Правительство Российской Федерации
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
«ВЫСШАЯ ШКОЛА ЭКОНОМИКИ»
(НИУ ВШЭ)

УДК 512.66
Рег. № НИОКТР АААА-А19-119061790095-0
Рег. № ИКРБС

УТВЕРЖДАЮ
Проректор НИУ ВШЭ
канд. экон. наук
_______________М.М. Юдкевич
«___» _________2019 г.

ОТЧЕТ
О НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОЙ РАБОТЕ

КЛАССИЧЕСКАЯ, КАТЕГОРНАЯ И НЕКОММУТАТИВНАЯ АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ, СПЕЦИАЛЬНЫЕ МНОГООБРАЗИЯ И ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ

(заключительный)

Руководители НИР:
зав. Лабораторией алгебраической геометрии
и ее приложений, д-р физ.-мат. наук, проф. РАН ____________Д.Б. Каледин

научн. руководитель Лаборатории алгебраической
геометрии и ее приложений, д-р физ.-мат. наук __________Ф.А. Богомолов

Москва 2019

СПИСОК ИСПОЛНИТЕЛЕЙ

Руководитель темы:

научный руководитель, д.ф.-м.н.	____________ подпись, дата	Ф.А. Богомолов (раздел 2)

Исполнители:

заведующий лабораторией, д.ф.-м.н., PhD	____________ подпись, дата	Д.Б. Каледин (введение, раздел 2)
заместитель заведующего лабораторией, PhD,	____________ подпись, дата	М.С. Вербицкий (раздел 5)
научный сотрудник, д.ф.-м.н.	____________ подпись, дата	Е.А. Америк (раздел 5)
научный сотрудник, д.матем.н., PhD	____________ подпись, дата	В.А. Кириченко (раздел 3)
научный сотрудник, д.ф.-м.н.	____________ подпись, дата	А.Г. Кузнецов (раздел 1)
научный сотрудник, д.ф.-м.н.	____________ подпись, дата	Ю.Г. Прохоров (раздел 4)
научный сотрудник, д.ф.-м.н., PhD	___________ подпись, дата	М.З. Ровинский (раздел 2)
научный сотрудник, д.ф.-м.н.	____________ подпись, дата	Е.Б. Фейгин (раздел 3)
научный сотрудник, д.ф.-м.н., PhD	____________ подпись, дата	И.А. Чельцов (раздел 4)
научный сотрудник, к.ф.-м.н.	____________ подпись, дата	А.А. Авилов (раздел 4)
научный сотрудник, к.ф.-м.н.	____________ подпись, дата	А.Д. Елагин (раздел 1)
научный сотрудник, к.ф.-м.н.	____________ подпись, дата	В.С. Жгун (раздел 5)
научный сотрудник, к.ф.-м.н.	____________ подпись, дата	И.Ю. Ждановский (раздел 1)

научный сотрудник, к.ф.-м.н.	____________ подпись, дата	Н.М. Курносов (раздел 5)
научный сотрудник, к.ф.-м.н.	____________ подпись, дата	С.М. Львовский (раздел 4)
научный сотрудник, к.ф.-м.н.	____________ подпись, дата	Н.С. Маркарян (раздел 2)
научный сотрудник, к.ф.-м.н.	____________ подпись, дата	И.В. Нетай (раздел 3)
научный сотрудник, к.ф.-м.н.	____________ подпись, дата	А.А. Рослый (раздел 1)
научный сотрудник, к.ф.-м.н.	____________ подпись, дата	С.Ю. Рыбаков (раздел 2)
научный сотрудник, к.ф.-м.н. PhD	____________ подпись, дата	Е.Ю. Смирнов (раздел 3)
научный сотрудник, PhD	____________ подпись, дата	Д.А. Сустретов (раздел 5)
научный сотрудник, к.ф.-м.н.	____________ подпись, дата	А.С. Трепалин (раздел 4)
научный сотрудник, к.ф.-м.н. PhD	____________ подпись, дата	М.В. Финкельберг (раздел 3)
научный сотрудник, к.ф.-м.н.	____________ подпись, дата	К.А. Шрамов (раздел 4)
стажер-исследователь, к.ф.-м.н.	____________ подпись, дата	А.Ю. Томберг (раздел 5)
стажер-исследователь	____________ подпись, дата	А.Э. Абашева (раздел 5)
стажер-исследователь	____________ подпись, дата	С.А. Абрамян (раздел 2)
стажер-исследователь	____________ подпись, дата	В.С. Гавран (раздел 1)
стажер-исследователь	____________ подпись, дата	Л.А. Гусева (раздел 1)
стажер-исследователь	____________ подпись, дата	Н.Ю. Клемятин (раздел 5)

стажер-исследователь	____________ подпись, дата	Г.М. Кондырев (раздел 2)
стажер-исследователь	____________ подпись, дата	А.А. Коновалов (раздел 2)
стажер-исследователь	____________ подпись, дата	В.В. Крылов (раздел 3)
стажер-исследователь	____________ подпись, дата	К.В. Логинов (раздел 4,7)
стажер-исследователь	____________ подпись, дата	П.С. Осипов (раздел 5)
стажер-исследователь	____________ подпись, дата	В.К. Рогов (раздел 5)
стажер-исследователь	____________ подпись, дата	Л.А. Суханов (раздел 2)
стажер-исследователь	____________ подпись, дата	Г.И. Терентюк (раздел 2)
стажер-исследователь	____________ подпись, дата	Д.Н. Терешкин (раздел 2)

РЕФЕРАТ

Отчет: 82 стр., 7 ч., 0 рис., 0 табл., 190 источников, 1 прил.

Исключительные наборы на грассманианах, диаграммы Юнга, полуортогональное разложение, производные категории, изотропный грассманиан, эквивариантные производные категории, некоммутативные деформации, триангулированные категории, квантовая теория информации, самодуальная теория Янга–Миллса, конструкция Атьи–Дринфельда–Хитчина–Манина, гипотеза о геометрическом сечении, башня Лежандра, группы Чжоу, инварианты Аксельрода–Зингера, n-алгебры Вейля, инварианты Громова–Виттена, теорема Гротендика–Римана–Роха, теорема Кемпбелла–Бейкера–Хаусдорфа, кристаллические когомологии, теорема Хохшильда–Костанта–Розенберга, циклическая категория, полубесконечное многообразие флагов, бесконечномерные алгебры Ли, подмногообразия Бора–Зоммерфельда, перекладывания отрезков, многообразия Фано, колчанные грассманианы типа Шуберта, полиномы Пуанкаре, характеры Демазюра, диски Зигеля, примитивные формы Сайто, гепнеровские особенности, кристаллы Кашивары, аффинный грассманиан, поверхность дель Пеццо, аффинная группа Каца–Муди, обобщенные модули Вейля, несимметрические многочлены Макдональда, исчисление Шуберта, симплектические многогранники Гельфанда–Цетлина, комплекс Кошуля, исчисление Шуберта, колчанные многообразия, многочлены Костки–Шоджи, группа Кремоны, гепнеровская особенность, K3 поверхность, пространство модулей, рациональные кривые, голоморфно симплектическое многообразие, кэлерово многообразие, гиперкэлерово многообразие, многообразия Фано, субриманова метрика, теорема Торелли, отображение периодов, специальное лагранжево подмногообразие, лагранжево слоение, гиперкомплексное многообразие, некэлерово многообразие, зеркальная симметрия, монодромия, биголоморфизм, эргодическое действие, метрики Кобаяши, гиперболические многообразия, теорема Торелли, пространство Тейхмюллера, некоммутативная геометрия, вектора Витта, аддитивные категории, циклические когомологии, K-теория Моравы, когомологии Хохшильда, геометрическое квантование

Объектами исследования являются

-геометрическая теория представлений,

-арифметическая алгебраическая геометрия,

-бесконечномерные алгебры Ли,

-гомологические и мотивные методы в некоммутативной геометрии,

-производные категории,

-классическая геометрия,

-гиперкэлеровы многообразия и специальные многообразия.

Цель проекта: исследования в области алгебраической геометрии и пограничных с ней областях- теория чисел, дифференциальная и комплексная геометрия, геометрический анализ.

Результаты носят теоретический характер и являются существенно новыми. Возможны приложения к теоретической физике, дифференциальной геометрии, теории чисел и задачам классификации комплексных многообразий.

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

За отчетный период (2019) Лаборатория алгебраической геометрии и ее приложений организовала 2 уже ставшие традиционными международные конференции “Бирациональная геометрия” (25.03.2019 – 29.03.2019 и 29.10.2019 – 31.10.2019). Основные научные организаторы конференции: научные сотрудники Лаборатории Юрий Прохоров и Константин Шрамов. Кроме того, была проведена международная конференция по гиперкэлеровой геометрии в период с 19.06.2019 по 23.06.2019 (организатор: научный сотрудник Лаборатории Никон Курносов).

Была проведена традиционная Девятая летняя математическая школа “Алгебра и геометрия” в г. Ярославле (24.07.2019 – 29.07.2019), в которой приняло участие более 80 человек. Во второй раз в этом году одновременно со школой была проведена Международная конференция “Алгебра и геометрия” (30.07.2019 – 31.07.2019).

Лаборатория организовала визиты 7 ученых из мировых научных центров, которые провели совместные научные исследования с сотрудниками, консультации стажеров Лаборатории и студентов факультета математики, а также сделали доклады на семинарах Лаборатории и факультета.

По результатам исследований в 2019 году сотрудниками лаборатории было опубликовано 31 работа в журналах, индексируемых WoS/Scopus, из них в журналах квартиля Q1/Q2 – 28.

Сотрудники лаборатории принимали участие в международных конференциях, семинарах, воркшопах, где выступили более чем с 50 докладами, в которых представили результаты своих исследований в лаборатории.

В течение 2019 года сотрудники лаборатории защитили 2 диссертации:

- Валентина Кириченко стала доктором математических наук НИУ ВШЭ. Тема диссертации: “Геометрия сферических многообразий и многогранники Ньютона-Окунькова”,

- Артур Томберг стал кандидатом математических наук НИУ ВШИ. Тема диссертации: “Геометрия твисторных пространств гиперкомплексных многообразий”.

4 стажера-исследователя приняли участие в программах повышения квалификации.

3 стажера (Семен Абрамян, Ляля Гусева, Василий Крылов) были участниками программы кадровый резерв в категории “Новые преподаватели”.

Анна Абашева и Никита Клемятин были привлечены к исследованиям в рамках гранта РНФ.

Научная деятельность сотрудников лаборатории была отмечена различными премиями и наградами:

- Юрий Прохоров был избран членом-корреспондентом РАН,
- Никита Клемятин и Константин Логинов стали победителями конкурса Мебиуса для студентов и аспирантов (1 и 2 премия), кроме того, лауреатом конкурса стал Павел Осипов,
- Василий Крылов после окончания магистратуры поступил в аспирантуру MIT (США) и аспирантуру НИУ ВШЭ,

Сотрудники лаборатории продолжали вести активную педагогическую работу, ими были прочитаны курсы на факультете математики НИУ ВШЭ, в Независимом Московском Университете, НОЦ МИАН, программе Math in Moscow, на школах для студентов, аспирантов и молодых ученых, проводимых как лабораторией, так и крупными международными научными и учебными центрами. Часть курсов была прочитана впервые. По итогам студенческого голосования научные сотрудники Лаборатории, доценты факультета математики Валентина Кириченко и Евгений Смирнов был выбраны “Лучшими преподавателями НИУ ВШЭ”. В рамках программы факультета математики по привлечению лучших аспирантов факультета к преподаванию, Павел Осипов ведет семинары по Алгебре и Дискретной математике на 1 курсе бакалавриата, а также практические занятия на курсе Математический практикум.

На протяжении года шел студенческий семинар “Геометрические структуры на многообразиях” (3-4 часа в неделю), где выступали стажеры лаборатории и студенты факультета математики. Продолжал свою работу Еженедельный семинар Лаборатории алгебраической геометрии (почти 50 двухчасовых докладов в 2019 году), среди докладчиков – сотрудники Лаборатории и факультета, ассоциированные члены научного коллектива Лаборатории, ученые из российских и мировых научных центров.

Сотрудниками лаборатории были получены значительные результаты по основным темам, заявленным на 2019 год:

- Производные категории,
- Гомологические и мотивные методы в некоммутативной геометрии,
- Геометрическая теория представлений,
- Классическая геометрия,
- Специальные многообразия.

Результаты работ по этим темам составляют содержание настоящего отчета.

1 Производные категории

1.1 Гомологическая проективная двойственность для квадрик

Гомологическая проективная двойственность является мощным инструментом описания прозводных категорий когерентных пучков на алгебраических многообразиях. Грубо говоря, каждому гладкому проективному многообразию (точнее говоря морфизму из гладкого многообразия в проективное пространство) $X \to \mathbb{P}(V)$ и полуортогональному разложению специального типа (лефшецевому разложению) производной категории $\mathrm{D}(X)$ она сопоставляет новое (вообще говоря, некоммутативное) многообразие с морфизмом в двойственное проективное пространство $Y \to \mathbb{P}(V^\vee)$ и с лефшецевым разложением производной категории, которое контролирует структуру производных категорий линейных сечений $X \times_{\mathbb{P}(V)} \mathbb{P}(L)$ исходного многообразия.

Вычисление гомологически проективно двойственного многобразия Y является сложной задачей, на данный момент решенной в относительно небольшом числе случаев. С другой стороны, в недавней работе [19] было показано, что гомологическая проективная двойственность хорошо согласована с (подходящим образом категорифицированной) операцией джойна: если $X_1 \to \mathbb{P}(V_1)$ и $X_2 \to \mathbb{P}(V_2)$ — два гладких многообразия, снабженных лефшецевыми разложениями, а $Y_1 \to \mathbb{P}(V_1^\vee)$ и $Y_2 \to \mathbb{P}(V_2^\vee)$ — их гомологически проективно двойственные, то категорный джойн

$$\mathscr{J}(X_1, X_2) \to \mathbb{P}(V_1 \oplus V_2)$$

гомологически проективно двойственен категорному джойну

$$\mathscr{J}(Y_1, Y_2) \to \mathbb{P}(V_1^\vee \oplus V_2^\vee).$$

Важным следствием этого наблюдения явилась возможность контролировать производные категории расслоенных произведений $X_1 \times_{\mathbb{P}(V)} X_2$ в терминах $Y_1 \times_{\mathbb{P}(V^\vee)} Y_2$ (в случае, когда исходные многообразия X_1 и X_2 отображаются в одно и то же проективное пространство $\mathbb{P}(V)$).

Поскольку многие важные и интересные многообразия являются пересечениями квадрик, задача об описании гомологически проективно двойственного многообразия для квадрики становится весьма актуальной. Эта задача была полностью решена в совместной работе [20] сотрудника лаборатории А. Кузнецова совместно с А. Перри.

Гомологическая проективная двойственность для квадрик, естественно, тесно связана с классической проективной двойственностью, которая гладкой квадрике $Q \subset \mathbb{P}(V)$ с уравнением

$$q \in \mathrm{Sym}^2 V^\vee \subset \mathrm{Hom}(V, V^\vee)$$

сопоставляет гладкую квадрику $Q^\vee \subset \mathbb{P}(V^\vee)$ с уравнением

$$q^{-1} \in \mathrm{Sym}^2 V \subset \mathrm{Hom}(V^\vee, V).$$

Для описания гомологической проективной двойственность для квадрик оказывается необходимым помимо квадратичных гиперповерхностей также рассмотреть двулистные накрытия проективного пространства разветвленные в квадриках — как абстрактные многообразия они также являются квадриками. Кроме того, важно различать случаи четномерных и нечетномерных квадрик.

Оказывается, гомологическая проективная двойственность делает следующее:

- если $Q \subset \mathbb{P}(V)$ — четномерная квадратичная гиперповерхность, то ее гомологическая проективно двойственным многообразием является классически проективно двойственная квадрика $Q^\vee \subset \mathbb{P}(V^\vee)$;
- если $Q \subset \mathbb{P}(V)$ — нечетномерная квадратичная гиперповерхность, то ее гомологическая проективно двойственным многообразием является двулистное накрытие над $\mathbb{P}(V^\vee)$, разветвленное над классически проективно двойственной квадрикой $Q^\vee \subset \mathbb{P}(V^\vee)$;
- если $X \to \mathbb{P}(V)$ — четномерное двулистное накрытие, разветвленное в квадратичной гиперповерхности Q, то ее гомологическая проективно двойственным многообразием является классически проективно двойственная квадрика $Q^\vee \subset \mathbb{P}(V^\vee)$;
- если $X \to \mathbb{P}(V)$ — нечетномерное двулистное накрытие, разветвленное в квадратичной гиперповерхности Q, то ее гомологическая проективно двойственным многообразием является двулистное накрытие над $\mathbb{P}(V^\vee)$, разветвленное над классически проективно двойственной квадрикой $Q^\vee \subset \mathbb{P}(V^\vee)$.

Тем самым, операция гомологической проективной двойственности является комбинацией операций классической проективной двойственности и операции перехода от гиперповерхности к двулистному накрытию и от двулистного накрытия к его дивизору ветвления.

1.2 Гладкость для производных категорий модулей над алгебрами

В диффирениальной геометрии любое многообразие по определению гладкое. Напротив, в алгебраической геометрии неособость многообразия — содержательное свойство, которое может быть сформулированно на алгебраическом языке разными способами. Так, многообразие (или схема) называется регулярным, если все его локальные кольца регулярны. Есть также понятие гладкости — схема X над полем k называется гладкой, если пучок относительных дифференциалов X над k локально свободен и его ранг равен размерности многообразия. Оба эти понятия по существу локальны, они равносильны для хороших (т.е. отделимых и конечного типа) схем над совершенным полем. Однако для использования в некоммутативной геометрии они не подходят, так как основаны на свойствах коммутативных колец.

Гладкость схемы имеет гомологическую интерпретацию. А именно, отделимая схема конечного типа над полем гладка тогда и только тогда, когда структурный пучок диагонали $\mathscr{O}_X$ является совершенным комплексом на $X \times_k X$. Такое понятие гладкости допускает обобщение на некоммутативные объекты. А именно, произвольная (не обязательно коммутативная) алгебра A над полем k называется гладкой, если A есть совершенный $A^{op} \otimes_k A$-модуль. Аналогично определяется гладкость и для дифференциально-градуированных (dg) алгебр и категорий.

Наконец, можно говорить о гладкости триангулированных категорий с dg оснащением. А именно, триангулированная категория, допускаюшая dg оснащение A, называется гладкой над полем k, если A — гладкая dg категория над k. В частности, для dg алгебры A триангулированная категория $\mathrm{Perf}(A)$ гладкая тогда и только тогда, когда A — гладкая dg алгебра.

Гладкие триангулированные категории обладают множеством хороших свойств. Например, в любой из них есть сильный генератор. Как следствие, на гладкой Ext-конечной над полем k карубиевой триангулированной категории T любой когомологический функтор $T \to \mathrm{vect}(k)$ конечного типа представим, см. [4].

Как легко следует из определений, для k-алгебры A категория $\mathrm{Perf}(A)$ гладкая над k тогда и только тогда, когда алгебра A гладкая над k. Аналогично, гладкость производных категорий геометрической природы должна соответствовать гладкости соответствующих им геометрических объектов. В случае многообразий/схем такое соответствие имеется для категории Perf. А именно, для квазипроективной схемы X над полем k категория совершенных комплексов $\mathrm{Perf}(X)$ гладкая над k тогда и только когда, когда схема X гладкая над k, см. [22].

В то же время, в [22] было показано, что ограниченная категория когерентных пучков $D^b(coh(X))$ на схеме X гладкость схемы X не отражает — она гладкая почти всегда, например, для любой квазипроективной схемы над совершенным полем.

Естественно ожидать, что аналогичный факт должен иметь место и для ограниченных производных категорий конечно-порождённых модулей над алгебрами. А именно, такие категории должны быть гладкими при довольно общих предположениях на алгебру, без требования какой-либо регулярности/гладкости/конечной глобальной размерности.

В работе [9] сотрудником лаборатории алгебраической геометрии А. Елагиным совместно с В. Лунцем и О. Шнурером было показано, что такая гладкость действительно имеет место. А именно, категория $D^b(mod\text{-}A)$ является гладкой над полем k в предположении, что A — конечномерная над полем k алгебра, для которой фактор $A/rad(A)$ является сепарабельной алгеброй над k. В частности, A может быть любой конечномерной над совершенным полем алгеброй. Также показано, что категория $D^b(mod\text{-}A)$ гладкая над совершенным полем k для любой алгебры A, которая конечно порождена как модуль над своим центром $Z(A)$, который является конечномерной k-алгеброй. Оба эти результата являются частными случаями общего утверждения, дающего достаточные условия для гладкости триангулированной подкатегории в неограниченной производной категории $D(A)$, где A — некоторая k-алгебра.

1.3 Склейки и гомотопы

В 1982-ом году в статье Бейлинсона, Бернштейна и Делиня [2] при изучении превратных пучков, было введено понятие “склейки” триангулированных категорий. В 2014-ом году Псарудакис в работе [26] ввел понятие “склейки” (recollement) абелевых категорий. А именно, “склейка” — это тройка абелевых категорий $(\mathscr{A},\mathscr{B},\mathscr{C})$ и набор функторов:

$$i\colon \mathscr{A}\to\mathscr{B}, \qquad e\colon \mathscr{B}\to\mathscr{C}$$

и сопряженных к ним

$$q\colon \mathscr{B}\to\mathscr{A}, \quad p\colon \mathscr{B}\to\mathscr{A}, \quad l\colon \mathscr{C}\to\mathscr{B}, \quad r\colon \mathscr{C}\to\mathscr{B},$$

удовлетворяющие следующим условиям: функторы i,l,r — строго точные и образ i совпадает с ядром e. В частности, при достаточно естественных условиях на абелевы категории, соответствующие ограниченные производные категории тоже будут удовлетворять условиям “склейки” триангулированных категорий. Это позволило существенно упростить проверку условий “склейки” и получить оценки гомологических размерностей категории $\mathscr{B}$ через $\mathscr{A}$ и $\mathscr{C}$. Фактически, “склейка” абелевых категорий является обобщением следующей известной ситуации: пусть у нас есть алгебра R и t — идемпотент в R. Тогда

$$\mathscr{A}=(\mathrm{R/RtR})\text{-}\mathrm{Mod}, \qquad \mathscr{B}=\mathrm{R}\text{-}\mathrm{Mod} \quad \text{и} \quad \mathscr{C}=\mathrm{tRt}\text{-}\mathrm{Mod}.$$

Подобная ситуация встречается и при изучении гомотопов ассоциативных алгебр. Напомним понятие гомотопа: пусть R — ассоциативная алгебра с единицей и $x\in R$ - фиксированный элемент. Тогда гомотоп алгебры R с помощью элемента x — есть ассоциативная алгебра R_x. R_x как пространство — изоморфно R, но с новой операцией умножения:

$$r_1 *_x r_2 = r_1 x r_2.$$

Получившаяся алгебра вообще говоря не является алгеброй с единицей. Поэтому рассматривают алгебру $\widehat{R}_x$ — формально добавляют единицу к алгебре R_x. Естественным образом строятся 2 гомоморфизма

$$\psi_1,\psi_2\colon \widehat{R}_x\to R,$$

с помощью которых получается ситуация “склейки”.

В работе [5] было показано, что для ассоциативной k-алгебры R категория модулей гомотопа $\mathrm{\widehat{R}_x}$-Mod является “склейкой” категорий R-Mod и k-Mod в случае “правильного” выбора элемента x. Условия “правильного” выбора следующие: $RxR = R$ и R как левый и правый $\widehat{R}_x$-модуль является проективным. Такой выбор элемента называется хорошо-темперированным.

В этом случае есть естественные оценки на глобальную гомологическую размерность $\widehat{\mathrm{R}}_{\mathrm{x}}$-Mod через глобальную размерность $\mathrm{R}-\mathrm{Mod}$. В случае конечномерной алгебры R автором показано, что достаточно только условия $RxR = R$ и кроме того показывается, что если в качестве x выбрать не хорошо-темперированный элемент, то гомологическая размерность $\widehat{R}_x$ — бесконечна.

В случае коммутативных алгебр гомотопы возникают при изучении бирациональных отображений. Рассмотрены примеры гомотопов кривых, а также с помощью гомотопов построен контрпример к лемме Ричардсона в случае ненетерового кольца. В данный момент эта работа готовится к печати.

1.4 Производные категории и квантовая теория информации

Изучались также приложения алгебраической геометрии и производных категорий к различным вопросам квантовой теории информации и смежным вопросам. Напомним, что два ортонормированных базиса $\{e_i\}$ и $\{f_j\}$ в эрмитовом пространстве $\mathbb{C}^n$ — взаимнонесмешанные базисы, если $(e_i, f_j) = \frac{1}{n}$. Несложно показать, что существуют не более чем $n+1$ попарно взаимно-несмещенных базисов в $\mathbb{C}^n$. Давно сформулирована гипотеза о том, что в $\mathbb{C}^n$ существуют $n+1$ этих базисов тогда и только тогда, когда $n = p^k$ для некоторого простого p. Эта проблема пока далека от решения — есть несколько частичных решений в малых размерностях. Сложность решения заключается в решении сложной сильно нелинейной системы алгебраических уравнений.

Отметим, что естественной алгебраической формулировкой задачи является изучение определенного вида представлений редуцированных алгебр Темперли–Либа полного двудольного (в случае изучения пар базисов) и $n+1$-дольного (в случае изучения $n+1$ базисов) графа. Вообще, редуцированная алгебра Темперли–Либа строится по графу $\boldsymbol{\Gamma}$ без кратных ребер и петель следующим образом: порождающие этой алгебры — проекторы x_v, индексируемые вершинами графа. Для этих порождающих выполнены соотношения:

$$x_v x_w = x_w x_v = 0,$$

если нет ребра между вершинами v, w. Если есть ребро, то

$$x_v x_w x_v = r x_v, x_w x_v x_w = r x_w.$$

Для соответствия взаимно-несмещенным базисам нужно положить $r = \frac{1}{n}$.

