Правительство Российской Федерации
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
«ВЫСШАЯ ШКОЛА ЭКОНОМИКИ»
(НИУ ВШЭ)

УДК 514.74
Рег. № НИОКТР 123020800051-0
Рег. № ИКРБС

УТВЕРЖДАЮ
Проректор НИУ ВШЭ,
канд. биол. наук
______________ А.В. Балышев
«_____» ___________ 2023 г.

ОТЧЕТ
О НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОЙ РАБОТЕ

МОТИВНАЯ, КАТЕГОРНАЯ И КЛАССИЧЕСКАЯ АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ, И ЕЁ СВЯЗИ С ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИЕЙ СПЕЦИАЛЬНЫХ МНОГООБРАЗИЙ

(заключительный)

Руководитель НИР,
зав. лаб., д-р физ.-мат. наук, проф. РАН, PhD ______________ Д.Б. Каледин

Москва 2023

РЕФЕРАТ

Отчет 81 с., 1 кн., 55 источн., 2 прил.

ПРОИЗВОДНЫЕ КАТЕГОРИИ, КРИСТАЛЛИЧЕСКИЕ КОГОМОЛОГИИ, ЦИКЛИЧЕСКАЯ КАТЕГОРИЯ, БЕСКОНЕЧНОМЕРНЫЕ АЛГЕБРЫ ЛИ, МНОГООБРАЗИЯ ФАНО, ПРОСТРАНСТВО МОДУЛЕЙ, РАЦИОНАЛЬНЫЕ КРИВЫЕ, ГОЛОМОРФНО СИМПЛЕКТИЧЕСКОЕ МНОГООБРАЗИЕ

Объектами исследования являются

-геометрическая теория представлений,

-арифметическая алгебраическая геометрия,

-бесконечномерные алгебры Ли,

-гомологические и мотивные методы в некоммутативной геометрии,

-производные категории,

-классическая геометрия,

-гиперкэлеровы многообразия и специальные многообразия.

Цель проекта: исследования в области алгебраической геометрии и пограничных с ней областях – теории чисел, дифференциальной и комплексной геометрии, геометрическом анализе.

Результаты носят теоретический характер и являются существенно новыми. Возможны приложения к теоретической физике, дифференциальной геометрии, теории чисел и задачам классификации комплексных многообразий.

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

За отчетный период (2023 год) Лаборатория алгебраической геометрии и ее приложений организовала и/или приняла участие в организации двух международных конференций:

– Международная конференция “Бирациональная геометрия”, организаторы Юрий Прохоров и Константин Шрамов, формат проведения – онлайн, 35 участников.

– Международная конференция “Алгебра и геометрия”, 25.07.2023-29.07.2023, организаторы Никон Курносов и Константин Шрамов, более 80 участников, формат проведения – оффлайн.

В 2023 году вновь была успешно проведена традиционная летняя школа “Алгебра и геометрия” для аспирантов и продвинутых студентов. Школа была совмещена с конференцией, и проводилась в период с 25.07.2022 по 29.07.2022, уже в двенадцатый раз. В первые 10 лет школа проводилась на базе Ярославского государственного педагогического университета им. К. Д. Ушинского, но в 2022 году она была перенесена в г. Суздаль, и теперь проводится на базе ГТРК “Суздаль”. В школе приняли участие примерно 70 слушателей, причем отнюдь не только из Москвы и С.-Петербурга – география слушателей включает в себя, например, Адыгейский Государственный Университет, Высшую Нормальную Школу в Париже, Новосибирский Государственный Университет, Пекинский Университет. Среди докладчиков были такие замечательные математики, как А. Бейлинсон (Университет Чикаго) и Г. Михалкин (Женевский Университет).

В связи со сложной международной обстановкой, в 2023 году вновь были отменены визиты ученых – коллег лаборатории из мировых научных и учебных центров; многие, однако, принимали участие в регулярном научно-исследовательском семинаре лаборатории в режиме онлайн. Мы по-прежнему имеем некоторое количество международных аффилированных сотрудников, причем в 2023 удалось привлечь в таком качестве и новых коллег.

В течение года продолжал работу научно-исследовательский семинар лаборатории. Руководитель семинара – Никон Курносов. Также продолжал работу студенческий семинар лаборатории “Геометрические структуры на многообразиях”. Вся информация о семинарах публикуется на странице лаборатории на портале НИУ ВШЭ (ag.hse.ru), анонсы также рассылались по рассылке факультета математики и лаборатории.

По результатам исследований в 2023 году сотрудниками лаборатории было опубликовано 20 статей в журналах, индексируемых в базах данных Scopus и Web of Science, из них в журналах квартиля Q1/Q2 – 10.

Несмотря на сложную международную ситуацию, сотрудники лаборатории принимали участие в международных конференциях, семинарах, воркшопах, где выступили более чем с 25 докладами, в которых представили результаты своих исследований в лаборатории. В частности, сотрудники лаборатории активно участвовали в конференциях "Homological Mirror Symmetry" (г. Стони-Брук, США), "Real and complex dynamical systems" (г. Цахкадзор, Армения), а также в целом ряде больших конференций в России, включая Третью Конференцию Математических центров России в октябре 2023 года в г. Майкоп.

Стажер лаборатории П. Осипов успешно защитил кандидатскую диссертацию на тему "Геометрические структуры на плоских многообразиях", а стажер лаборатории Л. Гусева успешно защитила кандидатскую диссертацию на тему "Строение производных категорий и геометрия многообразий Фано в грассманианах". Предзащита стажера лаборатории Ю. Горгинян состоится 30 ноября 2023 г.

Стажер лаборатории А. Викулова – один из победителей престижного конкурса "Молодая математика России", проходившего в конце декабря 2022 года. Наши стажеры также активно участвуют в другом весьма престижном конкурсе для молодых математиков – а именно, в конкурсе студенческих работ имени А. Мебиуса. В 2023 году финал конкурса пройдет в декабре; стажер лаборатории Анастасия Викулова – в числе финалистов.

В 2023 году заведующий лабораторией Дмитрий Каледин завершает работу над проектом РНФ "Алгебраическая К-теория, мотивные структуры и циклические гомологии", проект реализуется на базе факультета математики НИУ ВШЭ, к работе над проектом в разные годы были привлечены ряд стажеров Лаборатории.

Сотрудник лаборатории М. Вербицкий в 2023 году закончил многолетнюю работу над фундаментальной монографией по геометрии локально конформно кэлеровых многообразий, совместно с Л. Орнеа; монография принята к печати в издательстве Birkhäuser.

Сотрудники лаборатории продолжали вести активную педагогическую работу, ими были прочитаны курсы на факультете математики НИУ ВШЭ, в Независимом

Московском Университете, НОЦ МИАН, Сколтехе, программе Math in Moscow, на школах для студентов, аспирантов и молодых ученых, проводимых как лабораторией, так и крупными международными научными и учебными центрами. Часть курсов была прочитана впервые.

В рамках программы факультета математики по привлечению лучших аспирантов к преподаванию, на факультете крайней успешно работает наш стажер Анна Тутубалина; разработанный и прочитанный ею курс “Симметрические функции” вошел в общефакультетский пул (3 и 4 модуль). Стажер лаборатории Денис Терешкин разработал и прочел спецкурс “Дополнительные главы гомологической алгебры”.

Сотрудниками лаборатории были получены значительные научные результаты по основным темам, заявленным на 2023 год:

– Производные категории,

– Гомологические и мотивные методы в некоммутативной геометрии,

– Классическая геометрия,

– Специальные многообразия.

Результаты работ по этим темам составляют содержание настоящего отчета.

1 Производные категории

1.1 Гладкие и собственные семейства триангулированных категорий

В работе [1] сотрудника лаборатории А. Кузнецова, совместной с Е. Шиндером построены гладкие и собственные семейства триангулированных категорий, специальный слой которых является нетривиальной компонентой производной категории гладкого трехмерного многообразия дель Пеццо степени d, где $1 \leq d \leq 5$ (точнее говоря, при $d = 1$ рассматривается малое разрешение 1-нодального многообразия дель Пеццо степени 1), а все остальные слои эквивалентны нетривиальным компонентам производных категорий гладких трехмерных многообразий Фано индекса 1 и рода $g = 2d + 2$. Для построения такого семейства была использована техника категорного впитывания, разработанная в 2022 году в [2].

