Правительство Российской Федерации
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
«ВЫСШАЯ ШКОЛА ЭКОНОМИКИ»
(НИУ ВШЭ)

УДК 512.66
Рег. № НИОКТР 122042700004-0
Рег. № ИКРБС

УТВЕРЖДАЮ
Проректор НИУ ВШЭ,
канд. физ.-мат. наук
______________Д.А. Дагаев
«___» ___________ 2022 г.

ОТЧЕТ
О НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОЙ РАБОТЕ

АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ МНОГООБРАЗИЯ С ТОЧКИ ЗРЕНИЯ ПРОИЗВОДНЫХ КАТЕГОРИЙ, ГОМОЛОГИЧЕСКОЙ АЛГЕБРЫ, МЕТРИК СПЕЦИАЛЬНОЙ ГОЛОНОМИИ И КЛАССИЧЕСКОЙ АЛГЕБРАИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ
(заключительный)

Руководитель НИР,
Зав. лаб., д-р физ.-мат. наук, проф. _______________ Д.Б. Каледин

Москва 2022

СПИСОК ИСПОЛНИТЕЛЕЙ

Руководитель НИР, Зав. лаб., д-р физ.-мат. наук, PhD	_____________ подпись, дата	Д.Б. Каледин (введение, раздел 2)
Исполнители:		
Науч. рук., д-р физ.-мат. наук	_____________ подпись, дата	Ф.А. Богомолов (раздел 2)
Зам. зав. лаб., PhD	_____________ подпись, дата	М.С. Вербицкий (раздел 4)
Науч. сотр., д-р физ.-мат. наук, PhD	____________ подпись, дата	Е.А. Америк (раздел 4)
Науч. сотр., д-р физ.-мат. наук, PhD	_____________ подпись, дата	В.А. Кириченко (раздел 1)
Науч. сотр., д-р физ.-мат. наук	____________ подпись, дата	А.Г. Кузнецов (раздел 1)
Науч. сотр., д-р физ.-мат. наук	_____________ подпись, дата	Ю.Г. Прохоров (раздел 3)
Науч. сотр., д-р физ.-мат. наук, PhD	____________ подпись, дата	М.З. Ровинский (раздел 2)
Науч. сотр., д-р физ.-мат. наук, PhD	____________ подпись, дата	В.А. Тиморин (раздел 1)
Науч. сотр., д-р физ.-мат. наук	_____________ подпись, дата	К.А. Шрамов (раздел 3)
Науч. сотр., канд. физ.-мат. наук	____________ подпись, дата	А.А. Авилов (раздел 3)
Науч. сотр., канд. физ.-мат. наук	____________ подпись, дата	В.С. Жгун (раздел 4)
Науч. сотр., канд. физ.-мат. наук	_____________ подпись, дата	И.Ю. Ждановский (раздел 1)
Науч. сотр., канд. физ.-мат. наук	____________ подпись, дата	С.М. Львовский (раздел 3)
Науч. сотр., канд. физ.-мат. наук	_____________ подпись, дата	А.А. Рослый (раздел 1)

Науч. сотр., канд. физ.-мат. наук, PhD	____________ подпись, дата	Е.Ю. Смирнов (раздел 4)
Науч. сотр., канд. физ.-мат. наук	____________ подпись, дата	А.С. Трепалин (раздел 3)
Мл. науч. сотр., канд. физ.-мат. наук,	____________ подпись, дата	К.В. Логинов (раздел 3,1)
Стажер-исследователь	___________ подпись, дата	П.С. Осипов (раздел 4)
Стажер-исследователь	___________ подпись, дата	А.В. Викулова (раздел 3)
Нормоконтроль	____________ подпись, дата	О.В. Гришина

РЕФЕРАТ

Отчет 80 стр., 81 источник, 2 рис., 1 прил.

ПРОИЗВОДНЫЕ КАТЕГОРИИ, КРИСТАЛЛИЧЕСКИЕ КОГОМОЛОГИИ, ЦИКЛИЧЕСКАЯ КАТЕГОРИЯ, БЕСКОНЕЧНОМЕРНЫЕ АЛГЕБРЫ ЛИ, МНОГООБРАЗИЯ ФАНО, ПРОСТРАНСТВО МОДУЛЕЙ, РАЦИОНАЛЬНЫЕ КРИВЫЕ, ГОЛОМОРФНО СИМПЛЕКТИЧЕСКОЕ МНОГООБРАЗИЕ

Объектами исследования являются
-геометрическая теория представлений,
-арифметическая алгебраическая геометрия,
-бесконечномерные алгебры Ли,
-гомологические и мотивные методы в некоммутативной геометрии,
-производные категории,
-классическая геометрия,
-гиперкэлеровы многообразия и специальные многообразия.

Цель проекта: исследования в области алгебраической геометрии и пограничных с ней областях – теория чисел, дифференциальная и комплексная геометрия, геометрический анализ.

Результаты носят теоретический характер и являются существенно новыми. Возможны приложения к теоретической физике, дифференциальной геометрии, теории чисел и задачам классификации комплексных многообразий.

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

За отчетный период (2022 год) Лаборатория алгебраической геометрии и ее приложений организовала и/или приняла участие в организации двух международных конференций:

- Международная конференция “Workshop on birational geometry”, 11.03.2022, организаторы Юрий Прохоров и Константин Шрамов, формат проведения – онлайн.
- Международная конференция “Алгебра и геометрия”, 28.07.2022-31.07.2022, организаторы Никон Курносов и Константин Шрамов, формат проведения – оффлайн, с трансляцией в интернет.

В 2022 году удалось также провести традиционную школу “Алгебра и геометрия”. Школа была совмещена с конференцией, и проводилась в период с 28.07.2022 по 31.07.2022, уже в одиннадцатый раз. Все предыдущие годы школа проводилась на базе Ярославского государственного педагогического университета им.К.Д.Ушинского, но в 2022 году, по форс-мажорным обстоятельствам – ремонт в здании ЯрГПУ – она была перенесена в г. Суздаль, и проводилась на базе ГТРК “Суздаль”. В школе приняли участие примерно 70 слушателей со всей России, в том числе большие группы слушателей из Москвы, С.-Петербурга и Красноярска.

В связи с продолжающейся пандемией COVID-19 и сложной международной обстановкой, в 2022 году вновь были отменены визиты ученых – коллег лаборатории из мировых научных и учебных центров; многие, однако, принимали участие в регулярном научно-исследовательском семинаре лаборатории в режиме онлайн.

В течение года продолжал работу научно-исследовательский семинар лаборатории, который проходил в зависимости от эпидемиологической ситуации либо в смешанном формате, либо, особенно начиная с лета 2022 года, в обычном оффлайн-режиме. Руководитель семинара – Никон Курносов. Также продолжал работу студенческий семинар лаборатории “Геометрические структуры на многообразиях”. Вся информация о семинарах публикуется на странице лаборатории на портале НИУ ВШЭ (ag.hse.ru), анонсы также рассылались по рассылке факультета математики и лаборатории.

По результатам исследований в 2022 году сотрудниками лаборатории было опубликовано 30 статей в журналах, индексируемых в базе данных Scopus и Web of Science, 21 работа в журналах, индексируемых WoS, из них в журналах квартиля Q1/Q2 – 12, а индексированных в системе Scopus – 29 статей, из них в журналах квартиля Q1/Q2 – 26.

Насмотря на сложную международную ситуацию, сотрудники лаборатории принимали участие в международных конференциях, семинарах, воркшопах, где выступили более чем с 40 докладами, в которых представили результаты своих исследований в лаборатории. В частности, сотрудники лаборатории активно участвовали в конференциях “Complex Geometry in Byurakan” (на базе Бюраканской Астрофизической Обсерватории в Армении), “Advances in Algebra and Applications” (г. Минск, Беларусь), “Non-commutative shapes” (г. Антверпен, Бельгия), а также в целом ряде больших конференций в Москве, включая Вторую Конференцию Математических центров России в ноябре 2022 года.

В 2022 году состоялся международный Математический Конгресс, главная мировая конференция по математике, которая проходит раз в четыре года. Из-за сложной международной ситуации, Конгресс, который изначально должен был пройти в С.-Петербурге, прошел целиком в режиме онлайн. Однако это не помешало нашим сотрудникам принять в нем участие – Ю.Г. Прохоров был приглашенным докладчиком по секции алгебраической геометрии, а А.Г. Кузнецов был приглашен на Конгресс с пленарным докладом (последним мы особенно гордимся, т.к. математиков, которым выпадала такая честь, очень мало).

Стажеры лаборатории А. Коновалов и Г. Кондырев успешно защитили кандидатские диссертации. У стажеров П. Осипова и Л. Гусевой успешно прошли предзащиты; защита П. Осипова ожидается в декабре 2022 года.

Стажер лаборатории С. Абрамян был в числе победителей престижного конкурса “Молодая математика России”, проходившего в конце декабря 2021 года. Наши стажеры также активно участвовали в другом весьма престижном конкурсе для молодых математиков – а именно, в конкурсе студенческих работ имени А. Мебиуса. В конце 2021 года стажеры лаборатории С. Абрамян и И. Спиридонов получили на этом конкурсе премии. В 2022 году финал конкурса пройдет 3 декабря; из 6 финалистов в разделе “Аспиранты и студенты”, трое – А. Викулова, Ю. Горгинян и П. Осипов – стажеры нашей лаборатории.

В 2022 году на базе Лаборатории продолжил работу научный коллектив проекта РНФ “Автоморфизмы алгебраических многообразий”, под руководством Юрия Прохорова. Заведующий лабораторией Дмитрий Каледин продолжает работу над проектом РНФ “Алгебраическая K-теория, мотивные структуры и циклические гомологии”, проект реализуется на базе факультета математики НИУ ВШЭ, к работе над проектом привлечен в т.ч. стажёр Лаборатории Андрей Коновалов.

Сотрудники лаборатории продолжали вести активную педагогическую работу, ими были прочитаны курсы на факультете математики НИУ ВШЭ, в Независимом Московском Университете, НОЦ МИАН, Сколтехе, программе Math in Moscow, на школах для студентов, аспирантов и молодых ученых, проводимых как лабораторией, так и крупными международными научными и учебными центрами. Часть курсов была прочитана впервые.

В рамках программы факультета математики по привлечению лучших аспирантов к преподаванию, на факультете успешно продолжил работу Павел Осипов (семинары по курсу Математика, ОП “Философия”).

Сотрудниками лаборатории были получены значительные научные результаты по основным темам, заявленным на 2022 год:

– Производные категории,

– Гомологические и мотивные методы в некоммутативной геометрии,

– Классическая геометрия,

– Специальные многообразия.

Результаты работ по этим темам составляют содержание настоящего отчета.

1 Производные категории

1.1 Категорное впитывание особенностей

В работе сотрудника лаборатории А. Кузнецова совместной с Е. Шиндером было предложено понятие категорного впитывания особенностей и найдены первые примеры впитывающих подкатегорий и их применения.

Категорное впитывание аналогично категорному разрешению особенностей по сути, но противоположно по способу получения.

Напомним, что согласно [19] категорным разрешением особенностей собственной схемы X называется тройка $(\mathscr{T}, \pi^*, \pi_*)$, где $\mathscr{T}$ — гладкая и собственная триангулированная категория, а

$$\pi^*\colon \mathsf{D}^{\mathsf{perf}}(\mathsf{X}) \to \mathscr{T} \qquad\qquad \pi_*\colon \mathscr{T} \to \mathsf{D}^{\mathsf{b}}(\mathsf{X})$$

пара триангулированных функторов, таких что

- π^* сопряжен слева к π_* и
- композиция $\pi_* \circ \pi^*$ изоморфна вложению $\mathsf{D}^{\mathsf{perf}}(\mathsf{X}) \hookrightarrow \mathsf{D}^{\mathsf{b}}(\mathsf{X})$.

Например, если схема X неприводима, приведена и имеет рациональные особенности, а $\pi\colon \tilde{X} \to X$ — разрешение особенностей в геометрическом смысле (то есть собственный бирациональный морфизм из гладкого многообразия), то категория $\mathsf{D}^{\mathsf{perf}}(\tilde{\mathsf{X}}) = \mathsf{D}^{\mathsf{b}}(\tilde{\mathsf{X}})$ вместе с (производными) функторами обратного и прямого образа

$$\pi^*\colon \mathsf{D}^{\mathsf{perf}}(\mathsf{X}) \to \mathsf{D}^{\mathsf{perf}}(\tilde{\mathsf{X}}) \qquad\qquad \pi_*\colon \mathsf{D}^{\mathsf{b}}(\tilde{\mathsf{X}}) \to \mathsf{D}^{\mathsf{b}}(\mathsf{X})$$

является категорным разрешением особенностей. Напомним также, что в работе [20] было получено значительное усиление этого результата: для любой отделимой схемы X конечного типа над полем характеристики 0 построено категорное разрешение особенностей $\mathscr{T}$, причем так что категория $\mathscr{T}$ имеет полуортогональное разложение, компонентами которого являются производные категории многообразий, связанных с X.

Про категорное разрешение особенностей можно думать как про процедуру "заменяющую" пару $(\mathsf{D}^{\mathsf{perf}}(\mathsf{X}), \mathsf{D}^{\mathsf{b}}(\mathsf{X}))$ состоящую из собственной но не гладкой категории $\mathsf{D}^{\mathsf{perf}}(\mathsf{X})$ и гладкой но не собственной категории $\mathsf{D}^{\mathsf{b}}(\mathsf{X})$ на одну гладкую и собственную категорию $\mathscr{T}$, которая "больше" чем каждая из них. При категорном впитывании, наоборот, проходит замена той же пары на гладкую и собственную категорию, которая "меньше" исходных. Вот точное определение:

Определение 1.1 ([21]). Триангулированная категория $\mathscr{P} \subset \mathsf{D}^{\mathsf{b}}(\mathsf{X})$ впитывает особенности схемы X, если она допустима (то есть дополняется слева и справа до полуортогонального разложения), а оба ортогонала

$${}^{\perp}\mathscr{P},\ \mathscr{P}^{\perp} \subset \mathsf{D}^{\mathsf{b}}(\mathsf{X})$$

являются гладкими и собственными категориями.

В силу допустимости категории $\mathscr{P}$ ее ортогоналы эквивалентны друг другу (посредством функторов перестройки через $\mathscr{P}$) и любой из них как раз и является той самой категорией, "меньшей" чем $\mathsf{D}^{\mathsf{perf}}(\mathsf{X})$ и $\mathsf{D}^{\mathsf{b}}(\mathsf{X})$ и заменяющей их.

Тривиальным примером впитывающей категории является категория $\mathscr{P} = \mathsf{D}^{\mathsf{b}}(\mathsf{X})$ — при этом оба ортогонала равны нулю — но этот пример, естественно, не является интересным. Напротив, желательно найти минимально возможную впитывающую категорию. В работе [21] приводится конструкция такого рода для многообразий с обыкновенными двойными точками. Для простоты ограничимся случаем, когда такая точка только одна.

Теорема 1.2. Пусть X — многообразие с одной обыкновенной двойной точкой $x_0 \in X$. Пусть $\pi\colon \tilde{X} \to X$ — раздутие точки x_0, а $E \subset \tilde{X}$ — исключительный дивизор раздутия (он изоморфен гладкой квадрике). Предположим, что существует исключительное расслоение $\mathscr{E}$ на $\tilde{X}$, ограничение которого на E изоморфно спинорному расслоению. Положим

$$\mathsf{P} := \pi_*(\mathscr{E}), \qquad \mathscr{P} := \langle \mathsf{P} \rangle \subset \mathsf{D}^{\mathsf{b}}(\mathsf{X}).$$

Тогда подкатегория $\mathscr{P} \subset \mathsf{D}^{\mathsf{b}}(\mathsf{X})$ впитывает особенности X.

Объект P, построенный в теореме обладает рядом замечательных свойств. Во-первых, он является максимальным Коэн–Маколеевым пучком, локально свободным на гладкой части. Во-вторых, алгебра его производных эндоморфизмов имеет вид

$$\mathsf{Ext}^{\bullet}(\mathsf{P},\mathsf{P}) \cong \Bbbk[\theta], \qquad \deg(\theta) = \mathsf{p}+1,$$

где p — четность размерности многообразия X (объекты с такой алгеброй эндоморфизмов называются $\mathbb{P}^{\infty,p+1}$-объектами). При этом подкатегория $\mathscr{P} \subset \mathsf{D}^{\mathsf{b}}(\mathsf{X})$, порождённая объектом P, эквивалентна производной категории конечномерных dg-модулей

$$\mathsf{D}^{\mathsf{b}}(\Bbbk[\varepsilon]/\varepsilon^2), \qquad \deg(\varepsilon) = -\mathsf{p},$$

называемой категорной обыкновенной двойной точкой.

Важным применением впитывающих категорий построенных с помощью $\mathbb{P}^{\infty,p+1}$-объектов является построение гладких и собственных семейств триангулированных категорий. Чтобы сформулировать результат, полученный в этом направлении, предположим что X — собственное многообразие с одной обыкновенной двойной точкой, а P — $\mathbb{P}^{\infty,p+1}$-объект, впитывающий особенность. Пусть также $f\colon \mathscr{X} \to B$ — сглаживание X, то есть морфизм в гладкую кривую с отмеченной точкой $o \in B$, так что

– морфизм $f\colon \mathscr{X} \to B$ гладок над проколотой кривой $B \setminus \{o\}$ (то есть вне центрального слоя);

– тотальное пространство $\mathscr{X}$ гладко;

– центральный слой $\mathscr{X}_o \subset \mathscr{X}$ изоморфен X.

Будем обозначать через $i\colon X \cong \mathscr{X}_o \hookrightarrow \mathscr{X}$ вложение центрального слоя.

Теорема 1.3. Если X нечетномерно, то объект $i_*\mathsf{P} \in \mathsf{D^b}(\mathscr{X})$ исключителен, категория

$$\mathscr{D} := {}^{\perp}(i_*\mathsf{P}) \subset \mathsf{D^b}(\mathscr{X})$$

является B-линейной, а ее слои имеют вид

$$\mathscr{D}_b \simeq \begin{cases} \mathsf{D^b}(\mathscr{X}_\mathsf{b}), & \text{если } b \neq o, \\ {}^{\perp}\mathsf{P} \subset \mathsf{D^b}(\mathsf{X}), & \text{если } b = o. \end{cases}$$

В частности, $\mathscr{D}$ гладкая и собственная над B.

Теорема 1.4. Если X четномерно, то после перехода к этальной окрестности точки $o \in B$ найдется двулистное накрытие $Z \to B$ разветвленное над $\{o\}$ и этальное над $B \setminus \{o\}$ и B-линейное полуортогональное разложение

$$\mathsf{D^b}(\mathscr{X}) = \langle \mathsf{D^b}(\mathsf{Z}), \mathscr{D} \rangle,$$

причем компонента $\mathscr{D}$ гладкая и собственная над B. Более того

$$\mathscr{D}_o \simeq {}^{\perp}\mathsf{P} \subset \mathsf{D^b}(\mathsf{X}).$$

Ожидается, что у полученных результатов есть красивые геометрические приложения.

1.2 Толстые подкатегории в производной категории гладкой кривой

Сотрудник лаборатории А. Елагин совместно с В. Лунцем в работе [12] исследовал толстые покатегории в ограниченной производной категории $D^b(\mathsf{coh}(\mathsf{C}))$ когерентных пучков на гладких проективных кривых. Было показано, что все такие нетривиальные подкатегории, которые конечно порождены, колчаноподобны, т.е., эквивалентны производной категории нильпотентных представлений некоторого конечного колчана.

Пусть Q — конечный колчан, k — поле. Определим $D_0(Q)$ как толстую триангулированную подкатегорию в $D(\mathsf{Mod\text{-}kQ})$, порождённую простыми модулями, сосредоточенными в вершинах. Равносильно, можно определить $D_0(Q)$ как $D^b(\mathsf{mod_0\text{-}kQ})$, ограниченную производную категорию от категории конечномерных представлений колчана, на которых стрелки действуют нильпотентно. Триангулированную категорию назовём колчаноподобной, если она эквивалентна категории $D_0(Q)$ для некоторого конечного колчана Q. Объекты, отвечающие при этом одномерным модулям, сосредоточенным в вершинах, назовём вершиноподобными.

Колчаноподобные категории обладают рядом замечательных свойств. Так, колчаноподобная категория порождается своими вершиноподобными объектами как триангулированная категория (без взятия прямых слагаемых). Любой неразложимый объект такой категории (с точностью до сдвига) имеет фильтрацию из вершиноподобных объектов, набор которых однозначно определён. Всякая конечно порождённая толстая подкатегория в колчаноподобной категории также колчаноподобна.

Пусть C — связная гладкая проективная кривая, а $T \subset D^b(\mathsf{coh}(\mathsf{C}))$ — толстая подкатегория. Категория когерентных пучков на гладкой кривой наследственна, следовательно T однозначно определяется тем, какие когерентные пучки она содержит. Предположим, что $T \neq D^b(\mathsf{coh}(\mathsf{C}))$. Тогда, используя технику локализации и тот факт, что производная категория гладкой аффинной кривой порождается любым локально свободным когерентным пучком, можно показать слеующее:

– либо T содержит только пучки кручения,

– либо T содержит только векторные расслоения.

В случае (1) категория T однозначно задаётся как семейство всех комплексов с носителем в фиксированном множестве замкнутых точек кривой C. Для конечного множества из n точек такая категория колчаноподобна, где колчан имеет вид объединения n копий вершины с одной петлей. Нетривиальным является случай (2). Было показано, что в любой конечно порождённой толстой подкатегории $T \subset D^b(\mathsf{coh}(\mathsf{C}))$, которая не содержит пучков кручения, существует вершиноподобный набор порождающих расслоений: такой набор $V_1, \dots, V_n$, для которого

$$\mathsf{Hom}(\mathsf{V_i}, \mathsf{V_j}) = \mathsf{k} \cdot \delta_{\mathsf{ij}}.$$

Этот набор позволяет построить эквивалентность T с категорией $D_0(Q)$, где вершины $1, \dots, n$ колчана Q соответствуют расслоениям $V_1, \dots, V_n$, а число стрелок из вершины i в вершину j определяется размерностью пространства $\mathsf{Ext}^1(\mathsf{V_j}, \mathsf{V_i})$. Тем самым, верна

Теорема 1.5. Пусть $T \subset D^b(\mathsf{coh}(\mathsf{C}))$ — конечно порождённая толстая подкатегория в производной категории связной гладкой проективной кривой C. Тогда T колчаноподобна.

Также был исследован вопрос о том, какие колчаноподобные категории реализуются как толстые подкатегории в производной категории проективной кривой. Необходимое условие легко получить с помощью формулы Римана–Роха. А именно, пусть $V_1, \dots, V_n$ — колчаноподобный набор векторных расслоений на проективной кривой рода g. Пусть d_i и r_i — степени и ранги этих расслоений. Тогда

$$\mathsf{dim}(\mathsf{Hom}(\mathsf{V_j}, \mathsf{V_i})) - \mathsf{dim}(\mathsf{Ext}^1(\mathsf{V_j}, \mathsf{V_i})) = \mathsf{r_i r_j} \left(\frac{\mathsf{d_i}}{\mathsf{r_i}} - \frac{\mathsf{d_j}}{\mathsf{r_j}} - \mathsf{g} + 1 \right).$$

Соответствнно, число стрелок из i в j в колчане равно

$$A_{ij} = \delta_{ij} - r_i r_j \left(\frac{d_i}{r_i} - \frac{d_j}{r_j} - g + 1 \right). \tag{1.2.1}$$

Для рода 0 единственный возможный колчаноподобный набор состоит из одного линейного расслоения. Для рода 1 формула (1.2.1) даёт неотрицательные значения только при $\frac{d_i}{r_i} = \frac{d_j}{r_j}$ для всех i, j, и при этом $A_{ij} = \delta_{ij}$. То есть, категория T эквивалентна категории комплексов с носителем в множестве из n замкнутых точек. Далее рассмотрим интересный случай кривой рода ≥ 2. Было показано, что необходимое условие является и достаточным:

Теорема 1.6. Колчаноподобная категория, заданная набором кратностей $A_{ij} \geq 0$ $(i, j = 1, \ldots, n)$ реализуется на гладкой проективной кривой рода $g \geq 2$ как толстая подкатегория без пучков кручения тогда и только тогда, когда для некоторого набора чисел $d_i \in \mathbb{Z}$, $r_i \in \mathbb{Z}_{>0}$ верны равенства (1.2.1).

1.3 Грассманиан Кэли

1.3.1 Вычетная категория

В отчетный период, сотрудником лаборатории Л. Гусевой была изучена вычетная категория грассманиана Кэли CG. Грассманиан Кэли CG определяется как нули общей 4-формы $\lambda \in \Lambda^4 V_7^\vee$ в грассманиане $\mathsf{Gr}(3, \mathsf{V}_7)$, где V_7 — векторное пространство размерности 7. Ранее на CG был построен полный лефшецев набор

$$\begin{aligned}\mathscr{O}, \mathscr{U}^\vee, \Lambda^2\mathscr{U}^\vee, (\Lambda^2\mathscr{U}^\perp/\Lambda^2\mathscr{U})^\vee, \Sigma^{2,1}\mathscr{U}^\vee,&\\ \mathscr{O}(1), \mathscr{U}^\vee(1), \Lambda^2\mathscr{U}^\vee(1), (\Lambda^2\mathscr{U}^\perp/\Lambda^2\mathscr{U})^\vee(1),&\\ \mathscr{O}(2), \mathscr{U}^\vee(2), \Lambda^2\mathscr{U}^\vee(2), \mathscr{O}(3), \mathscr{U}^\vee(3), \Lambda^2\mathscr{U}^\vee(3),&\end{aligned} \tag{1.3.1}$$

где $\mathscr{U}^\vee$ и $\mathscr{U}^\perp$ — двойственные к тавтологическому расслоению и фактор-расслоению на $\mathsf{Gr}(3, \mathsf{V}_7)$ соответственно,

$$\Sigma^{2,1}\mathscr{U}^\vee := (\Lambda^2\mathscr{U}^\vee \otimes \mathscr{U}^\vee)/\mathscr{O}(1),$$

а расслоение $(\Lambda^2\mathscr{U}^\perp/\Lambda^2\mathscr{U})^\vee$ можно определить с помощью точной последовательности

$$0 \to \Lambda^2\mathscr{U} \xrightarrow{\lambda} \Lambda^2\mathscr{U}^\perp \to \Lambda^2\mathscr{U}^\perp/\Lambda^2\mathscr{U} \to 0.$$

Вычетная категория $\mathscr{R}$ для полного лефшецева набора определяется как ортогонал к его прямоугольной части. Прямоугольная часть набора (1.3.1) состоит из 12 расслоений

$$\langle \mathfrak{E}, \mathfrak{E}(1), \mathfrak{E}(2), \mathfrak{E}(3) \rangle,$$

где $\mathfrak{E} = \langle \mathscr{O}, \mathscr{U}^\vee, \Lambda^2\mathscr{U}^\vee \rangle$.