Было показано, что редуцированная алгебра Темперли–Либа является гомотопом алгебры путей графа, что стимулировало исследование гомологической теории гомотопов.

В случае $n=7$ было построено одномерное семейство пар взаимно-несмещенных базисов. Для более концептуального построения этого семейства в работе [18] была введена алгебра A, порожденная двумя парами ортогональных проекторов: p_1, p_2 и q_1, q_2, удовлетворяющие соотношению:

$$[p_1, q_1] = [p_2, q_2]$$

(это соотношение было найдено Нишоарой в работе [24]). Было показано, что эта алгебра является бесконечномерной с большим центром. Причем неприводимые представления имеют размерность не более чем 2. В частности, алгебра A имеет большой центр, спектр которого — три пересекающиеся в одной точке прямые.

Дальнейшее изучение этих алгебр и алгебр Темперли–Либа позволило построить уже известное 1-мерное семейство средствами теории представлений и алгебраической геометрии.

Как естественное обобщение алгебры A изучалось также семейство алгебр A_c, $c \in \mathbb{P}^3$ — алгебры порожденные двумя парами ортогональных проекторов p_1, p_2 и q_1, q_2, удовлетворяющее соотношению:

$$\sum_{i,j=1}^{2} c_{ij}[p_i, q_j] = 0.$$

Было показано, что для общей точки $c \in \mathbb{P}^3$ алгебра A_c изоморфна

$$M_3(\mathbb{C}) \oplus \mathbb{C}^{\oplus 9}.$$

Данная работа сдана в печать и ожидает рецензирование.

1.5 Производная кагегория грассманиана Кэли

С простой алгебраической группой диаграммой Дынкина G_2 связано множество интересных алгебраических многообразий. Одним из таких многообразий является так называемый грассманиан Кэли M. Это многообразие имеет несколько описаний:

- Во-первых, оно параметризует трехмерные подпространства в семимерном пространстве, аннигилируемые фиксированной общей 3-формой;
- Во-вторых, оно параметризует подалгебры размерности 4 в комплексных октонионах;
- В-третьих, оно является схемой Гильберта коник на присоединенном грассманиане группы G_2.

Грассманиан Кэли интересен сам по себе, но кроме этого он также является важным промежуточным этапом для понимания геометрии четырехмерных многообразий Кюхле типа (c5), которые, как ожидается, дадут новый пример некоммутативных поверхностей типа K3.

Стажером лаборатории Л. Гусевой был построен исключительный набор длины 15 (то есть длины, равной рангу группы Гротендика) в ограниченной производной категории когерентных пучков $\mathrm{D}(M)$ грассманиана Кэли M. Этот набор выглядит следующим образом.

Пусть $\mathscr{U}$ — ограничение на M тавтологического расслоения грассманиана $\mathrm{Gr}(3,7)$ (относительно вложения, сооответствующего первому из приведенных описаний многообразия M). Тогда исключительный набор состоит из следующих объектов:

$$\begin{aligned}
&\mathscr{O}, \quad \mathscr{U}^\vee, \quad \Lambda^2\mathscr{U}^\vee, \quad (\Lambda^2\mathscr{U}^\perp/\Lambda^2\mathscr{U})^\vee, \quad \Sigma^{2,1}\mathscr{U}^\vee,\\
&\mathscr{O}(1), \mathscr{U}^\vee(1), \Lambda^2\mathscr{U}^\vee(1), (\Lambda^2\mathscr{U}^\perp/\Lambda^2\mathscr{U})^\vee(1),\\
&\mathscr{O}(2), \mathscr{U}^\vee(2), \Lambda^2\mathscr{U}^\vee(2),\\
&\mathscr{O}(3), \mathscr{U}^\vee(3), \Lambda^2\mathscr{U}^\vee(3).
\end{aligned}$$

В частности, он является лефшецевым набором длины 4 с начальным блоком длины 5.

Ожидается, что построенный набор является полным, то есть порождает производную категорию $\mathrm{D}(M)$ (фактически, это означает, что любой элемент из $\mathrm{D}(M)$ допускает фильтрацию, присоединенные факторы которой являются прямыми суммами сдвигов объектов набора).

В доказательстве полноты набора удалось достичь значительного прогресса, однако она еще не закончена. Помимо доказательства полноты, интересным вопросом является вычисление вычетной категории для построенного лефшецева набора; над этим вопросом тоже ведется работа.

Следует отметить, что существование полного исключительного набора на ограниченной производной категории когерентных пучков грассманиана Кэли хорошо согласуется с гипотезой Дубровина, предсказывающей существование такого набора на многообразиях Фано, алгебра квантовых когомологий которых полупроста в общей точке. Отметим, что алгебра квантовых когомологий грассманиана Кэли вычислена в недавней работе Бенедетти и Манивеля [3].

По результатам работы готовится публикация.

1.6 Пуассоновы структуры, индуцированные из относительных структур Калаби-Яу

Для гладкой дифференциально-градуированной категории $\mathscr{C}$ над полем k обозначим за $\mathrm{Id}^!_{\mathscr{C}}$ обратный дуализирующий бимодуль над $\mathscr{C}$. Напомним, что структурой Калаби–Яу размерности d на $\mathscr{C}$ является отображение

$$\theta\colon k[d] \to HC^-(\mathscr{C})$$

такое, что соответствующее отображение эндофункторов $\mathrm{Id}^!_{\mathscr{C}}[d] \to \mathrm{Id}_{\mathscr{C}}$ является изоморфизмом. В работе [7, Definition 4.11] это понятие обобщается на относительный случай, а именно, определяется относительная стуктура Калаби–Яу размерности d на функторе $\mathscr{C} \to \mathscr{D}$ между гладкими дифференциально-градуированными категориями. Базовым примером в алгебраической геометрии здесь является вложение антиканонического дивизора в многообразие Фано размерности d: на функторе прямого образа, индуцированного этим вложением, существует структура Калаби-Яу размерности d.

В работе [8] понятие относительных структур Калаби–Яу применяется для построения (сдвинутых) скобок Пуассона на пространствах модулей. А именно, показывается, что если на гладкой дифференциально-градуированной категории $\mathscr{C}$ существует структура Калаби–Яу θ размерности d и на функторе $\mathscr{C} \to \mathscr{D}$ существует относительная структура Калаби–Яу размерности $d+1$, согласованная с θ, то на пространстве модулей объектов $\mathscr{M}_{\mathscr{D}}$ существует $(1-d)$-сдвинутая скобка Пуассона.

В качестве примера можно рассмотреть вложение гладкой кубики в $\mathbb{P}^2$. Тогда соответствующая 0-сдвинутая структура Пуассона восстанавливает скобку, построенную в работе [6] на пространстве стабильных пучков на проективной плоскости. Таким образом, естественно ожидать, что многие структуры Пуассона на пространствах модулей получаются из относительных структур Калаби–Яу.

Отметим, что в работе Ж.Хуа и А.Полищука [14] был рассмотрен несколько иной подход. А именно, для многообразия Калаби–Яу X размерности d доказывается существование $(1-d)$-сдвинутой структуры Пуассона на стэке $\mathbb{R}\underline{Cplx}(X)$ ограниченных комплексов векторных расслоений с изоморфизмами, заданными цепными изоморфизмами (а не квазиизоморфизмами). В случае, когда $\dim X = 1$, при подходящем выборе комплексов восстанавливается скобка Боттачина [6] и некоторые структуры Фейгина–Одесского, ранее изучавшиеся в работах [10] и [25] (в последней использовался язык стабильных троек расслоений на эллиптичекой кривой). В данной ситуации возникает естественный вопрос про изучение связей между конструкциями Хуа–Полищука и Брава–Диккергоффа.

В совместном проекте с К.Бравом техника относительных структур Калаби–Яу применяется в следующей ситуации. Пусть Q это обобщенный колчан Кронекера с $n > 2$ стрелками

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r, bend left] \arrow[r, bend right] \arrow[r, phantom, "\vdots"] & 2 \end{tikzcd}$$

и C это эллиптическая кривая. Рассмотрим на кривой C стабильное расслоение $\mathscr{E}$ ранга $n+1$ и степени n и рассмотрим функтор

$$F \colon D(kQ) \to D(C),$$

заданный на проективных объектах как $P_1 \mapsto \mathscr{E}$ и $P_2 \mapsto \mathscr{O}_C$. Доказывается, что тогда на правом сопряженном функторе к F существует двумерная структура Калаби–Яу.

В качестве примера, если специализироваться на стабильные представления колчана Q с размерностным вектором $(1,1)$, получается проективное пространство с индуцированной на нем скобкой Пуассона, у которой симплектические листы в точности такие же, как и у скобки на пространстве стабильных троек $\mathscr{O}_C \longrightarrow V$, где V это расслоение ранга 2 и степени n (см. [25, Section 3] и [14, Section 5]).

В общей ситуации ожидается, что классификация функторов

$$D(C) \to D(kQ),$$

на которых существуют двумерные структуры Калаби–Яу, даст примеры множества других пуассоновых структур, изучавшихся в работе [10].

1.7 Четырехмерная конформная теория и твисторы

1.7.1 Напоминание о твисторном соответствии

Твисторное преобразование позволяет перевести конформно-инвариантные уравнения четырехмерной теории поля в задачи комплексной геометрии на так называемом твисторном многообразии. В случае, когда теория поля рассматривается на конформно-плоском пространстве-времени, твисторное многообразие — это трехмерное комплексное проективное пространство. Особенно интересны случаи нелинейных уравнений, то есть взаимодействующих теорий поля. Самый важный случай — уравнения самодуальности в теории Янга–Миллса.

Чаще всего речь идёт о взаимно однозначном соответствии между пространством решений уравнений поля и пространством модулей некоторых геометрических данных на твисторном многообразии. В случае уравнений самодуальности последнее — это пространство модулей голоморфных расслоений на твисторном многообразии (снабженных некоторыми вещественными структурами). Имеются, однако, случаи, когда речь идет не только о пространстве решений уравнений, но и о соответствии между лагранжевыми теориями поля на пространстве-времени и на твисторном пространстве. Один такой случай и составляет предмет нашего изучения (см. об этом ниже).

1.7.2 Твисторное соответствие применительно к квантовой теории. Постановка задачи

Интересен вопрос о возможности подобного соответствия и в квантовой теории. В литературе имеются некоторые примеры использования твисторного преобразования в квантовой теории поля, например, [29, 27]. Надо сразу заметить, что, как и в случае классической теории поля, в квантовой теории твисторное соответствие ожидается в случае, когда имеется конформная симметрия. Если классическая теория поля конформно инвариантна, то, в общем случае, эта симметрия нарушается при переходе к квантовой теории. Конформные свойства сохраняются в тех квантовых теориях, в которых происходит удачное сокращение ультрафиолетовых расходимостей. Это, как правило, суперсимметричные теории. Имеется, однако, пример несуперсимметричной квантовой теории, у которой можно предполагать сохранение конформной симметрии на квантовом уровне. Это так называемая самодуальная теория Янга–Миллса, описываемая функционалом действия следующего вида:

$$S = 2i \int tr P \wedge F - \frac{\tau}{8\pi^2} \int tr F \wedge F .$$

Здесь $F = dA + \frac{1}{2}[A \wedge A]$ — кривизна калибровочного поля A, а P — поле 2-форм со значениями в алгебре Ли калибровочной группы, удовлетворяющее условию антисамодуальности: $P = -*P$. Ранее мы показали [21], что несмотря на наличие ультрафиолетовых расходимостей можно ожидать, что эта теория обладает хорошими свойствами относительно конформной группы преобразований. Для этого имеются следующие аргументы:

- Классическая теория конформно инвариантна (см. лагранжиан в работе [21]);
- Имеется лагранжевая теория на твисторном пространстве, такая что ее классические решения находятся во взаимно однозначном соответствии с решениями самодуальной теории Янга–Миллса. Такая твисторная теория поля описана ниже;
- Как показано в [21], наличие ультрафиолетовых расходимостей не создает бегущую константу связи, хотя и приводит к перенормировке полей и топологической “константы связи” τ;
- Имеется твисторное соответствие между пропагатором в пространственно-временной формулировке и пропагатором в твисторной формулировке самодуальной теории Янга–Миллса;
- Формальные амплитуды рассеяния в этой теории инвариантны относительно конформных преобразований;

В последнем пункте говорится о формальных объектах, которые получаются из n-точечных функций Грина обычной ампутацией внешних концов. Надо заметить, что рассматриваемая теория, по-видимому, не имеет физического смысла и пока представляет чисто математический интерес. Формальные амплитуды в самодуальной теории совпадают с амплитудами рассеяния глюонов одинаковой спиральности в стандартной теории Янга–Миллса, для которых имеется явная формула [23].

На классическом уровне рассматриваемая самодуальная теория эквивалентна голоморфной теории типа Черна–Саймонса [28] в твисторном пространстве. Точнее говоря, функционал действия имеет вид

$$S = \int_{\mathbb{C}P^3} tr B \wedge (dA + A \wedge A) ,$$

где A — (0,1)-форма со сначениями в алгебре Ли калибровочной группы (это $\bar{\partial}$-связность в вектороном расслоении), а B — (0,1)-форма с коэффициентами в $\mathscr{O}(-4)\otimes$ алгебра Ли (можно сказать (3,1)-форма на $\mathbb{C}P^3$ со сначениями в алгебре Ли). Слова "со значениями в алгебре Ли калибровочной группы", как всегда, следует понимать как "принимает значения в эндоморфизмах расслоения", структурная группа которого и есть калибровочная группа. В квантовом случае надо в первую очередь найти правильные наблюдаемые. Согласно общей идеологии ожидается некоторое соответствие между конформными корреляционными функциями четырехмерной квантовой теории и определенными геометрическими объектами в твисторном пространстве. Последние будут иметь смысл, обобщающий понятие голоморфного индекса зацепления [1, 15, 16, 17, 12]. Четырехмерная квантовая теория должна подсказать правильное определение таких "голоморфных инвариантов узлов".

Конформную инвариантность можно также проверить при рассмотрении квантового эффективного действия. Под эффективным действием здесь понимается производящая функция для одночастично неприводимых диаграмм Фейнмана. В принципе, простота теории возмущений в нашем случае позволяет надеяться, что эффективное действие можно полностью вычислить. Такой результат дал бы, в частности, описание якобиана замены полевых переменных, рассмотренной в работе [13]. Простота этой модели определяется конечностью ряда теории возмущений: в ней отличны от нуля только древесные и однопетлевые вклады. Тем не менее, мы пока в состоянии выписать явный вид только 2- и 3-точечных функций в эффективном действии.

1.7.3 Конформные свойства эффективного действия

Вычисление 2- и 3-точечных функций в эффективном действии представляет собой простые, хотя и громоздкие, стандартные действия, описанные в литературе по квантовой теории поля. Двухточечная функция, рассматриваемая для разделенных точек, то есть на $\mathbb{R}^4\times\mathbb{R}^4\setminus\{\text{diagonal}\}$, дается выражением

$$\Gamma_{\mu\nu}(x,y)=\frac{1}{(x-y)^4}\frac{\partial}{\partial x^\mu}\frac{\partial}{\partial y^\nu}\log(x-y)^4\,.$$

Трехточечная функция дается линейной комбинацией следующих выражений:

$$C_{\mu\nu\rho}=\frac{1}{(x-y)^4}\frac{\partial}{\partial x^\mu}\frac{\partial}{\partial z_\alpha}\log(x-z)^2\frac{\partial}{\partial y^\nu}\frac{\partial}{\partial z^\alpha}\log(y-z)^2\frac{\partial}{\partial z^\rho}\log\frac{(x-z)^2}{(y-z)^2}\,,$$
$$D_{\mu\nu\rho}=\frac{1}{(x-y)^2(y-z)^2(z-x)^2}\frac{\partial}{\partial x^\mu}\frac{\partial}{\partial y^\nu}\log(x-y)^2\frac{\partial}{\partial z^\rho}\log\frac{(x-z)^2}{(y-z)^2}\,.$$

Нетрудно убедиться, что такие тензоры, рассматриваемые вне диагоналей или, как говорят, без учета контактных членов, являются конформно инвариантными. Эти утверждения можно найти, например, в работе [11].

Приведенные выше выражения нуждаются в регуляризации, что представляет собой проявление перенормировок, о которых говорилось выше. Мы используем подход, предложенный в работе [11]. Процедура регуляризации приводит к модификации, нарушающей конформную инвариантность. Это нарушение, однако, заключено только в так называемых контактных членах (обобщенные функции с носителем на диагонали). Тем не менее, оказывается, что закон преобразования полей относительно конформной группы можно так модифицировать, что эффективное действие будет инвариантно относительно новых преобразований уже с учетом контактных членов. Такой "аномальный" закон преобразования полей считывается с вида перенормировок полей и оказывается нелинейным преобразованием на пространстве полей. Прямолинейная проверка, которую мы пока смогли сделать в 2- и 3-точечных членах, технически довольно громоздкое вычисление.

Список литературы

[1] M. F. Atiyah. Green's Functions for Self-Dual Four-Manifolds. Adv. Math., Suppl. Stud. 7A (1981) 129–158.

[2] A. Beilinson, J. Bernstein and P. Deligne, Faisceaux Pervers, Asterisque 100, 1982.

[3] V. Benedetti, L. Manivel, The small quantum cohomology of the Cayley Grassmannian, `math.arXiv:1907.07511`

[4] A. Bondal, M. Van den Bergh, Generators and representability of functors in commutative and noncommutative geometry, Mosc. Math. J., 3 (2003), 1–36.

[5] Bondal A., Zhdanovskiy I., Representation theory for system of projectors and discrete Laplace operator, Preprint of IPMU, IPMU13-0001.

[6] F. Bottacin, Poisson structures on moduli spaces of sheaves over Poisson surfaces, Invent. Math., 1995, V. 121, Iss. 1, 421–436.

[7] C.Brav, T.Dyckerhoff, Relative Calabi–Yau structures, Compos. Math., 155 (2019), 372–412.

[8] C.Brav, T.Dyckerhoff, Relative Calabi–Yau structures II: Shifted Lagrangians in the moduli of objects, `arXiv:1812.11913`.

[9] Alexey Elagin, Valery A. Lunts, and Olaf M. Schnuerer, Smoothness of derived categories of algebras, `math.arxiv:1810.07626`.

[10] B.L. Feigin, A.V. Odesskii, Vector bundles on an elliptic curve and Sklyanin algebras, in: B. Feigin,et al. (Eds.), Topics in Quantum Groups and Finite-Type Invariants, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1998, pp. 65?84.

[11] Daniel Z. Freedman, Gianluca Grignani, Kenneth Johnson, and Nuria Rius. Conformal symmetry and differential regularization of the three gluon vertex. Annals Phys. 218 (1992) 75–120

[12] S. Gorchinskiy, A. Rosly. A polar complex for locally free sheaves. Int. Math. Res. Notices 2015 (2015) 2784–2829.

[13] A. Gorsky, A. Rosly. From Yang–Mills Lagrangian to MHV Diagrams. JHEP 01, 101 (2006).

[14] Z. Hua, A. Polishchuk, Shifted Poisson structures and moduli spaces of complexes. Advances in Mathematics, 338 (2018), 991–1037.

[15] B. Khesin and A. Rosly. Polar Linkings, Intersections, and Weil Pairing. Proc. Roy. Soc. Lond. A461 (2005) 3505–3524.

[16] B. Khesin and A. Rosly. Polar homology. Canad. J. Math. 55 (2003) 1100–1120.

[17] B. Khesin, A. Rosly, R. Thomas. A Polar de Rham Theorem. Topology 43 (2004) 1231–1246.

[18] Kocherova A., Zhdanovskiy I. Algebras of Projectors and Mutually Unbiased Bases in Dimension 7, J. Math. Sci. (2019) 241: 125. `https://doi.org/10.1007/s10958-019-04413-8`

[19] A. Kuznetsov, A. Perry. Categorical joins, `math.AG/1804.00144`.

[20] A. Kuznetsov, A. Perry. Homological projective duality for quadrics, `math.AG/math.AG/1902.09832`.

[21] A. Losev, I. Polyubin, A. Rosly. Ultraviolet Properties of the Self-Dual Yang–Mills Theory. J. High Energ. Phys. (2018) 2018: 41.

[22] Valery A. Lunts and Olaf M. Schnuerer, New enhancements of derived categories of coherent sheaves and applications, J. Algebra, 446:203–274, 2016.

[23] G. Mahlon. Multi-gluon helicity amplitudes involving a quark loop. Phys. Rev. D 49, (1994) 4438.

[24] Nicoara R., A finiteness result for commuting squares of matrix algebras, J. Operator Theory, 55, No. 2, 295–310 (2006)

[25] A. Polishchuk, Poisson Structures and Birational Morphisms Associated with Bundles on Elliptic Curves, IMRN, 1998 (13), 683–703.

[26] C. Psariudakis, Homological theory of recollements of abelian categories, J. of Algebra, ISSN: 0021–8693, Vol: 398, Page: 63–110

[27] A.A. Rosly and K.G. Selivanov, On amplitudes in selfdual sector of Yang–Mills theory. Phys. Lett., B399 (1997) 135–140.

[28] E. Witten. Chern–Simons Gauge Theory As A String Theory. Prog. Math., 133 (1995) 637–678.

[29] E. Witten. Perturbative Gauge Theory As A String Theory In Twistor Space. Commun. Math. Phys., 252 (2004) 189–258.

2 Гомологические и мотивные методы в некоммутативной геометрии

За отчетный период, в рамках темы “Гомологические и мотивные методы в некоммутативной геометрии”, сотрудники лаборатории работали над следующими вопросами.

2.1 Башни хороших кривых над конечными полями.

У алгебраической кривой C над конечным полем $\mathbb{F}_q$ из q элементов есть два основных инварианта: ее род $g(C)$ и количество точек на кривой $N(C) = |C(\mathbb{F}_q)|$. Теорема Дринфельда–Влэдуца описывает связь между этими инвариантами, когда род стремится к бесконечности: для любого счетного семейства кривых C_n над $\mathbb{F}_q$, у которых род стремится к бесконечности

$$\beta(C_\bullet) = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{N(C_n)}{g(C_n)} \leq \sqrt{q} - 1.$$

Как только было доказано это неравенство, возник вопрос об оптимальности этой оценки, то есть существует ли семейство кривых, для которого $\beta(C_\bullet) = \sqrt{q} - 1$. Такое семейство называется оптимальным. Если предел положительный, то семейство называется хорошим. Если q является квадратом, то оптимальные башни существуют. При этом в качестве примеров удобно брать башни кривых. Башня кривых – это последовательность кривых C_n и конечных отображений $C_n \to C_{n-1}$, при этом род C_n стремится к бесконечности. Основные примеры оптимальных башен алгебраических кривых над конечными полями можно построить либо при помощи явных рекуррентных формул, либо как башни модулярных кривых.

Если порядок конечного поля не является квадратом, то не известно, существуют ли над ним оптимальные башни или семейства. Сотрудником лаборатории С. Рыбаковым была предложена новая конструкция, которая обобщает модулярные башни и дает надежду построить оптимальные семейства кривых без ограничений на конечное поле.

Пусть дана последовательность локально постоянных пучков V_n в этальной топологии на открытом подмножестве U гладкой проективной кривой C над $\mathbb{Z}$. При этом каждый V_n локально свободен над $\mathbb{Z}/\ell^n\mathbb{Z}$ ранга b, который не зависит от n, и заданы аддитивные по слоям отображения пучков $V_n \to V_{n-1}$. Можно определить послойную “проективизацию” V_n, которая будет схемой U_n, конечной над U. Если выполняются некоторые технические условия на семейство V_n, эта схема будет геометрически неприводимой кривой. Определим C_n как гладкую проективную кривую, содержащую U_n.

Например, пусть дано семейство квартик

$$X = \{x_0^4 + x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 + 4\lambda x_0 x_1 x_2 x_3 = 0\} \subset \mathbb{A}^1_\lambda \times \mathbb{P}^3_x.$$

Это семейство является гладким над $\mathscr{U} = \operatorname{Spec}\mathbb{Z}[\lambda, \frac{1}{2(\lambda^4-1)}]$. Фактор Y_λ этого семейства по действию некоторой групповой схемы H над $\mathscr{U}$ является также семейством поверхностей

$K3$. Причем Батырев доказал, что Y_λ и X_λ зеркально двойственны. Определим V_n как второй высшей этальный прямой образ постоянного пучка $\mathbb{Z}/\ell^n\mathbb{Z}$ для семейтсва Y_λ.

Рассмотрим два слоя этого семейства: над комплексными числами и каким-нибудь конечным полем k нечетной характеристики. По каждому из слоев мы можем построить башню кривых: $\mathscr{C}_\bullet$ над комплексными числами, и $C_\bullet$ над k. Ясно, что род у кривых $\mathscr{C}_n$ и C_n одинаковый, поэтому достаточно вычислить как ведет себя род в башне комплексных кривых. Из результатов статьи [1] следует, что для этого достаточно знать локальные монодромии семейства Y_λ, которые хорошо известны.

В то же время компоненты связности кривой C_n можно изучать при помощи глобальной монодромии семейства Y_λ. Для нашего семейства ее вычислил Долгачев. Из его описания глобальной монодромии следует, что можно выбрать башню кривых из компонент связности, и оценить род кривых в этой башне.

В статье [2] Рыбаков совместно с С. Галкиным доказал, что башня над $k = \mathbb{F}_{p^2}$, которая получается из семейства квартик Y_λ, оптимальна для $p = 3$, и является хорошей для $p \equiv 3(4)$.