Опишем конструкцию подробнее. Рассмотрим гладкое многообразие дель Пеццо $Y = Y_d$ степени d и гладкую рациональную кривую $C = C_{d-1}$ на нем (как было отмечено выше, при $d = 1$ в качестве Y следует рассмотреть малое разрешение 1-нодального многообразия дель Пеццо степени 1, а в качестве кривой C — исключительную кривую). Оказывается, раздутие $\mathrm{Bl}_C(Y)$ является многообразием почти Фано, то есть его антиканоническое отображение является малым бирациональным стягиванием. Точнее говоря, антиканоническое отображение

$$\pi\colon \tilde{Y} := \mathrm{Bl}_C(Y) \to \tilde{Y}_{\mathrm{can}} =: X$$

стягивает единственную гладкую рациональную кривую $\tilde{L} \subset \tilde{Y}$ — собственный прообраз единственной прямой $L \subset Y$ являющейся 2-секущей для кривой C, причем точка

$$x_0 := \pi(\tilde{L}) \in X$$

является обыкновенной двойной точкой (нодом), а вне x_0 многообразие X гладко. Таким образом, многообразие X является нефакториальным (и даже максимально нефакториальным) 1-нодальным многообразием. Более того, несложно проверить, что X — многообразие Фано индекса 1 и рода $g = 2d + 2$.

Рассмотрим произвольное сглаживание $f\colon \mathscr{X} \to B$ многообразия X, то есть плоский собственный морфизм на гладкую кривую B с отмеченной точкой $o \in B$, такой что

– центральный слой $\mathscr{X}_o$ морфизма f изоморфен X;

– вне центрального слоя морфизм f гладок;

– тотальное пространство $\mathscr{X}$ гладко.

Рассмотрим также $\mathbb{P}^{\infty,2}$-объект в центральном слое

$$\mathrm{P}_X := \pi_* \mathscr{O}_{\tilde{Y}}(E-H),$$

где E — исключительный дивизор раздутия $\tilde{Y} \to Y$, а H — обратный образ обильной образующей группы Пикара Y. Обозначим через $i\colon X \to \mathscr{X}$ вложение центрального слоя. Согласно основному результату статьи [2] объект $i_* \mathrm{P}_X$ на $\mathscr{X}$ является исключительным. В частности, он дает B-линейное полуортогональное разложение

$$\mathbf{D}^{\mathrm{b}}(\mathscr{X}) = \langle i_* \mathrm{P}_X, \mathscr{D} \rangle,$$

в котором компонента $\mathscr{D}$ является гладкой и собственной над B, а центральный слой $\mathscr{D}_o$ этой компоненты отождествляется с ортогональным дополнением в производной категории многообразия $\tilde{Y}$ к исключительной паре, состоящей из линейного расслоения $\mathscr{O}_{\tilde{Y}}(E-H)$ и его отражения относительно сферического объекта $\mathscr{O}_{\tilde{L}}(-1)$.

Затем, пользуясь бирациональным морфизмом между многообразиями $\tilde{Y}$ и Y удается построить полуортогональное разложение

$$\mathscr{D}_o = \langle \mathscr{B}_Y, \mathscr{O}_X, \mathscr{U}_X^{\vee} \rangle,$$

где $\mathscr{B}_Y$ — нетривиальная компонента производной категории Y, а $\mathscr{U}_X$ — исключительное расслоение на X ранга 2, определяемое из точной последовательности

$$0 \to \pi^* \mathscr{U}_X^{\vee} \to \mathscr{O}_{\tilde{Y}}(H)^{\oplus 2} \to \mathscr{O}_E(dF) \to 0,$$

где $F \in \mathrm{Pic}(E)$ — класс слоя проекции $E \to C$. Пользуясь исключительностью расслоения $\mathscr{U}_X$ несложно проверить, что после замены базы на подходящую этальную окрестность точки o в B найдется расслоение $\mathscr{U}_{\mathscr{X}}$ на $\mathscr{X}$, исключительное над B и такое что $i^* \mathscr{U}_{\mathscr{X}} \cong \mathscr{U}_X$. Это расслоение позволяет построить B-линейное полуортогональное разложение

$$\mathscr{D} = \langle \mathscr{A}_{\mathscr{X}}, f^* \mathbf{D}^{\mathrm{b}}(B) \otimes \mathscr{O}_{\mathscr{X}}, f^* \mathbf{D}^{\mathrm{b}}(B) \otimes \mathscr{U}_{\mathscr{X}}^{\vee} \rangle,$$

а категория $\mathscr{A}_{\mathscr{X}}$, определяемая им, будет обладать необходимыми свойствами — она гладкая и собственная над B, ее центральный слой эквивалентен $\mathscr{B}_Y$, а слой над точкой $b \neq o$ эквивалентен $\mathscr{A}_{\mathscr{X}_b}$ — нетривиальной компоненте в производной категории гладкого многообразия $\mathscr{X}_b$ рода $2d+2$.

1.2 Производные категории ортогональных грассманианов

За отчетный период, сотрудником лаборатории Л. Гусевой были изучены производные категории ортогональных грассманианов $\mathrm{OGr}(k,2n)$. Ортогональный грассманиан $\mathrm{OGr}(k,2n)$ параметризует k-мерные изотропные подпространства в векторном пространстве V_{2n} размерности $2n$, снабженном невырожденной симметрической билинейной формой.

Более точно, на ортогональных грассманианах $\mathrm{OGr}(k,2n)$ были построены некоторые классы точных комплексов, похожих на так называемые ступенчатые комплексы на обычных грассманианах $\mathrm{Gr}(k,2n)$. Пусть

$$\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_h) \in \mathrm{Y}_{h,w}$$

— диаграмма Юнга высоты h и ширины w, такая что $h+w=n-1$. Обозначим за $\mathscr{U}$ ограничение на ортогональный грассманиан тавтологического расслоения с обычного грассманиана $\mathrm{Gr}(k,2n)$, за $\Sigma^\beta\mathscr{U}$ функтор Шура веса β от тавтологического расслоения $\mathscr{U}$ и за $\mathbf{S}^-_{2^{n-1}}$ и $\mathbf{S}^+_{2^{n-1}}$ спинорные представления группы $\mathrm{Spin}(V_{2n})$, соответствующие фундаментальным весам ω_{n-1} и ω_n. Для двух диаграмм Юнга $\gamma \subseteq \beta$ обозначим за $\Sigma^{\beta/\gamma}$ соответствующий косой функтор Шура. Кроме того для целого числа ν, такого что $n \geq \nu \geq 0$ введем следующее обозначение

$$V^\nu := \bigoplus_{i \leq \nu/2} \Lambda^{\nu-2i} V_{2n}.$$

Л. Гусевой были построены следующие точные комплексы на ортогональных грассманианах $\mathrm{OGr}(h,V)$:

$$\begin{aligned} 0 \to \Sigma^{\lambda_2,\dots,\lambda_h,1-n}\mathscr{U}(-1) \to \dots \to V^{n-1} \otimes \Sigma^{\lambda_2,\dots,\lambda_h}\mathscr{U}(-1) \to \\ \to \bigoplus_i \mathbf{S}^{\pm}_{2^{n-1}} \otimes \Sigma^{(\lambda_2,\dots,\lambda_h)/(1^i)-\omega_{n-1}}\mathscr{U} \oplus \bigoplus_i \mathbf{S}^{\mp}_{2^{n-1}} \otimes \Sigma^{(\lambda_2,\dots,\lambda_h)/(1^i)-\omega_n}\mathscr{U} \to \dots \\ \to V^{\nu_w} \otimes \Sigma^{\lambda^{(\lambda_1)}}\mathscr{U} \to \dots \to V^{\nu_1} \otimes \Sigma^{\lambda^{(1)}}\mathscr{U} \to \Sigma^\lambda\mathscr{U} \to 0, \end{aligned}$$

где ν_i и $\lambda^{(\cdot)}$ определяются так же, как и для обычных ступенчатых комплексов на $\mathrm{Gr}(h,2n)$.

В случае, когда $k=n$, то есть для $\mathrm{OGr}(n,2n)$ были изучены наборы, двойственные к наборам, построенным Кузнецовым и Полищуком в статье [3]. Наборы Кузнецова–Полищука на $\mathrm{OGr}(n,2n)$ состоят из (подкрученных на линейные расслоения) блоков

$$\langle \mathscr{E}^\lambda \mid \lambda \in \mathrm{Y}_{i,n-i-2} \rangle$$

для $i=0,\dots,n-2$, где объекты $\mathscr{E}^\lambda$ для диаграммы Юнга $\lambda \in \mathrm{Y}_{i,n-i-1}$, вписанной в прямоугольник высоты i и ширины $n-i-1$, определяются как правые перестройки расслоений $\Sigma^\lambda \mathscr{U}^\vee$ в эквивариантной категории. Обозначим за $\mathscr{F}^\lambda$ двойственное к $\mathscr{E}^\lambda$ расслоение. Тогда доказанное утверждение звучит следующим образом:

Теорема 1.1. Пусть $0 \le h \le n-2$. Тогда исключительный набор

$$\langle \mathscr{F}^\mu \mid \mu \in \mathrm{Y}_{n-h-2,h} \rangle$$

является двойственным слева набором к

$$\langle \mathscr{E}^\lambda \mid \lambda \in \mathrm{Y}_{h,n-h-2} \rangle.$$

То есть для диаграммы $\mu \in \mathrm{Y}_{n-h-2,h}$ имеем $\mathscr{F}^\mu \in \langle \mathscr{E}^\lambda \mid \lambda \in \mathrm{Y}_{h,n-h-2} \rangle$ и

$$\mathrm{Ext}^\bullet(\mathscr{E}^\lambda, \mathscr{F}^\mu) = \begin{cases} \Bbbk[-|\lambda|], & \text{если } \mu = \lambda^T; \\ 0, & \text{если } \mu \in \mathrm{Y}_{n-h-2,h}, \text{ и } \mu \neq \lambda^T. \end{cases}$$

Кроме того были построены следующие резольвенты расслоений $\Sigma^\lambda \mathscr{U}^\vee$ на $\mathrm{OGr}(n,2n)$:

$$0 \to \bigoplus_{\mu \in Q_1(h(h-1))} \mathscr{E}^{\lambda/\mu} \to \ldots \to \bigoplus_{\mu \in Q_1(4)} \mathscr{E}^{\lambda/\mu} \to \bigoplus_{\mu \in Q_1(2)} \mathscr{E}^{\lambda/\mu} \to \mathscr{E}^\lambda \to \Sigma^\lambda \mathscr{U}^\vee \to 0,$$

где $Q_1(m)$ обозначает множество диаграмм Юнга λ, состоящих из m ячеек, таких что в фробениусовой записи $\lambda = (a_1,\dots,a_r|b_1,\dots,b_r)$ выполнено равенство $b_i = a_i+1$ для всех i.