Для набора (1.3.1) было доказано, что категория $\mathscr{R}$ порождается тремя полностью ортогональными объектами

$$\mathscr{R} = \langle \mathbb{L}_{\mathfrak{E}}(\Lambda^2\mathscr{U}^\perp/\Lambda^2\mathscr{U})^\vee, \Sigma^{2,1}\mathscr{U}^\vee(-1), (\Lambda^2\mathscr{U}^\perp/\Lambda^2\mathscr{U})^\vee(-1) \rangle,$$

где $\mathbb{L}_{\mathfrak{E}}$ — функтор перестройки через набор $\mathfrak{E}$. Этот результат согласуется с гипотезой Кузнецова–Смирнова [22], которая уточняет гипотезу Дубровина для многообразий Фано с одномерной группой Пикара, и говорит о том, что полупростота малых квантовых когомологий влечет существование полного лефшецева набора с вычетной категорией, порожденной полностью ортогональными объектами.

1.3.2 Вырождения грассманиана Кэли и присоединенного грассманиана группы $\mathbb{G}_2$

Кроме того, было изучено вырождение грассманиана Кэли, которое определяется как нули $\widetilde{\mathsf{CG}}$ необщей формы $\lambda' \in \Lambda^4 V_7^\vee$ на $\mathsf{Gr}(3,\mathsf{V}_7)$, то есть нули необщего сечения $\mathsf{H}^0(\mathsf{Gr}(3,\mathsf{V}_7),\mathscr{U}^\perp(1))$. Было показано, что $\widetilde{\mathsf{CG}}$ имеет обыкновенные двойные особенности вдоль плоскости $\mathbb{P}(V_4)$, где V_4 — четырехмерное пространство, канонически связанное с λ'. Было изучено индуцированное расслоение на квадрики в раздутии $\mathsf{Bl}_{\mathbb{P}(\mathsf{V}_4)}\widetilde{\mathsf{CG}}$ многообразия $\widetilde{\mathsf{CG}}$ вдоль этой плоскости. Более точно, было доказано, что расслоение на квадрики в $\mathsf{Bl}_{\mathbb{P}(\mathsf{V}_4)}\widetilde{\mathsf{CG}}$ получается операцией гиперболической редукции из канонической квадрики $Q_{\lambda'} \subset \mathbb{P}(V_4^\vee \otimes (V_7/V_4))$, заданной формой λ'. Также было доказано, что гиперплоское сечение грассманиана $\mathsf{Gr}(4,\mathsf{V}_7)$, индуцированное 4-формой λ', имеет единственную обыкновенную двойную точку, и что исключительный дивизор раздутия этой точки изоморфен квадрике $Q_{\lambda'}$.

Также было изучено вырождение присоединенного грассманиана группы $\mathbb{G}_2$, которое определяется аналогичным образом, как нули $\widetilde{\mathbb{G}_2^{\mathsf{ad}}}$ необщей 3-формы $\nu \in \Lambda^3 V_7^\vee$ на $\mathsf{Gr}(2,\mathsf{V}_7)$. А именно, было доказано, что $\widetilde{\mathbb{G}_2^{\mathsf{ad}}}$ имеет обыкновенные двойные особенности вдоль плоскости $\mathbb{P}(V_3)$, где V_3 — трехмерное пространство, канонически связанное с ν. Индуцированное расслоение на квадрики в раздутии $\mathsf{Bl}_{\mathbb{P}(\mathsf{V}_3)}\widetilde{\mathbb{G}_2^{\mathsf{ad}}}$ многообразия $\widetilde{\mathbb{G}_2^{\mathsf{ad}}}$ вдоль этой плоскости также получается операцией гиперболической редукции из канонической квадрики $Q_\nu \subset \mathbb{P}(V_3^\vee \otimes (V_7/V_3))$, заданной формой ν. Было показано, что гиперплоское сечение $\mathsf{Gr}(3,\mathsf{V}_7)$, индуцированное 3-формой ν, имеет единственную обыкновенную двойную точку, и что исключительный дивизор раздутия этой точки изоморфен квадрике Q_ν.

1.4 Простой геометрический митоз и его приложения

1.4.1 Простой геометрический митоз

Сотрудниками лаборатории разработана простая операция на гранях многогранника (простой геометрический митоз), которая имитирует действие операторов разделённых разностей [18]. Конструкция опирается на результаты [17], интерпретирующие формулу проективизации расслоения для кольца Чжоу через кольцо Пухликова–Хованского суммы Кэли двух многогранников. В отличие от ранее разработанной операции геометрического митоза [16], новая операция основана не на теории представлений и операторах Демазюра, а на чисто геометрических идеях, поэтому устроена проще и работает в большей общности. Также описаны приложения новой операции к исчислению Шуберта в типах A и C в терминах многогранников Гельфанда–Цетлина. Это даёт единообразное построение митоза Кнутсона–Миллера (тип A) и (упрощённого) митоза Фуджиты (тип C).

Пусть P, $Q \subset \mathbb{R}^d$ — это два выпуклых многогранника полной размерности. Обозначим через $\Delta := \Delta(P,Q) \subset \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$ их сумму Кэли $P * Q$, то есть выпуклую оболочку

множества
$$(P\times 0)\cup(Q\times 1).$$
В дальнейшем мы будем отождествлять P и Q с гипергранями $P\times 0$ и $Q\times 1$ в Δ. Операция митоза действует только на тех гранях многогранника Δ, которые содержатся в P ("горизонтальные грани"), и производит грани, которые не содержатся в P.

Определение 1.7. Назовём грань $F\subset P$ допустимой, если существует единственная грань $\exp(F)\neq F$ со свойством
$$F=\exp(F)\cap P.$$

Легко проверить, что если F допустима, то $\dim\exp(F)=\dim F+1$. Грань $\exp(F)$ в каком-то смысле является расширением грани F из P в Δ.

Нам понадобится понятие общего положения для граней многогранника Δ. Это похоже на понятие трансверсального пересечения подмногообразий и формально определяется таким образом.

Определение 1.8. Две грани F и H многогранника Δ находятся в общем положении, если пересечение $F\cap H$ либо пусто, либо
$$\dim(F\cap H)<\dim(F)+\dim(H)-\dim(\Delta).$$

Вообще говоря, чтобы определить операцию митоза на данной грани $F\subset P\subset\Delta$ не всегда нужно рассматривать весь многогранник Δ целиком. Всё действие происходит в грани $\mathrm{env}(F)\subset\Delta$, которая определяется следующим образом.

Определение 1.9. Пусть $\Gamma_1,\ldots,\Gamma_s$ — это все гиперграни многогранника Δ, которые содержат F. Положим
$$F^i=\bigcap_{j\neq i}\Gamma_j.$$
Скажем, что гипергрань Γ_i неустранима, если существует такая гипергрань $\Gamma\subset\Delta$, что Γ и F находятся в общем положении, а Γ и F^i — не в общем. Определим грань $\mathrm{env}(F)\subset\Delta$ как пересечение всех неустранимых гиперграней. Если среди $\Gamma_1,\ldots,\Gamma_s$ нет неустранимых гиперграней, то $\mathrm{env}(F)=\Delta$.

Пусть $v\in P$ — это вершина. В определени митоза, данном ниже, мы рассматриваем только те грани многогранников P и Δ, которые содержат v. Будем называть их v-гранями. В частности, операция митоза $\mathrm{mitosis}^v(\cdot)$ будет зависеть от выбора v.

Пусть $F\subset P$ — это допустимая v-грань размерности ℓ. Мы определим $\mathrm{mitosis}^v(F)$ геометрически как множество v-граней $\{E_1,\ldots,E_k\}$ размерности $\ell+1$. Все эти грани лежат в $\mathrm{env}(F)$.

Определение 1.10. Чтобы v-грань $E_i\subset\mathrm{env}(F)$ вошла в $\mathrm{mitosis}^v(F)$, требуется выполнение двух условий:

– $E_i\not\subset P$, Q;

– $E_i \cap Q \subset \exp(F) \cap Q$.

Грани в $\mathrm{mitosis}^v(F)$ будем называть потомками грани F.

Заметим, что если $\exp(F) \subset \mathrm{env}(F)$, то $\exp(F)$ содержится в $\mathrm{mitosis}^v(F)$, так как оба условия автоматически выполняются в этом случае.

1.4.2 Приложения к многообразиям флагов в типе A и C

Если операцию простого геометрического митоза применить к многограннику Ньютона–Окунькова многообразия флагов (например, к многограннику Гельфанда–Цетлина), то получится выпукло-геометрическая реализация операторов разделённых разностей. В работе [15] такая реализация получена для типов A и C с помощью довольно сложной теории представлений и комбинаторики. Простой геометрический митоз даёт похожую реализцию более элементарным и универсальным способом. При этом нужная комбинаторика сама собой получается из геометрии используемого многогранника, её не нужно угадывать (обычно именно поиск подходящей комбинаторики, особенно положительной, представляет существенную сложность в исчислении Шуберта). Для краткости мы ниже используем без пояснений некоторые достаточно известные термины из исчисления Шуберта, определения можно найти, например, в [15].

1.4.3 Простой геометрический митоз в типе A_n

Положим $d := \frac{n(n+1)}{2}$. Таблицей Гельфанда–Цетлина (ГЦ) типа A_n называется набор клеток, устроенный как на рисунке 1 (слева).

Пусть $\lambda := (\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq \lambda_{n+1})$ — это убывающий набор вещественных чисел. Отождествим точку

$$(x_1^1, x_2^1, \ldots, x_n^1; x_1^2, \ldots, x_{n-1}^2; \ldots; x_1^{n-1}, x_2^{n-1}; x_1^n) \in \mathbb{R}^d$$

с таблицей Гельфанда–Цетлина, у которой i-ая строка заполнена координатами $(x_1^i, x_2^i, \ldots, x_{n-i+1}^i)$ для $1 \leq i \leq n$. Определим многогранник Гельфанда–Цетлина $GZ_\lambda^A \subset \mathbb{R}^d$ с помощью $2d$ неравенств

$$x_j^{i-1} \geq x_j^i \geq x_{j+1}^{i-1}$$

(положим $x_j^0 := \lambda_j$).

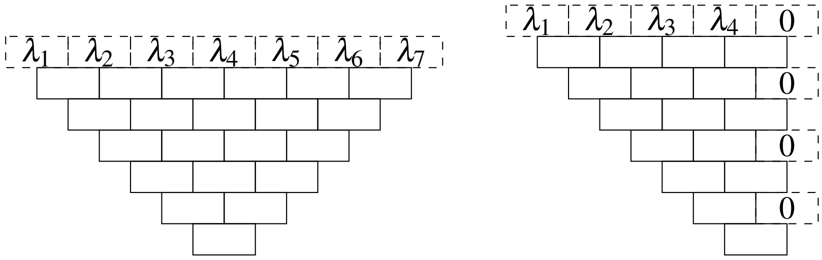

Рисунок 1 – Таблицы Гельфанда–Цетлина в типе A_6 (слева) и в типе C_4 (справа).

Пусть v это вершина Когана многогранника GZ^A_λ. В частности, v-грани — это в точности грани Когана.

Заметим, что многогранник GZ^A_λ для $\lambda = (n, n-1, \dots, 1, 0)$ можно представить как сумму Кэли двух многогранников n разными способами. А именно, пусть P_i и Q_i — это гиперграни многогранника GZ^A_λ, заданные уравнениями $x^1_i = \lambda_i$ и $x^1_i = \lambda_{i+1}$, соответственно. Тогда $\Delta(P_i, Q_i)$ совпадает с GZ^A_λ с точностью до параллельного переноса. Очевидно, $v \in P_1, \dots, P_n$. Таким образом, мы можем определить n разных операций митоза $\mathrm{mitosis}^v_1, \dots, \mathrm{mitosis}^v_n$ на гранях Когана многогранника GZ^A_λ.

Напомним, что каждую грань Когана F можно представить таблицей ГЦ, частично заполненной знаками $+$. А именно, если F лежит в гиперплоскости $\{x^{i-1}_j = x^i_j\}$, то поставим $+$ в клетку (i,j) (то есть в j-ую клетку в i-ой строке). Если нет, то клетка (i,j) остаётся пустой. Полученная таблица ГЦ, заполненная знаками $+$ называется диаграммой грани F и обозначается $D(F)$.

Определим биекцию между пайп дримами в типе A_n и диаграммами граней Когана многогранника GZ^A_λ, отождествив клетку (i,j) в таблице ГЦ с клеткой (j,i) в пайп дриме. Биекция проиллюстрирована на рисунке 2 (слева). Впишем слова “GELFAND ZETLIN POLYTOPE” (без пробелов) в пайп дрим типа A_6 обычным способом (то есть с верхней строки к нижней и слева направо в каждой строке). После перехода к таблице ГЦ слова преобразуются в набор букв на рисунке 2 (слева).

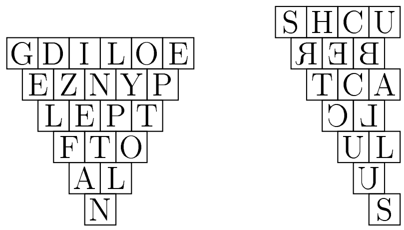

Рисунок 2 – Соответствие между таблицами Гельфанда–Цетлина и пайп дримами в типе A_6 (слева) и в типе C_4 (справа).

Используя биекцию между пайп дримами и таблицами ГЦ, мы можем перенести комбинаторные операции митоза Кнутсона–Миллера $M^A_1, \dots, M^A_n$ с пайп дримов на ГЦ таблицы.

Теорема 1.11. Пусть $F \subset GZ^A_\lambda$ — это приведённая грань Когана. Предположим, что у диаграммы $D(F)$ есть $+$ в клетке $(1,i)$ и нет $+$ в клетке $(1,i+1)$. Тогда $\mathrm{mitosis}^v_i(F)$ состоит из граней Когана, диаграммы которых получаются из $D(F)$ комбинаторными операциями митоза M^A_i на ГЦ таблицах.

1.4.4 **Простой геометрический митоз в типе C_n**

Аналогичная конструкция работает и в типе C. Мы опустим те детали, которые не отличаются от типа A и отметим только уникальные особенности типа C. Положим $d = n^2$, и положим $\lambda := (\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq \lambda_n \geq 0)$. Таблица ГЦ типа C_n определяется в соответствии с рисунком 1 (справа). Многогранник $GZ^C_\lambda \subset \mathbb{R}^d$ определяется с помощью $2d$ неравенств по тому же принципу, что и в типе A, только для таблицы ГЦ типа C. Снова многогранник GZ^C_λ для $\lambda = (n, n-1, \ldots, 0)$ можно представить как сумму Кэли двух многогранников n разными способами.

Пусть v — это симплектическая вершина Когана многогранника GZ^C_λ (см. [15, Section 6]). Снова имеем n операций митоза $\mathrm{mitosis}^v_1, \ldots, \mathrm{mitosis}^v_n$, действующих на симплектических гранях Когана (то есть на v-гранях).

Определим биекцию между косыми пайп дримами и диаграммами граней Когана как в работе [15, Section 6]. Например, если вписать слова “SCHUBERT CALCULUS” (без пробелов) в косой пайп дрим C_4 обычным способом, то они преобразуются в бустрофедон в таблице ГЦ типа C_4 на рисунке 2 (справа). Снова переносим комбинаторные операции (упрощённого) митоза Фуджиты $M^C_1, \ldots, M^C_n$ с косых пайп дримов на таблицы ГЦ в типе C_n.

Теорема 1.12. Пусть $F \subset GZ_C$ — это симплектическая грань Когана.

- Если у диаграммы $D(F)$ есть $+$ в клетке $(1,n)$, и нет $+$ в клетке $(2,n-1)$, то $\mathrm{mitosis}^v_1(F)$ состоит из граней, диаграммы которых получаются из $D(F)$ применением M^C_1;
- Пусть $i = 2, \ldots, n$. Если у $D(F)$ есть $+$ в клетке $(1, n-i+1)$, и нет $+$ в клетке $(1, n-i+2)$, то $\mathrm{mitosis}^v_i(F)$ состоит из граней, диаграммы которых получаются из $D(F)$ применением M^C_i;

В отличие от типа A, можно не требовать, чтобы F была приведённой.

1.5 Применение категорных и алгебро-геометрических конструкций к различным вопросам алгебры и квантовой теории информации

Одно из направлений исследований в 2022 году было посвящено исследованиям гомотопов ассоциативных и неассоциативных алгебр.

Напомним, что общее понятие гомотопии алгебр (вообще говоря неассоциативных) можно понимать как обобщение гомоморфизма: а именно, пусть есть две алгебры $(A, \star)$ и $(B, \cdot)$, тогда гомотопия — это три линейных отображения $f_1, f_2, f_3 \colon A \to B$, таких что

$$f_1(a \star a') = f_2(a) \cdot f_3(a')$$

для любых $a, a' \in A$. В этом случае B назовем гомотопом A. Если потребовать биективность f_i, $i = 1, 2, 3$, то гомотопия называется изотопией.

Частным случаем гомотопа является так называемый x-гомотоп: зафиксируем $x \in A$, тогда в алгебре A можно ввести новую операцию умножения двумя разными способами:

$$a \cdot^L_x a' = (a \star x) \star a'$$

(так называемый левый гомотоп) и

$$a \cdot_x^R a' = a \star (x \star a')$$

(правый гомотоп). Очевидно, в случае ассоциативных алгебр левые и правые гомотопы совпадают.

Отметим связь гомотопов ассоциативных алгебр с так называемой склейкой абелевых категорий. В 1982-м году в статье Бейлинсона, Бернштейна и Делиня [3] при изучении превратных пучков, было введено понятие "склейки" триангулированных категорий. Далее, в 1986 году Макферсон и Вилонен рассмотрели "склейку" абелевых категорий. Следуя Псарудакису ([23]) введем понятие "склейки" (recollement) абелевых категорий. А именно, "склейка" — тройка абелевых категорий $(\mathscr{A}, \mathscr{B}, \mathscr{C})$ и набор функторов: $i\colon \mathscr{A} \to \mathscr{B}$, $e\colon \mathscr{B} \to \mathscr{C}$ и сопряженных к ним: $q\colon \mathscr{B} \to \mathscr{A}$, $p\colon \mathscr{B} \to \mathscr{A}$ и $l\colon \mathscr{C} \to \mathscr{B}$ и $r\colon \mathscr{C} \to \mathscr{B}$, удовлетворяющие следующим условиям: функторы i, l, r — строго точные и образ i совпадает с ядром e. В частности, при достаточно естественных условиях на абелевы категории, соответствующие ограниченные производные категории тоже будут удовлетворять условиям "склейки" триангулированных категорий. Это позволило существенно упростить проверку условий "склейки" и получить оценки гомологических размерностей категории $\mathscr{B}$ через $\mathscr{A}$ и $\mathscr{C}$.

Фактически, "склейка" абелевых категорий является обобщением следующей известной ситуации: пусть у нас есть алгебра R и t — идемпотент в R. Тогда $\mathscr{A} = (\mathrm{R/RtR})\text{-}\mathrm{Mod}$, $\mathscr{B} = \mathrm{R}\text{-}\mathrm{Mod}$ и $\mathscr{C} = (\mathrm{tRt})\text{-}\mathrm{Mod}$.

Подобная ситуация встречается и при изучении гомотопов ассоциативных алгебр. А именно, рассмотрим ассоциативную алгебру с единицей R и фиксируем элемент $x \in R$. Как мы уже знаем, можно ввести новую операцию умножения на пространстве R: $r_1 \cdot_x r_2 = r_1 x r_2$. Новая алгебра может не содержать единицу, поэтому добавим ее внешним образом — получим алгебру $\widehat{R}_x$.

В работе [10] было показано, что для ассоциативной k-алгебры R категория модулей гомотопа $\widehat{\mathrm{R}}_\mathrm{x}\text{-}\mathrm{Mod}$ является "склейкой" категорий $\mathrm{R}\text{-}\mathrm{Mod}$ и $\mathrm{k}\text{-}\mathrm{Mod}$ в случае "правильного" выбора элемента x. Условие "правильного" выбора следующие: $RxR = R$ и R как левый и правый $\widehat{R}_x$-модуль является проективным. Такой выбор элемента называется хорошо-темперированным. В этом случае есть естественные оценки на глобальную гомологическую размерность $\widehat{\mathrm{R}}_\mathrm{x}\text{-}\mathrm{Mod}$ через глобальную размерность $\mathrm{R}\text{-}\mathrm{Mod}$.

С точки зрения исследования гомотопов довольно естественными являются такие вопросы:

– сколько гомотопов (с точности до изотопии) имеет общая неассоциативная алгебра?

– Есть ли ассоциативная алгебра, имеющая бесконечное число неизоморфных x-гомотопов?

Ответы на эти вопросы были получены в совместной работе сотрудников лаборатории И. Ждановского и С. Гуминова [13]. А именно, в случае первого вопроса были изучены детерминантные гиперповерхности, естественно появляющиеся при рассмотрении умножения в алгебре как тензора. Были переформулированы условия изотопичности алгебр в терминах этих гиперповерхностей и в результате исследования ответ на первый вопрос такой: начиная с размерности 4, у общей неассоциативной алгебры бесконечное число неизотопных гомотопов. Далее, в случае ассоциативных алгеб удалось построить пример 13-мерной алгебры, имеющей бесконечное число неизоморфных x-гомотопов.

Отметим, что гомотопы ассоциативных алгебр естественно появляются в связи с различными областями математики и физики: среди которых, классификация конфигураций прямых в гильбертовом пространстве, описание ортогональных разложений простых алгебр Ли, дискретный гармонический анализ на графах, классификация взаимно-несмещенных базисов, имеющая большое применение в квантовой механике и квантовой теории информации, описание превратных пучков на стратифицируемых топологических пространствах, теория представлений квази-наследственных алгебр и т.д.

Вторым объектом исследования являлись приложение теории гомотопов, алгебраической геометрии и теории представлений к вопросам квантовой теории информации. Вопрос в самой квантовой теории информации звучит так. Пусть есть две полные проекторно-значные меры в n-мерном пространстве, соответственно, есть два набора n различных квантовых состояний соответствующих каждой мере: $|\psi_i>, i=1,...,n$ и $|\phi_i>, i=1,...,n$ соответственно. Зафиксируем вероятности перехода от $|\psi_i>$ в $|\phi_j>$. Сколько существует проекторно-значных мер (с точностью до унитарной эквивалентности) для фиксированных вероятностей?

Математическая формулировка задачи выглядит так. Пусть есть два полных набора ортогональных проекторов $p_1,...,p_n$ и $q_1,...,q_n$ ранга 1. Сколько существует таких наборов при фиксированных $\mathrm{Tr}(p_i q_j)$?

Для общих значений следов, задача имеет следующие решения в малых размерностях: при $n=2$ — 1 пара, $n=3$ — 2 пары, $n=4$ — 12 пар. Изучались различные геометрические конструкции появляющиеся в решении этой задачи в малых размерностях.

1.6 Модуль ренормализации рациональных функций

В совместной работе [4] сотрудника лаборатории В. Тиморина с А. Блохом, Г. Левиным и Л. Оверстигеном получены, при весьма общих предположениях, оценки сверху на модуль ренормализации рациональных функций.

Напомним, что рациональная функция $f\colon \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} \to \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ допускает ренормализацию периода q, если некоторое ограничение $f^q\colon U \to V$ является полиномиально подобным отображением со связным множеством Жюлиа, то есть U, W представляют из себя топологические диски, U компактно вложен в V, отображение $f^q\colon U \to V$ собственное, и все критические точки отображения f^q в U возвращаются в U при каждой итерации отображения f^q.

Начиная с работ Д. Салливана по универсальности Фейгенбаума в квадратичном семействе, исследование полиномиально подобных ренормализаций является мощным инструментом в динамике многочленов. С полиномиально подобным отображением $f^q\colon U \to V$ связано кольцо $A = V \setminus \overline{U}$, модуль которого называется модулем ренормализации (на самом деле, приведенные ниже оценки сверху справедливы и для бо́льшего кольца, отделяющего границу диска V от всех точек, f^q-орбиты которых не убегают из U).

Так называемые априорные оценки (a priori bounds), то есть оценки снизу на модуль ренормализации, играют важную роль в работах, устанавливающих свойства жесткости, локальной связности множеств Жюлиа и т.д. для широких классов рациональных функций (Kahn–Lyubich, Levin–van Strien, Graczyk–Świątek, Kozlovski–van Strien, ...). Приведенные ниже общие оценки снизу на тот же модуль не только обозначают границы применимости известной аналитической техники (результаты негативного характера), но и приводят к новым результатам позитивного характера.

Множество $K^* = \{z \in U \mid f^{qn}(z) \in U \ \forall n \geq 0\}$ называется полиномиально подобным заполненным множеством Жюлиа, или PL-множеством, ренормализации $f^q\colon U \to V$. PL-циклом называется набор множеств K^*, $f(K^*)$, ..., $f^{q-1}(K^*)$. Мы будем всегда предполагать, что различные множества одного и того же PL-цикла пересекаются максимум по точке — иначе можно перейти к рассмотрению более мелких PL-множеств. Положим

$$\mathsf{T}(t,D) = 4\frac{t-2}{\sqrt{t-1}}\operatorname{tg}\frac{D}{2} - 8.$$

Эта величина положительна и растет как $\sqrt{t}$ при больших t и фиксированном D. Наиболее общая оценка из полученных в [4] выглядит так. Пусть $\mathscr{K}$ — PL-цикл для рациональной функции f. Допустим, что хотя бы t элементов Z_1, ..., Z_t этого цикла имеют сферический диаметр хотя бы D, кольца $U_i \setminus Z_i$ имеют модуль по меньшей мере m (здесь $f^q\colon U_i \to V_i$ — ренормализация вокруг Z_i), и дополнения $\mathbb{P}^1 \setminus U_i$ тоже имеют диаметр хотя бы D. Если $\mathsf{T}(t,D) > 1$, то

$$m \leq \frac{\pi}{2\ln \mathsf{T}(t,D)} < \frac{\pi}{\ln(4D^2 t)}$$

(правое неравенство имеет место при фиксированном D и достаточно больших t).

