгруппы, была доказана теорема о конечности числа орбит борелевской подгруппы. Оба доказательства были основаны на так называемой конструкции стягивания или специализации к орисферическому многообразию, построенной В.Л.Поповым. Более точно, посредством этой конструкции, ситуация сводилась к исследованию орбит борелевской группы на орисферическом многообразии (то есть таком, что стабилизатор точки общего положения содержит унипотентную подгруппу), на котором эти орбиты устроены гораздо проще и могут быть описаны непосредственно. Позднее, основываясь на идеях Матсуки, Фридрих Кноп предложил другое доказательство этого факта, основанное на разнесении B-орбит с помощью минимальных параболических подгрупп.

В случае алгебраически незамкнутых полей существует аналог понятия сферичности, где роль борелевской подгруппы играет минимальная параболическая подгруппа, определенная над основным полем. Итак пусть G редуктивная группа, определенная над алгебраически незамкнутым полем k (например полем вещественных или p-адических чисел), действующая на алгебраическом многообразии, определенным над k. И пусть P-минимальная параболическая подгруппа, определенная над этим полем (то есть стабилизатор максимального k-плотного полного однородного многообразия, доминирующего все полные однородные пространства данной группы). Многообразие называется k-сферическим, если P имеет в нем открытую орбиту, и множество k-точек плотно по Зарисскому. Орбиты с плотным по Зарисскому множеством k-точек назовем k-плотными. В случае совершенных полей достаточно требовать наличие хотя бы одной точки на открытой k-орбите.

Совместно с Ф.Кнопом, сотрудником Лаборатории В.С.Жгуном доказана теорема конечности для множества k-плотных P-орбит на сферическом многообразии для локально-компактных полей. Совсем недавно появилось доказательство этого факта над полем вещественных чисел, полученное в работе Кнопа, Кретца, Пехера, Шлихтруля 2017 года, основанное на полной классификации сферических подгрупп над вещественными числами. В отличие от этой работы, наше доказательство является концептуальным и подходит для p-адических полей, где не ясно как подойти к вопросу классификации.

Отметим, что формулировка результата является оптимальной, поскольку легко привести пример эквивариантного вложения анизотропной группы G с непустым множеством k-точек (в этом случае, G совпадает со своей минимальной параболической подгруппой) граница которого содержит бесконечное число орбит, однако ни на одной из этих орбит не будет k-точек.

Также необходимо сделать следующее замечание, что схема оригинального доказательства Винберга не может быть применено непосредственно в этой ситуации. Несмотря на то, что деформация к орисферическому многообразию может быть проведена и над алгебраически незамкнутым полем, посредством выбора соответствующей Галуа инвариантной градуировки алгебры функций. Однако, совершенно не ясно, каким образом происходит вырождение орбит с непустым множеством k-точек. Последние орбиты потенциально могут вырождаться в орбиты не являющиеся k-плотными.

В настоящий момент мы ограничились лишь случаем локально-компактных полей, поскольку эти поля обладают специальными свойствами, а именно: если многообразие над полем k имеет гладкую k-точку, то оно также содержит плотное по Зарисскому множество k-точек. А также эти поля обладают свойством (F) по Серру, которое гарантирует конечность множества орбит группы k-точек G на множестве k-точек ее однородного пространства. В дальнейшем, мы надеемся избавиться от этих ограничительных предположений. Также мы планируем получить аналоги теоремы Винберга о поведении сложности при переходе к замкнутым k-плотным P-инвариантным подмногообразиям.

Упомянутые результаты приняты в печать и будут опубликованы в статье В.С.Жгуна и Ф.Кнопа “Сложность действия редуктивных групп над алгебраически незамкнутым полем и сильная стабильность действий на флаговых многообразиях”, Доклады академии наук.

6.8 Пределы Громова-Хаусдорфа. Мотивный объем.

В 2018 году сотрудник Лаборатории Д. Сустретов занимался исследованием связи между коллапсирующими пределами Громова-Хаусдорфа семейств комплексных кривых рода $g \geq 1$ и геометрией неархимедовых пространств. Если рассматривать вырождения с монодромией масимального ранга унипотентности и с плоской псевдокэлеровой метрикой, то есть метрикой вида $\frac{i}{2}\Omega \wedge \bar{\Omega}$, где Ω голоморфная форма, то предел Громова-Хаусдорфа элементов такого сеймества с геодезической метрикой нормализованной так, что диаметр элементов семейства равен константе, является метрическим графом. Было получено описание этого графа в терминах пространства Берковича X^{an}, ассоциированного с вырождением.