Кроме того, по итогам работы, проделанной в 2022 году, была опубликована статья [4], основным результатом которой является построение полного лефшецева набора на нулях общей 4-формы $\lambda \in \Lambda^4 V_7^\vee$ в грассманиане $\mathrm{Gr}(3,7)$ и вычисление вычетной категории этого набора.

1.3 Конструктивные и превратные пучки на торических многообразиях и их производные категории

Рассмотрим алгебраическое многообразие X с алгебраической и хорошей стратификацией Σ. Довольно большой объём литературы посвящён явному описанию категорий превратных пучков на многообразии X, превратных относительно заданной стратификации Σ. Тем не менее, в больших размерностях конкретные результаты получены только для небольшого числа многообразий, например, для грассманианов [5], стратификаций аффинного пространства гиперплоскостями [6] и гладких торических многообразий [7]. При этом зачастую, например, в двух последних вышеупомянутых работах, описание получается в виде категории представлений некоторого колчана с соотношениями и некоторыми дополнительными условиями обратимости.

Наблюдение А. Бондала и Т. Логвиненко заключается в том, что для стратификации комплексной прямой $\mathbb{C}$ одной точкой 0 категория превратных пучков оказывается эквивалентна категории конечномерных модулей над алгеброй эндоморфизмов тривиального расслоения ранга 2 над $\mathbb{C}^\times$, сохраняющих прямую в слое над точкой 1. Их гипотеза состояла в том, что аналогичное утверждение должно быть верно для любого гладкого торического многообразия: категория превратных пучков конструктивных относительно стратификации орбитами тора на гладком торическом многообразии размерности n должна быть эквивалентна категории конечномерных модулей над алгеброй эндоморфизмов некоторого тривиального расслоения над $(\mathbb{C}^\times)^n$, сохраняющих некоторые подпространства в слоях над некоторыми подмногообразиями, и эти подпространства и подмногообразия полностью описываются веером, соответствующим X.

Эта гипотеза несколько напоминает когерентно-конструктивное соответствие: с одной стороны мы имеем превратные пучки, то есть что-то конструктивное, с другой — модули над когерентным пучком некоммутативных алгебр над алгебраическим тором.

Основной результат работы сотрудника лаборатории С. Гуминова в этом году — доказательство этой гипотезы. Случай аффинных гладких торических многообразий напрямую получается из результата для $\mathbb{C}$, а стандартная машинерия монадического спуска позволяет перейти к не аффинному случаю. Это рассуждение также позволяет исправить ошибку, обнаруженную в работе Д. Дюпон.

Кроме категории превратных пучков, интересна и её производная категория. Пусть $D^b_{\mathrm{cons}}(X)$ — подкатегория комплексов с конструктивными (относительно некоторой стратификации) когомологиями в производной категории пучков. Тогда категории конструктивных пучков $\mathrm{Cons}(X)$ и превратных пучков $\mathrm{Perv}(X)$ являются сердцевинами t-структур. Из работ Нори [8] и Бейлинсона [9] известно, что функторы реализации задают эквивалентности производных категорий от $\mathrm{Cons}(X)$ и $\mathrm{Perv}(X)$ с $D^b_{\mathrm{cons}}(X)$. Если же зафиксировать некоторую стратификацию Σ, то оба эти результата обычно становятся неверны.

Сотрудником лаборатории установлено, что на гладком торическом многообразии производные категории от категорий конструктивных и превратных пучков относительно стратификации орбитами также эквивалентны производной категории пучков с конструктивными когомологиями. В конструктивном случае результат получается работой конкретно с многообразиями вида $\mathbb{C}^n \times (\mathbb{C}^\times)^l$. В превратном случае это, по большому счёту, получается из работы Бейлинсона: его доказательство в случай варьируемой стратификации использует последовательное вырезание достаточно хороших открытых множеств из носителей пучков, и достаточно проследить, когда в этой процедуре можно в качестве достаточно хороших открытых множеств брать целые страты.

Текст работы с описанными выше результатами готовится к публикации. В дальнейшем ещё предстоит проинтерпретировать полученные результаты. В частности, возможно, более правильная категория для изучения — не категория конечномерных модулей, а категория модулей, конечно порождённых над центром алгебры, то есть над алгеброй полиномов Лорана. Также интересно было бы попытаться обобщить часть результатов на негладкие торические многообразия. В частности, результат о производной категории превратных пучков верен и в этом случае.

1.4 Последовательности квадратичных вычетов и K3 поверхности

Сотрудники лаборатории также нашли доказательство последнего результата Л. В. Гончаровой о квадратичных вычетах и невычетах по модулю простого числа p. Найденное доказательство обнаруживает неожиданную взаимосвязь между количеством точек на эллиптической кривой с комплексным умножением и на K3 поверхности над полем из p элементов. Ниже приводится точная формулировка результата Гончаровой и соответствующего геометрического результата о K3 поверхности.

Пусть p — нечётное простое число. Рассмотрим последовательность 1, 2, ..., $p-1$. Заменим каждое число i в последовательности буквой R, если i — квадратичный вычет по модулю p, и буквой N иначе. Обозначим через W_p получившееся слово.

Определение 1.1. Пусть S — слово длины $\ell \leq p-1$, состоящее только из букв R и N. Определим $n_p(S)$ как количество подслов в W_p, которые совпадают с S, и при этом образованы ℓ последовательными элементами слова W_p. Для удобства будем обозначать через R^ℓ слово

$$\underbrace{R\ldots R}_{l}.$$

Например, если $p = 17$, то

$$W_p = RRNRNNNRRNNNRNRR = R^2NRN^3R^2N^3RNR^2.$$

Тогда для $\ell = 3$ получим $n_p(S) = 2$ для всех слов длины S длины 3 кроме слова $S = R^3$. Для него $n_p(R^3) = 0$.

Для произвольного p и $\ell = 2$ несложно получить явные формулы для $n_p(S)$. Для $\ell = 3$ и $p = 4k+1$ формулы уже не столь явные и используют следующую функцию $J(k) \in 2\mathbb{Z}$:

$$J(k) = \sum_{i=1}^{4k-2} \left(\frac{i(i+1)(i+2)}{p} \right).$$

Функцию $J(k)$ легко связать с представлением p в виде суммы двух квадратов (одним из этих двух квадратов будет $\frac{J(k)^2}{4}$). В частности, число $n_p(S)$ можно выразить через количество точек на эллиптической кривой

$$y^2 = x^3 - x$$

с комплексным умножением над полем $\mathbb{F}_p$. Этот результат был получен в диссертации Якобшталя, и тесно связан с последней записью в дневнике Гаусса. Для $\ell = 4$ также можно выразить $n_p(S)$ через количество точек на некоторых эллиптических кривых, но не на всех из них есть комплексное умножения, так что ситуация ещё сложнее, чем при $\ell = 3$, в частности, нет формулы для $n_p(R^4)$ (более подробно этот вопрос обсуждается в [10, Section 3]).

Можно рассмотреть другую задачу о четвёрках квадратичных вычетов (по-видимому, впервые эту задачу стала изучать Лидия Васильевна Гончарова). Вместо того, чтобы искать количество последовательных четвёрок квадратичных вычетов, можно искать количество четвёрок (не обязательно последовательных), попарные разности которых тоже квадратичные вычеты.

Более общо, если (a_1, a_2, a_3, a_4) — четвёрка попарно различных вычетов по модулю p, и $p = 4k+1$, то мы можем сопоставить ей граф Γ_A по следующему правилу. Рассмотрим четыре вершины $v_1, \ldots, v_4$, и соединим v_i и v_j ребром, если разность $a_i - a_j$ — квадратичный вычет по модулю p. Мы отождествляем четвёрки, полученные друг из друга перестановкой и/или сдвигом на один и тот же вычет.