PL-цикл $\mathscr{K}$ называется сателлитным, если входящие в него PL-множества содержат периодическую орбиту, период r которой строго меньше, чем период q самого PL-цикла. Таким образом, входящие в PL-цикл PL-множества разбиваются на группы по $s = q/r$ в каждой так, что каждая группа имеет общую точку периода r. Число r называется базовым периодом, а число s — относительным периодом сателлитного цикла. Если рациональная функция f имеет степень 2 или выше, а $s \geq 35$, то модуль m^* кольца $U \setminus K^*$ удовлетворяет неравенству

$$m^* \leq \frac{d^*\pi}{2\ln\left[\frac{4s-12}{\sqrt{s-2}}(\sqrt{2}-1) - 8\right]} \leq \frac{d^*\pi}{\ln\frac{s}{34}},$$

в котором через d^* обозначается степень полиномиально подобного отображения $f\colon U \to V$. В частности, $d^* \le 2^{2d-2}$ для рациональной функции f степени d.

Полученные оценки влекут следующее качественное утверждение. Рассмотрим последовательность $\{f_n\}$ рациональных функций степени $d \ge 2$, которая сходится к рациональной функции f степени d. Допустим, что для каждого n найдется ренормализация $f_n^{q_n} : U_n \to V_n$ периода q_n со связным PL-множеством K_n, и что $K_n \to K$ в метрике Хаусдорфа. Если

– множество K состоит более чем из одной точки;

– последовательность q_n стремится к ∞;

– множество K не лежит в параболической области,

то последовательность модулей колец $U_n \setminus K_n$ стремится к нулю.

За отчетный период вышли статьи [5, 6, 7].

1.7 Производные категории и суперсвязности

В отчётный период сотрудники лаборатории подвели первый итог [8, 9] исследований связи между некоторыми дифференциально-геометрическими и комплексно-аналитическими объектами на комплексно-аналитических многообразиях. Отталкиваясь от классического примера эквивалентности категорий голоморфных расслоений и гладких расслоений с плоской $\bar{\partial}$-связностью, мы доказываем, что гомотопическая категория $\bar{\partial}$-суперсвязностей на компактном комплексно-аналитическом многообразии X эквивалентна производной категории $D^b_{coh}(X)$. Подробности были описаны в отчётах за предыдущие годы.

Сегодня мы хотели бы остановиться на одном вспомогательном, чисто техническом результате, который мы не нашли в литературе, но который помогает упростить доказательство выше упомянутой теоремы. Пусть $\mathscr{C}^\infty$ — локальное кольцо гладких комплекснозначных функций в произвольной точке (гладкого) комплексно-аналитического многообразия X, и пусть $\mathscr{O} \subset \mathscr{C}^\infty$ — его подкольцо ростков комплексно-аналитических функций. Мы доказываем, что $\mathscr{C}^\infty$ плоское над своим подкольцом $\mathscr{O}$. Это означает, что для любой короткой точной последовательности $\mathscr{O}$-модулей,

$$0 \to M_1 \to M_2 \to M_3 \to 0\,,$$

последовательность

$$0 \to M_1 \otimes_{\mathscr{O}} \mathscr{C}^\infty \to M_2 \otimes_{\mathscr{O}} \mathscr{C}^\infty \to M_3 \otimes_{\mathscr{O}} \mathscr{C}^\infty \to 0$$

также точна.

Доказательство основывается в первую очередь на серьёзной теореме Мальгранжа [14] о том, что $\mathscr{C}^\infty$ плоско над своим подкольцом $\mathscr{C}^\omega \subset \mathscr{C}^\infty$, где $\mathscr{C}^\omega$ — локальное кольцо вещественно-аналитических (комплекснозначных) функций в точке X. Чтобы получить наш результат из упомянутой теоремы Мальгранжа, понадобилось выстроить цепочку утверждений, которые нашлись в текстах по коммутативной алгебре, см. [2, 11].

С технической точки зрения было удобнее доказать немного более сильное утверждение, а именно, что $\mathscr{C}^\infty$ является строго плоским кольцом над $\mathscr{O}$. Возможное определение строгой плоскости такое:

Определение 1.13. Пусть E — модуль над коммутативным кольцом A. Тогда E называется строго плоским, если выполнены следующие два условия:

- E плоский над A;

- для любого A-модуля M, равенство $E \otimes_A M = 0$ влечёт $M = 0$.

Дальнейшие рассуждения используют транзитивность свойства строгой плоскости для вложений колец $A \subset B \subset C$, а также нётеровость колец $\mathscr{O}$ и $\mathscr{C}^\omega$.

Из плоскости локальных колец следует утверждение, что пучок гладких функций $\mathscr{C}_X^\infty$ является плоским над пучком колец $\mathscr{O}_X$, что позволяет утверждать следующее. Если F — когерентный пучок $\mathscr{O}_X$-модулей, то $\mathscr{F} := F \otimes_{\mathscr{O}_X} \mathscr{C}_X^\infty$ локально обладает конечной свободной $\mathscr{C}_X^\infty$-резольвентой, а из этого локального утверждения мы смогли, следуя идеям [1], показать, что глобально на компактном X пучок $\mathscr{F}$ имеет резольвенту, состоящую из локально-свободных $\mathscr{C}_X^\infty$-модулей. Последнее утверждение было важно для доказательства нашей теоремы.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

[1] M. F. Atiyah, F. Hirzebruch, Analytic cycles on complex manifolds, Topology 1 (1962) 25-45

[2] M. F. Atiyah, I. G. Macdonald Introduction to commutative algebra, Addison-Wesley, Reading, MA, London (1969) ix+128 pp.

[3] A. Beilinson, J. Bernstein and P. Deligne, Faisceaux pervers, Asterisque 100, 1982.

[4] A. Blokh, G. Levin, L. Oversteegen, V. Timorin, The modulus of renormalization of rational functions: high periods imply small moduli, preprint.

[5] A. Blokh, L. Oversteegen, V. Timorin, Slices of the parameter space of cubic polynomials, Transactions of the AMS, 2022. Vol. 375. No. 8. P. 5313–5359.

[6] A. Blokh, L. Oversteegen, V. Timorin, Cutpoints of Invariant Subcontinua of Polynomial Julia Sets, Arnold Mathematical Journal. 2022. Vol. 8. P. 271–284.

[7] A. Blokh, L. Oversteegen, A. Shepelevtseva, V. Timorin, Modeling Core Parts of Zakeri Slices I, Moscow Mathematical Journal. 2022. Vol. 22. No. 2. P. 265–294.

[8] A. Bondal, A. Rosly, Derived categories for complex-analytic manifolds, preprint IPMU11-0117 (Kashiwa, 2011)

[9] A. Bondal, A. Rosly, Coherent sheaves, Chern classes, and superconnections on compact complex-analytic manifolds, Izv. RAN. Ser. Mat., 87:3 (2023) (to appear)

[10] A. I. Bondal and I. Y. Zhdanovskiy. Theory of homotopes with applications to mutually unbiased bases, harmonic analysis on graphs, and perverse sheaves. Russian Mathematical Surveys, 76(2):195–259, 2021.

[11] N. Bourbaki Commutative algebra, in: Elements of mathematics, Hermann, Addison-Wesley Publishing Co., Paris, Reading, MA, translated from the French (1972) xxiv+625 pp.

[12] Elagin, Alexey; Lunts, Valery A., Thick subcategories on curves. Adv. Math. 378 (2021), Paper No. 107525, 19 pp.

[13] S. Guminov, I. Zhdanovskiy, On equivalence classes of homotopes of algebras and trilinear forms, `https://doi.org/10.48550/arXiv.2112.15436`.

[14] B. Malgrange, Ideals of differentiable functions, Tata Institute of Fundamental Research Studies in Mathematics, No. 3, Tata Institute of Fundamental Research, Bombay; Oxford University Press, London (1967) vii+106 pp.

[15] Naoki Fujita, Schubert calculus from polyhedral parametrizations of Demazure crystals, Adv. in Math., 397 (2022).

[16] Valentina Kiritchenko, Geometric mitosis, Math. Res. Lett., 23 (2016), no. 4, 1069–1096.

[17] Valentina Kiritchenko, Push-pull operators on convex polytopes, IMRN, `https://doi.org/10.1093/imrn/rnab331`.

[18] Valentina Kiritchenko, Simple geometric mitosis, in preparation.

[19] Kuznetsov, Alexander. Lefschetz decompositions and categorical resolutions of singularities. Selecta Math. (N.S.) 13 (2008), no. 4, 661–696.

[20] Kuznetsov, Alexander; Lunts, Valery A. Categorical resolutions of irrational singularities. Int. Math. Res. Not. IMRN 2015, no. 13, 4536–4625.

[21] Kuznetsov, Alexander; Shinder, Evgeny. Categorical absorptions of singularities and degenerations. `https://arxiv.org/abs/2207.06477`.

[22] Kuznetsov, Alexander; Smirnov, Maxim, On residual categories for Grassmannians. Proc. Lond. Math. Soc. (3) 120 (2020), no. 5, 617–641.

[23] Psaroudakis, Chrysostomos. Homological theory of recollements of abelian categories. J. Algebra 398 (2014), 63–110.

2 Гомологические и мотивные методы в некоммутативной геометрии

2.1 Гладкие полулинейные представления бесконечных симметрических групп

Для данного поля, снабжённого гладким (т.е. с открытыми стабилизаторами) действием некоторой вполне несвязной группы G, естественно изучать его расширения L, на которые действие G продолжается гладким образом, а также – G-инвариантные подполя, и сравнить категории $\mathsf{Sm_L(G)}$ гладких полулинейных представлений G над такими G-полями L.

Пусть $\mathfrak{S}_\Psi$ — группа всех перестановок некоторого бесконечного множества Ψ.

В отчетный период сотрудниками лаборатории доказано, что

- любое гладкое $\mathfrak{S}_\Psi$-поле K допускает "слабое расширение периодов", т.е. такое гладкое $\mathfrak{S}_\Psi$-поле $L|K$, что L — кообразующая категории $\mathsf{Sm_L}(\mathfrak{S}_\Psi)$,
- любое "слабое расширение периодов" L содержит $\mathfrak{S}_\Psi$-инвариантное подполе изоморфное $k(\Psi)$, где $k := L^{\mathfrak{S}_\Psi}$ — неподвижное подполе поля L.

Пусть $F|k$ — такое расширение полей, что k алгебраически замкнуто в F. Обозначим через $F_\Psi = F_{k,\Psi}$ (функториально зависящее от расширения $F|k$) поле частных копроизведения в категории k-алгебр копий F, пронумерованных множеством Ψ. В частности, $F_\Psi = k$, если $F = k$; $F_\Psi = k(\Psi)$, если $F = k(X)$ — поле рациональных функций над k от переменной X. Группа $\mathfrak{S}_\Psi$ естественно действует на F_Ψ, переставляя копии F.

Некоторые $\mathfrak{S}_\Psi$-инвариантные подполя поля F_Ψ можно построить как неподвижные подполя L_Ψ^H диагонально действующих групп H, состоящих из каких-либо автоморфизмов промежуточных подполей L в $F|k$. Например, если $L \cong k(X)$ и H — подгруппа в $\mathsf{Aut(L|k)} \cong \mathsf{PGL_2(k)}$, то H фиксирует то же подполе в L_Ψ, что и замыкание H по Зарисскому.

Предположим теперь, что степень трансцендентности расширения $F|k$ равна 1, $K \neq k$ — $\mathfrak{S}_\Psi$-инвариантное расширение поля k в F_Ψ алгебраически замкнутое в F_Ψ, а характеристика — нулевая. Доказано, что

- степень трансцендентности d поля F_Ψ над K не превосходит 3;
- K получается вышеописанной конструкцией при $d \geqslant 2$ (а его класс изоморфизма зависит только от d: $k(\frac{u-v}{u-w} \mid u,v,w \in \Psi)$ при $d = 2$, и $k\left(\frac{(w-x)(y-z)}{(w-z)(x-y)} \mid w,x,y,z \in \Psi\right)$ — поле "двойных отношений" — при $d = 3$);
- K получается небольшой модификацией вышеописанной конструкции при $d = 1$, а классы изоморфизма зависят в том числе от F, им соответствуют классы изогении тех геометрически неприводимых одномерных алгебраических групп над k, поля

функций которых вкладываются в F: имеется система изогений $(\pi_{ij}: W_i \to W_j)_{ij}$ между торсорами W_i над геометрически неприводимыми одномерными алгебраическими k-группами E_i с согласованным набором отмеченных общих F-точек $\sigma_i : k(W_i) \hookrightarrow F$ (т.е. $\sigma_i \pi_{ij}^* = \sigma_j$ для всех i, j) $K = \bigcup_i (\overline{k}(W_i)_{\overline{k},\Psi}^{E_i(\overline{k})})^{\mathsf{Gal}(\overline{\mathsf{k}}|\mathsf{k})} \subset \bigcup_i k(W_i)_\Psi \subseteq F_\Psi$, где $E_i(\overline{k})$ действует на $\overline{k}(W_i)_\Psi$ диагонально.

Показано, что существуют $\mathfrak{S}_\Psi$-инвариантные расширения K поля k в F_Ψ, над которыми F_Ψ алгебраично, и гладкие неприводимые полулинейные представления группы $\mathfrak{S}_\Psi$ над K конечных размерностей > 1 (а именно, размерностей 2, 3, 4, 5; кроме того, если k содержит подполе $\mathbb{F}_q$, добавляется, например, размерность q).

Показано, что для любого целого N существует неприводимое полулинейное гладкое представление группы $\mathfrak{S}_\Psi$ над полем $k\left(\frac{(w-x)(y-z)}{(w-z)(x-y)} \mid w, x, y, z \in \Psi\right)$ "двойных отношений" размерности $> N$.

Как и выше, пусть $F|k$ — такое расширение полей, что k алгебраически замкнуто в F.

Для конечного множества S, непустого при $F = k$, и подгруппы Γ свободной абелевой группы Ξ с базисом S, положим

$$K_{\mathsf{a}} = K_{\Psi,S,\Gamma}^{(F|k)} := F_\Psi\left(u^\gamma, \frac{u_s}{v_s} \mid \gamma \in \Gamma,\ s \in S,\ u, v \in \Psi\right) = F_\Psi\left(x^\gamma, \frac{u_s}{x_s} \mid \gamma \in \Gamma,\ s \in S,\ u \in \Psi\right),$$

где $x \in \Psi$ — произвольный фиксированный элемент. Это — $\mathfrak{S}_\Psi$-инвариантное подполе чисто трансцендентного расширения $F_\Psi(\Psi \times S) = F(S)_\Psi$ поля F_Ψ с базисом трансцендентности, состоящим из переменных, пронумерованных $\mathfrak{S}_\Psi$-множеством $\Psi \times S$, где u_s обозначает переменную, соответствующую паре $(u, s) \in \Psi \times S$ и $u^\gamma := \prod_s u_{j_s}^{m_s}$ для всех $u \in \Psi$ и $\gamma = \sum_s m_s[j_s] \in \Xi$ (так что $K_{\mathsf{a}} := F_\Psi$, если $S = \varnothing$).

Построено несколько классов примеров гладких $\mathfrak{S}_\Psi$-полей K таких, что для гладких конечных $\mathfrak{S}_\Psi$-расширений $L|K$ выполняется условие $L^{\mathfrak{S}_\Psi} = K^{\mathfrak{S}_\Psi}$ только если $L = K$. А именно, таким свойством обладают слабые поля периодов и поля вида $K_{\mathsf{a}} = K_{\Psi,S,\Gamma}^{(F|k)}$.

Доказано, что для любого конечно порождённого расширения полей $L|k$ любое гладкое действие группы $\mathfrak{S}_\Psi$ на поле частных алгебры $L \otimes_k F_\Psi$, продолжающее стандартное $\mathfrak{S}_\Psi$-действие на F_Ψ, изоморфно $\mathfrak{S}_\Psi$-действию на поле частных алгебры $L' \otimes_k F_\Psi$ для некоторого конечно порождённого расширения полей $L'|k$ тривиальному на L'.

Получено описание спектра Габриеля категории $\mathsf{Sm}_{\mathsf{K}}(\mathfrak{S}_\Psi)$, обобщающее ранее полученные результаты в случаях а) пустого S, б) $\Xi = \mathbb{Z}$ и $\Gamma = 0$. Например, группа классов изоморфизма обратимых объектов категории $\mathsf{Sm}_{\mathsf{K_a}}(\mathfrak{S}_\Psi)$ изоморфна Ξ/Γ.

2.2 **0-циклы как копучки**

Пусть k – поле. Один из вариантов (давно стоящей) проблемы построения категории мотивов $\mathscr{M}\mathscr{M}_k$ подразумевает, что $\mathscr{M}\mathscr{M}_k$ – нейтральная таннакиева $\mathbb{Q}$-линейная категория, все простые объекты которой соответствуют простым мотивам Гротендика по модулю численной эквивалентности.

Поэтому представляют интерес абелевы $\mathbb{Q}$-линейные тензорные категории, простые объекты которой соответствуют простым мотивам Гротендика по модулю численной эквивалентности.

В нулевой характеристике примером достаточно естественной абелевой $\mathbb{Q}$-линейной тензорной (но не жёсткой) категории, допускающей вполне строгий функтор из категории эффективных примитивных мотивов Гротендика по модулю численной эквивалентности, является категория пучков $\mathbb{Q}$-векторных пространств в доминантной топологии. Однако такая топология отражает не сами многообразия, а только их бирациональный тип.

В отчетный период, сотрудниками лаборатории предложен несколько иной подход. А именно, рассматривается функтор 0-циклов Z_0 как объект некоторой абелевой категории функторов $\mathscr{A}$.

Доказано, что если $\mathscr{A}$ – категория функторов с трансферами на любом наборе гладких проективных многообразиях над k, то цоколь $Z_0 \otimes \mathbb{Q}$ прост и является функтором рационально тривиальных 0-циклов.

В более широком контексте, показано, что группы 0-циклов на квазикомпактных схемах образуют копучок в h-топологии.

2.3 Новые описания обогащенных (∞,n)-категорий

В отчетный период, сотрудниками лаборатории было получено несколько новых описаний обогащенных (∞,n)-категорий:

Теорема 2.1. Пусть $\mathscr{V} \in \mathsf{CAlg}(\mathsf{Pr}^{\mathsf{L}}_{\infty})$- представимо симметрическая моноидальная ∞-категория. Тогда:

– Естественный функтор

$$\mathsf{Cat}_n(\mathscr{V}) \longrightarrow \mathsf{Cat}_{n-1}$$

является кодекартовым расслоением, и его распрямление эквивалентно функтору, отправляющему $(\infty,n-1)$-категорию $\mathscr{X} \in \mathsf{Cat}_{n-1}$ в категорию отображений

$$\begin{tikzcd} \mathscr{B}_{n-1}(\mathscr{X}) \arrow[rr, dashed] \arrow[dr] & & \mathscr{V}^{\otimes} \arrow[dl] \\ & \Delta^{\mathsf{op},n} & \end{tikzcd}$$

отправляющих кодекартовы морфизмы над инертными морфизмами в кодекартовы морфизмы, где $\mathscr{B}_{n-1}(\mathscr{X})$ это n-категория направленных $(n-1)$-мерных сфер в $\mathscr{X}$;

– Для $\mathscr{X} \in \mathsf{Cat}_{n-1}$ ∞-категория отображений их пункта 1 эквивалентна ∞-категории n-алгебр в n-оидальной ∞-категории $\mathsf{Fun}\big(\mathsf{Hom}_{\mathsf{Cat}_{n-1}}(\partial C_n, \mathscr{X}), \mathscr{V}\big)$.

Используя теорему выше было получено описание касательной категории к категории $\mathscr{V}$-обогащенных (∞,n)-категорий:

Теорема 2.2. Для $\mathscr{V}$-обогащенной (∞,n)-категории $\mathscr{C} \in \mathsf{Cat}_n(\mathscr{V})$ стабилизация $\mathsf{Stab}\big(\mathsf{Cat}_n(\mathscr{V})_{/\mathscr{C}}\big)$ категории $\mathscr{V}$-обогащенных (∞,n)-категорий над $\mathscr{V}$ функториально эквивалентна:

– ∞-категории отображений

$$\begin{tikzcd} \Delta^{\mathsf{op},n} \arrow[r, "\mathscr{C}"] \arrow[d] & \mathsf{Fun}\big(\mathsf{Hom}_{\mathsf{Cat}_{n-1}}(\partial C_n, \mathscr{X}), \mathscr{V}\big) \\ \mathsf{Mod}^n \arrow[ur, dashed] & \end{tikzcd}$$

над $\Delta^{\mathsf{op},n}$, отправляющих кодекартовы морфизмы над инертными морфизмами в кодекартовы морфизмы, где Mod^n- естественное обобщение (нессиметрической) операды бимодулей;

– Категории $\mathscr{V}$-функторов $\mathsf{Fun}_{\mathscr{V}}(\mathscr{U}_{\mathscr{C}}, \mathscr{V})$, где $\mathscr{U}_{\mathscr{C}}$- это универсальная обертывающая $\mathscr{V}$-∞-категория, построенная по $\mathscr{C}$.

Кроме того, было определено понятие (ко)гомологий Хохшильда для обогащенной (∞,n)-категории, а так же показана связь когомологий Хохшильда с формальными задачами модулей.

Помимо этого была построена теория (ко)декартовых расслоений моноидальных категорий, а так же доказаны базовые теоремы этого сюжета. Была построена теория моноидальных (ко)концов в ∞-категориях, позволяющая эффективно работать с (оп)лакс моноидальными функторами. Кроме того, была доказана общая теорема о представимости большого класса ∞- категорий алгебр над операдами.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

[1] J. Lurie, Higher Algebra, 2017, `http://www.math.harvard.edu/ lurie/papers/HA.pdf`

[2] D. Gepner, Rune Haugseng, Enriched ∞-categories via non-symmetric ∞-operads, Advances in Mathematics, 279 (2015), 575-716.

2.4 Экзотические когомологии и формальность для dg-модулей

В отчетный период, сотрудниками лаборатории изучался вопрос функториальности экзотических (ℓ^p, ℓ^∞, ограниченных) и обычных (ко)гомологий групп относительно метрических отображений групп (грубых вложений и квазиизометрий). Среди возможных приложений развиваемой теории: решение вопроса о квазиизометрической инвариантности вещественной алгебры Мальцева нильпотентной группы, общий взгляд на абсолютную квазиизометрическую жёсткость, новые подходы к изучению структуры нелинейных кэлеровых групп. Получены частные результаты: квазиизометрическая инвариантность когомологий с коэффициентами в пространствах Орлича, определение кольцевой структуры на ℓ^∞ когомологиях Герстена аменабельной группы и применение этого умножения для оценки инвариантов Новикова-Шубина.

Кроме того, доказана теорема о частичной характеризации образа функтора когомологий (сопоставляющего dg-модулю M над dg-алгеброй A его когомологии $H^*(M)$ как модуль над $H^*(A)$). Случай конечно-представленного градуированного модуля является, скорее всего, известным специалистам: из зануления некоторого характеристического класса в $Ext_{H^*(A)^3(X,X)}$ следует, что X является ретрактом объекта, лежащего в образе $H^*(-)$. Новым результатом является то, что этот характеристический класс определён на большей подкатегории, а именно, на модулях, имеющих полную исчерпывающую (трансфинитную) фильтрацию с конечно-представленными присоединёнными факторами. Высказана гипотеза о том, что эта подкатегория является образом левого Ext-ортогонала в категории dg-модулей к подкатегории "dg-плоских" объектов.

Изучался также и "двойственный" вопрос: какие градуированные модули над градуированной алгеброй допускают структуру dg-модуля относительно заданного дифференциала на градуированной алгебре. Дуализация утверждений представляется возможной, но требует технических утверждений, верность которых ещё неясна.

2.5 Модель гомотопического типа дополнения до набора гладких многообразий

Пусть X компактное гладкое алгебраическое многообразие над $\mathbb{C}$ и $Z_i \subset X, i \in N$ набор подмногообразий занумерованных множеством N таких, что пересечения $Z_I := \cap_{i\in I} Z_i$ гладки в теоретико-множественном смысле. Рассмотрим дополнение $U := X - \cup_i Z_i$.

Существует спектральная последовательность типа Майера-Виеториса с

$$E_1^{pq} = \bigoplus_{|I|=-p} H^q_{Z_I}(X)$$

сходящаяся к $H^*(U)$. В работе стажера лаборатории А. Захарова доказывается, что существует естественный квази-изоморфизм дг-алгебр

$$E_1^{**} \otimes \mathbb{C} \simeq C^*_{sing}(U) \otimes \mathbb{C}$$

Более того, существует неканонический квази-изоморфизм над $\mathbb{Q}$. Случай когда $\cup Z_i$ образует дивизор с нормальными пересечениями был доказан в статье J. Morgan, The algebraic topology of smooth algebraic varieties и основан на изучении понятия диаграммы Ходжа, которая является мультипликативной версией комплекса Ходжа введенного P. Deligne. Важное наблюдение доказанное J. Morgan'ом состоит в том, что минимальная алгебра диаграммы Ходжа обладает структурой смешанной структуры Ходжа, которую уважает соответствующий дифференциал. Отсюда в частности следует, что дг-алгебра ${}_W E_1$ построенная по диаграмме Ходжа относительно весовой фильтрации квази-изоморфна комплексной части диаграммы Ходжа. Основная конструкция, полученная в отчетный периоды сотрудником лаборатории А. Захаровым, состоит в реализации мультипликативной структуры на голоморфной де Рам версии резольвенты Майера-Виеториса, что в свою очередь доставляет диаграмму Ходжа пригодную для общей машинерии развитой J. Morgan.

Соответствующую спектральную последовательность автор называет кубическим Майер-Виеторисом и доказанная теорема дает некоторую обозримую модель для рационального гомотопического типа U. Для многих приложений оказывается возможным реализовать более экономную конструкцию, которая обобщает случай возникающей кубической решетки до произвольной геометрической решетки.

Рассмотрим частично упорядоченное множество $(L,\leq)$ являющееся решеткой. В своей работе А. Захаров вводит формализм $(L,\leq)$-цепных алгебр которые по существу являются L-градуированными алгебрами с дифференциалом бьющим в члены с меньшей градуировкой. Частный пример такой структуры доставляет набор $H^*(X,X-L_x), x\in L$ для решетки пересечений L_x набора подмногообразий $Z_i\subset X$. Здесь $0\in L$ минимальный элемент и $L_0=X$. В случае когда $(L,\leq)$ обладает алгеброй Орлика-Соломона $\mathscr{M}_x, x\in L$, удается построить спектральную последовательность с членами

$$E_1^{pq}=\bigoplus_{x\in L:r(x)=-p} H^q(X,X-L_x)\otimes\mathscr{M}_x$$

Как и раньше она сходится к $H^*(U), U=X-\cup_x L_x$. В случае геометрической решетки $(L,\leq)$, мы имеем каноническую алгебру Орлика-Соломона $\mathscr{M}_x:=OS(L)_x, x\in L$. В таком случае А. Захаров доказывает что E_1^{**} моделирует гомотопический тип U в смысле первой теоремы.