Для того, чтобы получить этот метрический граф, надо взять скелет Γ произвольный полустабильной модели X и рассмотреть на нем функцию веса, связанную с формой Ω. Эта функция веса была введена Концевичем и Сойбельманом [KS04], ее свойства были исследованы Никэзом и Мустацэ [MN15], а также Темкиным [Tem16]. Оказывается, что упомянутый предел гомеоморфен фактору Γ по следующему отношению эквивалентности: две точки считаются эквивалентны, если они могут быть соединены путем, пересечение которого с множеством минимальности функции веса конечно. Метрика на факторе задается исходя из естественной метрики на скелете Γ, которая модифицируется так, что длина ребра Γ умножается на абсолютное значение ведущего коэффициента в разложении Ω в ряд в локальных координатах связанных с ребром.

Эти результаты содержатся в препринте arXiv:1802.03818 и готовятся к публикации.

Д. Сустретов также занимался изучением мотивного объема неархимедовых полуалгебраических подмножеств алгебраических многообразий. В работе 2016 года [NPS16] Никэз, Пэйн и Шретер сформулировали гипотезы геометрической интерпретации "уточненных" (refined) тропических кратностей кривых на торических поверхностях, введенных Блоком и Геттше. Их интерпретация заключается в том, что кратности связаны с родами Хирцебруха мотивного объема полуалгебраического семейства якобианов или схем гильберта точек кривых с данной тропикализацией.

Тропическая кратность это комбинаторная определяемая кратность тропикализации кривой, возникающая при решении задач исчислительно геометрии методами тропической геометрии. Тропикализация кривой в алгебраическом торе над алгебраически замкнутым неархимедовым полем это замыкание в $\mathbb{R}^n$ образа кривой под покоординатным применением отображения $-\log|\cdot|$, согласно теореме Биери-Гровса, это рациональный полиэдральный комплекс размерности 1, удовлетворяющий комбинаторному условию сбалансированности. Тропическая кривая это произвольный полиэдральный комплекс, удовлетворяющий условию сбалансированностм. В ряде задач исчислительной геометрии удается показать, что подсчет алгебраических кривых можно заменить подсчетом тропических кривых с кратностями, в этом случае кратность интерпретируется как количество кривых с данной тропикализацией.

Мотивный объем это гомоморфизм из кольца Гротендика полуалгебраических подмножеств алгебраических многообразий над алгебраически замкнутым полем полным по отношению к неархимедову нормированию в кольцо Гротендика многообразий над полем вычетов, который был введен Хрущовским и Кажданом с использованием теории моделей. Этот гомоморфизм позволяет определить аддитивные инварианты, такие как эйлерова характеристика, полином Ходжа-Делиня, и в частности, род Хирцебруха, для полуалгебраических множеств. В статье [NPS16] проверяют свои гипотезы для кривых рода 1 при помощи прямого подсчета.

Проверка этих гипотез в общем случае требует разработки систематических способов подсчета мотивного объема и рода Хирцебруха неархимедовых полуалгебраических множеств. Удалось получить следующий общий результат: мотивный объем семейств абелевых многоообрзий, допускающих послойную униформизацию (в смысле неархимедовой аналитической геометрии) алгебраическим тором, равен нулю. Доказательство использует инвариантность мотивного объема под биекциями, определимыми в расширении теории алгебраически замкнутых полей с неархимедовым нормированием субаналитическими функциями Липшица и Робинсона.

Этот результат доступен в препринте arxiv:1805.04942 и готовится к публикации.

Список литературы

[KS04] Maxim Kontsevich and Yan Soibelman. Affine structures and non-Archimedean analytic spaces. *arXiv preprint math/0406564*, 2004.

[MN15] Mircea Mustaţă and Johannes Nicaise. Weight functions on non-archimedean analytic spaces and the Kontsevich-Soibelman skeleton. *Algebraic Geometry*, 2(3):365–404, 2015.

[NPS16] Johannes Nicaise, Sam Payne, and Franziska Schroeter. Tropical refined curve counting via motivic integration. *arXiv preprint arXiv:1603.08424*, 2016.

[Tem16] Michael Temkin. Metrization of differential pluriforms on Berkovich analytic spaces. In *Nonarchimedean and Tropical Geometry*, pages 195–285. Springer, 2016.

6.9 Когомологические уравнения для линейных инволюций

В теории чисел есть известная теорема Рота о диофантовых приближениях, которая, говоря неформально, утверждает, что произвольное алгебраическое число может не иметь большого числа хороших рациональных приближений. Более точно, Рот определил специальный класс чисел, которые плохо приближаются рациональными, а затем показал, что почти все алгебраичесие иррациональные числа к этому классу относятся, а следовательно, числа Рота образуют множество полной меры, инвариантное относительно естественного действия модулярной группы $SL(2,\mathbb{Z})$.