Определение 1.2. Пусть Γ — простой граф с четырьмя вершинами. Определим $n_p(\Gamma)$ как количество всех таких четвёрок A, что Γ_A топологически эквивалентен графу Γ.

Всего имеется 11 топологических типов простых графов с четырьмя вершинами, поэтому есть 11 чисел $n_p(\Gamma)$ для каждого p. Гончарова получила для них формулы, используя в качестве ингредиента ту же функцию $J(k)$, которая возникает в задаче о тройках.

Теорема 1.3 (Гончарова). Пусть $p = 4k+1$. Все функции $n_p(\Gamma)$ (рассматриваемые как функции от k) можно явно выразить как многочлены от k и $d(k)$, где

$$d(k) = \frac{J(k)^2 - 4}{32}.$$

В частности, для полного графа $\Gamma = K_4$ верна формула:

$$n_p(K_4) = \frac{k(k-1)(k-4) + 2kd(k)}{24}.$$

Мы не смогли восстановить элементарное доказательство Гончаровой по её записям, однако мы нашли алгебро-геометрическое доказательство. Функция $n_p(K_4)$ выражается через количество точек на K3 поверхности, которая бирационально изоморфна поверхности $z^2 = (x^2y^2+1)(x^2+y^2)$. Поэтому теорема Гончаровой следует из такого более геометрического утверждения.

Теорема 1.4 ([10, Theorem 3.4]). Рассмотрим аффинную поверхность X_a в трёхмерном пространстве, заданную уравнением:

$$z^2 = (x^2y^2+1)(x^2+y^2), \tag{1.4.1}$$

и плоскую аффинную кривую E_a, заданную уравнением:

$$y^2 = x^3 - x. \tag{1.4.2}$$

Пусть M_p и N_p, соответственно, обозначают количество решений уравнений (1.4.1) и (1.4.2) по модулю p (в частности, $N_p = p \pm J(k)$). Тогда M_p и N_p связаны следующим образом:

$$M_p = (p+1)^2 + (N_p - p)^2 + 1 = (p+1)^2 + J(k)^2 + 1. \tag{1.4.3}$$

Интересно, что линейные члены с $J(k)$ в соотношении (1.4.3) не фигурируют (в промежуточных вычислениях при доказательстве они возникают, но взаимно сокращаются). Было бы интересно найти более геометрическое объяснение этому факту. Предварительная версия текста с доказательством выложена как препринт [10], в настоящий момент мы дорабатываем более полную версию для подачи в журнал.

1.5 Полуторические вырождения многообразий Шуберта и пайп дримы в типах C и D

В отчетный период, доработан и подан в журнал препринт [11] с конструкцией простого геометрического митоза, использующего идеи статьи [12]. В недавнем препринте [13] дан ответ на один из вопросов, поставленных в [11], а именно построены пайп дримы в типе C, реализующие знаковые перестановки. С алгебро-геометрической точки зрения эти пайп дримы для данного элемента w в группе Вейля кодируют торические многообразия, возникающие в полуторическом вырождении многообразия Шуберта X_w, связанном с многогранником Гельфанда-Цетлина в типе C. Интересно было бы обобщить эти конструкции на тип D. По мотивам вышеприведённых препринтов подготовлен и прочитан миникурс “Митоз в исчислении Шуберта” на осенней школе-конференции института Эйлера по алгебре, проходившей с 1 по 5 ноября 2023 г. в Санкт-Петербурге.

1.6 Применение категорных и алгебро-геометрических конструкций к различным вопросам алгебры и квантовой теории информации

Одно из направлений исследований в 2023 году было посвящено исследованиям гомотопов ассоциативных и неассоциативных алгебр.

Напомним, что общее понятие гомотопии алгебр (вообще говоря неассоциативных) можно понимать как обобщение гомоморфизма. А именно, пусть есть две алгебры $(A,\star)$ и $(B,\cdot)$, тогда гомотопия — это три линейных отображения $f_1, f_2, f_3 : A \to B$, таких что

$$f_1(a \star a') = f_2(a) \cdot f_3(a')$$

для любых $a, a' \in A$. В этом случае B назовем гомотопом A. Если потребовать биективность $f_i, i = 1,2,3$, то гомотопия называется изотопией.

Частным случаем гомотопа является так называемый x-гомотоп: зафиксируем $x \in A$, тогда в алгебре A можно ввести операцию умножения двумя разными способами:

$$a \cdot_x^L a' = (a \star x) \star a'$$

(так называемый левый гомотоп) и

$$a \cdot_x^R a' = a \star (x \star a')$$

(правый гомотоп). Очевидно, в случае ассоциативных алгебр левые и правые гомотопы совпадают.

Отметим связь гомотопов ассоциативных алгебр с так называемой склейкой абелевых категорий. В 1982 году в статье Бейлинсона, Бернштейна и Делиня [14] при изучении превратных пучков, было введено понятие “склейки” триангулированных категорий. Далее, в 1986 году Макферсон и Вилонен рассмотрели “склейку” абелевых категорий. Следуя Псарудакису ([15]) введем понятие "склейки" (recollement) абелевых категорий.

А именно, "склейка" — это тройка абелевых категорий $(\mathscr{A},\mathscr{B},\mathscr{C})$ и набор функторов: $i:\mathscr{A}\to\mathscr{B}$, $e:\mathscr{B}\to\mathscr{C}$ и сопряженные им: $q:\mathscr{B}\to\mathscr{A}$, $p:\mathscr{B}\to\mathscr{A}$ и $l:\mathscr{C}\to\mathscr{B}$ и $r:\mathscr{C}\to\mathscr{B}$, удовлетворяющие следующим условиям: функторы i,l,r - строго точные и образ i совпадает с ядром e.

В частности, при достаточно естественных условиях на абелевы категории, соответствующие ограниченные производные категории тоже будут удовлетворять условиям "склейки" триангулированных категорий. Это позволило существенно упростить проверку условий "склейки" и получить оценки гомологических размерностей категории $\mathscr{B}$ через $\mathscr{A}$ и $\mathscr{C}$. Фактически, "склейка" абелевых категорий является обобщением следующей известной ситуации: пусть у нас есть алгебра R и t — идемпотент в R. Тогда $\mathscr{A}=\mathrm{R/RtR-Mod}$, $\mathscr{B}=\mathrm{R-Mod}$ и $\mathscr{C}=\mathrm{tRt-Mod}$.

Подобная ситуация встречается и при изучении гомотопов ассоциативных алгебр. А именно, рассмотрим ассоциативную алгебру с единицей R и фиксируем элемент $x\in R$. Как мы уже знаем, можно ввести новую операцию умножения на пространстве R:

$$r_1\cdot_x r_2 = r_1xr_2.$$

Новая алгебра может не содержать единицу, поэтому добавим ее внешним образом — получим алгебру $\widehat{R}_x$.

В работе сотрудника лаборатории И. Ждановского [16] было показано, что для всякой ассоциативной k-алгебры R категория модулей гомотопа $\mathrm{\widehat{R}_x-Mod}$ является "склейкой" категорий $\mathrm{R-Mod}$ и $\mathrm{k-Mod}$ в случае "правильного" выбора элемента x. Условия "правильного" выбора следующие: $RxR=R$ и R как левый и правый $\widehat{R}_x$-модуль является проективным. Такой выбор элемента называется хорошо темперированным. В этом случае есть естественные оценки на глобальную гомологическую размерность $\mathrm{\widehat{R}_x-Mod}$ через глобальную размерность $\mathrm{R-Mod}$.

С точки зрения исследования гомотопов довольно естественными являются такие вопросы:

- сколько гомотопов (с точностью до изотопии) имеет общая неассоциативная алгебра?
- Есть ли ассоциативная алгебра, имеющая бесконечное число неизоморфных x-гомотопов?

Ответы на эти вопросы были получены в совместной работе с Сергеем Гуминовым ([17], работа подана в Journal of Algebra and its applications). А именно, в случае первого были изучены детерминантные гиперповерхности, естественно появляющиеся при рассмотрении умножения в алгебре как тензора. Были переформулированы условия изотопичности алгебр в терминах этих гиперповерхностей, и в результате исследования ответ на первый вопрос такой: начиная с размерности 4, у общей неассоциативной алгебры бесконечное число неизотопных гомотопов.

Далее, в случае ассоциативных алгебр удалось построить пример 13-мерной алгебры, имеющей бесконечное число неизоморфных x-гомотопов. Отметим, что гомотопы ассоциативных алгебр естественно появляются в связи с различными задачами математики и физики, среди которых классификация конфигураций прямых в гильбертовом пространстве, описание ортогональных разложений простых алгебр Ли, дискретный гармонический анализ на графах, классификация взаимно несмещенных базисов, имеющая большое применение в квантовой механике и квантовой теории информации, описание превратных пучков на стратифицируемых топологических пространствах, теория представлений квазинаследственных алгебр.