Более того, все возникающие спектральные последовательности состоят из чистых структур Ходжа, что позволяет восстановить ассоциированную чистую структуру Ходжа $Gr^W H^*(U)$. Конечно восстановить смешанную структуру Ходжа $H^*(U)$ в этой модели нельзя. Это параллельно факту, доказанному в работе Donu Arapura, The Leray spectral sequence is motivic, что спектральная последовательность Лере открытого вложения лежит в категории смешанных структур Ходжа. В случае дополнения до дивизора с нормальными пересечениями спектральная последовательность Лере совпадает с построенной кубической последовательностью Майера-Виеториса. Однако в общем случае они отличаются, в частности последовательность Лере вырождается медленнее .

Этот результат поднимает утверждение о когомологиях $H^*(U)$ доказанное в работе Junda Chen, Zhi Lü and Jie Wu, Cohomology ring of manifold arrangements до уровня модели рационального гомотопического типа U.

В качестве приложений легко доказываются следующие два результата. Первый это основная теорема работы Feighter and Yuzvinsky, Formality of the complements of subspace arrangements with geometric lattices. А именно, пусть есть набор аффинных подпространств $L_i\subset\mathbb{C}^n$ таких, что их пересечения образуют геометрическую решетку. Тогда $\mathbb{C}^n-\cup_i L_i$ формально. Для доказательства А. Захаров переходит к компактификации $\mathbb{P}^n$ и добавляет к набору L_∞ бесконечно удаленную гиперплоскость. Построенная модель Майера-Вьеториса и элементарная гомологическая алгебра влечет формальность дополнения.

В качестве второго приложения рассматриваются обобщенные (хроматические) конфигурационные пространства $F(G,M)$ построенные по компактному алгебраическому многообразию M и конечному графу G на n вершинах. Обычное конфигурационное пространство соответствует полному графу $G = K_n$. По определению $F(G,M)$ есть дополнение $X = M^{\times n}$ к набору диагоналей диктуемых ребрами G. Известно что спектральная последовательность Kritz-Totaro доставляет рациональный гомотопический тип $F(K_n,M)$. Оригинальное доказательство использует явное описание компактификации Deligne-Mumford с целью реализовать $F(K_n,M)$ как дополнение к дивизору с нормальными пересечениями. Предложенная модель Майера-Вьеториса позволяет делать это на уровне комбинаторики решетки пересечений диагоналей, то есть самого графа G. Это дает явную дг-алгебру рационального гомотопического типа $F(G,n)$ в духе результата Kritz-Totaro.

Работа готовится к публикации и в ближайшее время будет выложен препринт.

2.6 Когомологии пространств Эйленберг-Маклейна и производные функторы

В классических работах H. Cartan и затем J. Milgram'а были описаны целочисленные гомологии

$$H_*(K(\mathbb{Z}/p^k\mathbb{Z},n);\mathbb{Z}_{(p)})$$

для простого p. Ответ дается в виде гомологий явной коммутативной дг-алгебры состоящей из тензорного произведения элементарных дг-алгебр типа Кошуля с разделенными степенями у четных образующих (далее элементарные алгебры). Например локализация $K(\mathbb{Z}/p^k,1)$ в (p) может быть описана элементарной дг-алгеброй $[x_2,v_1]_{p^k}$ над $\mathbb{Z}_{(p)}$ включающей разделенные степени x_2 и с дифференциалом $dx_2 = p^k \cdot v_1$. Элементарная модель минимальна в том смысле, что все возникающие дифференциалы делятся на p, таким образом ее образующие как алгебры с разделенными степенями соответствуют образующим $H_*(K(\mathbb{Z}/p^k);\mathbb{Z}/p)$ и могут быть описаны через допустимые последовательности Стинрода известным образом .

Основная идея H. Cartan'а состояла в реализации модели цепей $K(\mathbb{Z}/p^k,n)$ как итерированной бар-конструкции $Bar^{(n-1)}([x_2,v_1])$ и наблюдении что бар-конструкция от всякой элементарной алгебры E квази-изоморфна некоторому явному произведению элементарных алгебр (далее элементарная модель).

Утверждение, которое по видимости отсутствует в литературе, состоит в том, что естественное диагональное отображение на $Bar(E)$ спускается, с точностью до гомотопии, на ожидаемое коумножение приходящее из элементарных алгебр в случае $p > 2$. При этом итерирование бар-конструкции сохраняет это свойство, что доставляет гомотопическую модель биалгебры цепей $C_*^{sing}(K(\mathbb{Z}/p^k,n))$. Чтобы аналогичное утверждение имело место в случае $p=2$ понятие элементарной алгебры должно быть расширено, таким образом условие минимальности нарушается.

Далее, пусть $A \simeq \mathbb{Z}^r$ свободная абелева группа с выбранным базисом. Тогда конструкция H. Cartan'a дает гомотопическую модель $C_*(K(A,n);\mathbb{Z}_{(p)})$ в терминах выбранных образующих. Возникает вопрос о гомотопической функториальности этого описания. В своей работе А. Захаров показывает, что для $p>2$ элементарная модель действительно гомотопически функториальна относительно отображений свободных абелевых групп $\mathbb{Z}^r \to \mathbb{Z}^{r'}$. Для $p=2$ это утверждение неверно.

После дуализации получается гомотопическая модель $C^*_{sing}(K(A,n);\mathbb{Z}_{(p)})$. Фактически это дг-алгебра де Рама на аффинном свободном супер-модуле $V(A)^\vee$ над $\mathbb{Z}_{(p)}$. Супер-модуль $V(A)$ состоит из компонент функториально равных A и параметризованных допустимыми последовательностями Стинрода.

Независимое продолжение этой работы берет начало в наблюдении сделанном членами коллектива лаборатории Дмитрия Кубрака и Артема Приходько в работе Hodge-to-de Rham degeneration for stacks. Рассмотрим групповую схему $\mathbb{G}_a$. Тогда можно рассмотреть классифицирующий стэк $B\mathbb{G}_a$. Более того, имеет смысл говорить про итерированный стэк $B^{(n)}\mathbb{G}_a$ в смысле производной алгебраической геометрии. В простейшем случае $H^*(B\mathbb{G}_a,\mathscr{O}_{B\mathbb{G}_a})$ есть целочисленные когомологии групповой схемы $\mathbb{G}_a$ и оказывается, что имеет место изоморфизм:

$$H^*(B\mathbb{G}_a,\mathscr{O}_{B\mathbb{G}_a}) \simeq H^*(K(\mathbb{Z},3);\mathbb{Z})$$

если правильным образом учесть градуировку приходящую из действия $\mathbb{G}_m$ на $\mathbb{G}_a$. Естественно предположить что имеется изоморфизм $B^*_n := H^*(B^{(n)}\mathbb{G}_a,\mathscr{O}_{B^{(n)}\mathbb{G}_a}) \simeq H^*(K(\mathbb{Z},n+2);\mathbb{Z})$. Известно что B^*_n естественно изоморфно производным функторам функтора взятия симметрической алгебры $R^*S^\bullet\mathbb{Z}[-n]$ в смысле Dold-Puppe, но в косимплициальном контексте.

Один из результатов совместной деятельности Д. Кубрака и сотрудника лаборатории А. Захарова утверждает следующую цепочку изоморфизмов алгебр

$$R^*S^*\mathbb{Z}[-n] \simeq R^*\Gamma^*\mathbb{Z}[-n-2] \simeq R^*Bin^*\mathbb{Z}[-n-2] \simeq H^*(K(\mathbb{Z},n+2);\mathbb{Z})$$

с надлежащим учетом градуировок. Здесь Γ есть функтор свободной алгебры с разделенными степенями, а Bin функтор свободной алгебры с извлечением биномиальных коэффициентов. Первый изоморфизм является косимплициальной версией декалажа. Алгебра Bin является алгеброй Хопфа и двойственна к алгебре функций на формальной мультипликативной группе.

Хорошо известна теорема Dold-Thom'a устанавливающая изоморфизм $H_*(K(A,n);\mathbb{Z}) \simeq L_*S^\bullet\mathbb{Z}[n]$ в симплициальном контексте. В работе L. Breen, R. Mikhailov, A. Touzé, Derived Functors Of The Divided Power Functors показано что этот изоморфизм нефункториален для $n=1$. В своей работе А. Захаров показывает, что функториальность все же имеет место для $n>1$. Это в частности снабжает $H_*(K(A,n);\mathbb{Z})$

естественной фильтрацией с каноническим расщеплением. Эта дополнительная градуировка согласуется с введенной в работе R. Milgram, The homology of symmetric products. Новым результатом является ее функториальность. Учет этой дополнительной градуировки и является последним ингредиентом для точного изоморфизма $H^*(K(\mathbb{Z},n+2);\mathbb{Z})$ и $R^*S^\bullet\mathbb{Z}[-n]$.

Эта связь нуждается в дополнительном прояснении и особенно интересна по той причине, что $R^{n+i}S^\bullet\mathbb{Z}[-n]$ параметризует естественные (нестабильные) когомологические операции $H^n \to H^{n+i}$ у косимплициальных коалгебр, в то время как $H^{n+2+i}(K(\mathbb{Z},n+2);\mathbb{Z})$ параметризует нестабильные когомологические операции $H^{n+2} \to H^{n+2+i}$ у топологических пространств.

2.7 Когомологии групп Торелли

Обозначим через Σ_g замкнутую поверхность рода g. Группой классов отображений $\mathrm{Mod}(\Sigma_g)$ поверхности Σ_g называется группа сохраняющих ориентацию диффеоморфизмов этой поверхности, рассматриваемых с точностью до изотопии. Группа $\mathrm{Mod}(\Sigma_g)$ действует на первых гомологиях поверхности, и ядро этого действия обозначается через $\mathscr{I}_g$ и называется группой Торелли. Факторгруппа $\mathrm{Mod}(\Sigma_g)/\mathscr{I}_g$ изоморфна симплектической группе $\mathrm{Sp}(2g,\mathbb{Z})$. Таким образом, (ко)гомологии группы Торелли имеют естественную структуру модуля над симплектической группой.

Зафиксируем на Σ_g структуру гладкой гиперэллиптической комплексной кривой и обозначим через $s \in \mathrm{Mod}(\Sigma_g)$ класс гиперэллиптической инволюции. Гиперэллиптической группой Торелли называется подгруппа $\mathscr{S}\mathscr{I}_g \subseteq \mathscr{I}_g$, состоящая из всех элементов, коммутирующих с s.

Группы классов отображений тесно связаны с пространствами модулей кривых. Напомним, что пространство Тейхмюллера Teich_g — это пространство классов изотопии гладких комплексных структур на Σ_g. Группа классов отображений действует на Teich_g с конечными стабилизаторами, и фактор по этому действию $\mathscr{M}_g = \mathrm{Teich}_g/\mathrm{Mod}(\Sigma_g)$ является пространством модулей гладких комплексных кривых рода g. С топологической точки зрения, $\mathscr{M}_g$ является орбифолдом. Так как пространство Тейхмюллера стягиваемо, то рациональные (ко)когомологии $\mathscr{M}_g$ и $\mathrm{Mod}(\Sigma_g)$ изоморфны. При $g \geq 2$ рациональные когомологии $\mathscr{M}_g$ (или $\mathrm{Mod}(\Sigma_g)$) являются кольцом характеристических классов расслоений со слоем Σ_g.

Группы Торелли также естественно возникают в алгебраической геометрии при изучении пространств модулей кривых. Группа Торелли действует на Teich_g свободно, и фактор $\mathscr{T}_g = \mathrm{Teich}_g/\mathscr{I}_g$ является гладким многообразием. Этот фактор называется пространством Торелии. Оно является пространством модулей гладких комплексных кривых рода g с фиксированным симплектическим базисом в первых гомологиях. Пространство $\mathscr{T}_g$ имеет гомотопический тип $K(\mathscr{I}_g,1)$, то есть является пространством Эйленберга-Маклейна. Таким оразом, целочисленные (ко)гомологии $\mathscr{T}_g$ и $\mathscr{I}_g$ изоморфны. При $g \geq 2$ когомологии $\mathscr{T}_g$ (или $\mathscr{I}_g$) являются кольцом характеристических классов гомологически тривиальных расслоений со слоем Σ_g.

Гиперэллиптическая группа Торелли является фундаментальной группой гиперэллиптического локуса в $\mathcal{T}_g$, то есть подпространства, точки которого соответствуют гиперэллиптическим кривым. Более того, по аналогии с пространством Торелли, гиперэллиптический локус имеет гомотопически тип $K(\mathcal{S}\mathcal{I}_g, 1)$.

При $g = 1$ группа Торелли тривиальна. Месс [6] доказал, что в случае $g = 2$ группа $\mathcal{I}_2 = \mathcal{S}\mathcal{I}_2$ изоморфна свободной группе со счётным числом порождающих. Естественной задачей является задача о вычислении гомологий групп $\mathcal{I}_g$ и $\mathcal{S}\mathcal{I}_g$ при $g \geq 3$. Первые гомологии $H_1(\mathcal{I}_g, \mathbb{Z})$ явно вычислены Джонсоном [5]. Ни одна из ненулевых групп гомологий $H_k(\mathcal{I}_g, \mathbb{Z})$ при $k \geq 2$ не была вычислена явно. Бествина, Букс и Маргалит [1] показали, что когомологическая размерность группы Торелли равна $3g-5$, а также, что старшие гомологии $H_{3g-5}(\mathcal{I}_g, \mathbb{Z})$ не являются конечно порождёнными. Гайфуллин [3] обобщил этот результат на группы гомологий $H_k(\mathcal{I}_g, \mathbb{Z})$, где $2g-3 \leq k \leq 3g-6$. Используя стратифицированную теорию Морса, Хейн [4] для случая $g = 3$ вычислил подгруппу в $H_*(\mathcal{I}_3, \mathbb{Z}[1/2])$, инвариантную относительно действия гиперэллиптической инволюции. Для гиперэллиптической группы Торелли $\mathcal{S}\mathcal{I}_g$ Брендл и Фарб [2] вычислили когомологическую размерность, которая оказалась равна $g-1$, а также показали, что старшая группа гомологий $H_{g-1}(\mathcal{S}\mathcal{I}_3, \mathbb{Z})$ не является конечно порожденной.

Новые результаты, полученные в отчетный период сотрудником лаборатории И. Спиридоновым, относятся к строению групп гомологий $H_4(\mathcal{I}_3, \mathbb{Z})$ и $H_2(\mathcal{S}\mathcal{I}_3, \mathbb{Z})$. Полностью описана группа $H_4(\mathcal{I}_3, \mathbb{Z})$ как модуль над симплектической группой $\mathrm{Sp}(6, \mathbb{Z})$.

Теорема 2.3. [8, Theorem 1.1] Имеет место изоморфизм

$$H_4(\mathcal{I}_3, \mathbb{Z}) = H_4(\mathcal{T}_3, \mathbb{Z}) \cong \mathrm{Ind}_{S_3 \ltimes \mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})^{\times 3}}^{\mathrm{Sp}(6,\mathbb{Z})} \mathscr{Z},$$

где через $\mathscr{Z}$ обозначен фактор $\mathbb{Z}^3$ по диагональной подгруппе $\mathbb{Z}$ с естественным действием группы перестановок S_3 (действие $\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})^{\times 3}$ тривиально).

Следствие 1. [8, Corollary 1.2] Гиперэллиптическая инволюция действует тривиально на $H_4(\mathcal{I}_3, \mathbb{Z})$.

Также, построено явное задание группы $H_4(\mathcal{I}_3, \mathbb{Z})$ с помощью порождающих и соотношений. Для каждого разбиения группы $H_1(\Sigma_3, \mathbb{Z}) = V_1 \oplus V_2 \oplus V_3$ в прямую сумму трёх попарно ортогональных относительно формы пересечения подгрупп ранга 2 некоторым образом определён соответствующий класс гомологий $s(V_1, V_2, V_3) \in H_4(\mathcal{I}_3, \mathbb{Z})$. Конструкция этих классов основывается на спектральной последовательности Хохшильда-Серра, применённой к точной последовательности Бирман для стабилизатора в группе $\mathcal{I}_3$ разделяющей кривой на Σ_3. Доказано, что данные классы порождают группу $H_4(\mathcal{I}_3, \mathbb{Z})$, а все соотношения между ними имеют вид $s(V_1, V_2, V_3) = s(V_1, V_3, V_2)$ и $s(V_1, V_2, V_3) + s(V_2, V_3, V_1) + s(V_3, V_1, V_2) = 0$.

Доказательство основано на изучении гомологической спектральной последовательности $(E^*_{*,*}, d^*_{*,*})$, ассоциированной с действием группы $\mathcal{I}_3$ на комплексе циклов $\mathcal{B}_3$, изначально построенном в [1]. Ключевыми для доказательства являются утверждения об инъективности дифференциалов $d^1_{3,1}$ и $d^1_{2,2}$, а также полное вычисление дифференциала $d^1_{1,3}$ и групп $E^2_{1,3} = E^\infty_{1,3}$ и $E^1_{0,4} = E^\infty_{0,4}$. Для вычисления последней используются действие $\mathscr{I}_3$ на новых модификациях комплекса циклов, а также на комплексе относительных циклов, построенном автором ранее [7].

Также, частично вычислена группа $H_2(\mathscr{S}\mathscr{I}_3, \mathbb{Z})$. В этой группе рассматриваются абелевы циклы, соответствующие парам скручиваний Дена вдоль непересекающихся разделяющих кривых на Σ_3. Показано, что эти абелевы циклы находятся в биекции с парами $\{U, V\}$ ортогональных относительно формы пересечений подгрупп ранга 2 в $H_1(\Sigma_3, \mathbb{Z})$, таких что Arf-инвариант ограничения на них некоторой фиксированной Sp-квадратичной формы, определённой на $H_1(\Sigma_3, \mathbb{Z})$, равен единице. Соответствующий абелев цикл будем обозначать через $\mathscr{A}_{U,V} \in H_2(\mathscr{S}\mathscr{I}_3, \mathbb{Z})$. Доказан следующий результат.

Теорема 2.4. Абелевы циклы $\{\mathscr{A}_{U,V}\}$ линейно независимы в $H_2(\mathscr{S}\mathscr{I}_3, \mathbb{Z})$ по модулю соотношений $\mathscr{A}_{U,V} = -\mathscr{A}_{V,U}$.

Доказательство основано на изучении гомологической спектральной последовательности, ассоциированной с действием группы $\mathscr{S}\mathscr{I}_3$ на комплексе симметрических циклов $\mathscr{S}\mathscr{B}_3$, изначально построенном в [2]. С помощью этой спектральной последовательности задача сводится к проверке того, что каждый из этих классов является ненулевым. Данное утверждение проверяется с помощью гомоморфизмов Мориты. При этом, неизвестно, порождают ли эти классы гомологий всю группу $H_2(\mathscr{S}\mathscr{I}_3, \mathbb{Z})$.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

[1] M.Bestvina, K.-U.Bux, D.Margalit, The dimension of the Torelli group, J. Amer. Math. Soc. 23:1 (2010), 61-105, arXiv:0709.028

[2] T.Brendle, L.Childers, and D.Margalit, Cohomology of the hyperelliptic Torelli group, Israel Journal of Mathematics 195.2 (2013): 613-630.

[3] A.A.Gaifullin, On infinitely generated homology of Torelli groups (2019), arXiv:1803.09311.

[4] R.Hain, The rational cohomology ring of the moduli space of abelian 3-folds, Math. Res. Lett. 9:4 (2002), 473-491, arXiv:0203057.

[5] D.Johnson, The structure of the Torelli group III: The Abelianization of I, Topology 24:2 (1985), 127-144.

[6] G.Mess, The Torelli groups for genus 2 and 3 surfaces, Topology 31:4 (1992), 775-790.

[7] I.A.Spiridonov, On the structure of the top homology group of Johnson kernel, arXiv:2111.10568 (2021).

[8] I.A.Spiridonov, The top homology group of the genus 3 Torelli group, arXiv:2208.10326 (2022).

2.8 Скрученное произведение Бордмана–Фогта

Теорема аддитивности Дунна утверждает что для любых $m, n \geq 1$ верно что $E_m \otimes E_n \simeq E_{m+n}$, где E_n топологическая операда маленьких n-дисков, $\otimes$ произведение операд Бордмана-Фогта, и $\simeq$ означает отображение операд дающее при любой арности (слабую) гомотопическую эквивалентность. Эта теорема была частично доказана в [1], именно, Дунн доказал что $E_n \simeq E_1 \otimes \cdots \otimes E_1$ (n раз). Этот результат не влечет общую теорему из-за фундаментального свойства (недостатка) произведения Бордмана-Фогта, его не-инвариантности относительно гомотопической эквивалентности. (Что означает, по сути, что произведение Бордмана-Фогта является классическим, а не производным, бифунктором). Общая теорема была доказана в [4], и это доказательство было недавно упрощено в [3]. Отметим также подход в [2], где аналогичная теорема доказана для кофибрантных замен операд E_n. В подходе Лури [5] использующим ∞-категории, само произведение Бордмана-Фогта автоматически заменяется на производное, после чего аналог теоремы Дунна доказывается в любой симметрической моноидальной категории (точнее, в ∞-версии таковой). В этом смысле подход Лури и подход Федоровича-Фогта [2] близки тем что оба подхода рассматривают производные замены, в одном случае это замена самого произведения Бордмана-Фогта, в другом-кофибрантная замена операд.

Интерес аффилиированного сотрудника лаборатории Б. Шойхета к теореме Дунна связан во многом с общей гипотезой Делиня для n-категорий (доказательство которой в ∞-категорном контексте [5] теорему Дунна действительно использует). Отметим что в моноидальной категории (комплексов) векторных пространств наивная теорема Дунна не верна: в силу аргумента Экманна-Хилтона, $Assoc \otimes Assoc = Comm$, а не $e_2 := H_\bullet(E_2, \urcorner)$. Отметим также что в случае моноидальной категории комплексов векторных пространств, теорема Дунна не верна даже для кофибрантных замен операд, то есть в версии [2]. Например, цепная операда Сташефа St является кофибрантной заменой операды $Assoc$, но при этом $St \otimes St$ не квазиизоморфно e_2. Дело в том что аргумент Экманна-Хилтона не требует ассоциативности умножений, но требует перестановочности и, что особенно важно, наличие единиц. Чтобы избежать использование ∞-категорий, мы должны явно определить производное произведение Бордмана-Фогта $\otimes_L$ для операд в категории комплексов векторных пространств.

Пусть $\urcorner$–поле характеристики 0, обозначим через hoe_n кошулеву резольвенту операды e_n в комплексах $\urcorner$–векторных пространств. В этом проекте мы строим явно производное произведение Бордмана-Фогта $\otimes^L$, для категории комплексов векторных пространств, и доказываем что выполняется $\mathsf{hoe}_1 \otimes^L \mathsf{hoe}_1 \simeq \mathsf{hoe}_2$. В нашей следующей работе мы собираемся доказать общий случай $\mathsf{hoe}_m \otimes^L \mathsf{hoe}_n \simeq \mathsf{hoe}_{m+n}$.

В работе [6] Шойхет определил т.н. скрученное произведение дифференциальных градуированных (дг) категорий, следующим образом. Для пары малых дг категорий

C,D, имеется производный внутренний Hom, обозначаемый $Coh(C,D)$. Это дг категория объекты которой это дг функторы $C\to D$ (в другой версии A_∞ функторы, а морфизмы из F в G–производные натуральные преобразования, дающиеся коцепями Хохшильда C с коэффициентами в C-бимодуле $D(F(-),G(=))$. В [6] показывается что имеется левый сопряженный функтор, который и есть скрученное тензорное произведение:

$$\mathsf{Hom}(\mathsf{C}\mathbin{\widetilde{\otimes}}\mathsf{D},\mathsf{E})=\mathsf{Hom}(\mathsf{C},\mathsf{Coh}(\mathsf{D},\mathsf{E}))$$

где внешний Hom это множество дг функторов.

Цветная дг операда, все операции которой имеют арность 1–это в точности дг категория. Оказывается, что имеется (классический) правый сопряженный внутренний Hom к (классическому) произведению Бордмана-Фогта цветных дг операд [7]. Можно также опрелить производную версию внутреннего Hom'a, и после этого определить левый сопряженный функтор к ней:

$$\mathsf{Hom}(\mathsf{O}_1\otimes^{\mathsf{L}}_{\mathsf{BV}}\mathsf{O}_2,\mathsf{O}_3)=\mathsf{Hom}(\mathsf{O}_1,\mathsf{Coh}(\mathsf{O}_2,\mathsf{O}_3))$$

Мы называем $O_1\otimes^L_{BV}O_2$, или сокращенно $O_1\otimes^L O_2$, производным произведением Бордмана-Фогта.

Доказательство того что

$$\mathsf{hoe}_1\otimes^L\mathsf{hoe}_1\simeq\mathsf{hoe}_2$$

основано на довольно прямом вычислении. Отметим, что тут используется двусторонняя версия скрученного тензорного произведения, при которой, даже в случае дг категорий, теряется унитальность, и получается слабо унитальная дг категория. Это является ключевым моментом невозможности применения аргумента Экманна-Хилтона. С другой стороны, именно двустороннее скрученное тензорное произведение является производным по обоим аргументам.

Отметим существенное различие между случаями дг категорий и цветных дг операд. В случае дг категорий над полем обычное тензорное произведение $\otimes$ имеет гомотопический смысл, то есть $C\otimes D$ заменяется на квазиизоморфную дг категорию при замене на квазиизоморфные дг категорий C и D. Это неверно в случае цветных дг операд и произведения Бордмана-Фогта. Шойхет доказывает, что построенное производное произведение Бордмана-Фогта цветных дг операд обладает такой инвариантностью при заменах дг операд на квазиизоморфные, и, таким образом, определяет произведение на гомотопической категории.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

[1] G. Dunn, Tensor product of operads and iterated loop spaces J. Pure Appl. Algebra, 50 (1988), pp. 237-258

[2] Z.Fiedorowicz, R.M.Vogt, An Additivity Theorem for the interchange of structures, Advances in Math., 273, 2015, 421-484

[3] M. Barata, Ieke Moerdijk, On the additivity of the little cubes operads, archive preprint 2205.12875

[4]] M. Brinkmeier. On Operads. PhD thesis, Universitat Osnabr"ueck, 2000

[5] J. Lurie Higher algebra Preprint http://www.math.harvard.edu/ lurie/papers/higheralgebra.pdf (2012)

[6] B.Shoikhet, On the twisted tensor product of small dg categories, J. of Noncommutative geometry, 14:2(2020), 789-820

[7] Ittay Weiss, From operads to dendroidal sets, in Mathematical Foundations of Quantum Field and Perturbative String Theory AMS (2011), archive 1012.4315

2.9 Достижимые категории и оснащения

Давно известно, что, хотя теория категорий давно стала рабочим языком во многих областях математики, включая в первую очередь алгебраическую геометрию, для некоторых задач стандартной техники теории категорий недостаточно. Так, например, производные категории от абелевых – важнейший обьект исследования в современной алгебраической геометрии, в том числе в ее некоммутативной версии – нельзя рассматривать как просто категории: многие естественные конструкции, например склейка, в таком подходе не работают. Отчасти помогает использовать дополнительную структуру т.н. "триангулированной категории", и сотрудники лаборатории таким подходом часто пользуются, однако и этого для многих задач не хватает. Правильным понятием является триангулированная категория "с оснащением", и как лучше всего придавать этой фразе смысл, до сих пор непонятно.