Числа Рота интересны не только с арифметической точки зрения - они также появляются при изучении когомологических уравнений, ассоциированных с вращением $R_a : R_a(x) = x + a$ окружности $\mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$: a - число Рота, если и только если для всех $r, s : r > s + 1 > 1$ и всех функций Φ из класса гладкости C^r на окружности $\mathbb{T}$ с нулевым средним существует единственная функция $\Psi \in C^s(\mathbb{T})$ с нулевым средним, такая, что

$$\Psi - \Psi \circ R_a = \Phi.$$

In 2005 Marmi, Moussa и Yoccoz доказали аналог теоремы Рота для перекладываний отрезков - обобщения поворота, возникающего при изучении ориентируемых измеримых слоений на поверхностях. Они определили понятие перекладывания отрезков типа Рота и доказали два утверждения: о существовании решения о когомологического уравнения для этого класса и о полной мере перекладываний отрезков типа Рота в пространстве параметров. При этом определение класса Рота было дано в терминах индукции Рози для перекладываний отрезков - матричного алгоритма, обобщающего алгоритм Евклида.

В совместной работе с Erwan Lanneau и Stefano Marmi, ассоциированный сотрудник Лаборатории А. Скрипченко обобщила этот результат для линейных инволюций - отображений, которые, как и перекладывания, являются отображением первого возвращения на трансверсаль для измеримых слоений на поверхности, но только в неориентируемом случае. Определение класса Рота дано в терминах положительной группы Рози - Вича для динамически неприводимых линейных инволюций, а класс функций, для которых разрешимо когомологическое уравнение, включает инвариантные относительно инволюций функции, которые имеют ограниченную вариацию на каждом отрезке непрерывности соответствующей линейной инволюции.

7 Заключение: библиография

В заключение отчета, мы приводим список публикаций лаборатории, и список препринтов, подготовленных к печати.

7.1 Публикации лаборатории

1. Blokh A., Oversteegen L., Ptacek R., Timorin V. Complementary Components to the Cubic Principal Hyperbolic Domain // Proceedings of the American Mathematical Society. 2018. Vol. 146. No. 11. P. 4649-4660. doi

2. Bogomolov F. A., Halle L. H., Pazuki F., Tanimoto S. Abelian Calabi-Yau threefolds: Néron models and rational points // Mathematical Research Letters. 2018. Vol. 25. No. 2. P. 367-392. doi

3. Bogomolov F. A., Fu H. Elliptic curves with large intersection of projective torsion points // European Journal of Mathematics. 2018. Vol. 4. No. 2. P. 555-560. doi

4. Bondal A. I., Bodzenta-Skibinska A. Canonical tilting relative generators // Advances in Mathematics. 2018. Vol. 323. P. 226-278. doi

5. Braverman A., Michael Finkelberg. Twisted zastava and q-Whittacker functions // Journal of London Mathematical Society. 2017. Vol. 96. No. 2. P. 309-325. doi

6. Buonerba F., Bogomolov F. A. Dominant classes of projective varieties // European Journal of Mathematics. 2018. Vol. 4. No. 4. P. 1412-1420. doi

7. Cheltsov I., Park J., Shramov K. Alpha-invariants and purely log terminal blow-ups // European Journal of Mathematics. 2018. Vol. 4. No. 3. P. 845-858. doi

8. Cheltsov I., Dubouloz A., Park J. Super-rigid affine Fano varieties // Compositio Mathematica. 2018. Vol. 154. No. 11. P. 2462-2484. doi

9. Feigin E., Makedonskyi I., Orr D. Generalized Weyl modules and nonsymmetric q-Whittaker functions // Advances in Mathematics. 2018. Vol. 330. P. 997-1033. doi

10. Michael Finkelberg, Andrei Ionov. Kostka-Shoji polynomials and Lusztig's convolution diagram // Bulletin of the Institute of Mathematics Academia Sinica (New Series). 2018. Vol. 13. No. 1. P. 31-42. doi

11. Fonarev A., Kuznetsov A. G. Derived Categories of Curves as Components of Fano Manifolds // Journal of London Mathematical Society. 2018. Vol. 97. No. 2. P. 24-46. doi

12. Kaledin D. B. Witt vectors as a polynomial functor // Selecta Mathematica, New Series. 2018. Vol. 24. No. 1. P. 359-402. doi

13. Kaledin D. B. Bokstein homomorphism as a universal object // Advances in Mathematics. 2018. Vol. 324. P. 267-325. doi