Вторым объектом исследования являлись приложения теории гомотопов, алгебраической геометрии и теории представлений к вопросам квантовой теории информации. Вопрос в самой квантовой теории информации звучит так. Пусть есть две полные проекторнозначные меры в n-мерном пространстве, соответственно, есть два набора n различных квантовых состояний, соответствующих каждой мере:

$$|\psi_i>, \quad i=1,...,n \qquad \text{и} \qquad |\phi_i>, \quad i=1,...,n,$$

соответственно. Зафиксируем вероятности перехода от $|\psi_i>$ в $|\phi_j>$. Сколько существует проекторнозначных мер (с точностью до унитарной эквивалентности) для фиксированных вероятностей?

Математическая формулировка задачи выглядит так. Пусть есть два полных набора ортогональных проекторов ранга 1: $p_1,...,p_n$ и $q_1,...,q_n$. Сколько существует таких наборов проекторов при фиксированных значениях следов $\mathrm{Tr}(p_iq_j)$?

Для общих значений следов, задача имеет следующие решения в малых размерностях: при $n=2$ — 1 пара, $n=3$ — 2 пары, $n=4$ — 12 пар.

При изучении полных наборов проекторов естественно использовать следующее геометрическое описание: одномерный проектор p, действующий в n-мерном пространстве V, задается точкой и гиперплоскостью в проективизации $\mathbb{P}(V)$, сооответствующих образу и ядру p. Полный набор проекторов $p_1,..,p_n$ действующих в V задается n точками в $\mathbb{P}(V)$, соответствующими образам $p_i, i = 1,...,n$. Соответственно, два полных набора $p_1,...,p_n$ и $q_1,...,q_n$ задаются набором из $2n$ точек в $\mathbb{P}(V)$.

Естественным образом на множестве всех наборов из $2n$ точек действует группа $\mathsf{PGL}(V)$. Факторизуя по ней, получаем многообразие конфигураций в $\mathbb{P}(V)$. Объектом исследования являются симплектические и алгебро-геометрические свойства многообразия конфигураций. В частности, $\mathrm{Tr}(p_iq_j)$ образуют интегрируемую систему, тесно связанную с нашим объектом исследования. В данный момент работа находится в процессе написания текста.

1.7 Множества Жюлиа и кубические многочлены

За отчетный период был получен следующий результат сотрудника лаборатории В. Тиморина совместно с А. Блохом, Г. Левиным и Л. Оверстигеном: оценка сверху на модуль непосредственной ренормализации кубического многочлена с несвязным множеством Жюлиа “регулярного критического типа”. Ниже этот результат описывается более подробно.

Пусть f — кубический многочлен с несвязным заполненным множеством Жюлиа $K(f)$ (напомним, что это множество состоит из точек с ограниченными орбитами) и с инвариантной компонентой K^* множества $K(f)$, которая содержит критическую точку ω_1 отображения f; будем обозначать через ω_2 другую критическую точку многочлена f, орбита которой убегает на бесконечность. В этом случае хорошо известно, что K^* является заполненным множеством Жюлиа некоторого квадратично-подобного ограничения отображения f.

Напомним, что полиномиально подобное (PL) отображение степени d — это собственное голоморфное отображение $f : U^* \to V^*$ степени d, где U^*, V^* — жордановы диски в $\mathbb{C}$, причем U^* компактно вложен в V^*. Рассмотрение PL отображений было инициировано Дуади и Хаббардом (Douady–Hubbard [18]) для осуществления голоморфной ренормализации в полиномиальной динамике. Каждое PL отображение топологически (и даже квазиконформно, причем соответствующий дифференциал Бельтрами можно сделать нулевым на заполненном множестве Жюлиа) сопряжено некоторому многочлену той же степени, ограниченному на окрестность его заполненного множества Жюлиа. Квадратично подобное (QL) отображение — это PL отображение степени 2.

В рассматриваемом случае, множества U^* и V^* могут быть описаны явно: пусть

E^* — эквипотенциальная кривая многочлена f (то есть кривая уровня функции Грина), содержащая критическую точку ω_2. Определим V^* как компоненту дополнения до E^*, содержащую множество K^*. Теперь искомое квадратично-подобное отображение с заполненным множеством Жюлиа K^* может быть построено как $f : U^* \to V^*$, где U^* — это единственная компонента f-прообраза области V^*, содержащаяся в V^*. Напомним, что кольцо $V^* \setminus K^*$ называется корневым кольцом квадратично-подобного отображения $f : U^* \to V^*$.

Пусть $\Xi \subset \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ — множество, образованное аргументами всех внешних лучей (гладких или ломаных), которые заканчиваются в K^* или хотя бы накапливаются к этому множеству. Петерсен и Закери (Petersen–Zakeri [19]) доказали в 2022 году, что хаусдорфова размерность множества Ξ не превышает числа $\delta = \log_3 2$; авторы данного проекта доказали, что на самом деле хаусдорфова размерность множества Ξ в точности равна δ.

Компоненты дополнения до множества Ξ в $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ называются дырами множества Ξ. Как известно из предыдущих работ авторов данного проекта (см. [20]), найдется дыра длины $\geq \frac{1}{3}$, называемая мажорной дырой множества Ξ; а остальные дыры множества Ξ являются обратными образами мажорной дыры при итерациях отображения утроения угла.

Скажем, что Ξ имеет регулярный критический тип, если концы мажорной дыры не периодичны относительно утроения угла; длина мажорной дыры в этом случае составляет в точности $\frac{1}{3}$.

Теорема 1.5. Пусть f — кубический многочлен, как описано выше, и предположим, что Ξ имеет регулярный критический тип. Если ε — значение функции Грина для f в критической точке ω_2, то модуль корневого кольца $V^* \setminus K^*$ оценивается сверху как

$$\mathrm{mod}(V^* \setminus K^*) \leq C_1 \frac{\varepsilon^{2\delta-1}}{\mathrm{Hcont}^{\delta}(\Xi)} < C_2 \varepsilon^{2\delta-1}.$$

Здесь C_1 и C_2 — некоторые числовые коэффициенты, не зависящие ни от ε, ни от Ξ. Они могут быть посчитаны явно. Кроме того, $\mathrm{Hcont}^{\delta}(\Xi)$ обозначает хаусдорфово содержание множества Ξ в размерности δ, то есть

$$\mathrm{Hcont}^{\delta}(\Xi) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \mathrm{diam}(U_i)^{\delta} \mid \{U_i\} \text{ — покрытие множества } \Xi \right\}.$$

Получена ненулевая оценка снизу на хаусдорфово содержание множества Ξ, которая и применяется в последнем неравенстве сформулированной теоремы. Заметим, что число

$2\delta - 1$ положительно; оно равно примерно 0.26. В частности, оценка сверху из приведенной выше теоремы стремится к 0 при $\varepsilon \to 0$.

Полученный результат является важным шагом на пути комбинаторного описания любой непосредственной ренормализации, могущей возникать в динамике кубических многочленов.

За отчетный период вышла статья [21].

2 Гомологические и мотивные методы в некоммутативной геометрии

2.1 Структура гладких полулинейных представлений групп перестановок

Пусть G — топологическая хаусдорфова группа, базу открытых подмножеств которой составляют левые и правые сдвиги некоторого набора подгрупп. Эквивалентно, G — группа перестановок некоторого множества Ψ, топология которой задана предбазой, состоящей из левых и правых сдвигов элементов множества Ψ. Другими словами, базу открытых подмножеств группы G составляют левые и правые сдвиги поточечных стабилизаторов конечных подмножеств Ψ.

2.1.1 Фильтрация уровня на гладких полулинейных представлениях групп перестановок

Пусть K — поле, снабжённое действием группы G, и V — K-полулинейное представление G, т.е. K-векторное пространство с таким аддитивным действием группы G, что $g(av) = g(a)g(v)$ для всех $g \in G$, $a \in K$, $v \in V$.

Определение 1. Скажем, что уровень V по отношению к Ψ не превосходит ℓ, если V является суммой таких K-полулинейных представлений V_i группы G, что найдутся открытые подгруппы $U_i \subseteq G$ такие, что V_i как K-векторное пространство порождено подпространствами V_i^S, где S пробегает открытые подгруппы конечного индекса поточечных стабилизаторов в U_i всех ℓ-элементных подмножеств Ψ.

Например, если некоторая открытая подгруппа группы G предкомпактна и действует на поле K точно, то все гладкие K-полулинейные представления группы G имеют уровень 0.

Для каждого целого $j \geqslant 0$ обозначим через N_jV максимальное K-полулинейное подпредставление в V уровня $\leqslant j$. Очевидно, в частности, что $N_0V \subseteq N_1V \subseteq N_2V \subseteq \dots$ — исчерпывающая фильтрация на V, если V гладкое (т.е. все стабилизаторы открыты).