Более общо, потребность в рассмотрении оснащений возникает всегда, когда категория получается в результате локализации, т.е. формального обращения некоторого класса морфизмов (например, квазиизоморфизмов комплексов, что дает производные категории). При этом в нелинейных ситуациях оснащения становятся вопросом уже не гомологической, а гомотопической алгебры. На самом деле, еще до времен классической книги Д. Квиллена "Гомотопическая алгебра" понятно, что именно локализация – а не, скажем, топологические пространства – и является настоящим обьектом изучения в теории гомотопий. Грубо говоря, оснащенная категория отличается от обычной тем, что вместо множеств морфизмов $\mathsf{Hom}(-,-)$ в ней есть целые гомотопические типы морфизмов, от которых "наивные" множества морфизмов получаются как множества связных компонент.

Существующие в настоящий момент техники работы с оснащенными категориями – например, полные пространства Сигала в смысле Ч. Резка, или квазикатегории А.

Жуаяля, популяризованные Дж. Лури – не вполне удобны, т.к. громоздки технически, и зависят от ряда произвольных выборов.

Уже довольно давно сотрудниками лаборатории была построена существенно более естественная и простая техника оснащений, основанная на идее “дериваторов” А. Гротендика. Грубо говоря, категория, оснащенная в дериваторном смысла, это не просто одна категория $\mathscr{C}$, а набор категорий $\mathscr{C}^I$, проиндексированных малыми категориями I, и естественных функторов между ними. На практике, не нужно и даже вредно позволять в качестве индекса любые малые категории – достаточно частично-упорядоченных множеств конечной цепной размерности и, более общо, частично-упорядоченных множеств, ограниченных слева (категорию которых обозначим через Pos^+).

Для малых категорий такая техника оснащений работает очень хорошо, конструкции получаются простыми и естественными, причем никакая информация не теряется – имеется обобщение теоремы представимости Брауна, гласящее, что любая дериваторно-оснащенная малая категория представима полным пространством Сигала, причем множества морфизмов по модулю гомотопической эквивалентности совпадают с множествами функторов с точностью до изоморфизма. Однако с большим категориями возникает некоторая проблема.

Отметим, что и в рамках обычной теории категорий понятие большой категории, хотя и совершенно необходимо, ведет себя странно – так, мы все же предполагаем, что Hom-множества даже в большой категории малы, из-за чего функторы между двумя большими категориями категорию, вообще говоря, не образуют (морфизмы между двумя функторами могут образовывать не множество, а класс). В оснащенном контексте все еще хуже: не удается определить даже расслоенные произведения.

А именно, напомним, что в теории категорий под коммутативным квадратом обычно понимается диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \mathscr{C}_{01} & \longrightarrow & \mathscr{C}_0 \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathscr{C}_1 & \longrightarrow & \mathscr{C}, \end{array}$$

снабженная изоморфизмом между двумя функторами из $\mathscr{C}_{01}$ в $\mathscr{C}$ (каковой на диаграмме не пишется, но всегда подразумевается). Легко построить расслоенное произведение, обладающее универсальным свойством по отношению к таким квадратам – это просто категория $\mathscr{C}_0 \times_{\mathscr{C}} \mathscr{C}_1$ троек $\langle c_0, c_1, \alpha \rangle$ обьектов $c_0 \in \mathscr{C}_0$, $c_1 \in \mathscr{C}_1$, и изоморфизма между их образами в $\mathscr{C}$. При этом для любого коммутативного квадрата, имеем естественный функтор $\mathscr{C}_{01} \to \mathscr{C}_0 \times_{\mathscr{C}} \mathscr{C}_1$, единственный с точностью до единственного изоморфизма. Если наши категории оснащенные, т.е. представляют собой семейства над Pos^+, то понятие коммутативного квадрата не меняется, однако построить универсальный обьект не так-то просто: наивное произведение $\mathscr{C}_0 \times_{\mathscr{C}} \mathscr{C}_1$ не образует оснащенную категорию (а именно, соответствующее семейство над Pos^+ не обладает свойством полуточности, критически важным для теоремы Брауна). Однако, как было доказано сотрудниками лаборатории, если наши оснащенные категории малые, универсальный обьект все же существует – а именно, существует оснащенное произведение $\mathscr{C}_0 \times_{\mathscr{C}} \mathscr{C}_1$, и для любого коммутативное квадрата, получаем естественный функтор $\mathscr{C}_{01} \to \mathscr{C}_0 \times^h_{\mathscr{C}} \mathscr{C}_1$, единственный с точностью до изоморфизма. Правда, этот изоморфизм уже не единственный, в результате чего $\mathscr{C}_0 \times^h_{\mathscr{C}} \mathscr{C}_1$ определена универсальным свойством с точностью до эквивалентности, единственной также с точностью до неединственного изоморфизма. Но тут уж делать нечего, такова природа вещей, и значительных неудобств это не доставляет.

К сожалению, для больших категорий аналогичную конструкцию провести не удается, и возможно, ее и не существует.

В текущий отчетный период, сотрудники лаборатории изучали способ борьбы с этой проблемой, основанный на понятии достижимой (accessible) категории.

Напомним, что если дан какой-то бесконечный кардинал κ, то частично-упорядоченное множество называется κ-направленным, если у любого его подмножества мощности меньше κ имеется верхняя грань (не обязательно точная). Известно, что копределы по κ-направленным множествами коммутируют с пределами мощности, меньшей κ. Обьект c категории $\mathscr{C}$ называется κ-компактным, если $\mathsf{Hom}(c, -)$ коммутирует с κ-направленными копределами. Категория называется κ-достижимой если с одной стороны, в ней есть κ-направленные копределы, а с другой стороны, есть и множество κ-компактных образующих. Если категория имеет любые копределы, то чем больше κ, тем это условие слабее; в общем случае прямой связи нет. Так или иначе, говорят, что категория достижима, если она достижима для какого-либо бесконечного кардинала κ.

По-видимому, все большие категории, которые реально встречаются в природе, на самом деле являются достижимыми, и некоторый неформальный консенсус в науке про оснащения состоит в том, что недостижимые большие категории просто не надо рассматривать. По крайней мере, в работах Дж. Лури и последователей это хорошо пролеживается. Построить пример недостижимой категории очень легко – например, такова противоположная Sets^o к категории Sets всех множеств – однако рассматривать их, по-видимому, просто не надо.

В отчетный период, сотрудниками лаборатории изучалось понятие достижимости, как в классическом, так и в оснащенном контексте. Так, было показано, что замыкание по Каруби любой малой категории достижимо (с явной оценкой на нужный кардинал в терминах мощности самой малой категории). Кроме того, доказано, что, как в оснащенном, так и в классическом контексте, рассмотрение только достижимых категорий действительно решает все обнаруженные проблемы – достижимые функторы уже образую категорию, причем также достижимую, а коммутативные квадраты достижимых оснащенных категорий и функторов порождают универсальное оснащенное расслоенное произведение ровно с теми же хорошими свойствами, которые известны для малых категорий. Тем самым, можно считать, что ситуация с большими категориями в контексте дериваторных оснащений вполне удовлетворительно разрешена.

3 Классическая геометрия

3.1 Трехмерные многообразия с наименьшей нетривиальной группой монодромии

Пусть $X \subset \mathbb{P}^N$ — гладкое проективное многообразие (над $\mathbb{C}$) размерности n, и пусть $Y \subset X$ — его гладкое гиперплоское сечение. Если n нечетна, то, как известно, группа монодромии, действующая на $H^{n-1}(Y, \mathbb{Q})$ (в дальнейшем мы будем называть ее группой монодромии многообразия X), тривиальна тогда и только тогда, когда проективно двойственное многообразие $X^* \subset (\mathbb{P}^N)^*$ не является гиперповерхностью. Для небольших значений n имеется полная классификация таких многообразий (см. [1]); в частности, при $n = 3$ двойственное не является гиперповерхностью (и тем самым группа монодромии тривиальна) только у $\mathbb{P}^3$ и у расслоений на плоскости над гладкой кривой.

Естественный следующий шаг — описать трехмерные многообразия с наименьшей нетривиальной группой монодромии, то есть многообразия, у которых эта группа изоморфна $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Это описание дается следующей теоремой.

Теорема 3.1. Пусть $X \subset \mathbb{P}^N$ — гладкое трехмерное многообразие. Группа монодромии которого изоморфна $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ тогда и только тогда, когда выполнено одно из следующих условий:

– X — квадрика в $\mathbb{P}^4$;

– X — многообразие Веронезе $v_2(\mathbb{P}^3) \subset \mathbb{P}^9$ или его изоморфная проекция;

– X — раздутие $\mathbb{P}^3$ в точке, вложенное таким образом, что $\mathscr{O}_X(1) \cong \mathscr{O}_X(2H - E)$, где H — прообраз плоскости в $\mathbb{P}^3$ и E — исключительный дивизор;

– X — многообразие Сегре $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \subset \mathbb{P}^7$.

Эта классификация была анонсирована Ф. Л. Заком в работе [6].

При доказательстве теоремы 3.1 в качестве побочного продукта получается следующий результат.

Предположим, что $\mathscr{E}$ — очень обильное расслоение над гладкой поверхностью S. Пусть $c_2(\mathscr{E}) = r$. Если варьировать сечение s расслоения $\mathscr{E}$, имеющее ровно r нулей, в пространстве сечений, обладающих тем же свойством, то эта вариация индуцирует подгруппу в группе перестановок множества нулей сечения s.

Теорема 3.2. В указанных выше условиях эта подгруппа совпадает со всей симметрической группой S_r.

Скажем несколько слов о доказательстве этих результатов.

В работе [2] было показано, что из одного результата SGA7 вытекает следующее утверждение: если $X \subset \mathbb{P}^N$ — гладкое трехмерное многообразие, то группа монодромии для X конечна в том и только том случае, когда присоединенная линейная система

$|K_X+H|$ пуста. Кроме того, в том же SGA7 (Exposé XIX) показано, что если группа монодромии нечетномерного многообразия конечна и нетривиальна, то она изоморфна группе Вейля некоторой неприводимой системы корней без кратных связей (при этом корни можно отождествить с образами исчезающих циклов, соответствующих некоторому пучку Лефшеца, относительно действия группы монодромии).

С другой стороны, в статье [5] содержится классификация пар $(X,\mathscr{L})$, где X — гладкое трехмерное многообразие, $\mathscr{L}$ — обильный обратимый пучок и $H^0(\omega_X\otimes\mathscr{L})=0$. Вычленяя из нее случаи, когда $\mathscr{L}$ очень обилен, получаем, что группа монодромии гладкого трехмерного $X\subset\mathbb{P}^N$ конечна и нетривиальна тогда и только тогда, когда X относится к одному из следующих классов:

- X — квадрика в $\mathbb{P}^4$;
- X — $\mathbb{P}^1$-расслоение над гладкой поверхностью S, т. е. $(X,\mathscr{O}_X(1))\cong(\mathbb{P}(\mathscr{E}),\mathscr{O}_{\mathbb{P}(\mathscr{E})|S}(1))$;
- X — пучок квадрик, т. е. существует такой морфизм $p\colon X\to C$, где C — гладкая кривая, что слой p над общей точкой C является гладкой квадрикой;
- X — пучок Веронезе, т. е. существует такой морфизм $p\colon X\to C$, где C — гладкая кривая, что слой p над общей точкой C является поверхностью Веронезе $v_2(\mathbb{P}^2)\subset\mathbb{P}^5$ или ее изоморфной проекцией;
- X — многообразие Фано индекса 2, вложенное половиной антиканонического класса, или его изоморфная проекция;
- $(X,\mathscr{O}_X(1))\cong(W,\mathscr{O}_W(2\sigma^*H-E_1-\ldots-E_k))$, где W — раздутие гладкой трехмерной квадрики Q в $k\geqslant 0$ точках, $\sigma\colon W\to Q$ — стягивание раздутого, $H\subset Q$ — гиперплоское сечение и $E_1,\ldots,E_r\subset X$ — исключительные дивизоры.

Для каждого из классов многообразий в вышеприведенном списке можно найти, пользуясь методами из главы 4 книги [4], найти систему корней, соответствующую конечной группе монодромии. В случае 1 это, естественно, A_1. В случае 2 это A_{r-1}, где $r=c_1(\mathscr{E})$. В случае 3 это D_4 или A_3, если монодромия вторых когомологий неособого слоя пучка квадрик переставляет классы прямолинейных образующих, и A_n, если не переставляет. В случае 4 соответствующая система корней — D_4 или E_8. В случае 5 получаются системы корней E_6, D_5, A_4, A_2 или A_1. Наконец, в случае 6 возникает система корней D_5.

Чтобы получить искомую классификацию и тем самым доказать теорему 1, остается отобрать те многообразия, для которых система корней есть A_1. В части случаев это тривиально или напрямую следует из известных результатов, в случаях 3, 4 и 6 это требует дополнительных рассуждений.

Описанные выше результаты опубликованы в работе [3].

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

[1] Lawrence Ein. Varieties with small dual varieties. I. Invent. Math., 86(1):63–74, 1986.

[2] Serge Lvovski. On curves and surfaces with projectively equivalent hyperplane sections. Canad. Math. Bull., 37(3):384–392, 1994.

[3] Serge Lvovski. Preprint arXiv:2201.10911 [math.AG]. To appear in Ann. Scoula Norm. Sup.

[4] Ю. И. Манин. Кубические формы: алгебра, геометрия, арифметика. М.: Наука, 1972.

[5] Andrew J. Sommese. On the nonemptiness of the adjoint linear system of a hyperplane section of a threefold. J. Reine Angew. Math., 402:211–220, 1989.

[6] F. L. Zak. Some properties of dual varieties and their applications in projective geometry. In Algebraic geometry (Chicago, IL, 1989), volume 1479 of Lecture Notes in Math., pages 273–280. Springer, Berlin, 1991.

3.2 Критерии рациональности факторов поверхностей дель Пеццо по конечным группам автоморфизмов

Рассмотрим поле $\mathbb{k}$ и многообразие X над этим полем. Многообразие называется $\mathbb{k}$-рациональным, если оно бирационально эквивалентно проективному пространству соответствующей размерности. Это определение можно переформулировать на языке алгебре: многообразие X называется $\mathbb{k}$-рациональным, если его поле функций является чисто трансцендентным расширением поля $\mathbb{k}$ некоторым количеством переменных. Изучение проблем, связанных с рациональностью, является одной из центральных тем бирациональной геометрии.

Одной из таких проблем является исследование рациональности факторов многообразий по конечным группам автоморфизмов. Пусть конечная группа G действует на X автоморфизмами. Возникает вопрос: является ли фактормногообразие X/G $\mathbb{k}$-рациональным. Этот вопрос имеет крайне естественную интерпретацию в терминах полей функций: является ли поле инвариантов $\mathbb{k}(X)^G$ чисто трансцендентным расширением поля $\mathbb{k}$. В общем виде это очень большой объём, поэтому разумно изучать частные случаи этого вопроса. Например, ограничить размерность, характеристику поля или классы многообразий, для которых исследуется рациональность фактора. В частности, можно рассматривать случаи, когда X само является $\mathbb{k}$-рациональным или хотя бы геометрически рациональным (то есть рациональным над замыканием основного поля $\overline{\mathbb{k}}$).

В размерности 1, то есть для кривых, фактор всякой $\mathbb{k}$-рациональной кривой является $\mathbb{k}$-рациональным по теореме Люрота. Однако для геометрически рациональных кривых это неверно: например, всякая коника без точек геометрически рациональна, но её фактор по тривиальной группе не является $\mathbb{k}$-рациональным. Более того, фактор такой кривой по любой группе нечётного порядка не является $\mathbb{k}$-рациональным, поскольку на нём нет $\mathbb{k}$-точек. Таким образом, для доказательства $\mathbb{k}$-рациональности важно тем или иным способом показать, что на исследуемом многообразии есть $\mathbb{k}$-точки.

В случае размерности 2, то есть поверхностей, для алгебраически замкнутых полей характеристики 0 верно, что фактор рациональной поверхности рационален. Это можно доказать, воспользовавшись критерием рациональности Кастельнуово. Однако, если мы откажемся от условия алгебраической замкнутости это перестаёт быть верным: существует большое количество примеров $\mathbb{k}$-рациональных поверхностей и конечных групп автоморфизмов этих поверхностей таких, что фактор не является $\mathbb{k}$-рациональной поверхностью. В общем случае (при наличии хотя бы одного элемента в поле, не являющегося квадратом) класс факторов таких поверхностей будет бирационально неограниченным.

Тем не менее для доказательства $\mathbb{k}$-рациональности факторов поверхностей по конечным группам над алгебраически незамкнутыми полями характеристики 0 можно использовать различные методы бирациональной геометрии. Основной из них — это применение эквивариантной программы минимальных моделей, который в случае геометрически рациональной поверхности позволяет заменить её либо поверхностью со структурой относительно минимального расслоения на коники над кривой рода 0, либо минимальной поверхностью дель Пеццо. Далее для таких поверхностей можно явно найти фактор, разрешить особенности и, снова применив программу минимальных моделей, получить расслоение на коники или поверхность дель Пеццо. Для таких поверхностей есть классический критерий рациональности.

Теорема ([Isk96, Chapter 4]). Минимальная геометрически рациональная поверхность S над совершенным полем $\mathbb{k}$ является $\mathbb{k}$-рациональной тогда и только тогда, когда выполнены следующие два условия:

(i) $S(\mathbb{k}) \neq \varnothing$;

(ii) $K_S^2 \geqslant 5$.

Используя этот критерий, можно получить его обобщения для случая факторов геометрически рациональных поверхностей.

Теорема ([Tr18, Corollary 1.2]). Пусть $\mathbb{k}$ — поле характеристики ноль, X — гладкая геометрически рациональная поверхность над $\mathbb{k}$ такая, что $X(\mathbb{k}) \neq \varnothing$, а G — конечная группа автоморфизмов X. Если $K_X^2 \geqslant 5$, то факторповерхность X/G является $\mathbb{k}$-рациональной.

Обратите внимания, что в обоих случаях для $\mathbb{k}$-рациональности требовалось два условия: ограничение на квадрат канонического класса $K^2 \geqslant 5$ и наличие $\mathbb{k}$-точек на исходной поверхности. Отказаться от первого из них не представляется возможным: известны многочисленные и разнообразные примеры факторов геометрически рациональных поверхностей с $K^2 \leqslant 4$, не являющихся рациональными. Однако от второго условия можно вполне отказаться.

Действительно, если на исходной поверхности нет $\Bbbk$-точек, то они могут появиться на факторповерхности. А значит, после разрешения особенностей и применения программы минимальных моделей будет выполнено второе условие критерия рациональности Исковских. При этом для нахождения таких точек на факторе крайне полезным является следующий приём: если в конечной группе G есть подгруппа H (не обязательно нормальная) и X/H является $\Bbbk$-рациональным, то на факторе X/G множество $\Bbbk$-точек плотно в топологии Зарисского. Можно показать, что любой фактор геометрически рациональной поверхности X степени 5 или выше по конечной группе G является геометрически рациональным и бирационально эквивалентен поверхности степени 5 или выше. Таким образом, в случае если $K_X^2 \geqslant 5$ и в группе G найдётся подгруппа H такая, что X/H является $\Bbbk$-рациональным, то X/G также является $\Bbbk$-рациональным.

Кроме того, для геометрически рациональных поверхностей степени 5 и выше в этом году была доказана следующая теорема, позволяющая во многих случаях отказаться от условия наличия $\Bbbk$-точки на исходной поверхности.

Теорема. Пусть X — геометрически рациональная поверхность над алгебраически незамкнутым полем $\Bbbk$ характеристики 0, а G — конечная группа автоморфизмов, действующая на X. Предположим, что $K_X^2 \geqslant 5$ и индуцированное действие G на группе Пикара $\mathrm{Pic}\left(\overline{X}\right)$ нетривиально. Тогда факторповерхность X/G является $\Bbbk$-рациональной.

Таким образом, группы, действующие на геометрически рациональных поверхностях степени 5 и выше, для которых факторы могут не являются $\Bbbk$-рациональными, всегда являются подгруппами в торе, действующем на $\overline{X}$, а сами такие поверхности не имеют $\Bbbk$-точек.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

[Isk96] V. A. Iskovskikh, Factorization of birational mappings of rational surfaces from the point of view of Mori theory, Uspekhi Mat. Nauk, 1996, 51, 3–72 (in Russian); translation in Russian Math. Surveys, 1996, 51, 585–652

[Tr18] A. Trepalin, Quotients of del Pezzo surfaces of high degree, Transactions of the American Mathematical Society, 2018, 370 (9), 6097–6124

3.3 Нормальные порядки в центральных простых алгебрах

Пусть R — кольцо дискретного нормирования с полем частных $\mathbb{F}$, и пусть A — центральная простая алгебра над $\mathbb{F}$. Порядком в A называется R-подалгебра $\Lambda \subset A$, конечно порожденная как R-модуль и такая, что $\Lambda \otimes_R \mathbb{F} \cong A$. Отметим, что в этом случае Λ автоматически является свободным R-модулем. Порядок называется максимальным, если он не содержится в строго большем порядке. Порядок Λ называется нормальным, если его радикал Джекобсона $\mathrm{rad}\,\Lambda$ является главным левым идеалом (в этом случае он также является и главным правым идеалом, порожденным тем же самым элементом).

Структура порядков в центральных простых алгебрах относится к классическим предметам изучения некоммутативной алгебры. В то время как наиболее хорошими свойствами обладают максимальные порядки, свойство максимальности неинвариантно даже относительно этальной замены базы. При этом каждый максимальный порядок является нормальным, и свойство нормальности уже инвариантно относительно такой замены (это было доказано Д. Ченом). Порядки в алгебрах размерности 4 имеют приложения к теории расслоений на коники над кривыми, определёнными над произвольным полем.

Следующее определение описывает центральные простые алгебры, наиболее интересные с точки зрения геометрических приложений.

Определение. Пусть R — кольцо дискретного нормирования с полем частных $\mathbb{F}$. Будем говорить, что класс $\alpha \in \mathrm{Br}\,\mathbb{F}$ является ручным, если существует такое кольцо дискретного нормирования R' с полем частных $\mathbb{F}'$ и такой этальный морфизм $R \hookrightarrow R'$, что отображение обратного образа $\mathrm{Br}\,\mathbb{F} \to \mathrm{Br}\,\mathbb{F}'$ переводит α в нуль. Если A — центральная простая алгебра над $\mathbb{F}$, будем говорить, что A ручная, если ее класс в группе Брауэра $\mathrm{Br}\,\mathbb{F}$ ручной.

Отметим, что если поле вычетов кольца дискретного нормирования совершенно (например, имеет характеристику 0), то любая центральная простая алгебра над его полем частных является ручной.

В 2022 году сотрудников лаборатории К. А. Шрамов и В. А. Вологодский получили полное описание нормальных порядков в ручных центральных простых алгебрах размерности 4 над полями частных колец дискретного нормирования. А именно, была доказана следующая теорема.

Теорема 3.3. Пусть R — кольцо дискретного нормирования с нормированием ν, максимальным идеалом $\mathfrak{m}$, полем вычетов $\mathbb{K}$ характеристики $p \geq 0$ и полем частных $\mathbb{F}$. Пусть A — центральная простая алгебра размерности 4 над $\mathbb{F}$, и пусть $\Lambda \subset A$ — нормальный порядок. Выполняются следующие утверждения.

– Если $p \neq 2$, то Λ порождается как R-алгебра элементами $x, y \in \Lambda$, удовлетворяющими соотношениям
$$x^2 = a,\ y^2 = b,\ xy = -yx \tag{3.3.1}$$
для некоторых $a, b \in R$, причем $\nu(a) = 0$ и $\nu(b) \in \{0, 1\}$;

– Если $p = 2$ и алгебра A ручная, то Λ порождается как R-алгебра элементами $x, y \in \Lambda$, удовлетворяющими соотношениям
$$x^2 - x = a,\ y^2 = b,\ yx = y - xy \tag{3.3.2}$$
для некоторых $a, b \in R$, причем $\nu(b) \in \{0, 1\}$;

- Обратно, для любых $a,b \in R$ как в (i) или (ii) любые элементы x и y, удовлетворяющие соотношениям (3.3.1) или (3.3.2), соответственно, порождают ручную центральную простую алгебру A над $\mathbb{F}$, и порожденная ими R-алгебра является нормальным порядком в A;

- В (3.3.1) и (3.3.2) равенство $\nu(b) = 0$ выполняется тогда и только тогда, когда Λ является алгеброй Адзумая;

- Если в (3.3.1) или (3.3.2) выполняется равенство $\nu(b) = 0$, то Λ является максимальным порядком. Если $p \neq 2$ и в (3.3.1) выполняется равенство $\nu(b) = 1$, то Λ является максимальным порядком тогда и только тогда, когда $\sqrt{a} \notin \mathbb{K}$. Если $p = 2$ и в (3.3.2) выполняется равенство $\nu(b) = 1$, то Λ является максимальным порядком тогда и только тогда, когда уравнение $\xi^2 - \xi = \bar{a}$ не имеет решений в $\mathbb{K}$, где $\bar{a}$ обозначает образ элемента a в $\mathbb{K}$;

- Если в (3.3.1) или (3.3.2) выполняется равенство $\nu(b) = 1$, то радикал Джекобсона $\operatorname{rad}\Lambda$ алгебры Λ порождается элементом y. Если $\nu(b) = 0$, то $\operatorname{rad}\Lambda$ порождается максимальным идеалом $\mathfrak{m}$.

В качестве частного случая теоремы 3.3 можно восстановить (известную специалистам) классификацию нормальных порядков в алгебре 2×2-матриц. Напомним, что любой максимальный порядок в алгебре $n \times n$-матриц над полем частных кольца дискретного нормирования R сопряжён алгебре $\mathrm{Mat}_n(R)$.