Список литературы

[1] Rybakov S., Families of algebraic varieties and towers of algebraic curves over finite fields. https://arxiv.org/abs/1710.05395 Мат. Заметки, 104:5 (2018), 712-719.

[2] Galkin S., Rybakov S., A family of algebraic surfaces and towers of algebraic curves over finite fields. Принято в Мат. Заметки (6)106, 2019.

2.2 Комплексные структуры и голоморфные дифференциалы.

Научный руководитель Лаборатории Ф.А. Богомолов в отчетный период работал над несколькими проблемами.

Одна из них — проблема построения комплексной структуры на гладком вещественном многообразии, трансверсальном к алгебраическому слоению с особенностями на проективном многообразии. Этот способ работает для многих комплексных компактных многообразий. Вопрос состоит в том можно ли так получить комплексную структуру на любом компактном многообразии Совместно с стажером лаборатории Львом Сухановым, Ф.А. Богомолов показал, что для плотного семейства комплексных окрестностей алгебраических многообразий их комплексная структура может быть построена таким образом.

Богомолов также работал над проблемой характеризации семейств одномерных комплексных классов когомологий на римановых поверхностях, которые соответствуют голоморфным дифференциалам относительно некоторой комлексной структуры на поверхности. Когда имеется один класс, этот вопрос был полностью разрешен Каповичем. Десять лет назад Богомолов совместно с Ф. Соловьевым независимо передоказали его результат. Но вопрос разумно ставить также для двоек и троек классов

Простые необходимые условия показывают, что семество реализуемых троек классов по размерности совпадает с размернстью пространства модулей кривых данного рода (если он больше трех). Удается доказать, что обшая тройка классов удовлетворяющих условию Римана (т.е. простым необходимым условиям реализуемости) определяет единственную поверхность в некоторой окрестности мноогобразия модулей кривых данного рода . В настоящий момент Богомолов продолжает работу над этой проблемой, вместе со своим аспирантом аспирантом Родионом Деевым. Он получил новые результаты для двоек дифференцилов.

Кроме того, Ф.А. Богомолов сделал несколько докладов на семинарах НИУ ВШЭ, а также в Математическом Институте РАН им. В.А.Стекловка, в МФТИ, и на летней студенческой школе в центре НИУ ВШЭ в Вороново.

2.3 Бесконечномерные неприводимые представления проективных групп

2.3.1 Пространства 0-циклов на грассманианах как представления проективных групп

Сотрудником лаборатории М. Ровинским изучался вопрос о существовании достаточно «универсальных» конструкций неприводимых представлений. Например, имеется следующая очевидная конструкция представлений группы G над K. Пусть $H' \subset H$ — подгруппы группы G, ρ — K-представление группы H. Пусть $W_{\rho,H,H'}$ — ядро естественной сюръекции индуцированных представлений $K[G]\otimes_{K[H']}\rho \to K[G]\otimes_{K[H]}\rho$. Чтобы $W_{\rho,H,H'}$ являлось неприводимым, необходимы неприводимость ρ и максимальность H' среди собственных подгрупп H. Исходный вопрос можно интерпретировать как поиск примеров, в которых это представление оказывается неприводимым.

Индуцированное представление $K[G]\otimes_{K[H]}\rho$ является неприводимым, только если представление ρ не продолжается с H на бо́льшую подгруппу.

Пусть теперь G – группа автоморфизмов некоторого векторного пространства V, и H – максимальная параболическая подгруппа в G. Тогда G/H – множество r-мерных подпространств в V, а W – пространство 0-циклов степени 0 на грассманнианах над полем k с коэффициентами в поле F.

Теорема 2.1 ([1]). Представление группы $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Q})$, индуцированное любым нетривиальным одномерным представлением собственной параболической подгруппы группы $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Q})$, неприводимо.

Доказана неприводимость модуля 0-циклов степени 0 на грассманнианах над бесконечным телом F с коэффициентами в произвольном поле, который рассматривается как представление соответствующей линейной группы.

Пусть F – тело, V – левое F-векторное пространство размерности $r+r'$ для некоторой пары кардиналов $\mathbf{r}=(r,r')$.

Обозначим через $G := \mathrm{Aut}_F(V)$ группу автоморфизмов векторного пространства V, а через $\mathrm{Gr}(\mathbf{r},V)$ — множество всех F-векторнных подпространств в V размерности r и коразмерности r'.

Для каждого ассоциативного кольца с единицей A обозначим через $A[\mathrm{Gr}(\mathbf{r},V)]$ модуль всех формальных конечных линейных комбинаций $\sum_{j=1}^{N} a_j[L_j]$ F-векторных подпространств $L_j \subset V$ из $\mathrm{Gr}(\mathbf{r},V)$ с коэффициентами $a_j \in A$; через $A[\mathrm{Gr}(\mathbf{r},V)]^\circ \subset A[\mathrm{Gr}(\mathbf{r},V)]$ — подмодуль формальных сумм $\sum_i a_i[L_i]$, где $\sum_i a_i = 0$.

Теорема 2.2 ([1]). Пусть $\mathbf{r} = (r,r')$ – пара кардиналов $\geqslant 1$, F – бесконечное тело, V – левое F-векторное пространство размерности $r+r'$. Обозначим через $M_1(\mathbf{r},V)$ погруппу в $\mathbb{Z}[\mathrm{Gr}(\mathbf{r},V)]^\circ$, порождённую разностями $[L]-[L']$ для всех $L,L' \in \mathrm{Gr}(\mathbf{r},V)$ таких, что $\dim(L/L\cap L') = \dim(L'/L\cap L') = 1$.

Для любого поля K любое ненулевое K-подпредставление в $K[\mathrm{Gr}(\mathbf{r},V)]$ группы $\mathrm{GL}_F(V) := \mathrm{Aut}_F(V)$ содержит $K\otimes M_1(\mathbf{r},V)$ (в частности, $K\otimes M_1(\mathbf{r},V)$ является неприводимым K-подпредставлением группы $\mathrm{GL}_F(V)$ в $K[\mathrm{Gr}(\mathbf{r},V)]$, причём единственным).

Группа $M_1(\mathbf{r},V)$ является прямым слагаемым группы $\mathbb{Z}[\mathrm{Gr}(\mathbf{r},V)]^\circ$ и совпадает с ней тогда и только тогда, когда конечен хотя бы один из кардиналов r и r'.

2.3.2 Существование соответствий между произвольными многообразиями, инъективных на 0-циклах

Также М. Ровинским получен следующий результат.

Для алгебраически замкнутого поля k эквивалентны следующие утверждения:

– существует k-морфизм $(f_1,\dots,f_N) : \mathbb{A}_k^2 \to \mathbb{A}_k^N$, индуцирующий инъекцию $Z_0(\mathbb{A}_k^2) \to Z_0(\mathbb{A}_k^1)^N$;

– для любого квазиаффинного k-многообразия X существует k-морфизм $(g_1,\dots,g_M) : X \to \mathbb{A}_k^M$, индуцирующий инъекцию $Z_0(X) \to Z_0(\mathbb{A}_k^1)^M$.

Список литературы

[1] R. Bezrukavnikov, M. Rovinsky, 0-Cycles on Grassmannians as Representations of Projective Groups, Arnold Mathematical Journal 5(2), 373–385, https://doi.org/10.1007/s40598-019-00126-7

2.4 Циклические гомологии и поливекторные поля.

В прошедшем году сотрукдником лаборатории Н. Маркаряном была продолжена работа над определением функторов циклической тотализации и реализации. В рамках этой работы дано геометрическое определение негативных циклических гомологий для объекта в любой симплициальной гомотопической категории. Основным приложением этого является доказательство того факта, что негативные циклические и обычные циклические гомологии двух моделей пространства петель (симплициальной и косимплициалной) совпадают. Этот факт был доказан для пространств в классической работе Джонса. К сожалению, его метод не обобщается на произвольные гомотопические категории. Данная работа восполняет этот пробел.

Эти результаты будут использованы для построения характеристических классов расслоений со значениями в кристаллических когомологиях при помощи обобщенной конструкция Черна–Вейля.

Было начато изучение структуры Ходжа на e_2-алгебре поливекторных полей. По всей видимости, эта структура играет ключевую роль в конструкции формальности e_2-алгебры поливекторных полей, предложенной Концевичем. На категории e_2-алгебр действует автоморфизм, индуцированный комплексным сопряжением на пространствах, образующих операду малых дисков. Была выдвинута следующая гипотеза: e_2-алгебре поливекторных полей инвариантна относительно этого автоморфизма. Эта гипотеза, в частности, дает автоморфизм алгебры Ли поливекторых полей. Гипотетически, однородные компоненты логарифма этого автоморфизма являются образующими алгебры Ли Гротендика–Тейхмюллера, вложенной в алгебру Ли гомотопических автоморфизмов поливекторных полей.

Продолжено исследование совместно с Л. Рыбниковым, оно касается исследования безмонодромных sl_2-оперов на проколотой проективной прямой. Понятие оперов было введено Бейлинсоном и Дринфельдом в рамках программы построения двойственности Ленглендса для функционального поля. Согласно этой двойственности, пучки на пространстве оперов должны соответствовать Гекке-собственным пучкам на пространстве расслоений над кривой. В рамках этого исследования было сформулировано понятие лог-опера и доказаны его простейшие свойства.

2.5 Теорема Римана-Роха.

Используя конструкцию следов в симметрических моноидальных $(\infty, 2)$-категориях из [2] и теорию деформаций, развитую [4], в [1] было получено обобщение теоремы Гротендика-Римана-Роха на эквивариантный случай.

А именно, пусть дан эквивариантный морфизм

$$g_X \circlearrowright X \xrightarrow{f} Y \circlearrowleft g_Y$$

между гладкими собственными (производными) схемами над полем нулевой характеристики, такой что

- Редуцированные схемы $\overline{X^{g_X}} := \mathscr{H}^0(X^{g_X})^{\mathsf{red}}$ и $\overline{Y^{g_Y}} := \mathscr{H}^0(Y^{g_Y})^{\mathsf{red}}$ являются гладкими (но не обязательно связными), где X^{g_X} и Y^{g_Y}- производные неподвижные точки g_X и g_Y соответственно;

– Индуцированные морфизмы на конормальных расслоениях $1-(g_X^*)_{|\mathscr{N}^\vee_{g_X}}$ and $1-(g_Y^*)_{|\mathscr{N}^\vee_{g_Y}}$, полученные ограничением действия эндоморфизмов g_X и g_Y на Ω^1_X и Ω^1_Y соответственно обратимы.

Тогда было показано ([1], теорема 6.2.13), что для лакс g_X-эквивариантного пучка $E \in \mathsf{Perf}(X)$ (пучка $E \in \mathsf{Perf}(X)$ вместе с отображением $g_X^*E \longrightarrow E$, где под $\mathsf{Perf}(X)$ здесь подразумевается полная подкатегория неограниченной производной категории квазикогерентных пучков на X, порожденная дуализируемыми объектами, а все функторы являются производными) было получено равенство

$$(\overline{f^g})_*\left(\mathsf{ch}(E,t)\frac{\mathsf{td}_{\overline{X^{g_X}}}}{e_{g_X}}\right) = \mathsf{ch}(f_*(E,t))\frac{\mathsf{td}_{\overline{Y^{g_Y}}}}{e_{g_Y}} \quad \in \quad \bigoplus_p H^{p,p}(\overline{Y^{g_Y}}),$$

где:

– Отображение $\overline{X^{g_X}} \xrightarrow{\overline{f^g}} \overline{Y^{g_Y}}$ - это индуцированное отображение на редукциях производных неподвижных точек,

– $\mathsf{ch}(-,-)$- это эквивариантный характер Черна, который можно описать как след $\mathsf{ch}(E,t) = \mathsf{Tr}\left(t + t\circ \mathsf{At}(E) + t\circ \frac{\mathsf{At}(E)^{\wedge 2}}{2} + \dots\right)$, где $\mathsf{At}(E)$- класс Атьи E,

– td_{-}- классические классы Тодда,

– e_{g_X}, e_{g_Y} - это эквивариантные классы Эйлера, которые можно получить как сумму $e_g = \sum_k (-1)^k \mathsf{ch}\left(\Lambda^k(\mathscr{N}_g^\vee), \Lambda^k(g^*_{|\mathscr{N}_g^\vee})\right)$.

В частности, если эквивариантные структуры на X и Y тривиальны, то результат выше дает классическую теорему Гротендика-Римана-Роха. Тем не менее, даже для случая тривиального морфизма доказательство, полученное в [1], отличается от классического: оно работает для любых собственных, гладких схем и не использует факторизацию проективно морфизма в гладкое вложение и проекцию. Тем не менее, оно активно использует используют теорию деформаций, разработанную в [4], а потому работает только в поле нулевой характеристики.

В процессе доказательства основного результата было также получено несколько утверждений, которые могут иметь самостоятельный интерес. В частности, было показано ([1], утверждения 3.2.2, 3.3.6), что морфизм следов

$$\Gamma(\mathscr{L}X, \mathscr{O}_{\mathscr{L}X}) \simeq \mathsf{Tr}_{2\,\mathsf{Cat}_k}(\mathsf{Id}_{\mathsf{QCoh}(X)}) \xrightarrow{\mathsf{Tr}_{2\,\mathsf{Cat}_k}(-\otimes\mathscr{O}_X)} \mathsf{Tr}_{2\,\mathsf{Cat}_k}(\mathsf{Id}_{\mathsf{ICoh}(X)}) \simeq \Gamma(\mathscr{L}X, \omega_{\mathscr{L}X})$$

индуцированный диаграммой

$$\begin{tikzcd}
\mathsf{QCoh}(X) \arrow[r, "\mathsf{Id}_{\mathsf{QCoh}(X)}"] \arrow[d, "-\otimes\mathscr{O}_X"'] & \mathsf{QCoh}(X) \arrow[d, "-\otimes\mathscr{O}_X"] \\
\mathsf{ICoh}(X) \arrow[r, "\mathsf{Id}_{\mathsf{ICoh}(X)}"'] & \mathsf{ICoh}(X)
\end{tikzcd}$$

задан применением функтора глобальных сечений к канонической ориентации $u_C : \omega_{\mathscr{L}X} \simeq \mathscr{O}_{\mathscr{L}X}$ производной схемы $\mathscr{L}X$ свободных петель на X. Кроме того, было доказано, что композиция

$$\mathscr{O}_{\mathscr{L}X} \xrightarrow[\sim]{u_C} \omega_{\mathscr{L}X} \xrightarrow[\sim]{u_S^{-1}} \mathscr{O}_{\mathscr{L}X},$$

где $u_S : \omega_{\mathscr{L}X} \simeq \mathscr{O}_{\mathscr{L}X}$- Серровская ориентация $\mathscr{L}X$ совпадает с классическим классом Тодда на X ([1], следствие 4.4.4). Была развита теория касательных комодулей к коммутативным коалгебрам ([1], секция 5.1). Кроме того, для связи классического Гротендика-Римана-Роха с эквивариантным была доказана формула локализации, показывающая, что если (X,g)-гладкая схема вместе с эндоморфизмом $X \xrightarrow{g} X$ таким, что $\overline{X^g}$ тоже гладкая (но не обязательно связная), то естественное отображение $j^g : \mathscr{L}\overline{X^g} \longrightarrow X^g$ является эквивалентностью производных схем тогда и только тогда, когда детерминант $\det(1 - g^*_{|\mathcal{N}_g^\vee}) \in \Gamma(\overline{X^g}, \mathscr{O}_{\overline{X^g}})$ обратим.

Список литературы

[1] Grigory Kondyrev and Artem Prikhodko, Equivariant Grothendieck-Riemann-Roch theorem via formal deformation theory, 2019, `https://arxiv.org/abs/1906.00172`.

[2] Grigory Kondyrev and Artem Prikhodko, Categorical proof of Holomorphic Atiyah-Bott formula, Journal of the Institute of Mathematics of Jussieu (2018), also `https://arxiv.org/abs/1607.06345`

[3] Dennis Gaitsgory and Nick Rozenblyum, A Study in Derived Algebraic Geometry, Volume I: Correspondences and Duality, AMS Mathematical Surveys and Monographs, 2017.

[4] Dennis Gaitsgory and Nick Rozenblyum, A Study in Derived Algebraic Geometry, Deformations, Lie Theory and Formal Geometry, AMS Mathematical Surveys and Monographs, 2017.

2.6 Момент-угол комплексы

Стажером лаборатории С. Абрамяном был изучен вопрос реализуемости итерированных высших произведений Уайтхеда с данной формой вложенных скобок симплициальными комплексами, на основе конструкции момент-угол-комплекса $\mathscr{Z}_{\mathscr{K}}$. А именно, будем говорить, что симплициальный комплекс $\mathscr{K}$ реализует итерированное высшее произведение Уайтхеда w, если w является нетривиальным элементом в гомотопической группе $\pi_*(\mathscr{Z}_{\mathscr{K}})$. Комбинаторный подход к вопросу реализуемости использует операцию подстановки симплициальных комплексов: для любого итерированного высшего произведения w описан симплициальный комплекс $\partial\Delta_w$, реализующий w. Более того, для специального вида вложенных скобок внутри w мы доказано, что $\partial\Delta_w$ является наименьшим симплициальным комплексом, реализующим w. Также дан комбинаторный критерий нетривиальности произведения w. При доказательстве нетривиальности используется представитель образа w при гомоморфизме Гуревича в клеточных цепях момент-угол-комплекса $\mathscr{Z}_{\mathscr{K}}$ и описание умножения в когомологиях $\mathscr{Z}_{\mathscr{K}}$. Также использован алгебраический подход на основе коалгебраической версии комплексов Кошуля и Тейлор коалгебры граней симплициального комплекса $\mathscr{K}$ для описания канонических циклов, соответствующих итерованным высшим произведениям w. Тем самым получается другой критерий реализуемости w.

2.7 Вырождения поверхностей и 2-теория Морса.

За отчетный период, стажером лаборатории Л. Сухановым был построен пример SNC-вырождения комплексной алгебраической поверхности общего типа со стягиваемым двойственным комплексом, что отвечает на вопрос Коллара, Ху и де Ферне. Для построения используется сглаживание для логарифмических деформаций с препятствиями (что, видимо, также имеет определённую новизну). Аналогичный метод потенциально может построить и другие примеры такого типа (которые автоматически являются поверхностями с $h^{1,0} = h^{2,0} = 0$). Результат опубликован в препринте https://arxiv.org/abs/1906.10610 и подан в журнал.

Также Сухановым была установлена связь между 2-теорией Морса и теорией Гайотты-Мура-Виттена: комбинаторная связь состоит в том, что возникают полностью аналогичные алгебраические структуры. Объекты заменяются в соответствии со следующим словарём - совместные критические точки пары векторных полей соответствуют критическим точкам потенциала, совместные траектории векторных полей - в дзета-инстантоны, листы - в решения $\bar{\partial}$-уравнения Виттена. Эти результаты были опубликованы в препринте https://arxiv.org/abs/1810.08776

Также, им была найдена пока неопубликованная "прямая"связь. А именно, можно определить гибридную теорию для пары (не обязательно коммутирующих) векторных полей и почти комплексной структуры (никак не согласованной с ними), так что ограниченные решения будут являться интегральными листами в случае если поля коммутируют (само уравнение зависит от оператора почти комплексной структуры, но пространство ограниченных решений - нет). В свою очередь, в специальном случае когда пара полей это вещественная и мнимая часть $\bar{\partial}$-градиента Виттена, ограниченные решения это как раз решения в теории Г-М-В.

2.8 Спектральные алгебры и вырождение Ходжа-де Рама

Один из важнейших, основополагающих общих результатов комплексной алгебраической геометрии – вырождение спектральной последовательности, связывающей когомологии Ходжа и когомологии де Рама гладкого проективного комплексного алгебраического многообразия. Результат этот, как и многочисленные его следствия – такие, как существование на когомологиях структуры Ходжа в смысле Делиня – совершенно незаменим в реальной работе, и практически ни одна серьезная теорема в комплексной алгебраической геометрии не может быть доказана без использования этой техники.

Хотя сам результат формулируется чисто алгебраически, исходное его доказательство существенно использовало аналитические методы (а именно, теорию эллиптических дифференциальных и псевдодифференциальных операторов, т.е. теорию Ходжа в узком смысле). Однако несколько позднее, в конце 80-х годов, Делинем и Иллюзи было дано другое, альтернативное доказательство, работающее даже в большей общности – для собственных многообразий, которые не обязательно проективны – и вместо анализа использующее сведение в конечную характеристику и изоморфизм Картье.

Примерно в то же время было сделано важнейшее открытие, породившее новый раздел алгебраической геометрии – геометрию некоммутативную. Оказалось, что и модули дифференциальных форм, и когомологии Ходжа, и когомологии де Рама существуют в гораздо большей общности – а именно, для любой ассоциативной, но не обязательно коммутативной алгебры (на алгебраическом языке, роль форм играют гомологии Хохщильда, а роль когомологий де Рама – периодические циклические гомологии, открытые независимо А. Конном и Б. Цыганом в 1982 году). В той же общности существует и связывающая их спектральная последовательность. Это дало возможность просто определить некоммутативное аффинное алгебраическое многообразие как ассоциативную алгебру с единицей, и работать с ним гомологическими методами. Несколько позднее было осознано, что для того, чтобы получить любые некоммутативные многообразия, надо не склеивать аффинные (это по-видимому невозможно), а рассматривать обобщение в производном смысле – заменять алгебры на дифференциально-градуированные (ДГ) алгебры и их производные категории. Обычному алгебраическому многообразию тогда отвечает производная категория когерентных пучков на нем.

Окончательно такая производная некоммутативная алгебраическая геометрия была сформулирована примерно в середине 2000-х годов, в работах М. Концевича и Я. Сойбельмана (а также Б. Тоена, Г. Веццози и М. Вакье). В частности, было точно выяснено, что в некоммутативнй геометрии отвечает гладкости и собственности многообразий, и сформулирована гипотеза Концевича-Сойбельмана о вырождении: некоммутативная спектральная последовательность Ходжа-де Рама вырождается для гладкой собственной ДГ алгебры над полем характеристики 0.

Эта гипотеза была доказана заведующим лабораторией Д. Калединым (при некоторых технических ограничениях тогда же, в 2006 году, и в общем случае более недавно, несколько лет назад). Оказывается, что, хотя некоммутативные аналоги эллиптических операторов совершенно неизвестны, метод Деліня-Иллюзи допускает некоммутативное обобщение и дает доказательство теоремы. При этом, как и в коммутативном случае, это на первый взгляд странно, т.к. в конечной характристике теорема вообще говоря неверна. Делинь и Иллюзи в сущности показывают, что теорема таки верна и в положительной характеристике при некоторых предположения (многообразие должно подниматься на вторые вектора Витта, а его размерность должан быть меньше характеристики), и затем показывают, что при достаточно общей редукции эти условия выполнены. В доказательстве Каледина работает ровно тот же план: размерность заменяется на гомологическую размерность, которая у гладких ДГ алгебр конечна, а слишком маленькие простые затем просто выкидываются из рассмотрения.

В этом году, совместно со стажером лаборатории А. Коноваловым и аспирантом НИУ ВШЭ К. Магидсоном, Каледин вернулся к этому доказательству, и значительно прояснил и выпрямил его, при этом открыв возможность потенциальных дальнейших обобщений (например, на случае $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-градуированных ДГ алгебр).

А именно, оказалось – что неявно отмечалось и раньше, но без четкого обьяснения – что доказательство Каледина, да и сама задача, теснейшим образом связана с алгебраической топологией.

Выяснилось вот что. И гомологии Хохшильда, и периодические циклические гомологии можно определять в еще большей общности – не только для ДГ алгебр над коммутативным кольцом, но и для надлежащим образом интерпретированных алгебр над кольцевым спектром (например, над спектром сфер). Условие на размерность, появившееся еше у Деліня-Иллюзи, и затем вновь у Каледина, в доказательстве Каледина имеет формально техническое происхождение – требуется расщепить с помощью теории препятствий некоторое расширение ДГ алгебр – но настоящий смысл его вполне ясен: требуется поднять ДГ алгебру над конечным полем характеристики p до алгебры над p-пополенным скетром сфер.

Помогает это по следующей причине. Некоторый аналог спектральной последовательности Ходжа-де Рама есть и для спектральных алгебр, но первых член ее выглядит по-другому. В обычной теории, это гомологии Хохшильда, помноженные на тэйтовские эквивариантные когомологии точки по отношению к действию единичной окружности S^1. Обычные эквивариантные гомологии точки есть алгебра полиномов от одной образующей степени 2, а тэйтовские получаются обращением этой образующей. То же верно если мы рассматриваем спектр, т.е. обощенную теорию когомологий, но ориентируемую (например, комплексные кобордизмы). Однако многие теории – например, сам спектр сфер – неориентируемы, спектральная последовательность Атьи-Хирцебруха для BS^1 в них не вырождается, и хеквивариантные когомологии точки могут стать значительно меньше. Аналогично, можно вместо всей окружности рассматривать циклическую подгруппу $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ корней p-й степени из единицы. И в этом случае есть совершенно удивительное утверждение, известное как "гипотеза Сигала": тэйтовские когомологии p-пополенной сферы по отношению к тривиальному действию $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ есть она сама. Таким образом, образующий степени 2, который и отвечает за всю нетривиальность спектральной последовательности Ходжа-де Рама, над p-пополненной сферой отсутствует, а спектральная последовательность вырождается по тривиальным причинам.

В связи с этим, разумная переформулировка доказательства Каледина выглядит так: вместо того, что бы находить у ДГ алгебры модель над $\mathbb{Z}$, затем редуцировать ее по модулю p, а затем поднимать на спектр сфер, разумно сразу искать модель над спектром сфер – после чего все подьемы будут даны с самого начала, теория препятствий не потребуется, и условие на p пропадет. Благодаря этому больше не нужно ограничивать гомологическую размерность, что позволяет рассмотреть другие ситуации – например, $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-градуированные ДГ алгебры.