14. Karzhemanov I., Zhdanovskiy I. Some properties of surjective rational maps // European Journal of Mathematics. 2018. Vol. 4. No. 1. P. 326-329. doi

15. Krylov V. Integrable Crystals and Restriction to Levi Subgroups Via Generalized Slices in the Affine Grassmannian / Пер. с рус. // Functional Analysis and Its Applications. 2018. Vol. 52. No. 2. P. 113-133. doi

16. Kuznetsov A. G., Perry A. Derived categories of Gushel-Mukai varieties // Compositio Mathematica. 2018. Vol. 154. No. 7. P. 1362-1406. doi

17. Kuznetsov A. G., Prokhorov Y. Prime Fano threefolds of genus 12 with a Gm-action and their automorphisms // Épijournal de Géométrie Algébrique. 2018. Vol. 2. No. 3. P. 1-14.

18. Kuznetsov A. G., Debarre O. Gushel-Mukai varieties: Classification and birationalities // Algebraic Geometry. 2018. Vol. 5. No. 1. P. 15-76. doi

19. Polishchuk A. Contracting the Weierstrass locus to a point, in: String-Math 2016. Volume 98 of Proceedings of Symposia in Pure Mathematics. American Mathematical Society, 2018. P. 241-257. 20. Polishchuk A. A_∞-algebras associated with elliptic curves and Eisenstein-Kronecker series // Selecta Mathematica, New Series. 2018. Vol. 24. No. 1. P. 563-589. doi

20. Polishchuk A., Hua Z. Shifted Poisson structures and moduli spaces of complexes // Advances in Mathematics. 2018. Vol. 338. P. 991-1037. doi

21. Prokhorov Y., Zaidenberg M. Fano-Mukai fourfolds of genus 10 as compactifications of C4 // European Journal of Mathematics. 2018. Vol. 4. No. 3. P. 1197-1263. doi

22. Prokhorov Y., Kuznetsov A. G., Shramov K. Hilbert schemes of lines and conics and automorphism groups of Fano threefolds // Japanese Journal of Mathematics. 2018. Vol. 13. No. 1. P. 109-185.

23. Прохоров Ю. Г. Проблема рациональности для расслоений на коники // Успехи математических наук. 2018. Т. 73. 3. С. 3-88. doi

24. Rumynin D., Hristova K. Kac-Moody groups and cosheaves on Davis building // Journal of Algebra. 2018. Vol. 515. P. 202-235. doi

25. Румынин Д. А., Kirkina K., Capdeboscq I. Presentation of affine Kac-Moody groups // Forum of Mathematics, Sigma. 2018. Vol. 6. P. 1-35. doi

26. Shoykhet B. On a higher structure on operadic deformation complexes // Theory and Applications of Categories. 2018. Vol. 33. No. 32. P. 988-1030.

27. Shramov K., Ciliberto C., Farnik M., Küronya A., Lozovanu V., Roé J. Newton-Okounkov bodies sprouting on the valuative tree // Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo. 2017. Vol. 66. No. 2. P. 161-194. doi

28. Trepalin A. Quotients of del Pezzo Surfaces of Degree 2 // Moscow Mathematical Journal. 2018. Vol. 18. No. 3. P. 557-597.

29. Van H. D., Lowen W. The Gerstenhaber-Schack complex for prestacks // Advances in Mathematics. 2018. Vol. 330. P. 173-228. doi

30. Verbitsky M., Fino A., Grantcharov G. Algebraic dimension of complex nilmanifolds // Journal de Mathématiques Pures et Appliquées. 2018. Vol. 9. No. 118. P. 204-218. doi

31. Verbitsky M., Entov M. Unobstructed symplectic packing by ellipsoids for tori and hyperkahler manifolds // Selecta Mathematica, New Series. 2018. Vol. 24. No. 3. P. 2625-2649. doi

32. Wendland A., Rumynin D. 2-Groups, 2-characters, and Burnside rings // Advances in Mathematics. 2018. Vol. 338. P. 196-236. doi

33. Yanki L., Polishchuk A. Auslander orders over nodal stacky curves and partially wrapped Fukaya categories // Journal of Topology. 2018. Vol. 11. No. 3. P. 615-644. doi

7.2 Препринты лаборатории

1. Amerik E., Verbitsky M. MBM loci in families of hyperkahler manifolds and centers of birational contractions / Cornell University. Series arXiv: 1804.00463

2. Cheltsov I., Zhang K. Delta invariants of smooth cubic surfaces / Cornell University. Series arXiv: 1807.08960.

3. Cheltsov I., Przyjalkowski V. V. Katzarkov-Kontsevich-Pantev Conjecture for Fano threefolds / Cornell University. Series arXiv: 1809.09218.