Обозначим через $\mathrm{Sm}_K(G)$ категорию гладких K-полулинейных представлений группы G, а через $\mathrm{Sm}_K^{\leqslant j}(G)$ — её полную подкатегорию, объекты которой — всевозможные объекты уровня $\leqslant j$. Тогда сопоставление $V \mapsto N_jV$ задаёт функтор $N_j : \mathrm{Sm}_K(G) \to \mathrm{Sm}_K^{\leqslant j}(G)$, сопряжённый справа функтору включения $\mathrm{Sm}_K^{\leqslant j}(G) \to \mathrm{Sm}_K(G)$.

В отчетный период, сотрудниками лаборатории детально изучена фильтрация уровня в случае, когда G — (симметрическая) группа $\mathfrak{S}_\Psi$ всех перестановок некоторого множества Ψ. Показано, что морфизмы между конечно порождёнными гладкими полулинейными представлениями группы $\mathfrak{S}_\Psi$ локально расщепимы, т.е. расщепимы при ограничении на достаточно малую открытую подгруппу. Из этого выведена строгая совместимость фильтрации уровня с инъекциями.

Пусть $F|k$ — регулярное расширение полей. Обозначим через $F_\Psi = F_{k,\Psi}$ (функториально зависящее от расширения $F|k$) поле частных копроизведения в категории k-алгебр копий F, пронумерованных множеством Ψ. В частности, $F_\Psi = k$, если $F = k$; $F_\Psi = k(\Psi)$ — поле рациональных функций над k от переменных, пронумерованных элементами множества Ψ, если $F = k(X)$ — поле рациональных функций над k от одной переменной X.

Перестановки тензорных множителей F в копроизведении индуцируют естественное действие группы $\mathfrak{S}_\Psi$ на F_Ψ.

Поля $F_\Psi = F_{k,\Psi}$ примечательны, в частности, тем, что являются кообразующими (неизбежно, инъективными) категории $\mathrm{Sm}_{F_\Psi}(\mathfrak{S}_\Psi)$.

2.1.2 Поля уровня 1 и инвариантные подполя в F_Ψ

Аналогично уровню представлений, определяется уровень поля K, снабжённого действием группы перестановок G множества Ψ. А именно, уровень K по отношению к Ψ не превосходит ℓ, если K является объединением таких G-инвариантных подполей K_i, что найдутся открытые подгруппы $U_i \subseteq G$ такие, что поле K_i порождено подполями K_i^S, где S пробегает поточечные стабилизаторы в U_i всех ℓ-элементных подмножеств Ψ. Например, поля уровня 0 — это те, на которых тривиально действует некоторая открытая подгруппа группы G. Примером полей уровня 1 являются поля вида F_Ψ.

Сотрудниками лаборатории высказана следующая

Гипотеза 1. Пусть поле K снабжено действием группы $\mathfrak{S}_\Psi$ уровня ℓ, и $k := K^{\mathfrak{S}_\Psi}$. Тогда

1. если $\ell = 1$, то найдётся регулярное расширение F поля k и $\mathfrak{S}_\Psi$-эквивариантное вложение поля K в F_Ψ;

2. для любого $\mathfrak{S}_\Psi$-инвариантного расширения полей $K|k$ в F_Ψ, существует единственное расширение полей $L|k$ в F такое, что (i) $K \subseteq L_\Psi$, (ii) L алгебраически замкнуто в F, (iii) для любого $L'|k$ в L с $\mathrm{tr.deg}(L'|k) < \infty$ существует расширение полей $L''|L'$ в L с $\mathrm{tr.deg}(L''_\Psi|K \cap L''_\Psi) < \infty$.

3. Если характеристика K нулевая, то ℓ — уровень $\Omega_{K|k}$ как объекта категории

$\mathrm{Sm}_K(\mathfrak{S}_\Psi)$.

Также удалось проверить часть (2) этой гипотезы в нулевой характеристике, и доказать следующую теорему:

Теорема 2.1. Для любого регулярного расширения полей $F|k$ характеристики 0 и любого $\mathfrak{S}_\Psi$-инвариантного расширения полей $K|k$ в F_Ψ, существует единственное расширение полей $L|k$ в F такое, что (i) $K \subseteq L_\Psi$, (ii) L алгебраически замкнуто в F, (iii) для любого $L'|k$ в L конечной степени трансцендентности существует расширение полей $L''|L'$ в L с $\mathrm{tr.deg}(L''_\Psi|K \cap L''_\Psi) < \infty$.

В случае $\mathrm{tr.deg}(F|k) = 1$ было ранее ([22]) получено явное описание относительно алгебраически замкнутых $\mathfrak{S}_\Psi$-инвариантных подполей поля F_Ψ. В частности, $\mathrm{tr.deg}(F_\Psi|K) \leqslant 3$.

В случае $\mathrm{tr.deg}(F|k) > 1$ степень трансцендентности расширений $F_\Psi|K$ не ограничена. Пусть, например, k — произвольное поле, $n > 0$ целое число, $F = k(x,y)$ и $\Psi = \mathbb{N}$. Тогда $F_\Psi = k(x_1, x'_2, x'_3, x'_4, \dots; y_1, y_2^{(1)}, y_3^{(2)}, y_4^{(3)}, \dots)$, где $x'_i := x_i - x_1$, $y_i^{(s)} := \frac{y_i^{(s-1)} - y_s^{(s-1)}}{x_i - x_s}$ и $y_i^{(0)} := y_i$. Нетрудно видеть, что подполе

$$K := k(x'_2, x'_3, x'_4, \dots; y_{n+1}^{(n)}, y_{n+2}^{(n+1)}, y_{n+3}^{(n+2)}, \dots) \subseteq F_\Psi$$

$\mathfrak{S}_\Psi$-инвариантно и $\mathrm{tr.deg}(F_\Psi|K) = n+1$.

Также удалось единообразно описать все ранее построенные примеры $\mathfrak{S}_\Psi$-инвариантных подполей полей вида F_Ψ. А именно, как неподвижных подполей L_Ψ^H полей вида L_Ψ, где $L|k$ — расширение полей в F, а H — алгебраическая группа автоморфизмов расширения $L|k$.

Пример 2.2. Пусть $F|k$ — регулярное расширение полей характеристики $p > 0$, $X \in F \smallsetminus k$ — такой элемент, что $F|k(X)$ — алгебраическое сепарабельное расширение, и $n \geqslant 1$ — целое число. Тогда для каждого элемента $\lambda \in kF^{p^n}$ существует единственный эндоморфизм ξ_λ $k[B]$-алгебры $F_\Psi[B]/(B^{p^n})$ такой, что (i) ξ_λ тождественный по модулю (B), (ii) $u := X(u) \mapsto u + \lambda(u)B$ для всех $u \in \Psi$. Его можно рассматривать как $\mathfrak{S}_\Psi$-эквивариантное и $(kF^{p^n})_\Psi$-линейное действие $F_\Psi \to F_\Psi[B]/(B^{p^n})$ на поле F_Ψ инфинитезимальной подгруппы $\alpha_{p^n,k} := \mathrm{Spec}(k[B]/(B^{p^n}))$ аддитивной группы $\mathbb{G}_{\mathrm{a},k}$.

Для каждого подмножества $\Lambda \subset kF^{p^n}$ обозначим через K_Λ подполе поля F_Ψ, фиксированное действиями ξ_λ для всех $\lambda \in \Lambda$. Тогда

– $kF^{p^n} \to \mathrm{Aut}_{k[B]\text{-alg}}(F_\Psi[B]/(B^{p^n}))$, $\lambda \mapsto \xi_\lambda$, — гомоморфизм групп, поэтому выбор Λ задаёт действие $F_\Psi \to F_\Psi \otimes_k (k[B]/(B^{p^n}))^\Lambda$ декартовой степени $\alpha^\Lambda_{p^n,k}$ группы $\alpha_{p^n,k}$ на F_Ψ;

– $[F_\Psi : K_\Lambda] = p^{nd}$, если Λ — d-мерное k-векторное подпространство для некоторого натурального d и, если кроме того $\{\lambda_1, \dots, \lambda_d\}$ — базис Λ, то

$$K_\Lambda = kF_\Psi^{p^n}\left(\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_{\{0,\dots,d\}}} \mathrm{sgn}(\sigma)\lambda_1(u_{\sigma(1)})\cdots\lambda_d(u_{\sigma(d)})u_{\sigma(0)} \mid u_0,\dots,u_d \in \Psi\right);$$

– при $\lambda \neq 0$ единственная замкнутая точка спектра Габриэля категории гладких $K_{\{\lambda\}}$-полулинейных представлений группы $\mathfrak{S}_\Psi$ представлена объектом F_Ψ, который является инъективной оболочкой $K_{\{\lambda\}}$;

– незамкнутые точки того же спектра представлены объектами $K_{\{\lambda\}}\langle\binom{\Psi}{s}\rangle$ для всех натуральных s.