Конечно, такой план требует серьезной технической работы, т.к. теория спектральных алгебр в настоящий момент покоится на весьма громоздких основаниях, и требует серьезных и нетривиальных усилий. Такая работа был сотрудниками лаборатории поведена. Результаты доступны в виде препринта и приняты к публикации в “Труды МИАН”.

Список литературы

[1] D. Kaledin, A. Konovalov, and K. Magidson, Spectral algebras and non-commutative Hodge-to-de Rham degeneration, `arXiv:1906.09518`.

3 Геометрическая теория предствлений.

3.1 Выпукло-геометрические операторы Гизина и многогранники Винберга-Литтельманна-Фейгина-Фурье

Операторы разделенных разностей в исчислении Шуберта и операторы Демазюра в теории представлений — два классических приложения операторов Гизина, связанных с проективизацией расслоений ранга два на многообразиях флагов. Выпукло-геометрические аналоги этих операторов действуют на многогранниках, повышая размерность на один, и могут использоваться для явного описания многогранников Ньютона-Окунькова многообразий Ботта-Самельсона. Сотрудницей лаборатории В. Кириченко были построены выпукло-геометрические аналоги операторов Гизина и изучены их приложения к теории выпуклых тел Ньютона-Окунькова. Результаты работы анонсированы в [5]. В отличие от ранее построенных выпукло-геометрических операторов Демазюра [2], дающих полиэдральные реализации Накасимы-Зелевинского кристальных базисов [1], конструкция выпукло-геометрических операторов Гизина более удобна при работе с многогранниками Винберга-Литтельманна-Фейгина-Фурье и их обобщениями.

Пусть X гладкое алгебраическое многогообразие, а $E \to X$ векторное расслоение ранга два на X. Определим расслоение $Y = \mathbb{P}(E)$ как многообразие всех прямых в E. Слои этого расслоения изоморфны проективным прямым. Естественная проекция $\pi : Y \to X$ индуцирует гомоморфизм обратного образа $\pi^* : A^*(X) \to A^*(Y)$ и оператор прямого образа $\pi_* : A^*(Y) \to A^{*-1}(X)$ (также известный как гомоморфизм Гизина) в кольцах (обобщенных) когомологий многообразий X и Y. Назовем оператором Гизина гомоморфизм $A^*(X)$-модулей, полученный как композиция $\pi^*\pi_* : A^*(Y) \to A^{*-1}(Y)$. Оператор Гизина можно явно вычислить, пользуясь формулой Квиллена–Вишика для любой алгебраической ориентируемой теории когомологий A^* (такой как кольца Чжоу, K-теория или алгебраические кобордизмы).

Пусть $Y = G/B$ — многообразие полных флагов для связной редуктивной группы G, а $P_i \subset G$ минимальная параболическая подгруппа, связанная с простым корнем α_i. Расслоение $\pi_i : Y \to X$ явлется проективизацией векторного расслоения ранга два. Например, для $G = GL_n(\mathbb{C})$ точки в G/B — это полные флаги $(V^1 \subset V^2 \subset \ldots \subset V^{n-1} \subset \mathbb{C}^n)$ подпространств, и отображение π_i забывает V^i. Оператор Гизина $\partial_i : CH^*(Y) \to CH^{*-1}(Y)$ для колец Чжоу часто называют оператором разделенных разностей, а оператор Гизина $D_i : K^*(Y) \to K^{*-1}(Y)$ для K-теории — оператором Демазюра.

Пусть $P \subset \mathbb{R}^n$ выпуклый многогранник, и $I \subset \mathbb{R}^n$ — отрезок. Пусть также $Q \subset \mathbb{R}^n$ многогранник аналогичный P (то есть с тем же нормальным веером). Определим многогранник Гизина $\Delta(P,Q,I) \subset \mathbb{R}^{n+1} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ как выпуклую оболочку следующего множества:

$$(1 \times P) \cup (0 \times (Q + I)).$$

При вычислениях многогранников Ньютона–Окунькова многообразий Шуберта или Ботта–Самельсона нужен эффективный инструмент для сравнения объемов многогранников и степеней многообразий. Для приведенного разложения $w = s_{i_1}s_{i_2}\cdots s_{i_\ell}$, выпукло-геометрические операторы Гизина позволяют индуктивно строить многогранники с нужными многочленами, а именно с многочленами, вычисляющими степени многообразий Ботта–Самельсона, соотвествующих набору простых корней (α_{i_1}), $(\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2})$, $\dots$, $(\alpha_{i_1}$, α_{i_2}, $\dots$, $\alpha_{i_\ell})$.

Планируется использовать выпукло-геометрические операторы Гизина для доказательства следующей гипотезы о многогранниках Ньютона–Окунькова линейных расслоений на разрешении Ботта-Самельсона в типе A и обобщенных ВЛФФ многогранниках. Мы используем обозначения из [3].

Гипотеза 1. Пусть $\Lambda_i = (\lambda_i^i, \dots, \lambda_n^i)$. Если $j > i$, положим $\lambda_i^j = \lambda_j^j$. Многогранник Ньютона–Окунькова $\Delta_{v_0}(X_{\overline{w_0}}, L(\Lambda_1, \dots, \Lambda_{n-1}))$ задается неравенствами: $u_m^l \geq 0$ и

$$\sum_{(l,m)\in D} u_m^l \leq \sum_{s=1}^{j} (\lambda_k^s - \lambda_{i+j}^s)$$

для всех путей Дика, идущих из λ_k в u_j^i в таблице (FFLV), где $1 < k \leq j < n$ и $1 \leq i \leq n-j$.

$$\begin{array}{cccccccccc}
\lambda_1 & & \lambda_2 & & \lambda_3 & & \dots & & & \lambda_n \\
& u_1^1 & & u_2^1 & & \dots & & & u_{n-1}^1 & \\
& & u_1^2 & & \dots & & & u_{n-2}^2 & & \\
& & & \ddots & & \ddots & & & & \\
& & & & u_1^{n-2} & & u_2^{n-2} & & & \\
& & & & & u_1^{n-1} & & & &
\end{array} \tag{$FFLV$}$$

3.1.1 Многогранники Ньютона-Окунькова многообразий флагов классических групп

Теория выпуклых тел Ньютона-Окунькова переносит методы торической геометрии на неторические многообразия. Выпуклое тело Ньютона-Окунькова линейного расслоения на многообразии зависит от выбора нормирования на поле рациональных функций. Для классических групп $SL(n)$, $SO(n)$ и $Sp(2n)$ построено единое геометрическое нормирование на соответствующих многообразиях полных флагов. Нормирование в каждом случае приходит из естественной системы координат на открытой клетке Шуберта и комбинаторно связано с соответствующими таблицами Гельфанда-Цетлина. Для $SL(n)$ и $Sp(2n)$ сотрудницей лаборатории В. Кириченко соответствующие многогранники Ньютона-Окунькова были отождествлены с многогранниками Винберга-Литтельманна-Фейгина-Фурье. Для $SO(n)$ вычислены маломерные примеры и сформулированы открытые задачи. Результаты опубликованы в [5].

3.2 Комбинаторная интерпретация двойных многочленов Шуберта типов B и C

Многочлены Шуберта — это семейство целочисленных многочленов $\mathfrak{S}_w \in \mathbb{Z}[x_1, x_2, \dots]$ от счетного числа переменных, где $w \in S_\infty$ — множество финитных перестановок, определяющееся свойством

$$\partial_i \mathfrak{S}_w = \begin{cases} \mathfrak{S}_{ws_i}, & \ell(ws_i) < \ell(w), \\ 0, & \ell(ws_i) > \ell(w), \end{cases}$$

где $\ell(w)$ — длина перестановки w, а $\partial_i f = \frac{f - s_i f}{x_i - x_{i+1}}$ — это i-й оператор разделенной разности.

Эти многочлены были определены в работах И.Н.Бернштейна, И.М.Гельфанда и С.И.Гельфанда [6] и А.Ласку и М.-П.Шютценберже [11] на рубеже 1970-х и 80-х гг. и с тех пор являются объектами постоянного интереса как геометров, так и специалистов по алгебраической комбинаторике. Их важность обусловлена тем, что они представляют классы соответствующих многообразий Шуберта $[X_w] \in H^*(\mathrm{GL}(n)/B)$ в кольце когомологий многообразия полных флагов в $\mathbb{C}^n$ при эпиморфизме Бореля $R \to H^*(\mathrm{GL}(n)/B)$. Также можно определить двойные многочлены Шуберта от двух наборов переменных $x_1, x_2, \dots$ и $y_1, y_2, \dots$, представляющие классы $[X_w]$ в кольце T-эквивариантных когомологий $H_T^*(\mathrm{GL}(n)/B)$.

Многочлены Шуберта обладают многими замечательными комбинаторными свойствами. Так, например, они образуют базис кольца $\mathbb{Z}[x_1, x_2, \dots]$. Так, например, их коэффициенты неотрицательны, и им можно придать комбинаторный смысл: они нумеруются так называемыми rc-графами, или pipe dreams, которые можно рассматривать как обобщение понятия таблиц Юнга для многочленов Шура (см., например, [9]).

Представляет интерес обобщение данных результатов на случай многообразий флагов других классических групп. С. В. Фомину и А. Н. Кириллову [8] принадлежит несколько (различных) чисто комбинаторных описаний многочленов Шуберта в типе B. В работе С. Билли и М. Хаймана [7] представлена единообразная конструкция многочленов Шуберта, аналогичная описанной выше конструкции с операторами разделенных разностей, и показано, что такие многочлены представляют классы многообразий Шуберта в когомологиях многообразий флагов G/B, где G — редуктивная алгебраическая группа типа B, C или D.

Конструкция двойных многочленов Шуберта, отвечающих T-эквивариантным когомологиям G/B, для данных типов была получена в 2011 году в работе Т. Икеды, Л. Михалча и Х. Нарусэ [10]. Эта конструкция обобщает многочлены Билли и Хаймана. Для этих многочленов тоже имеет место неотрицательность коэффициентов.

В совместной работе сотрудника лаборатории Е. Ю. Смирнова и А. А. Тутубалиной было получено комбинаторное описание двойных многочленов Шуберта для многообразий флагов типов B и C. Предложена конструкция, обобщающая конструкцию rc-графов и позволяющая придать коэффициентам этих многочленов комбинаторный смысл (откуда, в частности, получается новое доказательство их неотрицательности). Данные результаты в настоящее время готовятся к публикации.

3.3 Линейные вырождения многообразий флагов: частичные флаги, определяющие соотношения и групповые действия

В работах сотрудника лаборатории Е.Б.Фейгина 2019 года изучались так называемые линейные вырождения многообразий флагов типа A, возникающих в контексте теории представлений колчанов [30, 14, 19, 20]. Более точно, изучались колчанные грассманианы, связанные с представлениями однонаправленного колчана типа A. При этом фиксируются размерности объемлющего представления и размерность подпредставления, а само объемлющее представление варьируется. Изучаются различные характеристики получающегося таким образом семейства проективных алгебраических многообразий, в том числе структура приведенной схемы на слоях, алгебро-геометрические свойства вырождений слоев, действия естественных групп на всем семействе и на отдельных слоях.

Связь между теорией представлений простых алгебр Ли и теорией представлений колчанов хорошо известна и широко используется [29, 12]. В серии работ [14, 15, 16, 17] теория представлений колчанов была использована для реализации ПБВ вырождений многообразий флагов типа A [13, 23, 24, 25] в терминах колчанных грассманианов однонаправленных колчанов типа A. Это позволило получить новые свойства ПБВ вырождений классических флагов, установить связь с многообразиями Шуберта, а также применить методы и подходы теории Ли для изучения более общих колчанных грассманианов [18, 28, 21].

В работах Е.Б.Фейгина 2019 года были рассмотрены вырождения частичных многообразий флагов типа А, возникающих в рамках теории представлений колчанов. Слой семейства зависит от выбора представления. Показано, что существует самое глубокое плоское вырождение и самое глубокое неприводимое вырождение. Другими словами, мы показываем, что если колчанные грассманиан (слой семейства) имеет ожидаемую размерность или является неприводимым, то соответствующая ему орбита вырождается в явно предъявленную самую глубокую. Мы доказываем, что наиболее глубокое неприводимое представление совпадает с ПБВ вырождением частичных многообразий флагов. Мы вычисляем производящую функцию числа орбит в плоском неприводимом локусе [31] и изучаем естественные линейные расслоения на слоях; в частности, мы доказываем аналог теоремы Бореля-Вейля. Кроме того, нами явно описана структура приведенной семы на неприводимых слоях вырождения и сформулирована гипотеза о приведенной структуре на всем плоском локусе. Соответствующий идеал мульти-однородных соотношений порожден аналогами (вырождениями) квадратичных соотношений Плюккера. Мы явно описываем эти образующие в терминах вырождения Гребнера [27].

3.4 Комбинаторика квадратично-рациональных функций на сфере Римана

В совместной работе [32] А. Шепелевцевой и сотрудника лаборатории В. Тиморина изучается комбинаторика квадратичных рациональных функций на сфере Римана при помощи остовных деревьев. Пусть f — рациональная функция степени 2 на $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$. Мы рассматриваем итерации отображения f как динамическую систему на сфере. Предположим, что все критические точки отображения f имеют конечные орбиты, т.е. являются периодическими или препериодическими. В этом случае говорят, что f посткритически конечно (ПКК). Посткритически конечные отображения образуют всего лишь счетное число $\mathbf{Aut}(\mathbb{P}^1)$-орбит. (Группа преобразований Мебиуса действует сопряжениями). Но объединение этих орбит плотно в самой важной части бифуркационного множества. Поэтому изучение ПКК отображений важно для описания зависимости квадратичной динамики от параметров. С другой стороны, ПКК отображения поддаются изучению методами алгебраической топологии. Согласно фундаментальной теореме Терстона, $\mathbf{Aut}(\mathbb{P}^1)$-орбита квадратичного ПКК отображения f однозначно определяется компонентой линейной связности пространства топологических разветвленных ПКК накрытий, содержащей отображение f. Другими словами, f можно деформировать в пространстве топологических разветвленных ПКК накрытий, не теряя существенной информации. В. Некрашевич связал с f алгебраические и комбинаторные объекты: бимножества, скрученные рекурсии, автоматы. Это комбинаторные инварианты отображения f. Мы рассматриваем более визуальные инварианты: остовные деревья.

Пусть на сфере отмечено конечное множество точек $\boldsymbol{P}$. Остовное дерево множества $\boldsymbol{P}$ определяется как такое вложенное дерево на сфере, вершины которого либо принадлежат множеству $\boldsymbol{P}$, либо разбивают дерево более чем на 2 компоненты, причем все точки множества $\boldsymbol{P}$ являются вершинами. Мы рассматриваем остовные деревья с точностью до гомотопии по модулю $\boldsymbol{P}$. Пусть $\boldsymbol{P}$ — посткритическое множество квадратичного ПКК отображения f (состоящее по определению из критических значений и всех их итерированных образов), а $\boldsymbol{T}$ — остовное дерево для $\boldsymbol{P}$. Обратным образом дерева $\boldsymbol{T}$ называется любое остовное дерево в графе $f^{-1}(\boldsymbol{T})$. Вообще говоря, у каждого остовного дерева несколько обратных образов. Инвариантным остовным деревом для f называется такое остовное дерево, которое является своим обратным образом.

Теорема A. Планарный тип инвариантного остовного дерева и действие отображения f на вершинах определяют $\mathbf{Aut}(\mathbb{P}^1)$-орбиту отображения f.

Таким образом, инвариантное остовное дерево (если такое существует) является комбинаторным инвариантом отображения. Важным инвариантом является также соответствие на множестве остовных деревьев, определяемое взятием обратных образов.

Теорема B. Приведено явное описание би-множества по данной паре $(\boldsymbol{T}^*, \boldsymbol{T})$, где $\boldsymbol{T}$ — остовное дерево, а T^* — один из его обратных образов. Описана комбинаторная вычислительная процедура, позволяющая от пары (T^*,T) переходить к паре (T^{**},T^*), т.е. вычислять соответствие, определяемое взятием обратных образов.

Во всех рассмотренных примерах f допускает инвариантное остовное дерево. Более того, имеется конечное множество остовных деревьев (рассматриваемых, как обычно, с точностью до гомотопии), замкнутое относительно операции взятия любых обратных образов.

За отчетный период были опубликованы статьи [32, 33] и принята статья [34].

3.5 Кулоновские ветви трехмерных суперсимметричных калибровочных теорий

3.5.1 Историческая перспектива

В статье [35] Накаджима предложил подход к математически строгому определению Кулоновской ветви $\mathscr{M}_C$ 3-мерной $\mathscr{N}=4$ суперсимметричной калибровочной теории. Кулоновская ветвь $\mathscr{M}_C$ является гиперкэлеровым многообразием, снабженным $\mathbf{SU}(2)$-действием, возможно, с особенностями. Физики интенсивно изучали ее последние 20 лет, однако, строгого математического обоснования не хватало, так как физическое определение использует квантовые поправки.

Основная идея [35] состояла в использовании некоторого модулярного стэка. Она была мотивирована редукцией обобщенного уравнения типа Зайберга-Виттена на $S^2=\mathbb{CP}^1$, ассоциированного с компактной группой Ли G_c и ее представлением $\mathbf{M}$ над телом кватернионов $\mathbb{H}$, отвечающим данной суперсимметричной калибровочной теории. Тогда пространство голоморфных функций на $\mathscr{M}_C$ предлагается считать двойственным к критическим когомологиям с компактным носителем модулярного стэка, связанного с аналогом комплексного функционала Черна-Саймонса.

Целью работы [36] А. Бравермана, Х. Накаджимы и сотрудника лаборатории М. Финкельбегра является конструкция коммутативного умножения на двойственной группе когомологий при дополнительном предположении, что $\mathbf{M}$ имеет кокасательный тип, т.е. $\mathbf{M}=\mathbf{N}\oplus\mathbf{N}^*$ для некоторого комплексного представления $\mathbf{N}$ группы G. Алгебраическое многообразие $\mathscr{M}_C$ восстанавливается из кольца функций как его спектр. Поэтому остается предъявить гиперкэлерову метрику или, эквивалентно, твисторное пространство.

В предположении, что $\mathbf{M}$ имеет кокасательный тип, в ([35]) было эвристически доказано, что критические когомологии можно заменить на обычные когомологии с компактным носителем меньшего стэка модулей $\mathscr{R}$ следующих объектов: голоморфное главное G-расслоение $\mathscr{P}$ с голоморфным сечением ассоциированного векторного расслоения $\mathscr{P}\times_G\mathbf{N}$ над $\mathbb{CP}^1$. Здесь G обозначает комплексификацию G_c. Далее, мы заменяем стэк модулей вышеуказанных пар над $\mathbb{CP}^1$ стэком модулей локального происхождения, похожим на аффинный грассманниан. Другими словами, мы рассматриваем стэк модулей таких пар над несепарабельной схемой $\tilde{D}$, полученной склеиванием двух экземпляров формального диска $D = \operatorname{Spec}\mathbb{C}[[z]]$ по проколотому диску D^*. Это позволяет применить разнообразные технические средства из теории аффинных грассманнианов. Градуированная размерность групп когомологий не меняется от вышеуказанной замены, и мы предполагаем, что те и другие группы когомологий на самом деле естественно изоморфны.

Исходная интуиция для конструкции умножения в [35] была гипотетической трехмерной топологической квантовой теорией поля, связанной с калибровочной теорией. А именно, двойственная группа когомологий рассматривается как квантовое гильбертово пространство $\mathscr{H}_{S^2}$, ассоциированное с S^2, а умножение задается вектором, отвечающим 3-мерному шару, из которого вырезалны два меньших шарика. Интуитивно, наше определение умножения использует ту же картинку, но одна из трех граничных компонент становится очень маленькой. Будем смотреть на нее, как на $\Sigma \times [0,1]$ с маленьким 3-мерным шариком B^3, вырезанным из внутренностей, где $\Sigma = S^2$. Тогда это выглядит как мультик про Σ, на которой маленький 2-мерный шарик появляется и исчезает, где $[0,1]$ является стрелой времени. Итак, у нас есть умножение $\mathscr{H}_\Sigma \otimes \mathscr{H}_{\partial B^3} \to \mathscr{H}_\Sigma$ с трехмерной точки зрения. С другой стороны, с точки зрения двумерного наблюдателя на Σ, пересечение $B^3 \cap (\Sigma \times t)$ возникает в маленькой окрестности точки. Поэтому наблюдатель видит нечто происходящее на формальном диске D. С этой точки зрения, $\mathscr{H}_\Sigma$ является модулем над кольцом $\mathscr{H}_{\partial B^3}$, где умножение на $\mathscr{H}_{\partial B^3}$ задается рассмотрением двух формальных дисков. Этот двумерный мультик является ни чем иным, как диаграммой свертки аффинного Грассманниана или, точнее, грассманнианом Бейлинсона-Дринфельда.

Мы не ожидаем, что наша конструкция применима к более общим трехмерным многообразиям с границей, но для разогрева и такое сгодится.

3.5.2 Конструкция

В любом случае, наше построение аффинного алгебраического многообразия $\mathscr{M}_C$ интересно само по себе, даже без связи с физической мотивацией. Для математиков, не владеющих физикой, его можно рассматривать как новую конструкцию класса алгебраических многообразий с интересными структурами. Этот класс содержит пространства модулей базированных отображений из $\mathbb{CP}^1$ в пространства флагов (а также, гипотетически, пространства модулей инстантонов на мульти-Taub-NUT пространствах), и пространства, изучаемые в контексте геометрической теории представлений; такие как срезы в аффинном грассманниане. Но мы ожидаем, что $\mathscr{M}_C$ в большинстве случае является ранее не встречавшимся многообразием.

Опишем наше определение чуть более подробно. Пусть G комплексная редуктивная группа, а $\mathbf{N}$ ее представление. Мы рассматриваем пространство $\mathscr{R}$ модулей троек $(\mathscr{P}, \varphi, s)$, где $\mathscr{P}$ является G-расслоением на формальном диске $D = \operatorname{Spec}\mathbb{C}[[z]]$, φ является его тривиализацией на проколотом диске $D^* = \operatorname{Spec}\mathbb{C}((z))$, а s является сечением ассоциированного векторного расслоения $\mathscr{P} \times_G \mathbf{N}$, регулярным с точки зрения тривиального расслоения при переносе при помощи φ. Это пространство троек снабжено естественным действием $G_{\mathscr{O}} = G[[z]]$, группы $\mathscr{O}$-значных точек G посредством замены тривиализации φ. Если забыть s, мы получим пространство модулей пар $(\mathscr{P}, \varphi)$, то есть аффинный Грассманниан Gr_G. Если $\mathbf{N} = \mathfrak{g}$, присоединенное представление, то $\mathscr{R}$ является аффинным сферическим пространством троек Стейнберга. Для произвольного $\mathbf{N}$, есть проекция $\mathscr{R} \to \mathrm{Gr}_G$, слои которой являются бесконечномерными векторными пространствами.

Наше пространство троек является является прямым пределом обратных пределов схем конечного типа, но его $G_{\mathscr{O}}$-эквивариантные гомологии Бореля-Мура $H_*^{G_{\mathscr{O}}}(\mathscr{R})$ корректно определены.

Мы также определяем диаграмму свертки для $\mathscr{R}$ как аналог диаграммы свертки для Gr_G. Она задает сверточное умножение $*$ на $H_*^{G_{\mathscr{O}}}(\mathscr{R})$. Таким образом, мы получаем градуированное кольцо $\mathscr{A}$, и определяем кулоновскую ветвь как его спектр $\mathscr{M}_C = \operatorname{Spec}\mathscr{A}$.

Таким образом, можно воспринимать вышеприведенные частные случаи как вычисление примеров $\mathscr{M}_C$: для $\mathbf{N} = 0$, $\mathscr{M}_C$ является алгебраическим многообразием $\mathfrak{Z}_{\mathfrak{g}^\vee}^{G^\vee}$ пар (g, x) таких что x лежит в (фиксированном) срезе Костанта в $\mathfrak{g}^\vee$, а $g \in G^\vee$ удовлетворяет $\mathrm{Ad}_g(x) = x$.

Для присоединенного представления $\mathbf{N} = \mathfrak{g}$, $\mathscr{M}_C$ равна $(\mathfrak{t} \times T^\vee)/\mathbb{W}$, где $\mathfrak{t}$ является алгеброй Ли максимального тора T, $T^\vee$ является двойственным тором к T, а $\mathbb{W}$ является группой Вейля.

3.5.3 Квантование $\mathscr{M}_C$

В качестве побочного продукта нашей конструкции, мы получаем некоммутативную деформацию (квантованную кулоновскую ветвь) $\mathscr{A}_\hbar$, плоскую над $\mathbb{C}[\hbar]$. Она определятся как эквивариантные гомологии Бореля-Мура $H_*^{G_{\mathscr{O}} \rtimes \mathbb{C}^\times}(\mathscr{R})$, где $\mathbb{C}^\times$ является группой вращения петли Поэтому классический предел $\mathscr{A}$ наследует скобку Пуассона. Мы доказываем, что она симплектична на гладкой части $\mathscr{M}_C$. Когда $\mathbf{N} = 0$, $\mathscr{A}_\hbar$ является квантовой гамильтоновой редукцией кольца дифференциальных операторов на $G^\vee$. When $\mathbf{N} = \mathfrak{g}$, ожидается, что $\mathscr{A}_\hbar$ является сферической подалгеброй градуированной алгебры Чередника.