4. Cheltsov I., Shramov K., Park J. Delta invariants of singular del Pezzo surfaces / Cornell University. Series arXiv: 1809.09221.

5. Finkelberg M. V., Braverman A. Coulomb branches of 3-dimensional gauge theories and related structures / Cornell University. Series arXiv: 1807.09038.

6. Finkelberg M. V., Braverman A. A quasi-coherent description of the category of $D - mod(Gr_G L(n))$ / Cornell University. Series arXiv: 1809.10774.

7. Finkelberg M. V., Tsymbaliuk A. Shifted quantum affine algebras: integral forms in type A (with appendices by Alexander Tsymbaliuk and Alex Weekes) / Cornell University. Series arXiv: 1811.12137.

8. Guseva L. On the derived category of IGr(3,8) / Cornell University. Series math arXiv.org 1810.07777.

9. Krylov V., Finkelberg M. V. Drinfeld-Gaitsgory interpolation Grassmannian and geometric Satake equivalence (with appendix by Dennis Gaitsgory) / Cornell University. Series arXiv: 18005.07721.

10. Kuznetsov A. G., Shinder E., Karmazyn J. Derived categories of singular surfaces / Cornell University. Series arXiv: 1809.10628.

11. Kuznetsov A. G. Embedding derived categories of Enriques surfaces into derived categories of Fano varieties / Cornell University. Series arXiv: 1802.03762.

12. Kuznetsov A. G., Smirnov M. On residual categories for Grassmannians / Cornell University. Series arXiv: "math". 2018.

13. Kuznetsov A. G., Debarre O. Double covers of quadratic degeneracy and Lagrangian intersection loci / Cornell University. Series arXiv: 1803.00799.

14. Kuznetsov A. G., Perry A. Categorical joins / Cornell University. Series arXiv: 1804.00144.

15. Loginov K. On non-rational fibers of del Pezzo fibrations over curves / Cornell University. Series arXiv: 1811.04418

16. Ostrik V., Etingof P. On semisimplification of tensor categories / Cornell University. Series arXiv: 1801.04409.

17. Ostrik V. Remarks on global dimensions of fusion categories / Cornell University. Series arXiv: 1804.08761.

18. Polishchuk A., Johnson D. Birational models of $M_2, 2$ arising as moduli of curves with nonspecial divisors / Cornell University. Series arXiv: 1807.09746.

19. Polishchuk A., Lekili Y. Homological mirror symmetry for higher dimensional pairs of pants / Cornell University. Series arXiv: 1811.04264.

20. Polishchuk A., Lekili Y. Derived equivalences of gentle algebras via Fukaya categories / Cornell University. Series arXiv: 1801.06370.

21. Prokhorov Y., Duncan A., Cheltsov I., Blanc J. Finite quasisimple groups acting on rationally connected threefolds / Cornell University. Series arXiv: 1809.09226.

22. Prokhorov Y., Mori S. Threefold extremal curve germs with one non-Gorenstein point / Cornell University. Series arXiv: 1807.02797.

23. Rovinsky M. 0-cycles on Grassmannians as representations of projective groups / Cornell University. Series arXiv: 1811.08675.

24. Rumynin D. D-affinity and Rational Varieties / Cornell University. Series arXiv: 1811.08612.

25. Sechin P. Chern classes from Morava K-theories to p^n-typical oriented theories / Cornell University. Series arXiv: 1805.09050.

26. Sechin P., Semenov N. Applications of the Morava K-theory to algebraic groups / Cornell University. Series arXiv: 1805.09059.

27. Trepalin A., Loughran D. Inverse Galois problem for del Pezzo surfaces over finite fields / Cornell University. Series arXiv: 1811.06785.

28. Shoikhet B. On the twisted tensor product of small dg categories / Cornell University. Series arXiv: 1807.04305.

29. Verbitsky M., Vuletescu V., Ornea L. Flat affine subvarieties in Oeljeklaus-Toma manifolds / Cornell University. Series arXiv: 1712.07209.

30. Verbitsky M., Sampaio J. E., Birbrair L., Fernandes A. Multiplicity of singularities is not a bi-Lipschitz invariant / Cornell University. Series arXive 1801.06849.

31. Verbitsky M., Solomon J. P. Locality in the Fukaya category of a hyperkahler manifold / Cornell University. Series arXive: 1805.00102.

32. Verbitsky M., Mj M., Biswas I. Stable Higgs bundles over positive principal elliptic fibrations / Cornell University. Series arXive: 1806.03838.