Следствие 2. Пусть R — кольцо дискретного нормирования с максимальным идеалом $\mathfrak{m}$ и полем частных $\mathbb{F}$. Пусть $\Lambda \subset \mathrm{Mat}_2(\mathbb{F})$ — нормальный порядок. Предположим, что Λ не максимален. Тогда Λ сопряжен подалгебре $\Lambda_0 \subset \mathrm{Mat}_2(R)$, состоящей из всех матриц, верхнетреугольных по модулю $\mathfrak{m}$.

В свою очередь, это позволяет получить дальнейшее описание свойств нормальных порядков в центральных простых алгебрах размерности 4.

Следствие 3. Пусть R — кольцо дискретного нормирования с полем частных $\mathbb{F}$. Пусть A — центральная простая алгебра размерности 4 над $\mathbb{F}$, и пусть $\Lambda \subset A$ — немаксимальный нормальный порядок. Тогда

- порядок Λ содержится ровно в двух максимальных порядках $\Lambda_1, \Lambda_2 \subset A$;

- $\Lambda_1 \cap \Lambda_2 = \Lambda$;

- порядки Λ_1 и Λ_2 переставляются при сопряжении любым элементом, порождающим $\operatorname{rad}\Lambda$;

- порядки Λ_1 и Λ_2 являются алгебрами Адзумая.

Одним из ключевых шагов в доказательстве теоремы 3.3 является следующее утверждение, описывающее фактор порядка в ручной алгебре по его радикалу.

Предложение 1. Пусть R — кольцо дискретного нормирования с полем вычетов $\mathbb{K}$ и полем функций $\mathbb{F}$. Пусть A — центральная простая алгебра размерности n^2 над $\mathbb{F}$, и пусть $\Lambda \subset A$ — нормальный порядок. Тогда $\Lambda/\operatorname{rad}\Lambda$ является сепарабельной алгеброй над полем $\mathbb{K}$ и

$$\left(\Lambda/\operatorname{rad}\Lambda\right) \otimes_{\mathbb{K}} \mathbb{K}^{sep} \cong \prod_i \operatorname{Mat}_{n_i}(\mathbb{K}^{sep}),$$

причем $\sum n_i \leq n$. Обратно, если алгебра $\Lambda/\operatorname{rad}\Lambda$ сепарабельна над $\mathbb{K}$, то A — ручная алгебра.

Другой составной частью доказательства теоремы 3.3 является следующая серия утверждений, обобщающих классическую теорему Сколема–Нётер о продолжении автоморфизмов подалгебр в центральных простых алгебрах. Эти утверждения, на наш взгляд, представляют самостоятельный интерес.

Предложение 2. Пусть R — кольцо дискретного нормирования с полем частных $\mathbb{F}$. Пусть A — центральное тело над $\mathbb{F}$, и пусть Λ — порядок в A. Предположим, что Λ является алгеброй Адзумая. Пусть $R' \subset \Lambda$ — сепарабельная подалгебра. Пусть σ — автоморфизм R' над R. Тогда существует такой элемент $y \in \Lambda^*$, что

$$\sigma(r) = yry^{-1}$$

при всех $r \in R'$.

Отметим, что предложение 2 не выполняется в случае, если A — матричная алгебра, как видно из следующего примера.

Пример 3.4. Пусть R — кольцо дискретного нормирования, пусть $\Lambda = \operatorname{Mat}_3(R)$, и пусть R' обозначает алгебру 3×3-матриц вида

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}, \quad a, b \in R.$$

Тогда $R' \cong R \times R$. При этом R-автоморфизм σ алгебры R', переставляющий множители в $R \times R$, не продолжается до внутреннего автоморфизма Λ: действительно, внутренний автоморфизм сохраняет определитель матрицы, а автоморфизм σ не сохраняет.

Тем не менее, верен следующий аналог предложения 2 для порядков в алгебре 2×2-матриц.

Предложение 3. Пусть R — кольцо дискретного нормирования с полем частных $\mathbb{F}$. Пусть $A = \operatorname{Mat}_2(\mathbb{F})$, и пусть Λ — порядок в A. Предположим, что Λ является алгеброй Адзумая. Пусть $R' \subset \Lambda$ — сепарабельная подалгебра, имеющая ранг 2 как R-модуль. Пусть σ — автоморфизм R' над R. Тогда существует такой элемент $y \in \Lambda^*$, что

$$\sigma(r) = yry^{-1}$$

при всех $r \in R'$.

Наконец, удается доказать аналог теоремы Сколема–Нётер для нормальных порядков в алгебрах размерности 4, не являющихся алгебрами Адзумая.

Предложение 4. Пусть R — кольцо дискретного нормирования с нормированием ν, максимальным идеалом $\mathfrak{m}$, полем вычетов $\mathbb{K}$ и полем частных $\mathbb{F}$. Пусть A — центральная простая алгебра размерности 4 над $\mathbb{F}$, и пусть $\Lambda \subset A$ — нормальный порядок. Обозначим $\mathbb{L} = \Lambda / \operatorname{rad} \Lambda$. Предположим, что $\mathbb{L}$ является сепарабельной $\mathbb{K}$-алгеброй и $\dim_{\mathbb{K}} \mathbb{L} = 2$. Пусть $R' \subset \Lambda$ — такая подалгебра, что естественный гомоморфизм $R'/\mathfrak{m}R' \to \mathbb{L}$ является изоморфизмом. Пусть σ — нетривиальный автоморфизм алгебры R' над R. Тогда существует такой элемент $y \in \operatorname{rad} \Lambda$, что

- для приведённой нормы $\mathrm{Nrd}(y)$ выполнено $\nu(\mathrm{Nrd}(y)) = 1$,
- идеал $\operatorname{rad} \Lambda$ порождён элементом y,
- элемент y обратим в A,
- порядок Λ нормализуется элементом y,
- выполнено равенство
$$\sigma(r) = yry^{-1}$$
при всех $r \in R'$.

3.4 Жордановость групп автоморфизмов компактных комплексных многообразий

Одной из важных задач алгебраической геометрии является изучение групп автоморфизмов алгебраических многообразий. С точки зрения бирациональной геометрии интерес также представляют группы их бирациональных автоморфизмов. Не ограничиваясь проективными многообразиями, можно рассматривать группы биголоморфных и бимероморфных автоморфизмов компактных комплексных (или кэлеровых) многообразий. Вообще говоря, такие группы могут быть устроены достаточно сложным образом. Тем не менее, в некоторых случаях они оказываются похожими на линейные алгебраические группы. Например, они могут удовлетворять свойству Жордана, которое можно рассматривать как свойство ограниченности для “сложности” конечных подгрупп данной группы.

Будем говорить, что группа G является жордановой, если существует константа C такая, что любая конечная подгруппа группы G содержит нормальную абелеву подгруппу индекса не больше C. Иначе говоря, это означает, что конечные подгруппы данной группы “достаточно близки” к абелевым.

Изучение свойства Жордана имеет богатую историю. Классическая теорема К. Жордана утверждает, что таким свойством обладает полная линейная группа $\mathrm{GL}(n, \mathbb{K})$ над произвольным полем $\mathbb{K}$ характеристики 0. Следовательно, любая алгебраическая группа над полем $\mathbb{K}$ характеристики 0 удовлетворяет свойству Жордана. Более общим образом, жордановость групп автоморфизмов известна для всех проективных многообразий над полем характеристики 0 [MZh18], а также для компактных кэлеровых многообразий [Kim18], для компактных комплексных пространств класса C по Фуджики [MPZh20], а также для компактных комплексных поверхностей [PS21a].

Перечислим результаты о группах бирациональных (или, в аналитическом случае, бимероморфных) автоморфизмов. В этом случае Ж.-П. Серр установил жордановость группы Кремоны $\mathsf{Cr}(2,\mathbb{C})$, то есть группы бирациональных автоморфизмов проективной плоскости $\mathbb{P}^2$, см. [Ser07]. Ю. Г. Прохоров и К. А. Шрамов обобщили этот результат на случай произвольный размерности [PS16], а также на случай неунилинейчатых многообразий [PS14].

В комплексном случае известны следующие результаты. Группа бимероморфных автоморфизмов комплексных поверхностей жорданова тогда и только тогда, когда поверхность не является бимероморфно эквивалентной произведению $\mathbb{P}^1 \times E$, где E – эллиптическая кривая [PS21a]. Для компактных трехмерных кэлеровых многообразий жордановость групп бимероморфных автоморфизмов доказана при некоторых дополнительных предположениях. Напомним, что иррегулярностью многообразия X называется число $q(X) = \mathsf{H}^1(\mathsf{X}, \mathscr{O}_\mathsf{X})$. Через $\kappa(X)$ будем обозначать кодаирову размерность. Если X – компактное кэлерово трехмерное многообразие такое, что $\kappa(X) \geq 0$ и что его иррегулярность положительна, то группа его бимероморфных автоморфизмов жорданова [PS21b]. Недавно в работе А. Голоты было показано, что в этом утверждении можно отбросить условие на иррегулярность [Go21]. В работе [L22] сотрудников лаборатории К. Логиновым доказана следующая

Теорема 3.5 ([L22, Theorem 1.2]). Пусть X – компактное комплексное многообразие размерности n такое, что $\kappa(X) \geq n-2$. Тогда группа $\mathsf{Bim}(\mathsf{X})$ является жордановой.

В качестве следствия мы получаем, что если X – трехмерное компактное комплексное многообразие с положительной кодаировой размерностью, то группа $\mathsf{Bim}(\mathsf{X})$ жорданова. Также, используя основное результат [Go21], мы получаем

Следствие 4 ([L22, Corollary 1.5]). Пусть X – компактное кэлерово многообразие размерности n такое, что $\kappa(X) \geq n-3$. Тогда группа $\mathsf{Bim}(\mathsf{X})$ является жордановой.

Доказательство теоремы 3.5 основано на изучении плюриканонического представления группы бимероморфных автоморфизмов комплексных многообразий. Под плюриканоническим представлением мы понимаем естественное действие группы бимероморфных автоморфизмов комплексного многообразия на пространстве голоморфных плюриформ. Будем говорить, что группа G имеет ограниченные конечные подгруппы, если существует такая константа C, что порядок любой конечной подгруппы группы G не превосходит C. Тогда верна следующая

Теорема 3.6 ([L22, Theorem 1.4]). Пусть X – компактное комплексное многообразие. Тогда образ плюриканонического представление и образ проективизации плюриканонического представления имеют ограниченные конечные подгруппы.

Этот результат можно рассматривать как аналог классической теоремы Уено [Ue75, 14.10], гласящей, что для Мойшезоновых многообразий образ плюриканонического представления конечен. Вопрос конечности плюриканонического представления ограниченности для проективных пар изучался также в работе [HX16].

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

[Go21] A. Golota. Jordan property for groups of bimeromorphic automorphisms of compact Kähler threefolds. arXiv:2112.02673, 2021.

[HX16] C. Hacon, C. Xu. On finiteness of B-representations and semi-log canonical abundance. Minimal models and extremal Rays (Kyoto, 2011), 361-378, Adv. Stud. in Pure Math 70, Math. Soc. Japan, Tokyo, 2016.

[Kim18] J. H. Kim. Jordan property and automorphism groups of normal compact Kähler varieties. Commun. Contemp. Math. 20, no. 3, 1750024, 9 pp, 2018.

[L22] K. Loginov. Jordan property for groups of bimeromorphic self-maps of complex manifolds with large Kodaira dimension. arXiv:2209.12032, 2022.

[MZh18] S. Meng and D.-Q. Zhang. Jordan property for non-linear algebraic groups and projective varieties. Amer. J. Math. 140, no. 4, 1133–1145, 2018.

[MPZh20] Sh. Meng, F. Perroni, and D.-Q. Zhang. Jordan property for automorphism groups of compact spaces in Fujiki's class C. arXiv:2011.09381, 2020.

[PS14] Yu. Prokhorov, C. Shramov. Jordan property for groups of birational selfmaps. Compositio Mathematica, 150(12):2054–2072, 2014.

[PS16] Yu. Prokhorov, C. Shramov. Jordan property for Cremona groups. Amer. J. Math., 138 (2), 403–418, 2016.

[PS21a] Yu. Prokhorov, C. Shramov. Automorphism groups of compact complex surfaces. Int. Math. Res. Notices, 2021(14):10490–10520, 2021.

[PS21b] Yu. Prokhorov, C. Shramov. Finite groups of bimeromorphic selfmaps of non-uniruled Kähler threefolds. arXiv:2110.05825, 2021. To appear in Sb. Math.

[Ser07] J.-P. Serre. Bounds for the orders of the finite subgroups of G(k). In Group representation theory, pages 405–450. EPFL Press, Lausanne, 2007.

[Ue75] K. Ueno. Classification theory of algebraic varieties and compact complex spaces. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 439. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1975. Notes written in collaboration with P. Cherenack.

3.5 Многообразия l-Фано

Гладкое проективное многообразие X называется многообразием Фано, если его первый класс Чженя $c_1(X)$ обильный. Более сильным определением является определение многообразий l-Фано.

Определение. Будем говорить, что многообразие X имеет положительный i-ый характер Чженя, если $\mathsf{ch_i(X) \cdot Z > 0}$ для любого эффективного i-цикла Z.

Определение. Гладкое многообразие X называется многообразием l-Фано, если для всех $1 \leqslant i \leqslant l$ характеры Чженя $\mathsf{ch_i(X)}$ положительны.

Пример 3.7. Несложно понять, что проективное пространство $\mathbb{P}^n$ является l-Фано для всех $l = 1, \ldots, n$. Действительно, его i-ый характер Чженя имеет вид $\mathsf{ch_i(\mathbb{P}^n) = \frac{n+1}{i!} H^i}$, где H – это класс гиперплоскости в $\mathbb{P}^n$.

Пример 3.8. Если $X \subset \mathbb{P}^N$ – это гладкое полное пересечение гиперповерхностей степеней $d_1, \ldots, d_k$ (то есть $\dim(X) = N - k$), то X является многообразием l-Фано тогда и только тогда когда $\sum_{i=1}^k d_i^l < N+1$ (см., например, [3, Section 2, Example 3]). В частности, мы получаем, что гладкое полное пересечение k квадрик X является многообразием l-Фано тогда и только тогда когда $l \leqslant \lceil \log_2(\frac{N+1}{k}) \rceil - 1$. Другими словами, полное пересечение k квадрик в $\mathbb{P}^n$ является l-Фано тогда и только тогда когда $k \leqslant \lceil \frac{N+1}{2^l} \rceil - 1$. Также мы получаем, что гладкая кубическая гиперповерхность в проективном пространстве является является l-Фано тогда и только тогда когда $l \leqslant \lceil \log_3(N+1) \rceil - 1$.

Определение 3.5 мотивировано следующим наблюдением. В то время как через общую точку многообразия Фано проходит рациональная кривая ([5, Chapter 5, Theorem 1.6.1]), через общую точку многообразия 2-Фано с некоторыми незначительными условиями проходит рациональная поверхность (см. [4]). Гиперповерхность Фано $X \subset \mathbb{P}^N_K$ над полем K степени трансцендентности 1 над алгебраически замкнутым полем k удовлетворяет следующему арифметическому свойству, называемому теоремой Тзена: оно всегда имеет K-точку. Аналогичное свойство, называемое теоремой Тзена-Ланга, выполняется для гиперповерхности l-Фано $X \subset \mathbb{P}^N_K$ над полем K степени трансцендентности l над алгебраически замкнутым полем k: оно тоже всегда имеет K-точку (см. [2, Theorem 6]).

Следующая гипотеза была выдвинута в статье [1]:

Гипотеза 1. Если многообразие X размерности n является l-Фано с

$$l \geqslant \lceil \log_2(n+2) \rceil,$$

то $X \simeq \mathbb{P}^n$.

На пути доказательства этой гипотезы уже есть некоторый прогресс. В статье [1] дана классификация многообразий 2-Фано среди рациональных однородных пространств с рангом Пикара равным 1 и классификация 3-Фано размерности n и индекса по крайней мере $n-2$ (индексом мы называем максимальное натуральное число, которое делит канонический класс). Для всех этих многообразий гипотеза верна. В статье [6] с помощью компьютера было показано, что гладкие торические многообразия размерности не больше чем 8 является 2-Фано тогда и только тогда когда оно изоморфно проективному пространству. Таким образом, в данном случае гипотеза тоже верна.

В отчетный период сотрудником лаборатории А. Викуловой была доказана гипотеза для случая, когда многообразие X является гладким взвешенным полным пересечением. Для начала напомним несколько определений.

Определение. Многообразие $\mathbb{P}(a_0,\ldots,a_N) = \mathsf{Proj}\mathbb{C}[\mathsf{x}_0,\ldots,\mathsf{x}_\mathsf{N}]$, где переменная x_i имеет вес a_i для всех $i = 0,1,\ldots,N$, называется взвешенным проективным пространством.

Определение. Взвешенное полное пересечение $X \subset \mathbb{P}(a_0,\ldots,a_N)$ мультистепени $(d_1,\ldots,d_k)$ при $k \geqslant 1$ – это пересечение гиперповерхностей степеней $d_1,\ldots,d_k$, что коразмерность каждой неприводимой компоненты X равна k.

Определение. Будем говорить, что взвешенное проективное пространство $\mathbb{P}(a_0,\ldots,a_N)$ хорошо сформировано, если НОД$(a_0,\ldots,\widehat{a_i},\ldots,a_N) = 1$ для всех i. Скажем, что взвешенное полное пересечение X во взвешенном проективном хорошо сформированном пространстве $\mathbb{P}(a_0,\ldots,a_N)$ хорошо сформировано, если

$$\mathsf{codim}_\mathsf{X}(\mathsf{X}\cap \mathsf{Sing}\,\mathbb{P}(\mathsf{a}_0,\ldots,\mathsf{a}_\mathsf{N})) \geqslant 2.$$

Определение. Пусть $X \subset \mathbb{P}(a_0,\ldots,a_N)$ – взвешенное полное пересечение мультистепени $(d_1,\ldots,d_k)$ в хорошо сформированном проективном пространстве. Будем говорить, что X не пересекается с линейным конусом, если $d_i \neq a_j$ для всех i и j.

В отчетный период доказана следующая теорема (см. [7, Theorem 1.7]):

Теорема 3.9. Пусть $X \subset \mathbb{P}(a_0,\ldots,a_N)$ гладкое n-мерное хорошо сформированное взвешенное полное пересечение, которое не пересекается с линейным конусом. Пусть X является l-Фано. Тогда $l < \lceil \log_2(n+2) \rceil$.

Более того, было доказано некоторое усиление предыдущей теоремы (см. [7, Theorem 1.8]):

Теорема 3.10. Пусть $X \subset \mathbb{P} = \mathbb{P}(a_0,\ldots,a_N)$ – это гладкое n-мерное хорошо сформированное взвешенное полное пересечение не пересекающееся с проективным конусом. Пусть X – многообразие l-Фано, и

$$\lceil \log_3(n+2) \rceil \leqslant l < \lceil \log_2(n+2) \rceil.$$

Тогда

$$\mathbb{P} = \mathbb{P}(1,\ldots,1) = \mathbb{P}^N$$

и $X \subset \mathbb{P}$ – это полное пересечение не больше чем $\lceil \frac{N+1}{2^l} \rceil - 1$ квадрик.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

[1] C. Araujo, R. Beheshti, A.-M. Castravet, K. Jabbusch, S. Makarova, E. Mazzon, L. Taylor, N. Viswanathan, Higher Fano manifolds, arXiv:2110.02339 [math.AG].

[2] S. Lang, On quasi algebraic closure, Ann. of Math., 55 (1952), no. 2, 373–390.

[3] A. J. de Jong, J. M. Starr, A note on Fano manifolds whose second Chern character is positive, arXiv:math/0602644 [math.AG].

[4] A. J. de Jong, J. M. Starr, Higher Fano manifolds and rational surfaces, Duke Math. J. 139 (2007), no. 1, 173–183.

[5] J. Kollár, Rational curves on algebraic varieties, Springer-Verlag (1996).

[6] Y. Sano, H. Sato, Yu. Suyama, Toric Fano manifolds of dimension at most eight with positive second Chern characters, arXiv:2003.06548 [math.AG].

[7] A. V. Vikulova, Smooth l-Fano weighted complete intersections, arXiv:2205.06613 [math.AG].

3.6 Исследование групп автоморфизмов и бирациональной жёсткости многообразий Фано и приложения к исследований подгрупп группы Кремоны

Сотрудники лаборатории продолжают изучать вопрос классификации рациональных многообразий Фано с действием конечной группы автоморфизмов, которые нельзя G-эквивариантно бирационально перестроить в другие G-многообразия Фано и расслоения Мори. Такие многообразия называются G-бирационально жёсткими. Одной из мотиваций для их изучения является классификация конечных подгрупп в трёхмерной группе Кремоны $\mathrm{Cr}_3(\Bbbk)$, где $\Bbbk$ – алгебраически замкнутое поле характеристики нуль. Стратегия описания таких подгрупп была предложена и по большей части реализована в двумерном случае И. Долгачёвым и В. Исковских в работе [DI09]. В трёхмерном случае группа Кремоны очень сложна, и описание ее конечных подгрупп – один из немногих способов что-то понять про её структуру. Но даже с такой точки зрения имеется гигантское количество разных случаев, поэтому задача полной классификации конечных подгрупп выглядит неподъёмной. По этой причине логично ограничиться классификацией бирационально жёстких многообразий, которые дают уникальные подгруппы в группе Кремоны. Мы рассматриваем многообразия $G\mathbb{Q}$-Фано с дополнительным условием: канонический класс делится на 2 в группе Пикара (такие многообразия называются G-многообразиями дель Пеццо). Ранее были классифицированы G-бирационально жесткие многообразия дель Пеццо степеней 3 и 4 такого типа, а также получена классификация не$\mathbb{Q}$-факториальных многообразий дель Пеццо степени 2, имеющих только простейшие особенности, которые могут быть эквивариантно бирационально жёсткими, статья с этими результатами была подана в журнал.

В отчетный период продолжалось исследование многообразий дель Пеццо степени 2. Изучались не$\mathbb{Q}$-факториальные многообразия, имеющие более сложные, чем нодальные особенности, которые при этом имеют достаточно большую группу автоморфизмов, чтобы не иметь перестроек в более простые многообразия Фано (например, трехмерное проективное пространство или трёхмерную квадрику), и потенциально являющихся G-бирационально жёсткими. Оказалось, что их имеется однопараметрическое семейство и три отдельных многообразия, причём все они являются вырождениями описанных ранее нодальных многообразий.

Помимо этого, изучался вопрос бирациональной жёсткости уже описанных многообразий относительно каких-нибудь подгрупп в группе автоморфизмов. Самыми естественными подгруппами в данном случае являются S_4 и $S_4 \times C_2$, поскольку они действуют на большинстве описанных многообразий (причём в большинстве случаев очень простым образом – перестановкой координат и инволюцией Гейзера). Были описаны возможные неканонические центры относительно этих подгрупп и в некоторых случаях показано, что эти центры не реализуются или не дают перестроек, но пока полного ответа на вопрос бирациональной жёсткости нет.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

[DI09] I. Dolgachev, V. Iskovskikh, Finite subgroups of the plane Cremona group, In Algebra, arithmetic, and geometry: in honor of Yu. I. Manin. Vol. I, Progr. Math., 269 (2009), 443–548.

3.7 Изучение корегулярности гладких трёхмерных многообразий Фано

По определению корегулярность многообразия равняется разности между размерностью многообразия и максимальной размерностью его двойственного комплекса среди всех структур лог-Калаби-Яу на этом многообразии. Грубо говоря, она измеряет, как много дивизоров кратности 1 может содержаться в лог-каноническом эффективном $\mathbb{Q}$-дивизоре, $\mathbb{Q}$-эквивалентном антиканоническому классу, на некоторой модели многообразия (точнее, на его dlt-модификации). Предполагается, что этот инвариант имеет тесную связь с некоторыми геометрическими свойствами многообразия (см. [Mo22]).

Вычисление корегулярности поверхностей дель Пеццо было проделано в упомянутой выше работе Мораги, но был только набросок доказательства, поэтому корегулярность этих поверхностей была вычислена сотрудниками лаборатории независимо (при этом была найдена ошибка в оригинальной статье – на самом деле не все многообразия дель Пеццо степени 1 имеют корегулярность 1). Был передоказан элементарными методами тот факт, что для вычисления корегулярности поверхностей дель Пеццо достаточно изучать только 2-дополнения (т.е. дивизоры с полуцелыми коэффициентами). Недавно аналогичный факт был доказан С. Филипацци, М. Маури и Х. Морагой в случае произвольной размерности.

Также изучалась корегулярность гладких многообразий Фано размерности 3. На данный момент известен результат для 78 семейств из 105 и ведется работа по изучению оставшихся семейств (например, трёхмерной квартики).

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

[Mo22] J. Moraga Coregularity of Fano varieties arXiv e-print 2206.10834

3.8 Автоморфизмы многообразий Севери-Брауэра

Многообразием Севери-Брауэра называется многообразие, определённое над алгебраически незамкнутым полем k характеристики 0, такое что над алгебраическим замыканием k оно становится изоморфно $\mathbb{P}^n$.

В 2020 году в работе сотрудника лаборатории К.А.Шрамова были классифицированы все конечные подгруппы групп автоморфизмов поверхностей Севери-Брауэра, а в 2021 году была получена полная классификация конечных подгрупп групп автоморфизмов многообразий Севери-Брауэра размерности $p-1$, где $p \neq 2$ — простое.

Будем называть многообразие Севери-Брауэра минимальным, если оно не содержит нетривиальных подмногообразий Севери-Брауэра. Например, любое многообразие Севери-Брауэра размерности $p-1$, где p — простое, является минимальным. В отчетный периоды, сотрудники лаборатории получили следующее описание конечных подгрупп групп автоморфизмов минимальных многообразий Севери-Брауэра произвольной размерности.

Теорема 3.11. Пусть k — поле характеристики 0. Пусть $X \ncong \mathbb{P}^{n-1}$ — многообразие Севери-Брауэра размерности $n-1$, где $n \in \mathbb{N}$. Пусть конечная группа G вложена в $\mathrm{Aut}(X)$. Тогда у неё существует нормальная подгруппа N одного из следующих типов:

- Полупрямое произведение $\mathbb{Z}/m_1\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}/m_2\mathbb{Z}$, где либо $(m_1, m_2) = 1$, либо $(m_1, m_2) = 2$ и $m_2 \not\vdots 4$;
- Прямое произведение $A_4 \times H$, где H — группа типа 3.11;
- Группы S_4 и A_5.