Квантованная кулоновская ветвь $\mathscr{A}_\hbar$ содержит $H^*_{G \times \mathbb{C}^\times}(\mathrm{pt})1$ в качестве коммутативной подалгебры (картановская подалгебра). Соответственно, есть морфизм $\varPi \colon \mathscr{M}_C \to \mathfrak{t}/\mathbb{W} \cong \mathbb{C}^\ell$, так что все функции, пропускающиеся через $\varPi$, пуассон-коммутируют. Общий слой $\varPi$ изоморфен $T^\vee$. Таким образом, $\varPi$ является интегрируемой системой в смысле Лиувилля. В примерах $\mathbf{N} = 0$ и $\mathfrak{g}$, морфизм $\varPi$ является очевидной проекцией на $\mathfrak{t}/\mathbb{W}$.

Замечания. (1) Физическое объяснение ‘квантования’ происходит из $\boldsymbol{\Omega}$-фона, т.е. $\mathbb{C}^\times$-действия на $\mathbb{R}^3$. Это должно быть близко нашей конструкции.

(2) В размерности 4 Кулоновский ветви тесно связаны с интегрируемой систе-

мой Хитчина. Но вышеуказанная интегрируемая система не является простым пределом 4-мерной интегрируемой системы даже для $(G,\mathbf{N}) = (\mathrm{SL}(2),0)$: $\mathscr{M}_C$ является пространством магнитных монополей Атии-Хитчина, которое является дополнением к бесконечному сечению в 4-мерной Кулоновской ветви для $\mathbb{R}^3 \times S^1$, тотального пространства кривых $y^2 = x^3 - x^2u + x$ Зайберга-Виттена, но гамильтониан в четырехмерном случае равен u, а в трехмерном равен $v := x - u$. Так или иначе, интегрируемая система происходит из монопольных операторов, отвечающих кохарактеру $\lambda = 0$. И из физических соображений, они должны образовывать пуассон-коммутативную подалгебру.

3.5.4 Колчанные калибровочные теории и срезы в аффинных грассманнианах

Можно явно вычислить Кулоновскую ветвь $\mathscr{M}_C$ для колчанной калибровочной теории типа ADE с оснащением или без оного.

Сначала рассмотрим неоснащенный случай. Нам дан колчан $Q = (I,H)$ типа ADE и I-градуированное векторное пространство $V = \bigoplus V_i$. Здесь I (соотв. H) является множеством вершин (соотв. ориентированных стрелок) колчана Q. Мы рассматриваем соответствующую колчанную калибровочную теорию: калибровочная группа равна $\mathrm{GL}(V) = \prod \mathrm{GL}(V_i)$, ее представление равно $\mathbf{N} = \bigoplus_{h\in H} \mathrm{Hom}(V_{\mathrm{out}(h)}, V_{\mathrm{in}(h)})$, где $\mathrm{out}(h)$ (соотв. $\mathrm{in}(h)$) является начальной (соотв. конечной) вершиной стрелки $h \in H$. Наш первый результат — это изоморфизм $\mathscr{M}_C \cong \overset{\circ}{Z}{}^{\alpha}$, где $\overset{\circ}{Z}{}^{\alpha}$ — это пространство модулей базированных отображений из $\mathbb{CP}^1$ в пространство флагов $\mathscr{B} = G/B$ степени α, где группа G задается диаграммой Дынкина типа ADE колчана Q, а α задается вектором размерности $\dim V = (\dim V_i)_{i\in I}$.

В физической литературе приводятся аргументы в пользу того, что $\mathscr{M}_C$ является пространством модулей монополей на $\mathbb{R}^3$. Здесь калибровочной группой является максимальная компактная подгруппа $G_c = G_{ADE,c}$ группы G, значит, она определяется типом колчана, как выше. Ожидается, что эти пространства модулей изоформны как комплексные многообразия.

Мы также обобщаем этот результат на аффинные колчаны. Мы доказываем, что $\mathscr{M}_C$ является частичной компактификацией пространства модулей параболических оснащенных G-расслоений над $\mathbb{CP}^1 \times \mathbb{CP}^1$. Точнее, мы доказываем это при предположении, что это пространство модулей нормально. Этот факт известен только в типе A. Это пространство, видимо, изоморфно частичной компактификации Уленбек пространства модулей G_c-калоронов ($= G_c$-инстантонов на $\mathbb{R}^3 \times S^1$).

Для доказательства изоморфизма $\mathscr{M}_C \cong \overset{\circ}{Z}{}^{\alpha}$ мы используем следующий критерий: Пусть есть морфизм $\Pi\colon \mathscr{M} \to \mathfrak{t}(V)/\mathbb{W}$, такой что $\mathscr{M}$ — коэн-маколеево аффинное многообразие, а Π плоско. Здесь $\mathfrak{t}(V)$ — алгебра Ли максимального тора $T(V)$ группы $\mathrm{GL}(V)$, а $\mathbb{W}$ — группа Вейля $\mathrm{GL}(V)$. Если есть бирациональный изоморфизм $\Xi^\circ\colon \mathscr{M} \overset{\approx}{\dashrightarrow} \mathscr{M}_C$ над $\mathfrak{t}(V)/\mathbb{W}$, являющийся бирегулярным вне коразмерности 2, то он продолжается до бирегулярного изоморфизма всюду. Чтобы применить этот критерий к $\mathscr{M} = \overset{\circ}{Z}{}^{\alpha}$, мы установим требуемые свойства. Чтобы построить Ξ°, напомним, что $\mathscr{M}_C$ бирационально изоморфно $T^*T(V)^\vee/\mathbb{W}$ над дополнением к объединению гиперплоскостей (обобщенных корневых гиперплосктей) в $\mathfrak{t}(V)/\mathbb{W}$ То же верно и для $\overset{\circ}{Z}{}^\alpha$ благодаря свойству факторизации. Это определяет изоморфизм Ξ° вне коразмерности 1, и остается проверить, что Ξ° продолжается в общую точку каждой гиперплоскости. Эта проверка делается опять с использованием свойства факторизации. Это свойство хорошо известно в контексте пространства застав Z^α, являющегося естественной частичной компактификацией $\overset{\circ}{Z}{}^\alpha$.

Замечание. Рассмотрим пространство модулей $\overset{\circ}{Z}{}^\alpha$ базированных рациональных отображений $\mathbb{CP}^1 \to G/B$ степени α, а также пространство модулей G_c-монополей топологического заряда α. Известно, что между точками этих пространствами модулей есть биекция. Очень вероятно, что эта биекция происходит из изоморфизма комплексных многообразий, но в имеющейся литературе доказательство этого факта нам найти не удалось. В типе A_1 это можно доказать, так как вышеуказанная биекция происходит из изоморфизма пространства модулей решений уравнения Нама и пространства модулей базированных отображений. В аффинном типе A, аналогичная биекция была построена Такаямой, и неясно, происходит ли она из изоморфизма комплексных многообразий.

Теперь рассмотрим случай оснащенных колчанов. Задано дополнительное I-градуированное векторное пространство $W = \bigoplus W_i$, и мы прибавляем $\bigoplus \mathrm{Hom}(W_i, V_i)$ к $\mathbf{N}$. Ответ опять был известен заранее из физической литературы: $\mathscr{M}_C$ является пространством модулей сингулярных G_c-монополей на $\mathbb{R}^3$. Два ковеса $\lambda, \mu \colon S^1 \to G_c$ в точках 0, ∞ пространства $\mathbb{R}^3$ задаются векторами размерностей оснащающих и обычных вершин, соответственно. Мы не будем пользоваться пространством модулей сингулярных монополей и не будем объяснять просхождения ковесов λ и μ. Но подчеркнем, что нам придется использовать частичную компактификацию Уленбек.[1] Этот факт имеет большое значение, как будет объяснено ниже.

С другой стороны, предполагалось, что $\mathscr{M}_C$ является оснащенным пространством модулей S^1-эквиваринтных инстантонов на $\mathbb{R}^4$, когда μ доминантно. Есть тонкое различие между S^1-эквивариантными инстантонами и сингулярными монополями. Инстантоны определены только для доминантных ковесов μ, но в этом случае ожидается, что соответствующие пространства модулей изоморфны как комплексные многообразия.

Чтобы вычислить $\mathscr{M}_C$, будем пользоваться тем же критерием, что и в неоснащенном случае. В частности, нам нужно аффинное алгебраическое многообразие или по крайней мере комплексное аналитическое многообразие как кандидат на роль $\mathscr{M}$. Для этой цели пространство модулей сингулярных монополей не подходит, так как комплексная структура на его частичной компактификации Уленбек на построена в литературе, за исключением

---

[1] частичная компактификация Уленбек необходима из-за выпузыривания в точке 0. Это можно понять, рассматривая сингулярные монополи как S^1-эквивариантные инстантоны на Taub-NUT пространстве. Это выпузыривание называется монопольным выпузыриванием в физической литературе.

случая типа A.

Зато частичная компактификация Уленбек оснащенного пространства модулей S^1-эквивариантных инстантонов на $\mathbb{R}^4$ изоморфна срезу $\overline{\mathscr{W}}^{\lambda}_{\mu}$ к $G[[z]]$-орбите в аффинном Грассманниане Gr_G в замыкании другой орбиты. Это вполне осмысленная альтернатива, так как такие срезы тесно связаны с пространствами застав Z^{α}, и про них есть обширная литература.

Первая часть статьи [37] посвящена конструкции обобщению срезов $\overline{\mathscr{W}}^{\lambda}_{\mu}$, которое имеет смысл даже для недоминантных μ. Мы называем их обобщенными срезами и сохраняем для них то же обозначение. Эти новые пространства должны удовлетворять нескольким условиям. Во-первых, мы хотим быть в состоянии применить наш критерий к обобщенным срезам. Значит, главное условие — это наличие свойства факторизации. Во-вторых, нам нужен доминантный бирациональный морфизм $\overset{\circ}{Z}{}^{\alpha^*} \to \overline{\mathscr{W}}^{\lambda}_{\mu}$, каковой имеется для Кулоновских ветвей. Эти предполагаемые свойства позволили нам найти правильное определение обобщенных срезов. Ключевым утверждением первой части статьи [37] является описание среза $\overline{\mathscr{W}}^{\lambda}_{\mu}$ как некоего аффинного раздутия пространства застав Z^{α^*} вне коразмерности 2.

Мы определяем $\overline{\mathscr{W}}^{\lambda}_{\mu}$ как пространство модулей G-расслоений на $\mathbb{P}^1$ с тривиализацией вне 0 и с B-структурой. Также заметим, что это пространство естественно вкладывается в $G(z)$, и образ этого вложения совпадает с пространством матриц рассеяния сингулярных монополей.[2]

Мы предполагаем, что Кулоновские ветви оснащенных аффинных колчанных калибровочных теорий изоморфны частичным компактификациям Уленбек пространств модулей инстантонов на Taub-NUT пространстве, инвариантных относительно действия циклической группы. Это утверждение not является точным, так как 1) мы не знаем, как снабдить эти пространства модулей структурой аффинного алгебраического многообразия; 2) мы не уточняем, какое именно действие циклической группы рассматривается. Кроме того, мы должны получить пространства модулей сингулярных монополей, если заменим циклическую группу на окружность S^1. Значит, они должны быть изоморфны обобщенным срезам $\overline{\mathscr{W}}^{\lambda}_{\mu}$, но мы не доказываем этот упрощенный вариант гипотезы.

Замечание. Кронхаймер доказал, что сингулярные монополи совпадают с S^1-эквивариантными инстантонами на Taub-NUT пространстве. Пространство модулей инстантонов на Taub-NUT пространстве, в свою очередь, изоморфно луковому многообразию Черкиса, хотя математически строгого доказательства полноты мы не знаем. Множество его S^1-неподвижных точек тоже является луковым многообразием Черкиса другого типа. Технически, луковые многообразия гораздо более доступны, нежели пространства модулей сингулярных монополей. Такаяма и Накаджима отождествили Кулоновскую ветвь $\mathscr{M}_C$

---

[2] Мы узнали об этом от Д.Гайотто и Дж.Камницера во время работы над статьей.

оснащенной колчанной калибровочной теории типа A с луковым многообразием Черкиса. Этот метод применим в аффинном типе A, который гипотетически отвечает пространству модулей $\mathbb{Z}/k\mathbb{Z}$-эквивариантных инстантонов на Taub-NUT пространстве.

Наконец, в приложениях к [37], написанных совместно с Дж.Камницером, Р.Кодерой, Б.Уэбстером и А.Уиксом, мы изучаем вложение квантованной Кулоновской ветви в кольцо разностных операторов. Так возникают различные разностные операторы, встречающиеся в литературе, как например операторы Макдональда или ГКЛО-операторы из теории представлений Янгианов. В частности, мы доказываем, что квантованная Кулоновская ветвь оснащенной колчанной калибровочной теории типа ADE изоморфна обрезанному сдвинутому янгиану при выполнении некоторых условий доминантности.

3.5.5 Кольцевые объекты в эквивариантной производной категории на аффинном грассманниане

Напомним, что $\mathscr{M}_C$ определяется как аффинное алгебраическое многообразие с координатным кольцом равным кольцу эквивариантных гомологий Бореля-Мура $H_*^{G_\mathscr{O}}(\mathscr{R})$ пространства троек $\mathscr{R}$. Произведение задается сверткой. Здесь $G_\mathscr{O}$ — это группа $\mathbb{C}[[z]]$-значных точек G.

По построению, имеется проекция $\pi\colon \mathscr{R} \to \mathrm{Gr}_G$, где Gr_G — аффинный Грассманниан группы G. Поэтому возникает естественный объект A в подходящем Ind-пополнении $D_G(\mathrm{Gr}_G)$ производной $G_\mathscr{O}$-эквивариантной конструктивной категории пучков на Gr_G, определенный как $\pi_*\omega_\mathscr{R}[-2\dim \mathbf{N}_\mathscr{O}]$, где $\omega_\mathscr{R}$ является дуализирующим комплексом на $\mathscr{R}$. Мы можем восстановить $H_*^{G_\mathscr{O}}(\mathscr{R})$ как $H^*_{G_\mathscr{O}}(\mathrm{Gr}_G, \mathsf{A})$. Более того, конструкция произведения с помощью свертки задает гомоморфизм $\mathsf{m}\colon \mathsf{A}\star\mathsf{A} \to \mathsf{A}$, где $\star$ является сверткой в $D_G(\mathrm{Gr}_G)$. Это ассоциативное умножение на A. Так мы получаем индуцированное умножение на $H^*_{G_\mathscr{O}}(\mathrm{Gr}_G, \mathsf{A})$ из m, которое является ни чем иным, как произведением на $H_*^{G_\mathscr{O}}(\mathscr{R})$ определенным в [36]. Мы доказываем, что это коммутативная алгебра в $D_G(\mathrm{Gr}_G)$, а потому индуцированное умножение на $H^*_{G_\mathscr{O}}(\mathrm{Gr}_G, \mathsf{A})$ коммутативно. Это уже второе доказательство коммутативности умножения на $H_*^{G_\mathscr{O}}(\mathscr{R})$, и оно более концептуально, нежели исходное доказательство в [36].

Ввиду исходного предложения [35], мы ожидаем, что эта конструкция может быть обобщена на случай, когда $\mathbf{M}$ необязательно имеет вид $\mathbf{N}\oplus\mathbf{N}^*$.

В любом случае, если есть коммутативный кольцевой объект A в $D_G(\mathrm{Gr}_G)$, то мы получаем структуру коммутативного кольца на $H^*_{G_\mathscr{O}}(\mathrm{Gr}_G, \mathsf{A})$, и можем определить новую 'Кулоновскую ветвь' как его спектр.

Наше новое определение Кулоновской ветви через (A, m) напоминает конструкцию Безрукавникова-Гинзбурга нильпотентного конуса и его разрешения Спрингера в терминах извращенного пучка $\mathsf{A}^{\mathrm{reg}}$. Здесь $\mathsf{A}^{\mathrm{reg}}$ обозначает извращенный пучок, отвечающий регулярному представлению $\mathbb{C}[G^\vee]$ Ленглендс-двойственной группы $G^\vee$ при геометрическом соответствии Сатаке, а потому являщийся коммутативным кольцевым объектом в $\mathrm{Perv}_{G_\mathscr{O}}(\mathrm{Gr}_G)$. Будем называть его регулярным пучком. Он равен $\bigoplus_\lambda (V^\lambda_{G^\vee})^\vee \otimes_\mathbb{C} \mathrm{IC}(\overline{\mathrm{Gr}}^\lambda_G)$, где $(V^\lambda_{G^\vee})^\vee$ двойственное неприводимое представление $G^\vee$ со старшим весом λ, а $\overline{\mathrm{Gr}}^\lambda_G$ является замыканием $G_\mathscr{O}$-орбиты точки z^λ в Gr_G. Мы доказываем, что $\mathsf{A}^{\mathrm{reg}}$ можно реализовать как вариант вышеуказанного A для колчанной калибровочной теории типа A. (Точнее, мы рассматриваем оснащенную колчанную калибровочную теорию типа A_{N-1} с $\dim V = (N-1, N-2, \dots, 1)$, $\dim W = (N, 0, \dots, 0)$, и берем прямой образ на $\mathrm{Gr}_{\mathrm{PGL}(N)}$.) Возможно, эта конструкция обобщается на другие классические типы BCD, если только получится обобщить наше определение на случай, когда представление $\mathbf{M}$ необязательно имеет вид $\mathbf{N} \oplus \mathbf{N}^*$ (кокасательный тип). Однако, мы не ожидаем, что $\mathsf{A}^{\mathrm{reg}}$ может быть построен аналогичной процедурой для исключительных групп. Таким образом, в $D_G(\mathrm{Gr}_G)$ есть больше примеров кольцевых объектов, нежели может выдать наша конструкция.

Если нам дан набор $\{\mathsf{A}_i\}$ коммутативных кольцевых объектов $D_G(\mathrm{Gr}_G)$, мы можем построить новый коммутативный кольцевой объект $i^!_\Delta(\boxtimes \mathsf{A}_i)$, где $i_\Delta \colon \mathrm{Gr}_G \to \prod_i \mathrm{Gr}_G$ — это диагональное вложение. Мы называем эту конструкцию склейкой (см. краткий обзор и ссылки на физическую литературу в [35, 5(i)]).

Второй целью статьи [38] является изучение Кулоновких ветвей, связанных со звездным колчаном. Это пример склейки кольцевого объекта из таковых для ног данного колчана. Ожидается, что Кулоновские ветви звездно-колчанных калибровочных теорий являются гипотетическими Хиггсовыми ветвями 3-мерных сицилианских теорий типа A (см. обзор для математиков в [35, 3(iii)]). Мы проверяем бóльшую часть ожидаемых свойств этих Хиггсовых ветвей. Недавно В.Гинзбург и Д.Каждан построили голоморфные симплектические многообразия, имеющие большинство ожидаемых свойств для произвольного типа. Конструкция $\mathsf{A}^{\mathrm{reg}}$ как пучка A доказывает, что Кулоновские ветви звездноколчанных калибровочных теорий изоморфны многообразиям Гинзбурга-Каждана в типе A. Мы проверяем два оставшихся свойства, а именно отождествление многообразий Гинзбурга-Каждана типов A_1, A_2 с $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$ и с минимальной нильпотентной орбитой E_6 соответственно.

Мы не ожидаем, что многообразия Гинзбурга-Каждана для исключительных групп являются Кулоновскими ветвями калибровочных теорий. Это совместимо с ожиданием физиков, что трехмерные сицилианские теории не являются лагранжевыми теориями. Тем не менее, трехмерные сицилианские теории считаются корректно определенными квантовыми теориями поля. И таких примеров много. Это согласуется с нашим наблюдением, что

- Есть примеры кольцевых объектов в $D_G(\mathrm{Gr}_G)$, которые не возникают ни из какой пары $(G, \mathbf{N})$,

– Есть процедуры производства новых кольцевых объектов, такие как склейка и гамильтонова редукция.

Таким образом, мы надеемся, что кольцевые объекты окажутся полезными для изучения нелагранжевых теорий.

В приложении A мы строим гамильтоново действие комплексной редуктивной группы на Кулоновской ветви оснащенной колчанной калибровочной теории, интегрируя гамильтоновы векторные поля функций, введенных в [37, Appendix B]. Это действие продолжает действие тора, построенное в [36, §3(v)] из градуировки на $H_*^{G_\mathscr{O}}(\mathscr{R})$. Регулярный пучок $\mathsf{A}^{\mathrm{reg}}$ снабжен $G^\vee$-действием, которое отождествляется с вышеописанным действием для оснащенной колчанной калибровочной теории.

Обзор этих результатов опубликован в [39]. K-теорные аналоги этой теории разработаны в статьях [40] и [41].

Список литературы

[1] N. Fujita, Polyhedral realizations of crystal bases and convex-geometric Demazure operators, arXiv:1810.12480 [math.AG]

[2] V. Kiritchenko, Divided difference operators on convex polytopes, Advanced Studies in Pure Mathematics, Mathematical Society of Japan, 2016, 161–185

[3] V.Kiritchenko, Newton-Okounkov polytopes of Bott-Samelson varieties as Minkowski sums, arXiv:1801.00334 [math.AG]

[4] V. Kiritchenko, Convex geometric push-pull operators and FFLV polytopes, to appear in Oberwolfach Reports

[5] V. Kiritchenko, Newton–Okounkov polytopes of flag varieties for classical groups, Arnold Mathematical Journal, doi 10.1007/s40598-019-00125-8

[6] I. N. Bernstein, I. M. Gelfand, and S. I. Gelfand. Schubert cells, and the cohomology of the spaces G/P. Uspehi Mat. Nauk, 28(3(171)): 3–26, 1973.

[7] Sara Billey and Mark Haiman. Schubert polynomials for the classical groups, Journal of the American Mathematical Society 8.2 (1995): 443–482.

[8] Sergey Fomin and Anatol Kirillov. Combinatorial B_n-analogues of Schubert polynomials, Transactions of the American Mathematical Society 348.9 (1996): 3591–3620.

[9] Sergey Fomin and Anatol N. Kirillov, The Yang-Baxter equation, symmetric functions, and Schubert polynomials, Proceedings of the 5th Conference on Formal Power Series and Algebraic Combinatorics (Florence, 1993), vol. 153, 1996, pp. 123–143.

[10] Takeshi Ikeda, Leonardo Mihalcea, Hiroshi Naruse, Double Schubert polynomials for the classical groups, Advances in Mathematics, 226 (1), 2011, 840–886.

[11] Lascoux, Alain; Schützenberger, Marcel-Paul. Polynômes de Schubert. C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 294 (1982), no. 13, 447–450.

[12] S. Abeasis, A. Del Fraб Degenerations for the representations of an equi-oriented quiver of type A_m. Analisi Funzionale e Applicazioni. Suppl. B.U.M.I-Vol. 2 (1980).

[13] I. Arzhantsev, Flag varieties as equivariant compactifications of $\mathbb{G}_a^n$, Proceedings of the American Mathematical Society, vol. 139 (2011), no. 3, pp. 783–786.

[14] G. Cerulli Irelli, E. Feigin, M. Reineke, Quiver Grassmannians and degenerate flag varieties, Algebra & Number Theory, 6-1 (2012), 165–194.

[15] G. Cerulli Irelli, E. Feigin, M. Reineke, Homological approach to the Hernandez-Leclerc construction and quiver varieties, Representation Theory 2014, no. 18, pp.1–14..

[16] G. Cerulli Irelli, E. Feigin, M. Reineke, Desingularization of quiver Grassmannians for Dynkin quivers, Advances in Mathematics (2013), no. 245, pp. 182–207.

[17] G. Cerulli Irelli, E. Feigin, M. Reineke, Degenerate flag varieties: moment graphs and Schröder numbers, Journal of Algebraic Combinatorics, Volume 38, Issue 1 (2013), pp. 159–189.

[18] G. Cerulli Irelli, E. Feigin, M. Reineke, Schubert Quiver Grassmannians, Algebras and Representation Theory (2017), vol. 20 (1), pp. 147–161.

[19] G. Cerulli Irelli, X. Fang, E. Feigin, G. Fourier, M. Reineke, Linear degenerations of flag varieties. Math. Z. 287 (2017), no. 1–2, 615–654.

[20] G. Cerulli Irelli, X. Fang, E. Feigin, G. Fourier, M. Reineke, Linear degenerations of flag varieties: partial flags, defining equations, and group actions, arxiv.org/abs/1901.11020.

[21] G. Cerulli Irelli, M. Lanini, Degenerate flag varieties of type A and C are Schubert varieties. Internat. Math. Res. Notices, Volume 2015, Issue 15, 1 January 2015, Pages 6353–6374.

[22] X. Fang, G. Fourier, Torus fixed points in Schubert varieties and normalized median Genocchi numbers, Sém. Lothar. Combin. 75 (2015), Art. B75f, 12 pp.

[23] E. Feigin, Degenerate flag varieties and the median Genocchi numbers. Math. Res. Lett. 18 (2011), no. 6, 1163–1178.

[24] E. Feigin, $\mathbb{G}_a^M$ degeneration of flag varieties, Selecta Mathematica: Volume 18, Issue 3 (2012), pp. 513–537.

[25] E. Feigin, M. Finkelberg, Degenerate flag varieties of type A: Forbenius splitting and BW theorem. Math. Z. 275 (2013), no. 1–2, 55–77.

[26] E. Feigin, G. Fourier, P. Littelmann, PBW filtration and bases for irreducible modules in type $\mathtt{A}_n$. Transform. Groups 16 (2011), no. 1, 71–89.

[27] X. Fang, E. Feigin, G. Fourier, I. Makhlin, Weighted PBW degenerations and tropical flag varieties, Communications in Contemporary Mathematics, Vol. 21, No. 01, 1850016 (2019).

[28] G. Fourier, PBW-degenerated Demazure modules and Schubert varieties for triangular elements. Journal of Combinatorial Theory, Series A, Volume 139, April 2016, Pages 132–152.

[29] P. Gabriel, Unzerlegbare Darstellungen. I, Manuscripta Mathematica (1972), 6: 71–103.