2.1.3 Конечномерные неприводимые гладкие полулинейные представления группы $\mathfrak{S}_\Psi$ над полями «двойных отношений»

Получено описание всех конечномерных неприводимых гладких полулинейных представлений группы $\mathfrak{S}_\Psi$ над полем K_{d} «двойных отношений»:

$$K_{\mathrm{d}} := F_\Psi\left(\frac{(w-x)(y-z)}{(w-z)(x-y)} \mid w,x,y,z\in\Psi\right) \subset K_{\mathrm{c}} := F_\Psi\left(\frac{y-z}{x-y} \mid x,y,z\in\Psi\right) \subset F_\Psi(\Psi).$$

Также установлено существование бесконечномерных неприводимых гладких полулинейных представлений группы $\mathfrak{S}_\Psi$. Это интересно с той точки зрения, что все неприводимые гладкие полулинейные представления группы $\mathfrak{S}_\Psi$ над ранее рассмотренными полями были конечномерными и, за исключением конечного их числа, одномерными.

Нормирования поля K_{c}, тривиальные на подполе K_{d}, рассматриваются как точки проективной прямой $\mathbb{Y}$ над K_{d}, снабжённой естественным действием группы $\mathfrak{S}_\Psi$.

Теорема 2.3 («теорема Бореля–Вейля» для K_{d}, [22]). Для каждого целого $n \leqslant 0$ рассмотрим модуль

$$\Gamma(\mathbb{Y}, \omega_{\mathbb{Y}}^n) \cong \sum_{\alpha\neq\beta} (\alpha-\beta)^n K_{\mathrm{d}} \subset K_{\mathrm{b}} := F_\Psi(x-y \mid x,y\in\Psi) \subset F_\Psi(\Psi)$$

глобальных сечений плюриантиканонического пучка на $\mathbb{Y}$ как K_{d}-полулинейное представление группы $\mathfrak{S}_\Psi$, и обозначим через W_n цоколь этого модуля.

Тогда K_{d}-полулинейные представления W_n (i) неприводимы, (ii) попарно неизоморфны, (iii) самодвойственны, (iv) представляют все классы изоморфизма неприводимых конечномерных гладких K_{d}-полулинейных представлений группы $\mathfrak{S}_\Psi$.

Если характеристика поля k нулевая, то $W_n = \Gamma(\mathbb{Y}, \omega_{\mathbb{Y}}^n)$, так что $\dim_{K_{\mathrm{d}}} W_n = 1-2n$. В частности, эти представления определяются своей размерностью, которая может быть произвольным нечётным натуральным числом.

(Вариант теоремы Стейнберга о тензорном произведении для неодносвязной группы PGL_2.) Если характеристика p поля k положительна, то $\dim_{K_{\mathrm{d}}} W_n = \prod\limits_{t\geq 0}(c_t+1)$, где $c_t \in \{0,1,\ldots,p-1\}$ — цифры p-ичной записи числа $-2n$, т.е. $-2n = \sum_{t\geq 0} c_t p^t$. В частности, $\Gamma(\mathbb{Y}, \omega_{\mathbb{Y}}^n)$ неприводимо тогда и только тогда, когда $n = 1/2-(a-1/2)p^m$ для некоторых целых чисел $0 < a \leqslant p/2$ и $m \geqslant 0$. Естественное отображение $K_{\mathrm{d}} \otimes_{K_{\mathrm{d}},\phi} W_n \xrightarrow{f\otimes\eta\mapsto f\eta^p} W_{pn}$, где $\phi : K_{\mathrm{d}} \xrightarrow{f\mapsto f^p} K_{\mathrm{d}}$ — эндоморфизм Фробениуса, является изоморфизмом.

Бесконечномерное (индуцированное) полулинейное представление

$$\mathscr{I}_m := K_{\mathrm{d}}\langle\mathfrak{S}_\Psi\rangle \otimes_{K_{\mathrm{d}}\langle\mathfrak{S}_{\Psi|\{x\}}\rangle} \mathscr{L}_x^{\otimes m}$$

группы $\mathfrak{S}_\Psi$ неприводимо для любого $m<0$. Здесь $\mathscr{L}_x^{\otimes m} := \frac{(y-z)^m}{(x-y)^m(x-z)^m} K_{\mathrm{d}} \subset K_{\mathrm{b}}$ для любых попарно различных $x,y,z \in \Psi$ не зависит от y,z.

Полулинейное представление $\mathscr{I}_0^\circ := \ker[K_{\mathrm{d}} d\langle\Psi\rangle \xrightarrow{\sum_{\alpha\in\Psi} a_\alpha[\alpha]\mapsto\sum_{\alpha\in\Psi} a_\alpha} K_{\mathrm{d}}]$ неприводимо тогда и только тогда, когда $F = k$.

Любое другое бесконечномерное неприводимое K_{d}-полулинейное представление группы $\mathfrak{S}_\Psi$ вкладывается или в $\mathscr{I}_m$ для некоторого $m>0$, или в $K_{\mathrm{d}}\langle\mathfrak{S}_\Psi\rangle \otimes_{K_{\mathrm{d}}\langle U\rangle} V$ для некоторого неприводимого K_{d}-полулинейного представления V размерности $\leqslant 18$ некоторой открытой подгруппы конечного индекса U в $\mathfrak{S}_{\Psi,S}$ для некоторого подмножества $S \subset \Psi$ порядка 3 или 4.

2.2 0-циклы как модули над алгебрами конечных соответствий

Для каждого гладкого многообразия X над полем рассматривается $\mathbb{Q}$-векторное пространство $Z_0(X)$ 0-циклов (т.е. формальных конечных $\mathbb{Q}$-линейных комбинаций замкнутых точек X) как модуль над алгеброй конечных соответствий.

Определим степень 0-цикла $\alpha = \sum_{P\in X} m_P P$ на X как $\mathbb{Q}$-значную функцию $\deg(\alpha) : \pi_0(X) \to \mathbb{Q}$, $X_i \mapsto \sum_{P\in X_i} m_P \deg(P)$ на множестве связных компонент $\{X_i\}_i$ многообразия $X = \sqcup_i X_i$, где $\deg(P)$ — степень поля вычетов точки P над полем определения X.

Сотрудниками лаборатории в работе [23] показано, что 0-циклы степени 0 образуют радикал $Z_0^\circ(X)$ модуля $Z_0(X)$, т.е. любой собственный подмодуль модуля $Z_0(X)$

содержится в подмодуле 0-циклов степени 0. При этом модуль $Z_0(X)/Z_0^\circ(X)$ абсолютно прост.

Как было установлено ранее, если X проективно, то $Z_0(X)$ имеет единственный простой подмодуль $Z_0^{\mathrm{rat}}(X)$. Этот подмодуль абсолютно прост, является существенным подмодулем в $Z_0(X)$, и совпадает с модулем рационально тривиальных 0-циклов на X. Положим $CH_0(X)_{\mathbb{Q}} := Z_0(X)/Z_0^{\mathrm{rat}}(X)$.

Из гипотезы С. Блоха и А. Бейлинсона о т.н. мотивной фильтрации на $CH_0(X)_{\mathbb{Q}}$ для гладкого проективного многообразия X над полем нулевой характеристики (и сопутствующих «стандартных» гипотез) выведена полупростота присоединённых факторов относительно мотивной фильтрации модуля $CH_0(X)_{\mathbb{Q}}$.

Высказана гипотеза о том, что радикальная фильтрация на $CH_0(X)_{\mathbb{Q}}$ (т.е. строго убывающая последовательность итерированных радикалов) совпадает с мотивной фильтрацией, но без повторяющихся членов. Эта гипотеза проверена для кривых.

2.3 Грубые вложения и двойственность Пуанкаре

В отчетный период, сотрудниками лаборатории также исследовался вопрос о гомологических и когомологических размерностях групп, допускающих равномерное вложение (coarse embedding) в группу с рациональной двойственностью Пуанкаре. Обозначим это вложение как $q : H \to G$. Известен (по работам X. Li, R. Sauer, Y. Shalom) следующий факт. Пусть хотя бы одно из двух верно: 1) G является аменабельной; 2) H имеет конечную (ко)гомологическую размерность. Тогда если q является квазиизометрией, то H – тоже группа с двойственностью, и её размерность совпадает с размерностью G; если же образ q не покрывает G, то когомологическая размерность H строго меньше размерности G. Разрабатывались методы для возможного обобщения этого результата на случай общего равномерного вложения без ограничительных предположений, описание которых приведено ниже.

Получен частичный результат о функториальности когомологий с коэффициентами в некотором классе модулей вдоль равномерных вложений. Пусть на G-модуле M существует действие алгебры $fin(G)$, порождённой индикаторными функциями на подлежащем множестве G, совместимое с действием G (точное определение совместимости в настоящий момент кажется слишком техническим и неудовлетворительным; не найдено ни одного модуля с совместимым действием, не приходящим из вложения в $\ell_\infty(G)$). Тогда на M существует структура H-модуля, и действие $fin(H)$, которое является ограничением скаляров вдоль q^*; и морфизм комплексов $Hom_G(k,P^*) \to Hom_H(k,Q^*)$, где P, Q это некоторые инъективные корезольвенты M как $G-fin(G)$-бимодуля и $H-fin(H)$-бимодуля соответственно. Итоговой целью является построение категории “геометрических модулей” над группой, такой, что грубое отображение групп даёт функтор индукции на этой категории, а эквивалентности соответствуют квазиизозометриям групп.