Более того, G/N — абелева группа, и $|G/N|$ делит n^2.

Таким образом в каждой конечной подгруппе групп автоморфизмов минимальных многообразий Севери-Брауэра мы научились находить нормальную подгруппу ограниченного индекса, содержащую коммутант исходной группы и поддающуюся полному описанию.

3.9 Особые многообразия дель Пеццо

Поверхности дель Пеццо образуют одно из наиболее важных и классических семейств многообразий в алгебраической геометрии. В работе [KP22] изучались их многомерные аналоги.

Определение. Многообразие дель Пеццо – это многообразие размерности $n = \dim(X) \geq 2$ с терминальными особенностями такое, что

$$-K_X = (n-1)A, \tag{3.9.1}$$

где A – обильный дивизор Картье, называемый фундаментальным классом X.

Основными дискретными инвариантами многообразия дель Пеццо X является его степень

$$\mathsf{d}(\mathsf{X}) := A^n$$

и ранг группы классов дивизоров

$$\mathsf{r}(\mathsf{X}) := \operatorname{rank}\operatorname{Cl}(X).$$

Общая классификация многообразий дель Пеццо известна [Fuj84], [Fuj90b], [Fuj90a], [IP99]. Исследования были сконцентрированы на детальной бирегулярной классификации. Для этого удобно ввести следующее определение.

Определение. Почти многообразие дель Пеццо – это многообразие размерности $n = \dim(X) \geq 2$ с терминальными особенностями, для которого выполняется (3.9.1), где A численно эффективный объемный дивизор Картье и отображение $\Phi_{|mA|}: X \to \mathbb{P}^N$, заданное линейной системой $|mA|$ для $m \gg 0$, является малым морфизмом, т.е. не стягивает дивизоров.

Для почти многообразия дель Пеццо X всегда можно рассмотреть его антиканоническую модель

$$X_{\mathsf{can}} := \Phi_{|mA|}(X) \qquad \text{для} \quad m \gg 0,$$

образ которого является многообразием дель Пеццо. Классификация многообразий дель Пеццо с точностью до изоморфизма эквивалентна классификации $\mathbb{Q}$-факториальных почти многообразий дель Пеццо с точностью до флопов.

Бирациональная точка зрения на классификацию в работе [KP22] (следуя [Pro13]) была объединена с изучением структуры решетки группы классов $\operatorname{Cl}(X)$.

Для любого почти многообразия дель Пеццо X можно определить симметричную билинейную форму на $\operatorname{Cl}(X)$:

$$\langle D_1, D_2 \rangle := A^{n-2} \cdot D_1 \cdot D_2.$$

Теорема. Пусть X – почти многообразие дель Пеццо размерности $n \geq 3$. Если $S \subset X$ – поверхность, являющаяся общим линейным сечением X, то отображение ограничения

$$\mathrm{Cl}(X) \longrightarrow \mathrm{Cl}(S)$$

индуцирует изоморфизм решеток $\mathrm{Cl}(X) \cong \Xi(X)^{\perp} \subset \mathrm{Cl}(S)$, где $\Xi(X) \subset \mathrm{Cl}(S)$ ортогональное дополнение к образу $\mathrm{Cl}(X)$. При этом $\Xi(X$ является отрицательно определенной подрешеткой в $K_S^{\perp} \subset \mathrm{Cl}(S)$ ранга $m = 10 - \mathsf{d}(\mathsf{X}) - \mathsf{r}(\mathsf{X})$ и имеет один из следующих типов Дынкина:

$$\mathsf{A}_{\mathsf{m}}, \quad 1 \leq \mathsf{m} \leq 7, \quad \text{или} \quad \mathsf{D}_{\mathsf{m}}, \quad 4 \leq \mathsf{m} \leq 7, \quad \text{или} \quad \mathsf{E}_{\mathsf{m}}, \quad 6 \leq \mathsf{m} \leq 8.$$

Многообразия дель Пеццо классифицируются по типу решетки $\Xi(X)$:

Теорема. Пусть X – неконическое многообразие дель Пеццо размерности $n \geq 3$.

- $\Xi(X)$ имеет тип A_{m}, $1 \leq m \leq 7$, тогда и только тогда, когда
  - $X \cong \mathbb{P}^3$ или
  - $X \cong \mathrm{Gr}(2,5) \cap \mathbb{P}^{n+3}$, гладкое линейное сечение или
  - $X \cong \mathrm{Bl}_{P_1,\dots,P_k}(\mathbb{P}_Z(\mathscr{E}))_{\mathsf{can}}$ где $Z = \mathbb{P}^2$ или $Z = \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ и $\mathscr{E}$ – некоторое векторное расслоение на Z;
- $\Xi(X)$ имеет тип D_{m}, $4 \leq m \leq 7$, тогда и только тогда, когда $X \cong \mathrm{Bl}_{P_1,\dots,P_k}(X_0)_{\mathsf{can}}$, где X_0 – одно из следующих многообразий
  - полное пересечение в $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^{n+2}$ трех дивизоров бистепеней $(1,1)$, $(1,1)$, и $(0,2)$;
  - полное пересечение в $\mathbb{P}^{n+2}$ двух квадрик;
  - дивизор в $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^n$ бистепени $(2,2)$;
  - полное пересечение в $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^{2n}$ одного дивизора бистепени $(1,2)$ и n дивизоров бистепени $(1,1)$;
- $\Xi(X)$ имеет тип E_6, E_7 или E_8, тогда и только тогда, когда $X \cong \mathrm{Bl}_{P_1,\dots,P_{r-1}}(X_0)_{\mathsf{can}}$, где X_0 – одно из следующих многообразий
  - кубика в $\mathbb{P}^{n+1}$, $\mathsf{d}(\mathsf{X}_0) = 3$ с $\mathsf{r}(\mathsf{X}_0) = 1$;
  - гиперповерхность степени 4 в $\mathbb{P}(1^{n+1}, 2)$ с $\mathsf{r}(\mathsf{X}_0) = 1$;
  - гиперповерхность степени 6 в $\mathbb{P}(1^n, 2, 3)$ с $\mathsf{r}(\mathsf{X}_0) = 1$.

В случае многообразий дель Пеццо типа A_{m} имеется следующее единообразное описание.

Теорема. Если X является неконическим многообразием дель Пеццо типа A_{m} с $\mathsf{r}(\mathsf{X}) \geq 2$, то

$$X \cong \mathbb{P}_Z(\mathscr{E})_{\mathsf{can}},$$

где Z – поверхность дель Пеццо, $\mathscr{E}$ – векторное расслоение.

Получена полная подробная классификация векторных расслоений, появляющихся в теореме. В частности, имеются следующие результаты ограниченности:

Следствие. Пусть X – многообразие дель Пеццо размерности $n \geq 3$. Тогда

$$\mathsf{d}(\mathsf{X}) + \mathsf{r}(\mathsf{X}) \leq 9.$$

Если, кроме того, X не является коническим типа A_{m}, то

$$\mathsf{d}(\mathsf{X}) + \mathsf{r}(\mathsf{X}) + \mathsf{n} \leq 12.$$

Наконец, следует упомянуть, что была обнаружена замечательная двойственность на многообразиях дель Пеццо типа A. Напомним, что любое многообразие дель Пеццо X степени $\mathsf{d}(\mathsf{X}) = 1$ является гиперповерхностью в $\mathbb{P}(1^n, 2, 3)$. Обозначим через

$$\mathfrak{D}(X) \subset \mathbb{P}^{n-1}$$

дискриминантное множество эллиптического расслоения $X \dashrightarrow \mathbb{P}^{n-1}$.

Теорема. Для $3 \leq n \leq 9$ существует биекция между наборами классов изоморфизма

– максимальных неконических многообразий дель Пеццо X типа $\mathsf{A}_{\mathsf{n}-2}$ степени $\mathsf{d}(\mathsf{X}) = 1$ и

– гладких поверхностей дель Пеццо S степени $n-1$,

так, что S проективно двойственно $\mathfrak{D}(X)$.

Эта теорема обобщает и расширяет основной результат [ACPS19], который является ее частным случаем, где $n = 3$. Аналогичная двойственность имеет место на многообразиях дель Пеццо типа A других степеней.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

[ACPS19] Hamid Ahmadinezhad, I. Cheltsov, J. Park, and Constantin Shramov. Double Veronese cones with 28 nodes. arXiv e-print, 2019.

[Fuj84] Takao Fujita. On the structure of polarized manifolds with total deficiency one, I, II, III. J. Math. Soc. Japan, 32, 33, 36(4):709–725, 415–434, 75–89, 1980, 1981, 1984.

[Fuj90a] Takao Fujita. Classification theories of polarized varieties, volume 155 of London Mathematical Society Lecture Note Series. Cambridge University Press, Cambridge, 1990.

[Fuj90b] Takao Fujita. On singular del Pezzo varieties. In Algebraic geometry (L'Aquila, 1988), volume 1417 of Lecture Notes in Math., pages 117–128. Springer, Berlin, 1990.

[IP99] V. A. Iskovskikh and Yu. Prokhorov. Fano varieties. Algebraic geometry V, volume 47 of Encyclopaedia Math. Sci. Springer, Berlin, 1999.

[KP22] Alexander Kuznetsov and Yuri Prokhorov. On higher-dimensional del Pezzo varieties. arXiv e-print, 2206.01549, 2022. to appear in Izvestiya: Math.

[Pro13] Yuri Prokhorov. G-Fano threefolds, I. Adv. Geom., 13(3):389–418, 2013.

4 Специальные многообразия

4.1 LCK-геометрия и связанные вопросы

В отчетный период, сотрудник лаборатории М. Вербицкий закончил книгу "Principles of LCK geometry", arXiv: 2208.0718, которую он писал совместно с Ливиу Орнеа на протяжении последних 8 лет. В книге 773 страницы, 14 рисунков и несколько сотен упражнений. Вот ее аннотация:

"LCK (локально конформно кэлерово) многообразие - это комплексное многообразие, допускающее кэлерово накрытие с монодромией, действующей через гомотетии. Яркими примерами являются многообразия Хопфа и их подмногообразия. Эта книга представляет собой введение в принципы геометрии LCK (первые две части) и ее текущее состояние (последняя часть). Предполагается, что она будет доступна для магистрантов и аспирантов, интересующихся комплексной геометрией. В книге много упражнений разного уровня сложности. Мы завершаем книгу списком открытых вопросов."

На последней стадии работы, Орнеа и Вербицкий опубликовали ряд статей и препринтов, возникших как логическое продолжение предмета обсуждения книги.

В частности, опубликована статья Ornea, Liviu, Verbitsky, Misha, "Twisted Dolbeault cohomology of nilpotent Lie algebras", Transform. Groups 27 (2022), no. 1, 225-238.

Содержание ее такого. Пусть G - односвязная связная вещественная нильпотентная группа Ли с левоинвариантной комплексной структурой. Тогда для любой кокомпактной дискретной решетки Γ группы G фактор группы G по левому Γ-действию имеет естественную комплексную структуру. Такое многообразие G/Γ называется комплексным нильмногообразием. Заметим, что левоинвариантная комплексная структура на G определяется ее ограничением на свою алгебру Ли g. Кроме того, в силу классического результата Мальцева нильпотентная группа Ли допускает кокомпактную решетку в точности тогда, когда ее алгебра Ли g имеет рациональную форму, т. е. существует алгебра Ли над рациональными числами такая, что ее расширение на вещественные числа есть g, или, точнее, g имеет базис, для которого все структурные константы являются рациональными числами.

Известный результат Ж. Диксмье утверждает, что когомологии $H^*(M,L)$ комплексного нильмногообразия M с коэффициентами в ориентированной локальной системе L ранга один равны нулю. Для доказательства когомологии $H^*(M,L)$ отождествляются с когомологиями алгебры Ли g группы G с коэффициентами в нетривиальном одномерном g-модуле. Последняя обращается в нуль по классической теореме Ж. Диксмье [Acta Sci. Mat. (Сегед) 16 (1955), 246-250; MR0074780]. Основной результат статьи состоит в том, что скрученные когомологии Дольбо $H^{0,p}(g,L)$ нильпотентной алгебры Ли g с коэффициентами в любой нетривиальной локальной системе L ранга один равны нулю. Известен результат С. Консоле и А. Фино [Transform. Группы 6 (2001), вып. 2, 111-

124; MR1835667], что когомологии Дольбо комплексного нильмногообразия совпадают с версией Дольбо комплекса Шевалле-Эйленберга для g. Это неверно для скрученных когомологий Дольбо комплексного нильмногообразия, как показывают авторы, приводя пример LCK-нильмногообразия с ненулевыми скрученными когомологиями Дольбо. Здесь LCK-нильмногообразие - это комплексное нильмногообразие G/Γ, для которого G допускает левоинвариантную локально конформно-келерову (LCK) структуру. В качестве приложения своего основного результата авторы приводят новое доказательство результата Х. Саваи [Geom. Dedicata 125 (2007), 93-101; MR2322542], в котором говорится, что каждое нильмногообразие LCK является вайсмановым и может быть получено как компактное частное произведения группы Гейзенберга и вещественной прямой.

Кроме того, опубликована статья Ornea, Liviu, Verbitsky, Misha, “Closed orbits of Reeb fields on Sasakian manifolds and elliptic curves on Vaisman manifolds”, Math. Z. 299 (2021), no. 3-4, 2287-2296.

Тема данной статьи строго связана с гипотезой Вайнштейна для компактных сасакиевых многообразий, которую можно сформулировать следующим образом: “Векторное поле Риба на замкнутом контактном многообразии имеет хотя бы одну замкнутую орбиту”. Авторы приводят новое доказательство следующего результата, впервые сформулированного Рукимброй.

Теорема 1. Векторное поле Риба на компактном сасакиевом многообразии M^{2n+1} имеет не менее n+1 замкнутых орбит.

Для доказательства теоремы 1 авторы переносят задачу в рамки комплексной геометрии. Во-первых, они доказывают, что векторное поле Риба R сасакиева многообразия M^{2n+1} является предельной точкой последовательности R_i векторных полей Риба, связанных с сасакиевыми структурами на M, такой, что пространство орбит M/R_i является проективным орбифолдом и имеет сложную структуру, соответствующую структуре контактного распределения на M. Отсюда следует, что число замкнутых орбит R равно числу нулей общего голоморфного векторного поля на орбите, и это число равно минимум $n+1$. Компактные многообразия Вайсмана образуют класс комплексных многообразий, который строго связан с классом сасакиевых многообразий. Многообразие Вайсмана – это локально конформное кэлерово многообразие, форма Ли которого параллельна относительно связности Леви-Чивиты. Комплексная кривая на компактном многообразии Вайсмана является эллиптической кривой, и любое компактное многообразие Вайсмана допускает по крайней мере две эллиптические кривые. Используя технику, использованную для доказательства теоремы 1, авторы доказывают, что если компактное многообразие Вайсмана M^{2n} допускает конечное число эллиптических кривых, скажем, r, то $r \geq n$.

Статья “Lee classes on LCK manifolds with potential”, Liviu Ornea, Misha Verbitsky, была принята для публикации в Tohoku Math. Journal. В этой статье доказывается, что множество классов когомологий форм Ли на заданном LCK-многообразии с потенциалом - это полупространство.

Кроме того, Вербицким и Орнеа в отчетный период были опубликованы следующие препринты.

arXiv: 2208.05833 “Алгебраические конусы LCK многообразий с потенциалом”, Ливиу Орнеа, Миша Вербицкий

Комплексное многообразие называется “LCK-многообразием с потенциалом”, если его можно реализовать как комплексное подмногообразие многообразия Хопфа. Оно допускает $\mathbb{Z}$-накрытие $\tilde{M}$, которое реализуется как комплексное подмногообразие в $\mathbb{C}^n \backslash 0$. В препринте доказано, что $\tilde{M}$ является алгебраическим. Полученные таким образом многообразия названы алгебраическими конусами и доказано, что алгебраическая структура на $\tilde{M}$ не зависит от выбора вложения. Дано несколько внутренних определений алгебраического конуса и доказываем, что эти определения эквивалентны.

arXiv: 2206.08808 “Теорема Калаби-Яу для многообразий Вайсмана”, Ливиу Орнеа, Миша Вербицкий

LCK многообразие называется вайсмановым если его форма Ли параллельна относительно связности Леви-Чивиты. Его форма объема инвариантна относительно поля Ли и его комплексно-сопряженного, которое называется полем анти-Ли. Форма Ли LCK многообразия замкнута, и ее класс когомологий играет в вайсмановой геометрии ту же роль, что и кэлеров класс в геометрии кэлеровых многообразий. Вербицкий и Орнеа доказывают, что метрика Вайсмана однозначно определяется своей формой объема и классом Ли, и, наоборот, для каждого класса Ли и для каждой каждая Ли- и анти-Ли-инвариантной формы объема, существует структура Вайсмана с заданной формой объема и клласcом Ли. Это аналог теоремы Калаби-Яу, утверждающей, что Кэлерова форма однозначно определяется своим объемом и классом когомологий.

arXiv:2205.14062 “Пучки Малля и плоские связности на многообразиях Хопфа”, Ливиу Орнеа, Миша Вербицкий

Расслоение Малля на многообразии Хопфа H - это голоморфное векторное расслоение, прообраз которого на универсальное накрытие H тривиален. Вербицкий и Орнеа определяют резонансные и нерезонансные расслоения Малля, обобщая понятие резонанса из ОДУ, и доказывают, что нерезонансное расслоение Малла всегда допускает плоскую голоморфную связность. Затем авторы используют это наблюдение для доказательства версии теоремы о линеаризации Пуанкаре-Дюлака, показывающей, что любое нерезонансное обратимое голоморфное сжатие комплексного пространства линейно в соответствующих голоморфных координатах. Авторы определяют понятие резонанса в многообразиях Хопфа и показывают, что все нерезонансные многообразия Хопфа линейны; ранее этот результат был получен Кодаирой с помощью теоремы Пуанкаре-Дюлака.

arXiv:2202.12398 “Нелинейные многообразия Хопфа локально конформно келеровы”, Ливиу Орнеа, Миша Вербицкий

Многообразие Хопфа является это фактор $\mathbb{C}^n \backslash 0$ по действию циклической группы, порожденной голоморфным сжатием. Многообразия Хопфа диффеоморфны

$S^{2n-1} \times S^1$ следовательно, не допускают кэлеровых метрик. Известно, что многообразия Хопфа, определяемые линейными сжатиями (называемые линейными многообразиями Хопфа), имеют локально конформно-келеровы (LCK) метрики. Мы доказываем, что многообразия Хопфа, определяемые нелинейными голоморфными сжатиями, допускают голоморфные вложения в линейные многообразия Хопфа и, следовательно, тоже допускают LCK-метрики.

Помимо работ по LCK-геометрии, у М. Вербицкого вышли следующие статьи (первая из них - в соавторстве с Ф. Богомоловым, научным руководителем ЛАГ).

Bogomolov, Fedor A., Déev, Rodion N., Verbitsky, Misha, Sections of Lagrangian fibrations on holomorphically symplectic manifolds and degenerate twistorial deformations.

Рассмотрим голоморфно симплектическое многообразие (M,Ω), снабженное голоморфным лагранжевым расслоением $\pi: M \to X$, и замкнутую форму η ходжева типа (1,1) + (2,0) на . Авторы доказываем, что $\Omega + \pi^*\eta$ является голоморфно симплектической формой для другой комплексной струйтуры структуры, который однозначно определяется $\Omega + \pi^*\eta$. Соответствующая деформация комплексных структур называется "вырожденной твисторной деформацией". Отображение π голоморфно в новой комплексной структуры, а ее база и слои имеют ту же самую комплексную структуры. Авторы доказывают, что любое гладкое сечение π становится голоморфным при подходящем выборе вырожденной твисторной деформации.

Kamenova, Ljudmila; Verbitsky, Misha, Holomorphic Lagrangian subvarieties in holomorphic symplectic manifolds with Lagrangian fibrations and special Kähler geometry. Eur. J. Math. 8 (2022), no. 2, 514-522.

Рассмотрим голоморфное симплектическое кэлерово многообразие, снабженное лагранжевым расслоением $\pi : M \to X$. Тогда снабжено "специальной кэлеровой структурой": плоской связностью ∇, сохраняющей симплектическую форму для кэлеровой структуры (I,ω,g), такой, что ее риманова структура g локально представляется как гессиан ∇df гладкой функции f. Авторы доказывают, что любое голоморфное лагранжево подмногообразие $Z \subset M$, которое трансверсально слоям проекции, проектируется в специальное кэлерово подмногообразие X. Это отвечает на вопрос Н. Хитчина, который относится к двойственности BBB/BAA Капустина-Виттена.

4.2 Исследования коизотропных многообразий в симплектических многообразиях

В соавторстве с Ф. Кампана, сотрудник лаборатории Е. Америк изучала алгебраически коизотропные подмногообразия голоморфно симплектических многообразий. Пусть X многообразие с голоморфно симплектической формой s, тогда подмногообразие Z называется коизотропным, если ядро ограничения s на Z имеет максимально возможный ранг (равный коразмерности Z). Ядро ограничения F в этом случае называют характеристическим слоением. Говорят, что многообразие Z алгебраически коизотропно, если F алгебраически интегрируемо (то есть его листы являются подмногообразиями).

Гиперповерхность, очевидно, всегда коизотропна. Хванг и Фивег показали, что гладкая гиперповерхность общего типа не является алгебраически коизотропной, за исключением тривиального случая, когда эта гиперповерхность - кривая C на поверхности S . Вместе с Кампана мы классифицировали алгебраически коизотропоные гладкие гиперповерхности несколько лет назад. Оказывается, что такая гиперповерхность либо покрывается рациональными кривыми, либо с точностью до конечного неразветвленного накрытия получается из тривиального случая $C \subset S$ домножением на другое голоморфно симплектическое многообразие Y, см. работу E. Amerik, F. Campana, Characteristic foliation on non-uniruled smooth divisors on hyperkähler manifolds, Journal of the London Mathematical Society 95 (1), 115-127 (2017).

В новой работе Америк и Кампана ставим вопрос, верен ли аналог этого утверждения и для высших коразмерностей. Тривиальный случай кривой на поверхности нужно заменить на случай лагранжева подмногообразия $L \subset N$, где голоморфно симплектическое (напомним, что лагранжево подмногообразие - это изотропное подмногообразие половинной размерности, или, что то же самое, изотропное и коизотропное одновременно).

Таким образом, вопрос звучит так: пусть X голоморфно симплектическое и Z гладкое подмногообразие, алгебраически коизотропное. Верно ли, что либо Z унилинейчато, либо с точностью до конечного неразветвленного накрытия пара Z,X есть произведение Y и L,N, где Y,N - голоморфно симплектические, $L \subset N$ лагранжево?

Америк и Кампана отвечаем на этот вопрос утвердительно в случае, когда объемлющее многообразие тор. В общем случае у нас есть такой частичный результат, аналог результата Хванга и Фивега: если Z общего типа, то Z лагранжево.

Эти результаты появились на arxiv.org в виде статьи E. Amerik, F. Campana, On algebraically coisotropic submanifolds of holomorphic symplectic manifolds, arXiv:2205.07958. Они также докладывались на международных конференциях: Simons workshop "Higher-dimensional complex geometry Simons Foundation, New York, 24-28 октября; Конференция в честь 60-летия Д. Маркушевича, Levico (Италия), 13-17 июня; Complex Geometry in Byurakan, Бюракан (Армения), 6-10 июня; и на семинаре отдела алгебры и алгебраической геометрии МИ РАН (семинаре Шафаревича). Статья в ближайшее время будет представлена к публикации в выпуске журнала Epijournal de Géométrie Algébrique (EPIGA) , посвященном 60-летию Клэр Вуазен.

Кроме того, вместе с сотрудником лаборатории М. Вербицким, Америк задалась следующим вопросом. Пусть X голоморфно симплектическое кэлерово многообразие, не обязательно компактное или алгебраическое. Пусть Z компактное гладкое подмногообразие, стягиваемое в точку (оно тогда автоматически лагранжево). Верно ли, что Z - проективное пространство половинной размерности? Ответ (утвердительный) хорошо известен в проективном случае благодаря работам Чо-Мияоки-Шеперд-Бэррона и Кебекуса, а компактный кэлеров случай можно получить из проективного при помощи деформаций. В произвольном случае известно (см. Ancona, V., and Van Tan, Vo, "On the blowing down problem in C-analytic geometry Journal fur die reine und angewandte Mathematik 350 (1984): 178-182), что на Z существует структура схемы с обильным конормальным пучком. Из этого, опираясь на результаты Кампана и Пауна, мы получаем, что многообразие Z унилинейчато, откуда благодаря существованию рациональных кривых и общим результатам об их деформациях уже выводится, что Z проективное пространство. Сотрудники лаборатории надеются, что это позволит получить дальнейшие результаты о нормальной форме окрестности стягиваемого лагранжева подмногообразия, и в любом случае в ближайшее время начнем писать текст (поскольку результат интересен и сам по себе).

Кроме того, Америк и Вербицкий работают над окончательной версией их совместной статьи Parabolic automorphisms of hyperkahler manifolds. Она была представлена в журнал JMPA (Journal de Mathḿatiques Pures et Appliqués) и скорее всего вскоре будет туда принята, но необычно внимательный рецензент вносит большое количество замечаний и предложений, за что мы ему весьма признательны.

4.3 Исследование геометрии многообразий Гуана

В этом году у сотрудника лаборатории Н. Курносова вышли две публикации, одна в IMRN совместно с Ф. Богомоловым, А.Кузнецовой и Е. Ясинским. Вторая в сборнике Springer: Birational geometry, Kähler-Einstein metrics and degenerations, а также подготовлен препринт “Verbitsky component and Rozansky-Witten invariants in dimension six”. Первый текст посвящен БГ-многообразиям, единственному известному примеру некэлерова симплектического односвязного многообразия. Данный пример был построен в работах Гуана и Богомолова.

В тексте с Ф. Богомоловым, А.Кузнецовой и Е. Ясинским Курносов изучил подмногообразия и автоморфизмы БГ-многообразий. Основной результат заключается в доказательстве алгебраической редукции БГ-многообразий и его базы на проективное пространство, общие слои которой абелевы, в частности это лагранжево расслоение.

Помимо этого установлены подмногообразия в БГ-многообразиях - которые классифицируются в зависимости от размерности подмногообразия в проективном пространстве на которые они проецируются и того как многообразие пересекается с дивизором раздутия. Также удалось показать, что группа $Bim(Q)_{\Phi}$ жорданова.

Тем не менее, жордановость группы бимероморфных автоморфизмов остается открытым вопросом, также как и ограниченность групп $Aut(Q), Bim(Q)$. Для гиперкэлеровых многообразий она была доказана ранее в том числе Курносовым и Ясинским в работе, вышедшей в 2022 году.