[30] O. Lorscheid, T. Weist, Plücker Relations for Quiver Grassmannians, Algebras and Representation Theory, February 2019, Volume 22, Issue 1, pp 211–218.

[31] J. Riordan, A budget of rhyme scheme counts. Second International Conference on Combinatorial Mathematics (New York, 1978), pp. 455–465, Ann. New York Acad. Sci., 319, New York Acad. Sci., New York, 1979.

[32] A. Shepelevtseva, V. Timorin, Invariant spanning trees for quadratic rational maps, Arnold Mathematical Journal 2019, DOI: `https://doi.org/10.1007/s40598-019-00123-w`

[33] A. Blokh, L. Oversteegen, R. Ptacek, V. Timorin, Models for spaces of dendritic polynomials // Transactions of the American Mathematical Society 2019. Vol. 372. No. 7. P. 4829–4849.

[34] A. Blokh, L. Oversteegen, V. Timorin, Dynamical generation of parameter laminations, to appear in Contemporary Mathematics.

[35] H. Nakajima, Towards a mathematical definition of Coulomb branches of 3-dimensional $\mathscr{N}=4$ gauge theories, I., Adv. Theor. Math. Phys. 20 (2016), no. 3, 595–669.

[36] Braverman, Alexander; Finkelberg, Michael; Nakajima, Hiraku Towards a mathematical definition of Coulomb branches of 3-dimensional $\mathscr{N}=4$ gauge theories, II, Advances in Theoretical and Mathematical Physics 22 (2018), no. 5, 1071–1147.

[37] Braverman, Alexander; Finkelberg, Michael; Nakajima, Hiraku Coulomb branches of $3d$ $\mathscr{N}=4$ quiver gauge theories and slices in the affine Grassmannian, Advances in Theoretical and Mathematical Physics 23 (2019), no. 1, 75–166.

[38] Braverman, Alexander; Finkelberg, Michael; Nakajima, Hiraku Ring objects in the equivariant Satake category arising from Coulomb branches, Advances in Theoretical and Mathematical Physics 23 (2019), no. 2, 253–344.

[39] Braverman, Alexander; Finkelberg, Michael Coulomb Branches of 3-Dimensional Gauge Theories and Related Structures, Lecture Notes in Mathematics 2248 (2019), 1–52.

[40] Finkelberg, Michael; Tsymbaliuk, Alexander Shifted Quantum Affine Algebras: Integral Forms in Type A, Arnold Mathematical Journal 5 (2019), no. 2-3, 197–283.

[41] Finkelberg, Michael; Tsymbaliuk, Alexander Multiplicative slices, relativistic Toda and shifted quantum affine algebras, Progress in Mathematics 330 (2019), 133–304.

4 Классическая геометрия

4.1 Исследование групп автоморфизмов и бирациональной жесткости многообразий Фано и приложения к исследований подгрупп группы Кремоны

Сотрудником лаборатории А. Авиловым было продолжено изучение вопрос классификации конечных подгрупп в трехмерной группе Кремоны $\mathrm{Cr}_3(\Bbbk)$, где $\Bbbk$ – алгебраически замкнутое поле характеристики нуль. Аналогичный вопрос для поверхностей был полностью решен в знаменитой работе И. Долгачева и В. Исковских [4]. При помощи эквивариантного разрешения особенностей и эквивариантной программы минимальных моделей этот вопрос сводится к исследованию конечных подгрупп $G \subset \mathrm{Aut}(X)$ в группах автоморфизмов $\Bbbk$-рациональных трехмерных многообразий X специального вида. А именно, особенности X являются терминальными $G\mathbb{Q}$-факториальными, и либо ранг инвариантной группы Пикара $\mathrm{Pic}(X)^G$ равен 1, либо имеется морфизм $f : X \to Y$ на многообразие меньшей размерности такой, что канонический пучок является относительно антиобильным, а ранг относительной инвариантной группы Пикара $\mathrm{Pic}(X/Y)^G$ равен 1. Были рассматрены многообразия первого типа с дополнительным условием: канонический класс делится на 2 в группе Пикара (такие многообразия называются G-многообразиями дель Пеццо). Особый интерес представляют те G-многообразия, которые не перестраиваются эквивариантно в другие G-расслоения Мори, такие многообразия называются G-эквивариантно бирационально жесткими. В предыдущих работах Авилова (см.[2], [3]) были классифицированы эквивариантно бирационально жесткие многообразия дель Пеццо степеней 3 и 4. В случае степени 4 оказалось, что G- бирационально жесткими могут быть только 5 отдельных многообразий и одно однопараметрическое семейство. В случае степени 3 классификация устроена еще проще – только два многообразия являются бирационально жесткими относительно всей группы автоморфизмов. Для одного из них были классифицированы все подгруппы полной группы автоморфизмов, относительно которых многообразие является эквивариантно бирационально жестким.

В отчетный период продолжалось исследование многообразий дель Пеццо степеней 2 и 1, имеющих только нодальные особенности. Поскольку для приложений к изучению группы Кремоны нас интересуют только рациональные многообразия, то, согласно результату Чельцова, Шрамова и Пржиялковского (см. [5]), имеет смысл изучать только многообразия, имеющие более 6 особенностей. Ранее были изучены многообразия, имеющие число особенностей, которое больше 6, и при этом не равно 12 и 16. Оказалось, что бирационально жестких многообразий такого типа очень мало. В случае 15 особенностей в этом году была опубликована соответствующая статья, см. [1]. В этом году было продолжено изучение оставшихся случаев 12 и 16 особенностей. Оказалось, что группы автоморфизмов в этих случаях могут быть довольно большими, и в некоторых случаях удалось показать, что у линейных систем определенного вида нет неканонических центров и, следовательно, линков Саркисова. Однако для меньших групп автоморфизмов ситуация существенно сложнее, и в этих случаях имеются только некоторые частные результаты.

В случае степени 1 группа автоморфизмов многообразия Фано каноническим образом вкладывается в группу автоморфизмов проективной плоскости. Имеется гипотеза, что в этом случае многообразие Фано является G-бирационально жестким в том и только том случае, если на проективной плоскости нет неподвижных точек относительно этого действия группы. В одну сторону эта гипотеза очевидна. Недавно эта гипотеза была проверена Ахмадинежадом, Чельцовым, Паком и Шрамовым в случае многообразий с максимально возможным количеством особенностей (см. [6]). В этом году проводилась работа по проверке этой гипотезы в общем случае. Ранее были описаны возможные группы автоморфизмов и уравнения соответствующих многообразий. Для некоторых из них (в случае большой группы автоморфизмов) удалось описать теоретически возможные неканонические центры линейных систем и показать, что перестройки, связанные с этими центрами, не дают линков Саркисова. В некоторых из оставшихся случаев удалось исключить некоторые возможности для неканонических центров и, соответственно, линков Саркисова, но не для всех. В следующем году предполагается довести эту работу до конца.

Список литературы

[1] А. Авилов Бирегулярная и бирациональная геометрия двойных квартик с 15 обыкновенными двойными точками, Изв. РАН: серия мат. 83:3 (2019), 5–14

[2] А. Авилов, Автоморфизмы трехмерных многообразий, представимых в виде пересечения двух квадрик, Матем. сб. 2016, 207:3, 3–18.

[3] А. Авилов, Автоморфизмы особых трехмерных кубических гиперповерхностей и группа Кремоны, Матем. заметки 2016, 100:3, 461–464.

[4] I. Dolgachev, V. Iskovskikh, Finite subgroups of the plane Cremona group, In Algebra, arithmetic, and geometry: in honor of Yu. I. Manin. Vol. I, Progr. Math., 269 (2009), 443–548.

[5] I. Cheltsov, V. Przyjalkowski, C. Shramov, Which quartic double solids are rational? J. of Alg. Geom. 2019, 28, 201–243

[6] H. Ahmadinezhad, I. Cheltsov, J. Park, C. Shramov, Double Veronese cones with 28 nodes ArXiv e-print 1910.10533.

4.2 Автоморфизмы поверхностей Севери–Брауэра

Многообразием Севери–Брауэра называется форма проективного пространства. Другими словами, это многообразие, которое становится изоморфно проективному пространству после перехода к алгебраическому замыканию основного поля. Имеется хорошо проработанная классическая теория таких многообразий, связывающая их с центральными простыми алгебрами. В частности, известно, что многообразие Севери–Брауэра, имеющее точку над полем определения, само изоморфно проективному пространству.

Одномерные многообразия Севери–Брауэра — это коники. Несмотря на то, что группы автоморфизмов коник можно изучать совершенно элементарными методами, один из красивейших результатов о них был доказан только в 2015 году Т. Бандман и Ю. Зархиным.

Теорема. Пусть K — поле характеристики нуль, содержащее все корни из единицы. Пусть C — коника, определенная над K. Предположим, что C не имеет K-точек. Тогда любая конечная подгруппа в группе автоморфизмов C состоит не более чем из 4 элементов.

В 2016 году сотрудниками лаборатории Ю. Прохоровым и К. Шрамовым было получено частичное обобщение этой теоремы на двумерный случай.

Теорема. Пусть K — поле характеристики нуль, содержащее все корни из единицы. Пусть S — геометрически рациональная поверхность над K. Предположим, что S имеет K-точку. Тогда либо S рациональна над K, либо порядки конечных подгрупп в группе бирациональных автоморфизмов S ограничены.

Несколько более общий результат был доказан в 2018 году В. Вологодским и К. Шрамовым.

Теорема. Пусть K — поле характеристики нуль, содержащее все корни из единицы. Пусть S — геометрически рациональная поверхность над K. Тогда либо S бирациональна произведению коники и проективной прямой над K, либо порядки конечных подгрупп в группе бирациональных автоморфизмов S ограничены.

Из последнего результата легко вывести

Следствие 1. Пусть K — поле характеристики нуль, содержащее все корни из единицы. Пусть S — поверхность Севери–Брауэра над K. Предположим, что S не изоморфна проективной плоскости. Тогда порядки конечных подгрупп в группе бирациональных автоморфизмов S ограничены.

В 2019 году К. Шрамов получил более точные результаты о структуре конечных групп, действующих бирациональными автоморфизмами поверхностей Севери–Брауэра. А именно, была доказана следующая теорема.

Теорема. Пусть S — поверхность Севери–Брауэра над полем K нулевой характеристики, не имеющая K-точек. Пусть $G \subset \mathrm{Bir}(S)$ — конечная подгруппа. Выполнены следующие утверждения.

- Группа G имеет нечетный порядок;
- Группа G либо является абелевой, либо содержит нормальную абелеву подгруппу индекса 3;
- Если поле K содержит все корни из 1, то G является абелевой 3-группой порядка не более 27;

Основным техническим шагом при доказательстве этого результата было следующее утверждение, которое интересно и само по себе.

Предложение. Пусть S — поверхность Севери–Брауэра над полем нулевой характеристики, не имеющая точек над этим полем. Пусть $G \subset \mathrm{Bir}(S)$ — конечная неабелева подгруппа. Тогда G сопряжена подгруппе группы $\mathrm{Aut}(S)$.

Интересно сравнить утверждение (ii) из предыдущей теоремы с его хорошо известным аналогом для случая проективной плоскости (то есть единственной поверхности Севери–Брауэра, имеющей K-точку. В этом случае имеется результат Ж.-П. Серра, согласно которому любая конечная подгруппа в группе бирациональных автоморфизмов, содержит нормальную абелеву подгруппу, индекс которой делит число $2^{10} \cdot 3^4 \cdot 5^2 \cdot 7$. Другая версия этого результата, принадлежащая Е. Ясинскому, утверждает, что любая конечная подгруппа в группе бирациональных автоморфизмов, содержит нормальную абелеву подгруппу, индекс которой не превосходит 7200, причем эту оценку нельзя улучшить.

Были опубликованы препринты.

Список литературы

[1] C. Shramov, Birational automorphisms of Severi-Brauer surfaces, arXiv:1907.04364

4.3 Многообразия дель Пеццо степени 1 с 28 особыми точками

Алгебраические многообразия с максимальным возможным количеством изолированных особенностей часто обладают интересными геометрическими свойствами. Примером такого многообразия является кубика Сегре; это трехмерная кубическая гиперповерхность с 10 особыми точками, что является максимально возможным количеством особенностей в этом классе многообразий. Наряду с трехмерными кубиками, которые являются многообразиями дель Пеццо степени 3, с этой точки зрения рассматривались трехмерные многообразия дель Пеццо степени 2 и 1. В первом случае известно, что максимальное количество изолированных особенностей для таких многообразий равно 16, и многообразия с таким количеством особых точек являются двойными накрытиями $\mathbb{P}^3$ с ветвлением в куммеровой квартике. Во втором случае известно, что максимальное количество изолированных особенностей равно 28. Бирациональная конструкция для многообразий дель Пеццо с максимально возможным количеством особенностей была предложена несколько лет назад Ю. Прохоровым. Однако эта конструкция не позволяет непосредственно получить явную классификацию таких многообразий, так как каждое многообразие может быть получено такой конструкцией многими способами.

В 2019 году в совместной работе Х. Ахмадинежада, Дж. Парка, и сотрудников лаборатории И. Чельцова и К. Шрамова была получена классификация многообразий дель Пеццо степени 1 с 28 особыми точками. А именно, было установлено естественное взаимно-однозначное соответствие между множеством таких многообразий и множеством неособых плоских кривых степени 4. Если V — многообразие дель Пеццо степени 1 с 28 особыми точками, то его полу-антиканоническая линейная система $|-\frac{1}{2}K_V|$ задает рациональное эллиптическое расслоение $V \dashrightarrow \mathbb{P}^2$, дискриминантная кривая которого имеет степень 12. При этом проективно двойственная кривая к Δ является неособой кривой C степени 4. Обратно, если C — неособая плоская кривая степени 4, выберем четную тета-характеристику на C. По этим данным можно построить связку квадрик в $\mathbb{P}^3$, базисное множество которой состоит из 8 различных точек в общем положении. Выбирая 7 из них и применяя бирациональную конструкцию Ю. Прохорова, мы получаем многообразие дель Пеццо V степени 1 с 28 особыми точками. Х. Ахмадинежад, Дж. Парк, И. Чельцов и К. Шрамов проверили, что результат этой конструкции зависит только от квартики C, то есть не зависит от выбора тета-характеристики на C и от выбора семи точек из восьмерки базисных точек связки квадрик. Также они проверили, что описанные выше две конструкции являются взаимно обратными. Кроме того, был получен второй, более явный, способ построения многообразия V по кривой C. Он позволяет явно выписать уравнение V во взвешенном проективном пространстве $\mathbb{P}(1,1,1,2,3)$ в терминах ковариантов квартики C, задающих на двойственной проективной плоскости прямые, которые пересекают C в четверке точек с эквиангармоническим (соответственно, гармоническим) двойным отношением.

Полученные конструкции были применены к изучению групп автоморфизмов многообразия дель Пеццо степени 1 с максимальным количеством изолированных особенностей и их вложений в группу Кремоны ранга 3. А именно, были классифицированы все группы G, действующие на многообразии V данного типа таким образом, что V является G-бирационально жестким. Как следствие, было впервые построен пример бесконечного числа попарно несопряженных вложений симметрической группы S_4 в группу Кремоны ранга 3, а также был построен новый пример вложения простой группы Клейна из 168 элементов в группу Кремоны ранга 3.

Были опубликованы препринты.

Список литературы

[1] H. Ahmadinezhad, I. Cheltsov, J. Park, C. Shramov, Double Veronese cones with 28 nodes, arXiv:1910.10533

4.4 Полустабильные вырождения многообразий Фано

С точки зрения алгебраической геометрии интерес представляет не только изучение отдельных многообразий, но и их семейств. Сотрудниками лаборатории были рассмотрены семейства многообразий над кривой с гладким общим слоем. Изучалась геометрия специального (особого) слоя таких семейств.

Хорошими свойствами обладают так называемые полустабильные семейства. В частности, они естественно возникают в теории пространств модулей кривых. По теореме о полустабильной редукции [5] любое семейство многообразий над кривой с гладким общим слоем с точностью до замены базы может быть приведено к полустабильному семейству бирациональными преобразованиями. Специальный слой полустабильного семейства мы называем полустабильным вырождением общего слоя.

Важным инвариантом такого вырождения является двойственный комплекс центрального слоя. Его топология содержит информацию о геометрии общего слоя семейства. Например, для полустабильных вырождений поверхностей типа K3 имеет место теорема Куликова [6]. Она утверждает, что двойственный комплекс может иметь в точности один из трех типов и что максимальному вырождению (то есть такого, что двойственный комплекс центрального слоя имеет максимальную размерность) соответствует триангуляция двумерной сферы. Три случая в теореме Куликова различаются монодромией вокруг особого слоя. В частности, тривиальной монодромии соответствует тривиальное вырождение, то есть гладкое семейство K3 поверхностей.

Были рассмотрены полустабильные вырождения поверхностей дель Пеццо и, более общим образом, многообразий Фано произвольной размерности. В работе [2] Фуджита классифицировал полустабильные вырождения поверхностей дель Пеццо. Позднее, Качи [4] при помощи теории деформаций показал, что все случаи из списка Фуджиты реализуются. Тем не менее, эти результаты не содержали информации о монодромии вокруг особого слоя вырождения. В работе [7] стажер лаборатории К. Логинов передоказал результат Фуджиты и Качи и показал, что монодромия в каждом случае является тривиальной.

В высших размерностях имеется теорема Коллара, де Ферне и Сю [1, Theorem 4], утверждающая, что если общий слой полустабильного семейства рационально связен, то двойственный комплекс специального слоя стягиваем. В [7] показано, что если каждый слой полустабильного семейство является многообразием Фано, то двойственным комплекс центрального слоя является симплексом ограниченной размерности.

Также показано, что максимальное полустабильное вырождение многообразий Фано единственно в размерности не выше трех. Для кривых этот результат тривиален.

Хорошо известно, что специальный слой полустабильного семейство удовлетворяет условию d-полустабильности, введенному Фридманом. К. Логинов использовал это условие, а также трехмерную программу минимальных моделей для того, чтобы показать, что максимальное вырождение единственно в размерности 2.

Легко показать, что компоненты центрального слоя полустабильного вырождения многообразий Фано являются многообразиями лог Фано. Для таких многообразий в размерностях не выше трех имеется классификация [?]. В трехмерном случае Логинов использовал эту классификацию и условие d-полустабильности, чтобы показать, что максимальное вырождение единственно.

Максимальное вырождение во всех рассмотренных случаях совпадает с торическим вырождением, построенным Ху [3]. Логинов выдвинул гипотезу о том, что этот факт верен в произвольной размерности. Также им поставлен вопрос о тривиальности монодромии для любого полустабильного вырождения многообразий Фано в произвольной размерности.

Список литературы

[1] T. de Fernex, Já. Kollár, and C. Xu, The dual complex of singularities. arXiv:1212.1675.

[2] T. Fujita, On Del Pezzo fibrations over curves. Osaka Math. J. 27, 1990, 229–245.

[3] S. Hu, Semi-Stable Degeneration of Toric Varieties and Their Hypersurfaces, Communications in Analysis and Geometry 14 (1), 2006, 59–89.

[4] Ya. Kachi, Global smoothings of degenerate Del Pezzo surfaces with normal crossings. Journal of Algebra 307, 2007, 249–253.

[5] G. Kempf, F. Knudsen, D. Mumford, B. Saint-Donat, Toroidal Embeddings I. Lect. Notes Math. Vol. 339, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1973.

[6] Вик. С. Куликов, Вырождения K3 поверхностей и поверхностей Энриквеса. Изв. АН СССР. Сер. матем., 41:5 (1977), 1008–1042.

[7] K. Loginov On semistable degenerations of Fano varieties. arXiv:1909.08319.

[8] Ma83 H. Maeda, Classification of logarithmic Fano 3-folds. Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci. 59 (6), 1983, 245–247.

4.5 Поверхности с малым количеством исчезающих циклов

Пусть $X \subset \mathbb{P}^N$ — гладкая проективная поверхность (над полем комплексных чисел). Обозначим ее гладкое гиперплоское сечение через Y. Пространство $H^1(Y,\mathbb{C})/i^*H^1(X,\mathbb{C})$, где $i\colon Y \hookrightarrow Y$ — вложение, называется пространством исчезающих циклов на Y. Поскольку нечетномерные числа Бетти четны, эта размерность четна. Обозначим через

$$\varepsilon(X) = \frac{b_1(Y) - b_1(X)}{2} = h^1(\mathscr{O}_Y) - h^1(\mathscr{O}_X)$$

ее половину.

Поверхности X, для которых $\varepsilon(X)=0$, были полностью описаны Ф.Л.Заком [4] (см. также [3] для случая произвольной характеристики). Сотрудником лаборатории С. Львовким описываны поверхности, для которых $\varepsilon(X)$ мало, но положительно.

Для формулировки результата условимся о следующей терминологии. Если $X \subset \mathbb{P}^N$ — гладкая поверхность и $p \in \mathbb{P}^N$ — точка, то то ее гладкой проекцией из p будем называть следующее.

- Если $p \notin X$, то гладкой проекцией X из p называется поверхность $X' = \mathrm{pr}_p(X) \subset \mathbb{P}^{N-1}$, при условии, что проекция pr_p задает изоморфизм между X и X';
- Если $p \in X$, то гладкой проекцией X из p называется поверхность $X' = \mathrm{pr}_p(X) \subset \mathbb{P}^{N-1}$, при условии, что проекция pr_p задает изоморфизм между раздутием X в точке p и поверхностью X'.

Наконец, будем говорить, что поверхность $X' \subset \mathbb{P}^{N-m}$ является гладкой проекцией поверхности $X \subset \mathbb{P}^N$, если X' можно получить из X в результате последовательности m гладких проекций из точки.

Теперь сформулируем основной результат, полученный Львовским (здесь и ниже все вложенные проективные многообразия предполагаются невырожденными, т. е. не лежащими в гиперплоскости).

Предложение 1. Пусть $X \subset \mathbb{P}^N$ — гладкая поверхность. Тогда $0 < \varepsilon(X) \leqslant 3$ в том и только том случае, когда выполняется одно из следующих утверждений.

- X — поверхность Дель Пеццо, вложенная с помощью линейной системы $|-K_X|$, или ее гладкая проекция;
- X — рациональная линейчатая поверхность $\mathbb{F}_n$, $0 \leqslant n \leqslant 2$, вложенная с помощью линейной системы $|2s+(n+3)f|$ (где f — класс слоя и s — класс исключительного сечения), или ее гладкая проекция;
- X — рациональная линейчатая поверхность $\mathbb{F}_n$, $0 \leqslant n \leqslant 3$, вложенная с помощью линейной системы $|2s+(n+4)f|$, или ее гладкая проекция;
- X — поверхность Веронезе $v_4(\mathbb{P}^2)$ или ее гладкая проекция;
- X — поверхность Дель Пеццо степени 2, вложенная с помощью $|-2K_X|$, или ее гладкая проекция.
- X — гладкая квартика в $\mathbb{P}^3$.

В частности, если $\varepsilon = 1$ (т. е. если размерность пространства исчезающих циклов равна 2 — наименьшему ненулевому значению), то X — поверхность Дель Пеццо или ее проекция.

Для доказательства предложения 1 прежде всего устанавливается следующий факт.

Предложение 2. Если X — невырожденная поверхность в $\mathbf{P}^N$ и $\varepsilon(X) < N$, то $h^0(K_X) = 0$ и $\varepsilon(X) = h^0(K_X + Y)$, где Y — гиперплоское сечение.

В самом деле, поскольку $\varepsilon(X) = h^1(\mathscr{O}_Y) - h^1(\mathscr{O}_X)$, из двойственности Серра, теоремы Кодаиры и точной последовательности

$$0 \to \mathscr{O}_X(K_X) \to \mathscr{O}_X(K_X + Y) \to \mathscr{O}_Y(K_Y) \to 0$$

вытекает, что $\varepsilon(X) = h^0(K_X + Y) - h^0(K_X)$, и если теперь $h^0(K_X) \neq 0$, то $h^0(K_X + Y) - h^0(K_X) \geq N$.

Далее, из формулы Нетера и очевидных тождеств $Y(K_X + Y) = 2h^1(\mathscr{O}_Y) - 2 = 2h^1(\mathscr{O}_X) + 2\varepsilon(X) - 2$ и $Y \cdot K_X = Y(K_X + Y) - \deg X$ вытекает, что

$$(K_X + Y)^2 = 6 - 4h^1(\mathscr{O}_X) - h^{1,1}(X) + 4\varepsilon(X) - \deg X. \qquad (*)$$

Теперь понадобится такая техническая лемма.

Лемма 1. Если X — гладкая проективная поверхность, $h^0(K_X) = 0$ и $h^0(K_X + Y) \neq 0$, то $(K_X + Y)^2 \geq 0$.

В доказательстве можно предполагать, что дивизор $K_X + Y$ неглавный, так что пусть $C \in |K_X + Y|$ — эффективный дивизор, который мы будем рассматривать как замкнутую подсхему в X. Поскольку $h^0(K_X) = h^2(\mathscr{O}_X) = 0$, из теоремы Кодаиры и точной последовательности$h^0(K_X) = h^2(\mathscr{O}_X) = 0$, из теоремы Кодаиры об обращении в нуль и точной последовательности

$$0 \to \mathscr{O}_X \to \mathscr{O}_X(C) \to \mathscr{O}_C(C) \to 0$$

вытекает, что $h^1(\mathscr{O}_C(C)) = 0$.

Пусть теперь $C = a_1 D_1 + \dots + a_n D_n$, где $a_j > 0$ для всех j и все D_j неприводимы. Рассмотрим очевидный конечный морфизм $\nu\colon \bigsqcup a_i D_i \to C$. Поскольку $h^1(\mathscr{O}_C(C)) = 0$, из точной последовательности

$$0 \to \mathscr{O}_C(C) \to \nu_* \nu^* \mathscr{O}_C(C) \to \mathscr{F} \to 0,$$

где $\dim \operatorname{supp} \mathscr{F} = 0$, вытекает, что $h^1(\mathscr{O}_{a_i D_i}(C)) = 0$ для всех i. Поскольку $\mathscr{O}_{a_i D_i}(C)$ сюръективно отображается на $\mathscr{O}_{D_j}(C)$, а функтор H^1 для пучков на одномерных схемах точен справа, можно заключить, что $h^1(\mathscr{O}_{D_j}(C)) = 0$ для всех j.

Чтобы теперь доказать лемму, достаточно показать, что $(D_i, C) \geq 0$ для всех i. Рассуждая от противного, предположим, что $\deg \mathscr{O}_{D_i}(C) < 0$ для некоторого i. Поскольку $h^1(\mathscr{O}_{D_i}(C)) = 0$, получаем, что D_i — гладкая рациональная кривая и $\deg(\mathscr{O}_{D_i}(C)) = -1$.

Поскольку $(D_i, C) = (D_i, K_X + Y) = -1$ и $(D_i, Y) > 0$, получаем, что $(D_i, K_X) \leqslant -2$; так как $D \cong \mathbb{P}^1$, из формулы присоединения вытекает, что $(D_i, D_i) \geq 0$, откуда $(D_i, C) = a_i(D_i, D_i) + (D_i, \sum_{j \neq i} a_j D_j) \geq 0$; полученное противоречие доказывает лемму.

Далее, установим такое предложение.

Предложение 3. Если $h^0(K_X) = 0$ и $C \in |K_X + Y|$ — эффективный дивизор, то C варьируется в семействе размерности $h^1(\mathscr{O}_X) + \varepsilon - 1$.

В самом деле, из теоремы Кодаиры и точной последовательности

$$0 \to \mathscr{O}_X \to \mathscr{O}_X(C) \to \mathscr{O}_C(C) \to 0$$

вытекает, что $h^1(\mathscr{O}_C(C)) = 0$, так что компонента схемы Гильберта кривых на X регулярна в точке, соответствующей C, и ее размерность в этой точке равна $h^0(\mathscr{O}_C(C))$. По теореме Римана–Роха для поверхностей имеем теперь

$$h^0(\mathscr{O}_C(C)) = \chi(\mathscr{O}_C(C)) = \chi(\mathscr{O}_X(K_X + Y)) - \chi(\mathscr{O}_X) = \frac{Y(K_X + Y)}{2}$$

$$= h^1(\mathscr{O}_Y) - 1 = q + \varepsilon - 1$$

С помощью неравенства (1) теперь нетрудно установить, что если $\varepsilon = 1$, то X — поверхность Дель Пеццо или ее изоморфная проекция.

Наконец, установим следующий факт.

Предложение 4. Если $0 < \varepsilon(X) \leqslant 3$, то $h^1(X, \mathscr{O}_X) \leqslant \varepsilon(X) - 1$.

В самом деле, из неравенства $(*)$ и леммы 1 вытекает, что

$$6 - 4q(X) - h^{1,1}(X) + 4\varepsilon(X) - \deg X = (K_X + Y)^2 \geq 0. \qquad (**)$$

Не ограничивая общности можно считать, что никакое кратное дивизора $K_X + Y$ не является алгебраически эквивалентным нулю — в противном случае X окажется поверхностью Дель Пеццо, для которой $h^1(X, \mathscr{O}_X) = 0$. Но тогда из равенства $(K_X + Y)^2 = 0$ вытекает, что $h^{1,1}(X) \geqslant 2$. Стало быть, в любом случае $(K_X + Y)^2 + h^{1,1}(X) \geq 2$ и из тождества $(**)$ вытекает, что $4q(X) + \deg(X) \leqslant 4 + 4\varepsilon(X)$. При $\deg X \geqslant 5$ отсюда вытекает наше предложение, а для $\deg X \leqslant 4$ оно и так ясно.

Чтобы теперь установить классификацию из предложения 1, достаточно заметить, что из доказанного предложения вытекает, что при $\varepsilon \leqslant 3$ род Y не превосходит $2 + \varepsilon(X) \leq 5$. В работах Э. Ливорни [1], [2] приводится полная классификация поверхностей с родом гиперплоского сечения не выше 6, и предложение 1 теперь считывается с таблиц из этих работ.

Список литературы

[1] Elvira Laura Livorni, Classification of algebraic surfaces with sectional genus less than or equal to six. I. Rational surfaces, Pacific J. Math. 113 (1984), no. 1, 93–114.

[2] Elvira Laura Livorni, Classification of algebraic nonruled surfaces with sectional genus less than or equal to six, Nagoya Math. J. 100 (1985), 1–9.

[3] Lvovski, Serge On surfaces with zero vanishing cycles. Manuscripta Math. 145 (2014), no. 3–4, 235–242.

[4] Ф. Л. Зак. О поверхностях с нулевыми циклами Лефшеца. Матем. заметки, 1973, том 13, 869–880.

4.6 Стабильная рациональность расслоений на коники

В этом году были продолжены исследования того, какие геометрически рациональные поверхности над алгебраически незамкнутыми полями $\Bbbk$ могут быть стабильно рациональными. При помощи программы минимальных моделей эта задача может быть сведена к разбору двух случаев: минимальных поверхностей дель Пеццо и минимальных поверхностей, допускающих структуру расслоения на коники над кривой рода 0. Случай поверхностей дель Пеццо был разобран ранее в статье Ю. Чинкеля и К. Янга [2]. Также ими был получен список минимальных расслоений на коники с 7 и меньшим количеством вырожденных слоев, которые могут быть стабильно рациональны. Для получения этих результатов исследовалось, как может действовать группа Галуа $G \cong \mathrm{Gal}\left(\overline{\Bbbk}/\Bbbk\right)$ на множестве исключительных кривых так, чтобы для любой подгруппы $G' \subset G$ когомологический инвариант $\mathrm{H}^1\left(G', \mathrm{Pic}\left(\overline{X}\right)\right)$ был тривиален.

На основе этого метода были сделаны важные шаги к общей классификации минимальных стабильно рациональных расслоений на коники, вне зависимости от количества вырожденных слоев. Оказывается, классификация таких расслоений очень близка к классификации относительно минимальных рациональных расслоений на коники. Такие расслоения на коники либо являются линейчатыми поверхностью, либо являются поверхностями дель Пеццо степени 6 или 5. При этом для поверхностей дель Пеццо X степеней 6 и 5 (которые имеют структуры расслоений на коники с 2 и 3 вырожденными слоями соответственно) возможны следующие случаи действия группы Галуа G.

- X — поверхность дель Пеццо степени 6. Образ группы G в группе $\mathrm{Aut}\left(\mathrm{Pic}\left(\overline{X}\right)\right)$ изоморфен группе порядка 2, одновременно переставляющей компоненты вырожденных слоев;

- X — поверхность дель Пеццо степени 6. Образ группы G в группе $\mathrm{Aut}\left(\mathrm{Pic}\left(\overline{X}\right)\right)$ изоморфен нециклической группе порядка 4, одна из образующих которой одновременно переставляет компоненты вырожденных слоев, а другая переставляет вырожденные слои;

- X — поверхность дель Пеццо степени 5. Образ группы G в группе $\mathrm{Aut}\big(\mathrm{Pic}\,(\overline{X})\big)$ изоморфен нециклической группе порядка 4, одна из образующих которой одновременно переставляет компоненты первого и второго вырожденных слоев, а другая переставляет компоненты первого и третьего вырожденных слоев;
- X — поверхность дель Пеццо степени 5. Образ группы G в группе $\mathrm{Aut}\big(\mathrm{Pic}\,(\overline{X})\big)$ изоморфен циклической группе порядка 4, одна образующая которой одновременно переставляет по циклу компоненты первого и второго вырожденных слоев, а также переставляет компоненты третьего вырожденного слоя;
- X — поверхность дель Пеццо степени 5. Образ группы G в группе $\mathrm{Aut}\big(\mathrm{Pic}\,(\overline{X})\big)$ изоморфен диэдральной группе порядка 8, содержащей в качестве подгрупп группы из предыдущих двух случаев;
- X — поверхность дель Пеццо степени 5. Образ группы G в группе $\mathrm{Aut}\big(\mathrm{Pic}\,(\overline{X})\big)$ изоморфен альтернированной группе $\mathfrak{A}_4$ порядка 12, содержащей в качестве 2-силовской подгруппы группу из случая (4);
- X — поверхность дель Пеццо степени 5. Образ группы G в группе $\mathrm{Aut}\big(\mathrm{Pic}\,(\overline{X})\big)$ изоморфен симметрической группе $\mathfrak{S}_4$ порядка 24, содержащей в качестве 2-силовской подгруппы группу из случая (5).

Оказывается, что в общем случае, относительно минимальное расслоение на коники, которое может быть стабильно рациональным, соответствует одному из вышеперечисленных случаев. При этом орбиты действия группы G на множестве компонент исключительных слоев находятся в биективном соответствии. В частности, группа G имеет не более трех орбит, состоящих из компонент вырожденных слоев.

Для получения этого результата достаточно перейти к 2-силовской подгруппе образа группы G в группе $\mathrm{Aut}\big(\mathrm{Pic}\,(\overline{X})\big)$. Тогда для каждой G-орбиты компонент вырожденных слоев найдется элемент в 2-Силовской подгруппе, переставляющий компоненты одного вырожденного слоя в этой орбите. При этом в случае отсутствия когомологических препятствий 2-силовские подгруппы оказываются устроены таким же образом, как для рациональных относительно минимальных расслоений на коники.

Помимо установления соответствия с рациональными расслоениями на коники полученные результаты позволяют классифицировать, как могут быть устроены орбиты действия группы G на множестве вырожденных слоев в общем случае. Например для орбиты, соответствующей перестановке двух компонент вырожденного G-инвариантного слоя в случае рациональных расслоений на коники, найдется подгруппа $N \lhd G$ индекса 2, которая будет действовать перестановками на множестве вырожденных слоев из соответствующей G-орбиты (то есть G-орбита состоит из двух N-орбит, причем компоненты вырожденных слоев в N-орбитах не пересекаются).

При помощи полученных результатов удается быстро и без компьютерных вычислений получить классификацию с 7 и меньшим количеством вырожденных слоев. Это дает альтернативное доказательство результатов о классификации поверхностей с тривиальными когомологическими инвариантами, полученных в [1] и [2].

Список литературы

[1] B. A. Kunyavskii, A. N. Skorobogatov, M. A. Tsfasman, Del Pezzo surfaces of degree four, Mém. Soc. Math. France (N.S.), (37):113, 1989

[2] Yu. Tschinkel, K. Yang, Potentially stably rational del Pezzo surfaces over nonclosed fields. Препринт, доступен по адресу http://arxiv.org/abs/1808.09061

4.7 Бирациональные автоморфизмы проективных трехмерных многообразий.

В совместной работе “Birational self-maps of threefolds of (un)-bounded genus or gonality” Бланка, Дункана, и сотрудников лаборатории Ю. Прохорова и И. Чельцова, изучались бирациональные автоморфизмы проективных трехмерных многообразий. Для этого рассматривались бирациональные типы поверхностей, стягивающихся при отображениями такими отображениями. Хорошо известно, что такие поверхности бирационально изоморфны произведению проективной прямой и неособой кривой возможно большого рода. В статье Бланка, Дункана, Прохорова и Чельцова рассматривался вопрос когда все такие кривый имеют ограниченный род. Более того, на этот вопрос был получен полный ответ.

А именно, пусть X — гладкое проективное комплексное алгебраическое многообразие. Тогда все бирациональный автоморфизмы многообразия X образуют группу, которую принято обозначать $\mathrm{Bir}(X)$ Иногда эта группа совпадает с группой бирегулярных автоморфизмов многообразия X. Если это не так, то группа $\mathrm{Bir}(X)$ содержит элемент $\phi\colon X \dashrightarrow X$ который не является бирегулярным изоморфизмом. В этом случае бирациональный автоморфизм ϕ не определен не подмножестве коразмерности два (или больше). У этого может быть две причины: либо существует конечное множество подмногообразий коразмерности два в X вне которых бирациональный автоморфизм ϕ является бирагулярным, либо бирациональный автоморфизм ϕ стягивает какое-то неприводимое подмногообразие коразмерности один (которое принято называть гиперповерхностью в X). В первом случае, бирациональный автоморфизм ϕ принято называть псевдо-изоморфизмом. Второй случай более типичный. Например, он возникает всегда когда X является многообразием Фано. Именно этот случай рассмотрен в статье Бланка, Дункана, Прохорова и Чельцова.

Если X является алгебраической поверхностью, то все стягиваемые кривые обязательно рациональны. В трехмерном случае, стягиваемые поверхности уже не обязательно рациональны. В этом случае, каждая стягиваемая некоторым бирациональным автоморфизмом $\varphi \in \mathrm{Bir}(X)$ неприводимая поверхность S может быть бирационально перестроена в $\mathbb{P}^1 \times C$ для некоторой гладкой проективной кривой C. Такой кривой можно сопоставить несколько численных инвариантов. Наиболее известные и важные из них это род кривой $g(C)$ и минимальная степень конечного накрытия $C \to \mathbb{P}^1$, которую принято называть гональностью кривой C. Таким образом, мы можем определить род $g(\varphi)$ и гональность $\mathrm{gon}(\varphi)$ бирационального автоморфизма φ как максимум родов и гональностей кривых C, таких что существует поверхность в X, которая стягивается бирациональным отображением φ.

Род бирациональных автоморфизмов трехмерных многообразий был введен Михаилом Фрумкиным в 1973 году. Он показал, что бирациональные автоморфизма данного трехмерного многообразия X чей род не превосходит некоторого числа g образуют подгруппу. Таким образом, на группе $\mathrm{Bir}(X)$ возникает естественная фильтрация. Естественно задать вопрос в каких случаях (для каких многообразий X) эта фильтрация не ограничена. Этот вопрос был поставлен Стефаном Лами в 2014 году. Аналогично, можно рассмотреть подобную фильтрацию, используя гональность, и поставить аналогичный вопрос. Отметим, что неограниченность гональности намного более сильное условие чем неограниченность рода, поскольку существуют кривый гональности два любого рода (известные как гиперэллиптические кривые). Заметим также, что ограниченность рода или гональности для всех бирациональных автоморфизмов многообразия X является бирациональным инвариантом многообразия X. В статье “Birational self-maps of threefolds of (un)-bounded genus or gonality” получена полное описание всех трехмерный многообразия удовлетворяющих этому условию. А именно, Бланком, Дунканом, Прохоровым и Чельцовым был доказан следующий результат.

Теорема. Пусть X неособое гладкое проективное комплексное алгебраическое многообразие.

- Если X бирационально изоморфно расслоению на коники, то род и гональность бирациональных автомофризмов многобазия X неограниченны;
- Если X бирационально изоморфно расслоению на кубические поверхности, то род бирациональных автомофризмов многобазия X неограничен;
- Если X не может быть бирационально перестроно в расслоения на коники, то гональность бирациональных автомофризмов многобазия X ограниченна;

– Если X не может быть бирационально перестроно в расслоения на коники и расслоения на кубические поверхности, то род и гональность бирациональных автомофризмов многообазия X оба ограниченны.

Бланк, Дункан, Прохоров и Чельцов также рассмотрели аналог этого результата в более высших размерностях, заменяя род и гональность на более техническое понятие накрывающей гональности, и получили несколько интересных результатов в этом направление.

В статье “Katzarkov–Kontsevich–Pantev Conjecture for Fano threefolds” Пржиялковского и Чельцова была доказана гипотеза Кацаркова, Концевича и Пантева о моделях Ландау–Гинзбурга многообразий Фано в трехмерном случае. Напомним, что модель Ландау–Гинзбурга гладкого многообразия Фано X это гладкое квазипроективное многообразие Y, снабженное регулярной функцией $\mathsf{w}\colon Y \to \mathbb{C}$. Гипотеза гомологической зеркальной симметрии утверждает эквивалентность производной категории когерентных пучков на X (соответственно, производной категории особенностей на (Y,w)) и категории Фукаи–Зайделя пары (Y,w) (соответственно категории Фукаи для X). Кацарков, Концевич и Пантев рассмотрели компактифицированную модель Ландау–Гинзбурга, то есть коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, hook] \arrow[d, "\mathsf{w}"'] & Z \arrow[d, "\mathsf{f}"] \\ \mathbb{C} \arrow[r, hook] & \mathbb{P}^1, \end{tikzcd}$$

такую, что Z — гладкое компактное многообразие, удовлетворяющее некоторым естественным геометрическим условиям, а f — морфизм, такой, что $\mathsf{f}^{-1}(\infty) = -K_Z$. Если такая компактификация существует, то она единственна с точностью до флопов в слоях морфизма f. Пара (Z,f) обычно называется компактифицированной моделью Ландау–Гинзбурга для X. Кацарков, Концевич и Пантев также определили аналог чисел Ходжа $f^{p,q}(Y,\mathsf{w})$ для модели Ландау–Гинзбурга (Y,w), и сформулировали следующую гипотезу.

Гипотеза. Пусть (Y,w) — модель Ландау–Гинзбурга гладкого многообразия Фано X, такая, что $\dim(X) = \dim(Y) = d$. Предположим, что она допускает ручную компактификацию. Тогда

$$h^{p,q}\big(X\big) = f^{p,d-q}\big(Y,\mathsf{w}\big).$$

Пржиялковский и Чельцов доказали эту гипотезу для всех трехмерных неособых многообразий Фано и их торических моделей Ландау–Гинзбурга. В качестве основного инструмента доказательства была использована теорема Хардера, сводящая гипотезу Кацаркова–Концевича–Пантева к геометрии моделей Ландау–Гинзбурга. А именно, рассмотрим компактифицированную модель Ландау–Гинзбурга (Y,w), такую что Y трехмерно. Обозначим через (Z,f) ее компактификацию. Предположим дополнительно, что дивизор над бесконечностью $f^{-1}(\infty)$ комбинаторно является триангуляцией сферы, $h^{i,0}(Z) = 0$

для $i > 0$, а общий слой расслоения f является поверхностью типа K3. Отметим, что во всех известных случаях все эти предположения выполнены. В частности, это выполнено для торических моделей Ландау–Гинзбурга трехмерных многообразий Фано.

Теорема (Хардер). Ромб аналогов чисел Ходжа $f^{p,q}(Y,w)$ имеет вид

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & 0 & & & \\
 & & 0 & & 0 & & \\
 & 0 & & k_Y & & 0 & \\
1 & & ph-2+h^{1,2}(Z) & & ph-2+h^{2,1}(Z) & & 1 \\
 & 0 & & k_Y & & 0 & \\
 & & 0 & & 0 & & \\
 & & & 0 & & &
\end{array}$$

где

$$ph = \dim\left(\operatorname{coker}\left(H^2\left(Z,\mathbb{R}\right) \to H^2\left(V,\mathbb{R}\right)\right)\right)$$

равно корангу ограничения вторых когомологий с объемлющего пространства на общий слой V, а число k_Y задается равенством

$$k_Y = \sum_{s\in\Sigma}(\rho_s - 1),$$

в котором Σ является множеством критических точек отображения w, а ρ_s равно числу неприводимых компонент слоя $w^{-1}(s)$.

В статье “Katzarkov–Kontsevich–Pantev Conjecture for Fano threefolds” были явно построены компактификации подходящих торических моделей Ландау–Гинзбурга для всех трехмерных многообразий Фано. А именно, если антиканонический класс $-K_X$ такого многообразия очень обилен (случаи не очень обильного антиканонического класса изучаются схожим образом отдельно), Пржиялковский и Чельцов показали, что в каждом случае можно выбрать такую торическую модель Ландау-Гинзубрга, что соответствующее расслоение на K3 поверхности, задается некоторым пучком квартик $\mathscr{S}$ на $\mathbb{P}^3$, который можно задать уравнением

$$f_4(x,y,z,t) = \lambda xyzt,$$

где $\lambda \in \mathbb{C}\cup\{\infty\}$. Для доказательства гипотезу Кацаркова, Концевича и Пантева в трехмерном случае наобходимо разрешить базисные точки этого пучка и отследить количество исключительных дивизоров, лежащих в слоях соответствующего отображения. Пржиялковский и Чельцов показали, что в большинстве случаев для этого достаточно изучить особенности поверхностей в пучке $\mathscr{S}$ вдоль базисного множества этого пучка, не строя сами разрешения. Так например, если особенность “плавающая” (то есть ее координаты меняются при варьировании элементов семейства) или изолированная дюvалевская для каждого слоя, то она не дает вклад в компоненты слоев разрешения. В общем случае для каждой поверхности S_λ в пучке $\mathscr{S}$, Пржиялковский и Чельцов определили дефект $\mathbf{D}_P^\lambda$ особой точки P, который равен количеству исключительных дивизоров в соответствующем слое разрешения пучка, лежащих над точкой, и аналогичный дефект $\mathbf{C}^\lambda$ базисной кривой C для слоя, который содержит поверхность S_λ. Они показали, в частности, что дефект изолированной дювалевской точки равен нулю. Также ими была получена формула для подсчета дефектов кривых в терминах кратностей поверхностей пучка $\mathscr{S}$ вдоль этих кривых. В некоторых случаях, для подсчета дефектов точек был проведен более сложный анализ, который также привел к требуемому результату.

4.8 Рациональность многообразий Фано

Вопрос рациональности многообразий с обильным антиканоническим классом – классическая проблема восходящая к работам Дж. Фано. В настоящее время эта проблема решена для трехмерных неособых многообразий Фано см. [1], [4], [15], [7]. С другой стороны, с точки зрения современной теории минимальных моделей необходимо рассматривать многообразия Фано с особенностями. В течение этого года велась работа по изучению проблемы рациональности трехмерных многообразий Фано с терминальными горенштейновыми особенностями. Акцент был сделан на случае многообразий с числом Пикара 1. В этой ситуации наиболее изученный случай – квартики в $\mathbb{P}^4$ [16], [5], [8]. Относительно хорошо были изучены также с этой точки зрения двойные пространства разветвленные в квартике и секстике (см. [11], [3], [2]). Рациональность трехмерных многообразий Фано с каноническими горенштейновыми особенностями изучалась в работе [10].

Был получен следующий результат.

Теорема. Пусть X – трехмерное многообразие Фано с терминальными горенштейновыми особенностями и $\mathrm{Pic}(X) \simeq \mathbb{Z}$. Предположим, что многообразие X нерационально.

Если группа $\mathrm{Pic}(X)$ не порождается каноническим классом K_X (т.е. $\iota(X) \geq 2$), то имеет место одна из следующих возможностей:

- $X = X_3 \subset \mathbb{P}^4$ – неособая кубическая гиперповерхность, любое многообразие этого типа нерационально [4];
- $X = X_2 \to \mathbb{P}^3$ – двойное пространство индекса 2, общее (в частности любое неособое) многообразие этого типа нерационально [1], [17], [11], [3];
- $X = X_1 \to W$ – двойной конус Веронезе, общее (в частности любое неособое) многообразие этого типа нерационально [17], [14], [12], [13], [6].

Пусть $\mathrm{Pic}(X) = \mathbb{Z} \cdot K_X$ и пусть $g = \mathrm{g}(X)$ – род многообразия X. Предположим, что $g = \mathrm{g}(X) \geq 5$. Тогда выполнены следующие утверждения.

– Антиканонический дивизор $-K_X$ очень обилен и задает вложение $X = X_{2g-2} \subset \mathbb{P}^{g+1}$;

– Если многообразие X тригонально (т.е. его антиканоническая модель $X = X_{2g-2} \subset \mathbb{P}^{g+1}$ не является пересечением квадрик), то X принадлежит одному из двух, явно описанных семейств. Общее многообразие из этих семейств нерационально (и особое множество X состоит из одной обыкновенной двойной точки);

– Если X не тригонально и антиканоническая модель $X = X_{2g-2} \subset \mathbb{P}^{g+1}$ содержит плоскость, то $\mathrm{g}(X) = 6$ и многообразие X является бирациональным образом неособой трехмерной кубики $V_3 \subset \mathbb{P}^4$ при отображении $V_3 \dashrightarrow X_{2g-2} \subset \mathbb{P}^{g+1}$ линейной системой квадрик, проходящих через связную приведенную кривую $\Gamma \subset V_3 \subset \mathbb{P}^4$ степени 3 арифметического рода 0. Любое многообразие этого типа нерационально;

– Если X не тригонально и антиканоническая модель $X = X_{2g-2} \subset \mathbb{P}^{g+1}$ не содержит плоскостей, то к многообразию X применима, явно описанная, индуктивная бирациональная конструкция, повышающая род;

– Если X локально $\mathbb{Q}$-факториально, то или $\mathrm{g}(X) \le 6$ или $\mathrm{g}(X) = 8$ и X неособо.

Напомним, что род трехмерных многообразий Фано, удовлетворяющих условиям $\rho(X) = \iota(X) = 1$, не превосходит 12 и не равен 11. Поэтому 4.8 может дать очень явные результаты.

Изучалась также проблема рациональности для многообразий Фано с негоренштейновыми особенностями. Напомним, что проективное алгебраическое многообразие X называется многообразие $\mathbb{Q}$-Фано, если оно имеет лишь терминальные$\mathbb{Q}$-факториальные особенности, $\mathrm{Pic}(X) \simeq \mathbb{Z}$ и антиканонический дивизор $-K_X$ очень обилен. Важным инвариантом многообразия $\mathbb{Q}$-Фано X является его индекс $\mathbb{Q}$-Фано $q(X)$. Это максимальное число q такие, что $-K_X \equiv qA$ для некоторого целого дивизора Вейля A, где $\equiv$ обозначает численную эквивалентность. Был получен следующий результат.

Теорема. Пусть X – трехмерное многообразие $\mathbb{Q}$-Фано с $q(X) \ge 8$. Тогда X рационально.