Как уже было сказано, БГ-многообразия допускают структуру лагранжевого расслоения во многом аналогичную той, что имеется у гиперкэлеровых многообразий. Совместно с Вербицким, Америк частично обобщила результаты Лена и Вуазен на эту область, в частности, записаны решения уравнения Мауэра-Картана для явных голоморфных деформаций лагранжевых расслоений БГ-многообразий.

Третий сюжет, по которому подготовлен препринт, посвящен изучению когомологий гиперкэлеровых многообразий. Известно, что на когомологиях гиперкэлеровых многообразий действует алгебра Ли $\mathfrak{so}(b_2+2)$, тем самым давая разложение когомологий в сумму модулей относительно этой алгебры Ли. Один из таких модулей - это компонента Вербицкого, а именно часть, порожденная вторыми когомологиями. Ранее, в размерности 4 Гуан получил конечное число возможных чисел Бетти для гиперкэлеровых многообразий. Используя обобщения его результатов удалось получить, что компонента Вербицкого является доминирующей в размерности шесть.

4.4 Самоподобные гессиановы многобразия

Работа сотрудника лаборатории П. Осипова [O1] опубликована в Journal of Geometry and Physics.

Самоподобный римановы многообиразием называется риманово многообразие (C,g), оснащенное полем ξ, таким что $\mathfrak{L}_\xi g = 2g$. Самоподобное многообразие (M,g,ξ) называется потенциальным, если ξ является градиентом функции. Плоское аффинное многообразие — это многообразие оснащенное плоской связностью без кручения. Самоподобным гессиановым многобразием (M,∇,g,ξ) называется гессианово многообразие (M,∇,g), оснащенное векторным полем ξ, таким что поток вдоль ξ сохраняет аффинную структуру и (M,g,ξ) является самоподобным многообразием.

Поле ρ на плоском аффинном многообразие (M,∇) называется радиантным, если $\nabla\rho = \mathrm{Id}$. В окрестности каждой точки существует локальная плоская система координат, в которой радиантное поле имеет вид $\rho = \sum x^i \frac{\partial}{\partial x^i}$. Назовем самоподобное гессианово многообразие (M,∇,g,ξ) радиантным, если существует такое $\lambda \neq 0$, что $\lambda\xi$ — радиантное векторное поле.

Теорема 4.1 ([O1]). Пусть (C,∇,ξ) — самоподобное гессианово многообразие. Поле ξ потенциально тогда и только тогда, когда (C,∇,ξ) локально изоморфно прямому произведению радиантных гессиановых многообразий. Кроме того, если поле ξ потенциально и зануляется в какой-то точке, то (C,∇,g,ξ) — радиантное гессианово многообразие с радиантным векторным полем $\rho = \xi$.

4.5 **Самоподобные гессиановы и конформно кэлеровы многообразия**

Статья [O2] сотрудника лаборатории П. Осипова опубликована в Annals of Global Analysis and Geometry.

Открытый выпуклый конус $V \subset \mathbb{R}^n$ называется регулярным, если он не соержит ни одной полной прямой. Трубчатая окрестность регулярного выпуклого конуса $V+\sqrt{-1}\mathbb{R}^n \subset \mathbb{C}^n$ биголоморфна ограниченно обрласти в $\mathbb{C}^n$. Все комплескные области, возникающие таким образом, называетются областями Зигеля первого рода. Мы будем рассматривать аффинные автоморфизмы конусов и комплексные аффинные автоморфизмы соответствющих трубчатых областей. В этих соглашениях область $V+\sqrt{-1}\mathbb{R}^n$ однородна тогда и только тогда, когда конус V однороден. Однородные выпуклый конус допускает инвариантную гессианову структуру, по ней можно построить инвариантную кэлерову структуру на соответствующей области Зигеля первого рода.

Осипов модифицирует конструкцию инвариантной кэлеровой структуры на однородных областях Зигеля первого рода для получения некоторого класса однородных конформно кэлеровых многообразий и однородных конформно гиперкэлеровых многообразий.

Однородным (глобально) конформно кэлеровым многообразием называется однородное комплексное многообразие (X,G,I) с G-инвариантной римановой метрикой $g_{c.K.}$ конформно эквивалентной некоторой кэлеровой метрике $g_{K.}$ (метрика $g_{K.}$ не обязательно G-инвариантна).

Теорема 4.2 ([O2]). Пусть (M,∇,g,ξ) односвязное самоподобное гессианово многообразие, ξ полно и G — группа аффинных изометрий (M,∇,g) сохраняющих ξ. Положим, что G действует свободно и транзитивно на линии уровня $\{g(\xi,\xi)=1\}$. Тогда TM допускает однородную конформно кэлерову структуру.

В частности, Осипов построил инвариантную конформно кэлерову метрику на любой области Зигеля первого рода.

Теорема 4.3 ([O2]). Пусть (M,∇,g,ξ) односвязное самоподобное специальное кэелерово многообразие, ξ полно и G — группа аффинных изометрий (M,∇,g) сохраняющих ξ. Положим, что G действует свободно и транзитивно на линии уровня $\{g(\xi,\xi)=1\}$. Тогда T^*M допускает однородную конформно гиперкэелерову структуру.

4.6 Статистические алгебры Ли постоянной кривизны и локально конформно кэлеровы алгебры Ли

Работа сотрудника лаборатории П. Осипова [O3] опубликована в Bulletin mathématique de la Société des Sciences Mathématiques de Roumanie.

Статистической алгеброй Ли называется алгебра Ли $\mathfrak{g}$, оснащенная плоской связностью без кручения ∇ и билинейной формой g такими, что тензор ∇g симметричен по трем аргументам. Статистическая алгебра Ли является статистической алгеброй Ли постоянной кривизны C, если тензор кривизны связности ∇ равен

$$\theta(X,Y)(Z)=c(g(Y,Z)Z-g(X,Z)Y)$$

для любых $X,Y,Z\in\mathfrak{g}$.

Локально комформно симлектической алгеброй Ли называется алгебра Ли $\mathfrak{g}$, оснащенная 2-формой ω и 1-формой θ такими что $d\omega=\theta\wedge\omega$. Локально комформно кэлеровой алгеброй Ли называется Локально комформно симлектическая алгеброй

Ли $\mathfrak{g}, \omega, \theta$ вместе с комплексной структурой I, такие что билинейная форма $\omega(*, I*)$ положительно определена.

Осипов строит по любой n-мерной статистической алгебре Ли $2n+2$-мерную локально конформно кэлерову алгебры Ли.

4.7 Локально конформно гессиановы многоразия

Кроме того, сотрудник лаборатории П. Осипов опубликовал препринт [O4].

В нем он определяет локально конформно гессиановы многообразия по аналогии с локально конформно кэлеровыми многообразиями. (Радиантным) локально конформно гессиановым многообразием называется многообразие, универсальная накрывающего которого оснащена (радиантной) гессиановой структурой такой, что группа монодромий действует гомотетиями. Соответствующее поле гомотетий гессиановой структуры называется полем Ли.

Теорема 4.4. Любое компактное локально конформно гессианово многообразие с киллинговым полем Ли является радиантным.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

[O1] P. Osipov, Selfsimilar Hessian manifolds, J. Geom and Phys, 175, (2022).

[O2] P. Osipov, Self-similar Hessian and conformally Kahler manifolds, Ann Glob Anal Geom (2022).

[O3] P. Osipov, Statistical Lie algebras oa constant curvature and locally conformally Kähler Lie algebras, Bull. Math. Roumanie, 65(3) (2022).

[O4] P. Osipov, Locally conformally Hessian and statistical manifolds, arxiv:4481361.

4.8 Комплексные кривые в гиперкомплексных нильмногообразиях с $\mathbb{H}$-разрешимой алгеброй Ли

Пусть G – нильпотентная группа Ли, Γ – решетка. Компактное многообразие N, допускающее транизитивное действие нильпотентной группы G, называется нильмногообразием. А. Мальцев показал, что всякое нильмногообразие диффеоморфно фактору связной односвязной нильпотентной группы Ли G по кокомпактной решетке: $N = \Gamma \backslash G$.

Сотрудником лаборатории Ю. Горгинян были рассмотрены нильмногообразия, которые также являются гиперкомплекными многообразиями, то есть допускают три комплексные структуры I, J и K, связанные кватернионными соотношениями.

Напомним, что алгебра Ли $\mathfrak{g}$ называется нильпотентной, если найдется такое $k \in \mathbb{Z}_{>0}$, что

$$\mathfrak{g}_0 \supset \mathfrak{g}_1 \supset \cdots \supset \mathfrak{g}_k = 0,$$

где $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{g}$ и $\mathfrak{g}_k = [\mathfrak{g}_{k-1}, \mathfrak{g}]$.

Пусть $(\mathfrak{g}, I, J, K)$ – нильпотентная гиперкомплексная алгебра Ли. Определим $\mathbb{H}$-разрешимую алгебру Ли. Нам понадобятся обозначения

$$\mathfrak{g}_i^{\mathbb{H}} := \mathbb{H}[\mathfrak{g}_{i-1}^{\mathbb{H}}, \mathfrak{g}_{i-1}^{\mathbb{H}}],$$

где $\mathfrak{g}_1^{\mathbb{H}} = \mathbb{H}[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] + I[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] + J[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] + K[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ – минимальная $\mathbb{H}$-инвариантная подалгебра, содержащая $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$

Определение 1. Гиперкомплексная нильпотентная алгебра Ли называется $\mathbb{H}$-разрешимой, если существует такое $k \in \mathbb{Z}_{>0}$, что

$$\mathfrak{g}_1^{\mathbb{H}} \supset \mathfrak{g}_2^{\mathbb{H}} \supset \cdots \supset \mathfrak{g}_{k-1}^{\mathbb{H}} \supset \mathfrak{g}_k^{\mathbb{H}} = 0.$$

Основным полученным результатом является следующая теорема:

Теорема 4.5 (G). Пусть (N, I, J, K) является гиперкомплексным многообразием с $\mathbb{H}$-разрешимой алгеброй Ли $\mathfrak{g}$, где $N = \Gamma \backslash G$ и $\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}(\mathrm{G})$. Тогда в общем слое (N, L) голоморфной твисторной проекции нет комплексных кривых, $L \in \mathbb{C}\mathrm{P}^1$.

Кроме того, пусть (N, I, J, K) – гиперкомплексное нильмногообразие с плоской связностью Обаты. Связность Обаты есть единственная связность без кручения, сохраняющая все три комплексные структуры. Она может быть записана в виде:

$$\nabla_X^{Ob} Y = [X, Y] + I[IX, Y] - J[X, JY] + K[IX, JY].$$

Была доказана также следующая теорема:

Теорема 4.6. Пусть $(\mathfrak{g}, I, J, K)$ гиперкомплексная алгебра Ли с плоской связностью Обаты. Тогда $\mathfrak{g}$ является $\mathbb{H}$-разрешимой алгеброй Ли.

Гипотеза 2. Гиперкомплексные нильпотентные алгебры Ли являются $\mathbb{H}$-разрешимыми.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

[G] I. Gorginian, Complex curves in hypercomplex nilmanifolds with $\mathbb{H}$-solvable Lie algebras, arXiv:2207.12561

4.9 **В-полуинвариантные действия адитивных групп**

Важную роль в исследовании групп автоморфизмов многообразий играют аддитивные подгруппы. Это связано с тем, что для алгебраической группы ее полупростая часть и унипотентный радикал порождаются такими подгруппами. В связи с этим

Р.С.Авдеевым и И.В.Аржанцевым в 2021 году, была поставлена задача об исследовании и описании аддитивных B-нормализуемых дифференцирований на аффинных сферических многообразий, которые непостредственно связаны с действиями аддитивной группы, нормализуемыеми борелевской подгруппой. Как оказалось, для сферических многообразий эта постановка задачи наиболее осмыслена, поскольку G-инвариантных аддитивных действий слишком мало, а аддитивных действий, инвариантных относительно действия максимального тора слишком много, и вряд ли они имеют разумное описание. Также с этими действиями, несложно связать корни Демазюра некоторого торического многообразия, однако вопрос о реализуемости аддитивного действия с данным весом оставался открытым. Более того, Авдеевым и Аржанцевым были описаны примеры, в которых, существало нескольких аддитивных действий, соответствующих одному и тому же корню Демазюра, а также примеры действия для которого корень Демазюра ассоциированного торического многообразия, не отвечал никакому аддитивному B-нормализуемому действию. Несмотря на специальную конструкцию B-полуинваринтных дифференцирований на орисферических многообразиях, никаких общих методов построения таких аддитивных действий предложено не было.

В совместной работе сотрудника лаборатории В.С.Жгуна с Р.С.Авдеевым, "О существовании B-корневых подгрупп на аффинных сферических многообразиях", Доклады Российской академии наук. Математика, информатика, процессы управления. 2022. Т. 503-1. С. 5-10 были разработаны новые общие методы описания аддитивных действий на аффинных сферических многообразиях, основанные на применении теоремы о Локальной структуре. Была получена теорема, классифицирующая типы B-инвариантных дивизоров, также инвариантные относительно аддитивных действий, а также те, типы которые могут не быть инвариантными. Была получена теорема, описывающая параметры, состоящие из комбинаторной и непрерывной части, однозначно характреизующие B-инвариантные дифференцирования. Указанные результаты полностью решают проблему единственности для дифференцирования с фиксированными комбинаторными и непрерывными данными. Также была получена теорема, описывающее достаточное условие для реализуемости B-полуинвариантного дифференцирования данного веса. Этот результат позволил доказать гипотезу, Авдеева и Аржанцева, о том, при каких условиях G-инвариантный дивизор двигается действием B-нормализованной аддитивной подгруппы и, в частности, не инвариантен относительно группы автоморфизмов.

По этим работам В.С.Жгуном были сделаны доклады "О B-нормализуемых аддитивных подгруппах в сферических многообразиях", Геометрия, алгебра и теория представлений (2-3 июля 2022 г., МФТИ, ауд. 5.18 Физтех.Цифра, г. Долгопрудный).

А также доклад "О B-нормализуемых аддитивных подгруппах в сферических многообразиях" на конференции "Алгебра, алгебраическая геометрия и теория чисел", конференция памяти академика Игоря Ростиславовича Шафаревича (6 июня 2022 г., МИАН, ауд. 104 (ул. Губкина, 8), г. Москва).

4.10 Теоремы типа Кэли-Бахараша в форме Гриффитса-Харриса и их обобщения

Совместно с Н.Бутом (студентом математического факультета ВШЭ) Жгуном В.С. были исследованы различные варианты обобщений классической теоремы Кэли-Бахараша. Одно из обобщений этой теоремы принадлежит Гриффитсу и Харрису: обращается в нуль во всех точках множества нулей регулярного сечения векторного расслоения ранга n за исключением разве что одной одной точки, то оно обращается в нуль также в оставшейся точке. На сегодняшний день есть несколько вариантов обобщения этой теоремы на случай нерегулярного сечения, одно принадлежит Муну и Ли. Техника доказательства их теоремы основана на конструкции обобщенного вычета, Другое обобщение принадлежит Айну и Лазарсфельду и основано на резольвенте Шкоды для пучков мультипликаторов. В свою очередь первое доказательство использует аналитическую технику, а второе чисто алгебраическое. Нашей целью было дать алгебраический подход к доказательству Муна и Ли. Для этого мы разработали подход, основанный на применении спектральной последовательности гиперкогомологий. Были даны формулы для вычетов в соответствующем двойном комплексе, основанные на использовании разбиения единицы. Мы планируем получить их алгебраические аналоги в терминах резольвенты Чеха или адельной резольвенты.

4.11 Полиэдральные модели для K-теории торических и флаговых многообразий

В работе А. В. Пухликова и А. Г. Хованского (1992) было предложено описание кольца когомологий торического многообразия X как фактора кольца дифференциальных операторов с постоянными коэффициентами по аннулятору многочлена объема многогранника моментов многообразия X. Эта конструкция была обобщена К. Кавехом (2011), который заметил, что кольцо когомологий многообразия полных флагов может быть получено в результате применения аналогичной конструкции ко многограннику Гельфанда–Цетлина. Впоследствии это описание было использовано в работе В. А. Кириченко, Е. Ю. Смирнова и В. А. Тиморина (2012), в которой была предложена реализация исчисления Шуберта на многообразиях полных флагов при помощи пересечения определенных наборов граней многогранников Гельфанда–Цетлина.

Совместно с Л. А. Мониным сотрудником лаборатории Е. Смирновым было получено обобщение этих результатов на случай K-теории. Было предложено обобщение конструкции алгебр с горенштейновой двойственностью, задаваемой обратными системами Маколея (см. препринт Хованского и Монина (2020)) на случай операторов сдвига с постоянными коэффициентами. Далее эта конструкция была использована для определения K-кольца многогранника; для этого была рассмотрена алгебра операторов сдвига с постоянными коэффициентами по модулю аннулятора многочлена Эрхарта многогранника. Особый интерес представляет случай целочисленно простых многогранников, отвечающих гладким торическим многообразиям.

Далее было показано, что K-теория торического многообразия совпадает с K-кольцом его многогранника моментов. В последнем кольце были выписаны явные представители классов структурных пучков замыканий орбит тора. Наконец, было получено обобщение этой конструкции на случай многообразий полных флагов; группа Гротендика такого многообразия изоморфна K-кольцу многогранника Гельфанда–Цетлина (который, однако, уже не является простым, что доставляет дополнительные технические трудности). Наконец, в K-кольце многогранника Гельфанда–Цетлина были предъявлены элементы, отвечающие классам структурных пучков многообразий Шуберта. Это описание позволяет проводить вычисления в группе Гротендика многообразия флагов в терминах граней многогранников Гельфанда–Цетлина, что дает обобщение результатов Кириченко–Смирнова–Тиморина.

Полученные результаты готовятся к публикации. Краткое сообщение с анонсом этих результатов представлено на конференцию “Formal Power Series and Algebraic Combinatorics” (UC Davis, Калифорния, США, июнь 2023 г.).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В заключение отметим, что по результатам проведенных работ, описанным в настоящем отчете, можно сделать следующие краткие выводы. Во-первых, все запланированные на год работы были Лабораторией полностью и успешно проведены. Во-вторых, работы выполнены на самом высоком научно-техническом уровне, сравнимым с лучшими достижениями в данной области и в чем-то даже превосходящем их. В-третьих, работы могут быть и будут успешно применены в дальнейших работах по теоретической математике. В-четвертых, как и с любыми другими работами в области теоретической математики, непосредственное внедрение их в текущую технико-экономическую деятельность не представляется возможным, и в планы не входит.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Ниже список публикаций лаборатории, и список препринтов, подготовленных к печати.

Публикации лаборатории

- Karmazyn J., Kuznetsov A., Shinder E. Derived categories of singular surfaces//Journal of the European Mathematical Society -2022. -Vol.24, No. 2. P. 461 -526.
- Kuznetsov A. Simultaneous categorical resolutions//Mathematische Zeitschrift -2022. -Vol.300, No. 4. P. 3551-3576.
- Kuznetsov A., Prokhorov Y. Rationality over non-closed fields of Fano threefolds with higher geometric Picard rank// Journal of the Institute of Mathematics of Jussieu -2022. - Vol. 300, P. 1-41
- Kuznetsov A. Derived Categories of Families of Sextic del Pezzo Surfaces//International Mathematics Research Notices -2021. -Vol. 2021, No. 12. P. 9262-9339.
- Kuznetsov A., Perry A. Homological projective duality for quadrics//Journal Algebraic Geometry-2021. -Vol. 30, P. 457-476.
- Kuznetsov A., Belmans P., Smirnov M. Derived categories of the Cayley Plane and the coadjoint Grassmannian of type F//Transformation Groups - 23.05.2021.
- Alexander B., Lex O., Timorin V. Cutpoints of Invariant Subcontinua of Polynomial Julia Sets // Arnold Mathematical Journal -2022. -Vol. 8, P. 271-284.
- Blokh A., Oversteegen L., Shepelevtseva A., Timorin V. Modeling Core Parts of Zakeri Slices I // Moscow Mathematical Journal -2022. -Vol. 22, No. 2. P. 265-294.
- Alexander B., Lex O., Timorin V. Slices of the Parameter Space of Cubic Polynomials // Transactions of the American Mathematical Society -2022. -Vol. 375, No. 8. P. 5313-5359.
- Prokhorov Y., Zaidenberg M. Fano-Mukai fourfolds of genus 10 and their automorphism groups // European Journal of Mathematics -2022. -Vol. 8, P. 561-572.
- Prokhorov Y. Conic bundle structures on Q-Fano threefolds// Electron Research Archive Special issue on birational geometry and moduli of projective varieties -2022. -Vol. 30, No. 5. P. 1881-1897.
- Bogomolov F., Lukzen E Stable vector bundles on the families of curves// European Journal of Mathematics -2022. -Vol. 8, No. 2. P. 540-550.

– Elagin A., Lunts V. Derived categories of coherent sheaves on some zero-dimensional schemes// Journal of Pure and Applied Algebra -2022. -Vol. 226, No. 6. 106939. P. 1-30.

– Elagin A. Calculating dimension of triangulated categories: path algebras, their tensor powers and orbifold projective lines//Journal of Algebra -2022. -Vol. 592, P. 357-401.

– Loginov K. On semistable degenerations of Fano varieties//European Journal of Mathematics -2022. -Vol. 8, No. 3. P. 991-1005.

– Loginov K., Moraga J. Maximal log Fano manifolds are generalized Bott towers////Journal of Algebra -2022. -Vol. 612, P. 110-146.

– Kondyrev G., Prikhodko A. Equivariant Grothendieck-Riemann-Roch theorem via formal deformation theory//Cambridge Gournal of Mathematics -2021. -Vol. 9, No. 4. P. 809-899.

– Trepalin A. Quotients of Severi-Brauer Surfaces// Doklady Mathematics -2021. -Vol. 104, No. 3. P. 390-393.

– Zhdanovskiy I., Kocherova A. Partial Abelianization of Free Product of Algebras// Lobachevskii Journal of Matematiks -2021. -Vol. 42, No. 10. P. 2348-2357.

– Osipov P. Self-similar Hessian and conformally Kähler manifolds// Annals of Global Analysis and Geometry -2022. -Vol. 62, P. 479-488.

– Osipov P. Selfsimilar Hessian manifolds// Journal of Geometry and Physics -2022. -Vol. 104476, P. 479-488.

– Osipov P. Statistical Lie algebras of constant curvature and locally conformally Kähler Lie algebras// Bulletin Mathematique de la Societe des Sciences Mathematiques de Roumanie -2022. -Vol. 65 (113), No. 10. P. 341-358.

– Bogomolov F., Déev R., Verbitsky M. Sections of Lagrangian fibrations on holomorphically symplectic manifolds and degenerate twistorial deformations// Advances in Mathematics -2022. -Vol. 405, No. 108479. P. 1-13.

– Amerik E., Verbitsky M. MBM classes and contraction loci on low-dimensional hyperkähler manifolds of $K3^{[n]}$ type// Algebraic Geometry -2022. -Vol. 9, No.3. P. 252-265.

– Lvovski S. On non-projective small resolutions//European Journal of Mathematics -2022. -Vol. 8, No.2. P. 551-560.

– Ornea L., Verbitsky M. Supersymmetry and Hodge theory on Sasakian and Vaisman manifolds//Manuscripta Mathematica -2022. -P.1-30.

- Kondyrev G., Prikhodko A. Holomorphic Atiyah-Bott Formula for Correspondences//Arnold Mathematical Journal -2022. -Vol. 8, No.3-4. P. 497-511.
- Bogomolov F., Husemöller, D. Geometric properties of curves defined over number fields// European Journal of Mathematics -2022. -Vol. 8, No.3. P. 792-805.
- Avdeev R.S., Zhgoon V.S. On the Existence of B -Root Subgroups on Affine Spherical Varieties//Doklady Mathematics -2022.-Vol.105, No.2. P. 51-55
- Bogomolov F., Kurnosov N., Kuznetsova A., Yasinsky E. Geometry and automorphisms of non-Kähler holomorphic symplectic manifolds// International Mathematics Research Notices -2022. -Vol. 2022, No. 16. P. 12302-12341.

Препринты лаборатории

- Kuznetsov A., Shinder E. Homologically finite-dimensional objects in triangulated categories [Электронный ресурс] // Cornell University. Series arXiv "math". 2022.arXiv:2211.09418
- Kuznetsov A., Prokhorov Y. On higher-dimensional del Pezzo varieties [Электронный ресурс] // Cornell University. Series arXiv "math". 2022. arXiv:2206.01549
- Timorin V., Oversteegen L., Blokh A. Immediate renormalization of complex polynomials [Электронный ресурс] // Cornell University. Series arXiv "math". 2021. arXiv: 2102.10325
- Loginov K. Jordan property for groups of bimeromorphic self-maps of complex manifolds with large Kodaira dimension//Cornell University. Series arXiv "math". 2022. arXiv: 2209.12032
- Spiridonov I. The top homology group of the genus 3 Torelli group// Cornell University. Series arXiv "math". 2022. arXiv: 2208.10326
- Ornea L., Verbitsky M., Vuletescu V. Do products of compact complex manifolds admit LCK metrics? // Cornell University. Series arXiv "math". 2022. arXiv: 2211.08111
- Ornea L., Verbitsky M. Algebraic cones of LCK manifolds with potential // Cornell University. Series arXiv "math". 2022. arXiv: 2208.05833
- Ornea L., Verbitsky M. A Calabi-Yau theorem for Vaisman manifolds // Cornell University. Series arXiv "math". 2022. arXiv: 2206.08808
- Ornea L., Verbitsky M. Mall bundles and flat connections on Hopf manifolds // Cornell University. Series arXiv "math". 2022. arXiv: 2205.14062

- Ornea L., Verbitsky M. Non-linear Hopf manifolds are locally conformally Kahler// Cornell University. Series arXiv "math". 2022. arXiv: 2202.12398
- Ornea L., Verbitsky M. Lee classes on LCK manifolds with potential // Cornell University. Series arXiv "math". 2022. arXiv: 2112.03363 12. Amerik E.,Verbitsky M. Parabolic automorphisms of hyperkahler manifolds // Cornell University. Series arXiv "math". 2022. arXiv: 2112.01951
- Vikulova A. Smooth l-Fano weighted complete intersections//Cornell University. Series arXiv "math". 2022. arXiv:2205.06613
- Guseva L. On the Derived Category of the Cayley Grassmannian / Cornell University. Series arXiv "math". 2022. arXiv:2206.14525
- Guminov S., Zhdanovskiy I. On equivalence classes of homotopes of algebras and trilinear form //Cornell University. Series arXiv "math". 2022. arXiv:2112.15436