Заметим, что в некотором смысле наш результат является оптимальным: согласно [9] очень общая взвешенная гиперповерхность $X_{14} \subset \mathbb{P}(2,3,4,5,7)$ нерациональна (и даже не является стабильно рациональной). При этом X_{14} – многообразие $\mathbb{Q}$-Фано с $q(X) = 7$. С другой стороны, результат теоремы может быть существенно улучшен. Мы надеемся, что трехмерные нерациональные многообразия $\mathbb{Q}$-Фано больших индексов допускают разумную классификацию.

Список литературы

[1] Arnaud Beauville. Variétés de Prym et jacobiennes intermédiaires. Ann. Sci. École Norm. Sup. (4), 10(3):309–391, 1977.

[2] Ivan Cheltsov and Jihun Park. Sextic double solids. In Cohomological and geometric approaches to rationality problems, volume 282 of Progr. Math., pages 75–132. Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 2010.

[3] Ivan Cheltsov, Victor Przyjalkowski, and Constantin Shramov. Which quartic double solids are rational? J. Algebr. Geom., 28(2):201–243, 2019.

[4] C. Herbert Clemens and Phillip A. Griffiths. The intermediate Jacobian of the cubic threefold. Ann. of Math. (2), 95:281–356, 1972.

[5] Alessio Corti and Massimiliano Mella. Birational geometry of terminal quartic 3-folds. I. Amer. J. Math., 126(4):739–761, 2004.

[6] Brendan Hassett and Yuri Tschinkel. On stable rationality of Fano threefolds and del Pezzo fibrations. J. Reine Angew. Math., 751:275–287, 2019.

[7] V. A. Iskovskikh and Yu. Prokhorov. Fano varieties. Algebraic geometry V, volume 47 of Encyclopaedia Math. Sci. Springer, Berlin, 1999.

[8] Anne-Sophie Kaloghiros. A classification of terminal quartic 3-folds and applications to rationality questions. Math. Ann., 354(1):263–296, 2012.

[9] Takuzo Okada. Stable rationality of orbifold Fano 3-fold hypersurfaces. J. Algebr. Geom., 28(1):99–138, 2019.

[10] Yu. Prokhorov. A remark on Fano threefolds with canonical Gorenstein singularities. In The Fano Conference, pages 647–657. Univ. Torino, Turin, 2004.

[11] Claire Voisin. Sur la jacobienne intermédiaire du double solide d'indice deux. Duke Math. J., 57(2):629–646, 1988.

[12] М. М. Гриненко. О двойном конусе над поверхностью Веронезе. Изв. РАН. Сер. матем., 67(3):5–22, 2003.

[13] М. М. Гриненко. Структуры Мори на трехмерном многообразии Фано индекса 2 и степени 1. Тр. МИАН, 246:116–141, 2004.

[14] В. А. Исковских. Бирациональные автоморфизмы трехмерных алгебраических многообразий. Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. мат., 12:159–236, 1979.

[15] В. А. Исковских and Ю. И. Манин. Трехмерные квартики и контрпримеры к проблеме Люрота. Матем. сб., 86(128)(1(9)):140–166, 1971.

[16] А. В. Пухликов. Бирациональные автоморфизмы трехмерной квартики с простейшей особенностью. Матем. сб., 135(177)(4):472–496, 1988.

[17] А. Н. Тюрин. Средний якобиан трехмерных многообразий. Итоги науки и техн. ВИНИТИ. Соврем. пробл. мат., 12:5–57, 1979.

Были опубликованы препринты.

Работы

[1] Прохоров, Ю. Г. Рациональность трехмерных многообразий Фано с терминальными горенштейновыми особенностями, I, Тр. МИАН, 2019, 307 (в печати)

[2] Prokhorov, Yu. Rationality of **Q**-Fano threefolds of large Fano index, ArXiv e-print, 2019, 1903.07105

5 Специальные многообразия

В рамках темы "Специальные многообразия", сотрудники лаборатории в отчетный период работали над следующими вопросами.

5.1 Локально конформно кэлеровы многообразия

Локально конформно кэлерово (LCK) многообразие это эрмитово комплексное многообразие (M,I,g) которое допускает кэлерово накрытие с кэлеровой метрикой, конформно эквивалентной пуллбэку g. Это условие было введено Изу Вайсманом. Локально конформно кэлеровы многообразия образуют один из наиболее простых и в то же время универсальных классов некэлеровых многообразий. Например, весь не-кэлеровы комплексные поверхности, за исключением одного из 3 классов поверхностей Инуэ, являются LCK, если верна гипотеза Като (одно из центральных утверждений геометрии комплексных поверхностей, доселе не доказанное).

Условие LCK можно записать в терминах эрмитовой формы $\omega(\cdot,\cdot) = g(\cdot, I\cdot)$ в виде $d\omega = \omega \wedge \theta$, где $\theta \in \Lambda^1(M)$ есть замкнутая форма, которая называется формой Ли.

Если θ параллельна относительно связности Леви-Чивита, LCK многообразие называется вайсмановым. Вайсмановы многообразия конформно эквивалентны факторам кэлеровых многообразий с действием группы $\mathbb{R}$ голоморфными гомотетиями по $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$. Если взять фактор по $\mathbb{R}$ вместо фактора по $\mathbb{Z}$, получится метрическое контактное многообразие, которое называется сасакиевым. Сасакиевы многообразия - одно из центральных понятий струнной физики, и многие результаты сасакиевой геметрии получены физиками.

Вайсмановы многообразия можно охарактеризовать как комплексные многообразия, допускающие голоморфное вложение в многообразия Хопфа, полученные из факторов по действию диагональной матрицы. Это условие не деформационно инвариантно, но его можно ослабить, получив условие устойчивое относительно деформаций. Более широкий класс многообразий, содержащий Вайсмановы, называется многообразия с LCK потенциалом; это многообразия, которые допускают вложение в какое-либо многообразие Хопфа, не обязательно диагональное.

В препринте "Supersymmetry and Hodge theory on Sasakian and Vaisman manifolds" сотрудник лаборатории Миша Вербицкий совместо с Ливиу Орнеа описал алгебру суперсимметрий сасакиева и вайсманова многообразия, получив новые доказательства стандартных результатов о разложении гармонических форм, а в "Twisted Dolbeault cohomology of nilpotent Lie algebras" ими были посчитаны скрученные когомологии нильмногообразий с LCK-структурой. В качестве применения, было получено новое (существенно более простое) доказательство классификации таких многообразий.

В статье "Positivity of LCK potential" (J. Geom. Anal. 29, 2019) Вербицкий и Орнеа доказывают, что зануления скрученного класса когомологий Бота-Черна LCK-формы достаточно для существования положительного LCK-потенциала. Существование потенциала для LCK формы тавтологически равносильно занулению класса когомологий, но для геометрических приложений этот потенциал должен быть положителен.

Список литературы

[1] Angella, Daniele; Tomassini, Adriano; Verbitsky, Misha On non-Kähler degrees of complex manifolds. Adv. Geom. 19 (2019), no. 1, 65-69,

[2] Ornea, Liviu; Verbitsky, Misha Positivity of LCK potential. J. Geom. Anal. 29 (2019), no. 2, 1479-1489.

[3] Liviu Ornea, Misha Verbitsky Supersymmetry and Hodge theory on Sasakian and Vaisman manifolds arXiv:1910.01621

[4] Liviu Ornea, Misha Verbitsky Twisted Dolbeault cohomology of nilpotent Lie algebras arXiv:1905.02806

[5] Ornea, Liviu; Verbitsky, Misha; Vuletescu, Victor Flat affine subvarieties in Oeljeklaus-Toma manifolds. Math. Z. 292 (2019), no. 3-4, 839-847.

5.2 Симплектические упаковки, категория Фукаи и комплексная геометрия

В 1960-е годы Мозер показал, что пространство Тейхмюллера симплектических структур является гладким многообразием, и естественная проекция на вторые когомологии локально является диффеоморфизмом. Для симплектических структур, которые совместимы с любой гиперкэлеровой структурой, симплектическое пространство Тейхмюллера было вычислено сотрудниками лаборатории М. Вербицким и Е. Америк.

Из этого результата следует, что действие группы классов отображений на симплектическое пространство Тейхмюллера эргодично. Этот результат был использован в работе М. Вербицкого и М. Энтова, чтобы изучать полунепрерывные инварианты, симплектической структуры. Таким образом было доказано, что симплектические упаковочные константы, для упаковки любым набором симплектических фигур, для гиперкэлерова многообразия и тора не зависят от выбора симплектической структуры, если она иррациональна.

Упаковки более простыми симплектическими фигурами (симплектическими шарами и эллипсоидами) можно изучать методами алгебраической геометрии. более точные результаты могут быть получены. Используя общие результаты о комплексных подмногообразиях в гиперкэлеровых многообразий, полученные Вербицким в 1990-е годы, и теорему Демайли-Пауна, описывающую кэлеров конус в терминах подмногообразий, Энтов и Вербицкий доказали, что симплектическая упаковка шарами и эллипсоидами не имеет препятствий, кроме симплектического объема. Другими словами, для любой коллекции симплектических эллипсоидов S суммарного объема меньше симплектического объем M, есть симплектическое вложение из S в M. Эти результаты получены в работах "Unobstructed symplectic packing by ellipsoids for tori and hyperkähler manifolds", "Unobstructed symplectic packing for tori and hyper-Kähler manifolds" и "Erratum: Unobstructed symplectic packing for tori and hyper-Kähler manifolds".

Комплексные подмногообразия гиперкэлеровых многообразий можно изучать путем "гиперкэлерова вращения": замены комплексной структуры на другую, как и первая, индуцированную действием кватернионов. Оказывается, что для общего выбора комплексной структуры, выживают только трианалитические подмногообразия, то есть подмногообразия, которые комплексно аналитичны по отношению ко всем индуцированным комплексным структурам. Такие подмногоообразия имеют кватернионно-линейные касательные пространства, значит, их комплексная размерность четна. Это наблюдение можно применить к симплектической геометрии, изучая псевдоголоморфные кривые с границей на лагранжевом подмногообразии.

Используя это соображение, в совместной работе " Locality in the Fukaya category of a hyperkähler manifold" Джейк Соломон и Миша Вербицкий доказали, что подкатегория категории Фукаи гиперкэлерова многообразия, порожденная голоморфными лагранжевыми подмногообразиями, формальна, то есть квазиизоморфна A_∞-категории без высших произведений.

Список литературы

[1] Entov, Michael; Verbitsky, Misha Erratum: Unobstructed symplectic packing for tori and hyper-Kähler manifolds J. Topol. Anal. 11 (2019), no. 1, 249-250.

[2] Entov, Michael; Verbitsky, Misha Unobstructed symplectic packing by ellipsoids for tori and hyperkähler manifolds. Selecta Math. (N.S.) 24 (2018), no. 3, 2625-2649.

[3] Entov, Michael; Verbitsky, Misha Unobstructed symplectic packing for tori and hyper-Kähler manifolds. J. Topol. Anal. 8 (2016), no. 4, 589-626.

[4] Solomon, Jake P.; Verbitsky, Misha Locality in the Fukaya category of a hyperkähler manifold. Compos. Math. 155 (2019), no. 10, 1924-1958.

5.3 Гиперкэлеровы многообразия

В 1990-е в работах М. Вербицкого было введено понятие гиперголоморфного расслоения и гиперголоморфного пучка: это стабильное расслоение или пучок, который допускает деформацию при гиперкэлеровом вращении, или, что то же самое, имеющий SU(2)-инвариантные классы Черна. В последние годы это понятие получило применение в связи с новым подходом к доказательству гипотезы Тэйта для K3 (Франсуа Шарль) и гипотезы

Ходжа для произведений К3 и торов (Эйял Маркман, Николай Бускин, Суханду Мехотра). В совместной работе с Маркманом и Мехотрой "Rigid hyperholomorphic sheaves remain rigid along twistor deformations of the underlying hyperkähler manifold" Вербицкий доказывает жесткость деформации жесткого гиперголоморфного пучка, полученной в результате последовательности гиперкэлеровых вращений. Этот результат используется Маркманом и Мехотрой в их программе доказательства гипотезы Ходжа.

В статье "Kuga-Satake construction and cohomology of hyperkähler manifolds" сотрудников лаборатории М. Вербикцкого и Н. Курносова, совместно с А. Солдатенковым, авторы обобщают классическую конструкцию Куга-Сатаке тора, ассоциированного с К3 поверхностью. Используя спинорные представления, Куга и Сатаке вложили симметрическое пространство Картана типа IV (например, пространство периодов поляризованной К3) в симметрическое пространство типа III (например, пространство периодов поляризованных абелевых многообразий). Это соответствие строит по каждой поляризованной структуре Ходжа типа К3 структуру Ходжа абелева многообразия.

В своей статье Курносов, Солдатенков и Вербицкий обобщили эту конструкцию на произвольную размерность, вложив тотальное пространство когомологий гиперкэлерова многообразия с присущими им структурами (формой Пуанкаре, разложением Ходжа, действием SL(2) Лефшеца) в тотальное пространство когомологий абелева многообразия. Это вложение функториально: каждый автоморфизм гиперкэлерова многообразия задает автоморфизм абелева многообразия, построенного в статье.

В препринте "Deformations and BBF form on non-Kahler holomorphically symplectic manifolds" Никон Курносов и Миша Вербицкий доказали локальную теорему Торелли для некэлерова голоморфно симплектического многообразия, построенного Гуаном и Богомоловым из схемы Гильберта поверхности Кодаиры. Также была доказана теорема о мультипликативной структуре в когомологиях, аналогичной структурной теореме Вербицкого для когомологий гиперэлерова многообразия (вторые когомологии допускают каноническую билинейную симметрическую форму q и умножение в когомологиях инвариантно относительно действия ортогональной группы $SO(H^2(M), q)$.

В препринте "Non-algebraic deformations of flat Kähler manifolds" стажер лаборатории Василий Рогов доказывает, что любое компактное, плоское кэлерово многообразие допускает плоскую неалгебраическую деформацию, если у него есть нетривиальные 2-формы.

В препринте Е. Америк и М. Вербицкого "Contraction centers in families of hyperkahler manifolds", авторы изучают, как меняются центры бирациональных стягиваний гиперкэлерова многообразия при деформации этого многообразия. Доказано, что если бирациональное стягивание сохраняется, то соответствующая деформация центров стягиваний локально тривиальна в вещественно-аналитической категории.

В препринте Е. Америк и М. Вербицкого "MBM classes and contraction loci on low-dimensional hyperkahler manifolds of K3 type", этот результат применяется к изучению центров бирациональных стягиваний деформации схемы Гильберта двух и трех точек на K3. Получен полный список из деформационных типов стягиваний, и для каждого из них описан явно его центр стягивания. Этот результат дает геометрическую версию результатов Хассетта и Чинкеля, где эти центры были получены другим методом и описаны численно.

Список литературы

[1] Ekaterina Amerik, Misha Verbitsky Contraction centers in families of hyperkahler manifolds arXiv:1903.04884

[2] Ekaterina Amerik, Misha Verbitsky MBM classes and contraction loci on low-dimensional hyperkahler manifolds of K3 type, arXiv:1907.13256

[3] Ljudmila Kamenova, Misha Verbitsky Holomorphic Lagrangian subvarieties in holomorphic symplectic manifolds with Lagrangian fibrations and special Kahler geometry, arXiv:1902.05497

[4] Nikon Kurnosov, Misha Verbitsky Deformations and BBF form on non-Kahler holomorphically symplectic manifolds arXiv:1908.05258

[5] Kurnosov, Nikon; Soldatenkov, Andrey; Verbitsky, Misha Kuga-Satake construction and cohomology of hyperkähler manifolds. Adv. Math. 351 (2019), 275-295.

[6] Markman, Eyal; Mehrotra, Sukhendu; Verbitsky, Misha Rigid hyperholomorphic sheaves remain rigid along twistor deformations of the underlying hyperkähler manifold. Eur. J. Math. 5 (2019), no. 3, 964-1012.

[7] Vasily Rogov Non-algebraic deformations of flat Kähler manifolds arXiv:1911.00798

ПРИЛОЖЕНИЕ

Ниже список публикаций лаборатории, и список препринтов, подготовленных к печати.

1. De Deken O., Lowen W. Filtered cA_∞-Categories and Functor Categories // Applied Categorical Structures. 2018. Vol. 26. No. 5. P. 943-996.
2. Rumynin D., Vakhrameev D., Westaway M. Covering Groups of Nonconnected Topological Groups and 2-Groups // Communications in Algebra. 2019. Vol. 47. No. 12. P. 5207-5217.
3. Alexander B., Lex O., Ptacek R. M., Timorin V. Models for spaces of dendritic polynomials // Transactions of the American Mathematical Society. 2019. Vol. 372. No. 7. P. 4829-4849.
4. Ionov A. Primitive forms for Gepner singularities // Journal of Geometry and Physics. 2019. Vol. 140. P. 125-130.
5. Polishchuk A. Moduli of curves with nonspecial divisors and relative moduli of A_∞-structures // Journal of the Institute of Mathematics of Jussieu. 2019. Vol. 18. No. 6. P. 1295-1329.
6. Verbitsky M., Mehrotra S., Markman E. Rigid hyperholomorphic sheaves remain rigid along twistor deformations of the underlying hyparkähler manifold // European Journal of Mathematics. 2019. Vol. 5. No. 3. P. 964-1012.
7. Abramyan S., Panov T. E. Higher Whitehead Products in Moment-Angle Complexes and Substitution of Simplicial Complexes // Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics. 2019. Vol. 1. No. 305. P. 1-21.
8. Kuznetsov A. G. Calabi–Yau and fractional Calabi–Yau categories // Journal fuer die reine und angewandte Mathematik. 2019. Vol. 2019. No. 753. P. 239-267.
9. Loginov K. Standard Models of Degree 1 del Pezzo Fibrations // Moscow Mathematical Journal. 2018. Vol. 18. No. 4. P. 721-737.
10. Polishchuk A., van der Bergh M. Semiorthogonal decompositions of the categories of equivariant coherent sheaves for some reflection groups // Journal of the European Mathematical Society. 2019. Vol. 21. No. 9. P. 2653-2749.
11. Bogomolov F. A., Fu H., Tschinkel Y. Torsion of elliptic curves and unlikely intersections, in: Geometry and Physics: Volume I: A Festschrift in honour of Nigel Hitchin. Oxford : Oxford University Press, 2018. doi P. 19-38.

12. Ornea L., Verbitsky M. Positivity of LCK Potential // Journal of Geometric Analysis. 2019. Vol. 29. No. 2. P. 1479-1489.

13. Verbitsky M., Solomon J. P. Locality in the Fukaya category of a hyperkähler manifold // Compositio Mathematica. 2019. Vol. 155. No. 10. P. 1924-1958.

14. Verbitsky M., Vuletescu V., Ornea L. Flat affine subvarieties in Oeljeklaus–Toma manifolds // Mathematische Zeitschrift. 2019. Vol. 292. No. 3-4. P. 839-847.

15. Bogomolov F. A., Rovinsky M., Tschinkel Y. Homomorphisms of multiplicative groups of fields preserving algebraic dependence // European Journal of Mathematics. 2019. Vol. 5. No. 3. P. 656-685.

16. Томберг А. Ю. Пример стабильного, но послойно нестабильного расслоения на твисторном пространстве гиперкэлерова многообразия // Математические заметки. 2019. Т. 105. № 6. С. 949-954.

17. Prokhorov Y., Mori S. Threefold extremal contractions of type (IIA), II, in: Geometry and Physics: Volume I: A Festschrift in honour of Nigel Hitchin. Oxford : Oxford University Press, 2018. doi P. 623-652.

18. Biswas I., Mj M., Verbitsky M. Stable Higgs bundles over positive principal elliptic brations // Complex Manifolds. 2018. Vol. 5. No. 1. P. 195-201.

19. Polishchuk A. Fundamental Matrix Factorization in the FJRW-Theory Revisited // Arnold Mathematical Journal. 2019. Vol. 5. No. 1. P. 23-35.

20. Polishchuk A., Hua Z. Shifted Poisson geometry and meromorphic matrix algebras over an elliptic curve // Selecta Mathematica, New Series. 2019. Vol. 25. No. 3. P. 1-45.

21. Lekili Y., Polishchuk A. Associative Yang–Baxter equation and Fukaya categories of square-tiled surfaces // Advances in Mathematics. 2019. Vol. 343. P. 273-315.

22. Кузнецов А. Г. Вложение производных категорий поверхностей Энриквеса в производные категории многообразий Фано // Известия РАН. Серия математическая. 2019. Т. 83. № 3. С. 127-132.

23. Прохоров Ю. Г., Mori S. Трехмерные экстремальные окрестности кривой с одной негоренштейновой точкой // Известия РАН. Серия математическая. 2019. Т. 83. № 3. С. 158-212.

24. Polishchuk A., Dyer B. NC-smooth algebroid thickenings for families of vector bundles and quiver representations // Compositio Mathematica. 2019. Vol. 155. No. 4. P. 681-710.

25. Campana F., Amerik E. Specialness and isotriviality for regular algebraic foliations // Annales de l'Institut Fourier. 2018. Vol. 68. No. 7. P. 2923-2950.

26. Авилов А. А. Бирегулярная и бирациональная геометрия двойных накрытий проективного пространства с ветвлением в квартике с 15 обыкновенными двойными точками // Известия РАН. Серия математическая. 2019. Т. 83. № 3. С. 5-14.

27. Angella D., Tomassini A., Verbitsky M. On non-Kähler degrees of complex manifolds // Advances in Geometry. 2019. Vol. 19. No. 1. P. 65-69.

28. Kurnosov N., Soldatenkov A., Verbitsky M. Kuga-Satake construction and cohomology of hyperkähler manifolds // Advances in Mathematics. 2019. Vol. 351. P. 275-295.

29. Blokh A., Oversteegen L., Timorin V. Perfect subspaces of quadratic laminations // Science China Mathematics. 2018. Vol. 61. No. 12. P. 2121-2138.

30. Зыкин А., Lebacque P. On M-Functions Associated with Modular Forms // Moscow Mathematical Journal. 2018. Vol. 18. No. 3. P. 437-472.

31. Ostrik V. Remarks on global dimensions of fusion categories // Contemporary Mathematics Series. 2019. Vol. 728. P. 169-180. doi

Препринты лаборатории:

1. Verbitsky M., Ornea L. Supersymmetry and Hodge theory on Sasakian and Vaisman manifolds / Cornell University. Series arxive "math". 2019.

2. Finkelberg M., Braverman A., Ginzburg V., Travkin R. Mirabolic Satake equivalence and supergroups / Cornell University. Series arxive "math". 2019.

3. Cheltsov I., Shramov K., Przyjalkowski V. Fano threefolds with infinite automorphism groups / Cornell University. Series arxive "math". 2019.

4. Prokhorov Y. Rationality of Fano threefolds with terminal Gorenstein singularities, I / Cornell University. Series arxive "math". 2019.

5. Shramov K., Przyjalkowski V. Fano weighted complete intersections of large codimension / Cornell University. Series arxive "math". 2019.

6. Shramov K. Birational automorphisms of Severi-Brauer surfaces / Cornell University. Series arxive "math". 2019.

7. Shramov K., Cheltsov I., Park J., Ahmadinezhad H. Double Veronese cones with 28 nodes / Cornell University. Series arxive "math". 2019.

8. Shramov K., Przyjalkowski V. Automorphisms of weighted complete intersections / Cornell University. Series arxive "math". 2019.
9. Netay I. V., Glutsyuk A. On spectral curves and complexified boundaries of the phase-lock areas in a model of Josephson / Cornell University. Series arxive "math". 2019.
10. Soukhanov L. Non-Collapsible Dual Complexes and Fake del Pezzo Surfaces / Cornell University. Series arxive "math". 2019.
11. Trepalin A., Loughran D. Inverse Galois problem for del Pezzo surfaces over finite fields / Cornell University. Series arxive "math". 2019.
12. Loginov K. On semistable degenerations of Fano varieties / Cornell University. Series arxive "math". 2019.
13. Kuznetsov A. G., Perry A. Homological projective duality for quadrics / Cornell University. Series arxive "math". 2019.
14. Finkelberg M. V., Fujita R. Coherent IC-sheaves on type A_n affine Grassmannians and dual canonical basis of affine type A_1 / Cornell University. Series arxive "math". 2019.
15. Finkelberg M. V., Goncharov E. Coulomb branch of a multiloop quiver gauge theory / Cornell University. Series arxive "math". 2019.
16. Verbitsky M., Kamenova L. Holomorphic Lagrangian subvarieties in holomorphic symplectic manifolds with Lagrangian fibrations and special Kahler geometry / Cornell University. Series arxive "math". 2019.
17. Verbitsky M., Amerik E. Contraction centers in families of hyperkahler manifolds / Cornell University. Series arxive "math". 2019.
18. Verbitsky M., Ornea L. Twisted Dolbeault cohomology of nilpotent Lie algebras / Cornell University. Series arxive "math". 2019.
19. Kuznetsov A. G., Debarre O. Gushel-Mukai varieties: moduli / Cornell University. Series arxive "math". 2018.
20. Perry A., Kuznetsov A. G. Categorical cones and quadratic homological projective duality / Cornell University. Series arxive "math". 2019.
21. Prokhorov Y. Rationality of $\mathbb{Q}$-Fano threefolds of large Fano index / Cornell University. Series arxive "math". 2019.

22. Prokhorov Y., Duncan A., Cheltsov I., Blanc J. Birational self-maps of threefolds of (un)-bounded genus or gonality / Cornell University. Series arxive "math". 2019.

23. Krylov V., Перунов И. Generalized Slices for Minuscule Cocharacters / Cornell University. Series arxive "math". 2019.

24. Ostrik V., Etingof P. On semisimplification of tensor categories / Cornell University. Series arxive "math". 2019.