Пока не проверена гипотеза о том, что наличие совместимого действия на модуле соответствует тому, что модуль лежит в образе функтора, сопряжённого к локализации категории $Mod-kG$, согласованной с линейной топологией на kG. Топология, соответствующая гипотетической локализации, порождёна аннуляторами функций на шарах конечного радиуса в G (для действия G на себе через группоид $[G//G]$, и его ограничений $[B(n,g)//G]$). Так как эта топология не является топологией Габриеля, локализация (или, иначе говоря, наследственная пара кручения в категории модулей, порождённая полной подкатегорией дискретных модулей) не определена однозначно. В случае, если гипотеза окажется верной, то с каждой счётной группой будет канонически ассоциировано кольцо, и категория инъективных модулей над ним будет являться категорией “геометрических модулей”. Среди следствий гипотезы можно отметить такое: группы когомологической размерности 2 квазиизометричны тогда и только тогда, когда классические кольца частных их групповых колец изоморфны с точностью до фактора по нильпотентному идеалу.

2.4 Спектральная последовательность Атья-Хирцебруха и двойственность

В работе сотрудника лаборатории В. Рождественского была доказана следующая теорема двойственности. Рассмотрим спектральную последовательность Атья-Хирцебруха для комплексной K-теории. Ее дифференциалы d_r можно рассматривать как частично определенные многозначные когомологические операции (высшие когомологические операции). Далее, можно построить такие высшие операции $\tilde{d}_r$, что выполнено равенство $d_r = \beta\tilde{d}_r$, где β – гомоморфизм Бокштейна для точной тройки $0 \to \mathbb{Z} \to \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \to 0$. Тогда теорема двойственности утверждает, что если X – ограниченный снизу спектр конечного типа такой, что $H^*(X;\mathbb{Q}) = 0$ при $* < N$ и $x \in H^{n-(r-1)}(X;\mathbb{Z})$, $y \in H_n(X;\mathbb{Z})$ с $n < N$, то имеет место равенство $\langle y, \tilde{d}_r(x)\rangle = -\langle \tilde{d}_r(y), x\rangle$. Более того, это корректное равенство элементов группы $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$. Эта теорема, вместе с описанием В. М. Бухштабера дифференциалов спектральной последовательности Атья-Хирцебруха для K-теории, являлась ключевой для построения асимптотически точной нижней оценки на кратность реализации циклов. После получения вышеупомянутых результатов, у сотрудников лаборатории возник вопрос об их обобщении.

Главным обобщением теоремы двойственности является ее доказательство не только для K-теории, но и для других теорий (ко)гомологий. Именно, назовем коммутативное ассоциативное кольцо R с единицей dH кольцом, если выполнены следующие условия: R не имеет делителей нуля, характеристика R равна нулю, $\mathrm{Frac}(R)/R$ является инъективным R-модулем и для любой конечной абелевой группы G гомоморфизм вычисления

$$\mathrm{ev}\colon G\otimes_{\mathbb{Z}} R \to \mathrm{Hom}\Big(\mathrm{Hom}\big(G\otimes_{\mathbb{Z}} R, \mathrm{Frac}(R)/R\big), \mathrm{Frac}(R)/R\Big)$$

является изоморфизмом (все гомоморфизмы рассматриваются над кольцом R). Тогда верен аналог теоремы двойственности для операций $\tilde{d}_r$, если вместо спектра комплексной K-теории брать произвольный мультипликативный спектр E такой, что $\pi_*(E) \cong R[v, v^{-1}]$, где R — dH кольцо и $\deg(v) > 0$. Доказательство этой теоремы составляет содержание магистерской диссертации одного из сотрудников лаборатории.

Заметим, что следующие кольца являются dH кольцами: кольцо $\mathbb{Z}$ целых чисел, кольцо $\mathbb{Z}_{(p)}$ целых чисел, локализованное в простом идеале (p), полные кольца дискретного нормирования без делителей нуля и характеристики 0. Следовательно, обобщенная теорема двойственности применима к целочисленным K-теориям Моравы. В связи с этим хочется получить аналог теоремы Бухштабера об описании дифференциалов спектральной последовательности Атья-Хирцебруха для K-теории для всех целочисленных K-теорий Моравы. В настоящий момент сотрудниками лаборатории ведется работа в этом направлении.

В ходе работы с высшими когомологическими операциями у сотрудников лаборатории возникла следующая гипотеза. Пусть X и Y ограниченные снизу спектры конечного типа. Предположим, что спектральные последовательности Атья-Хирцебруха для стабильных гомотопических групп сфер спектров X и Y абстрактно изоморфны. Тогда спектры X и Y гомотопически эквивалентны. В настоящий момент предпринимаются попытки доказать (или опровергнуть) эту гипотезу.

2.5 Некоммутативные кэлеровы метрики

Довольно давно специалистами ожидается, что все дополнительные “мотивные” структуры, которые существуют на когомологиях деРамовского типа алгебраических многообразий, допускают полное некоммутативное обобщение. Идеология эта принадлежит прежде всего М. Концевичу, по сути, основателю современной некоммутативной алгебраической геометрии, и подтверждается рядом конкретных гипотез, конструкций и теорем, сформулированных заведующим Лабораторией Д. Калединым на докладе на Международном Математической Конгрессе в 2010 году.

Под "когомологиями дерамовского типа" здесь следует понимать прежде всего сами когомологии де Рама, в алгебраической версии, построенной в свое время Гротендиком, а также кристальные когомологии – обобщение дерамовских когомологий, введенное тем же Гротендиком в конце 1960-х годов. В некоммутативной алгебраической геометрии гладкое компактное алгебраическое многообразие заменяется на гомологически гладкую и гомологически компактную дифференциально-градуированную алгебру, а некоммутативное обобщение когомологий де Рама дается периодическими циклическими гомологиями, открытыми независимо А. Конном и Б. Цыганом в 1982 году. По сути, именно это открытие и породило некоммутативную геометрию как самостоятельную область математики (отметим, что этальные когомологии, другая широко используемая в алгебраической геометрии теория когомологий, никакого некоммутативного обобщения по-видимому не допускают). Единственная на настоящий момент момент действительно общая теорема некоммутативной алгебраической геометрии – это результат Д. Каледина, гласящий, что для любой гладкой компактной ДГ-алгебры над полем характеристики 0, спектральная последовательность, связывающая хохшильдовские и периодические циклические когомологии, вырождается в первом члене (как гипотеза, это утверждение было высказано в основополагающей работе М. Концевича и Я. Сойбельмана).

Теорема Каледина известна также как теорема о вырождении "некоммутативной спектральной последовательности Ходжа-де Рама", поскольку в коммутативном случае, именно к классическому вырождению Ходжа-де Рама она и сводится (периодические циклические гомологии обобщают когомологии де Рама, а гомологии Хохшильда – когомологии с коэффициентами в пучках дифференциальных форм). При этом у классического вырождения Ходжа-де Рама есть два доказательства. Одно из них классическое же, использующее теорию Ходжа и кэлерову геометрию. Другое, более новое, дано в 1987 году П. Делинем и Л. Иллюзи, и использует сведение в положительную характеристику (после чего применяются идеи из теории кристальных когомологий).

Удивительным образом, доказательство Каледина обобщает именно алгебраический подход Деліня-Иллюзи. В результате продумывания этого доказательства многими учеными по всему миру, ситуация с периодическими циклическими гомологиями в положительной характеристике значительно прояснилась. В частности, в настоящий момент известно несколько конструкций, дающих полное некоммутативное обобщение кристальных когомологий – теория TR Л. Хесселхолта, гомологии Хохшильда-Витта, введенные также Калединым, а также чисто линейная конструкция В. Вологодского и А. Петрова, которая работает в нечетной характеристике. Доказано, что все эти теории эквивалентны, и тем самым, можно утверждать, что в том, что касается положительной характеристики, программа, заявленная Калединым в докладе на Конгрессе в 2010 году, в настоящий момент полностью реализована. Значительный прогресс достигнут также и p-адическом случае – и хотя здесь до завершения работы еще далеко, область очень активна, и новые результаты появляются каждый день.

При этом, несколько парадоксальным образом, классическое доказательство вырождения, которое в коммутативном случае воспринимается как значительно более простое и естественное, до сих пор никакому некоммутативному обобщению не поддается. Ожидается, в принципе, что на периодических циклических гомологиях $HP_i(A_\bullet)$ гладкой и компактной ДГ-алгебры над полем комплексных чисел существует, как минимум, вещественная структура Ходжа веса i; однако в настоящий момент не удается построить на них даже вещественную структуру (т.е. функториальную антикомплексную инволюцию).

Сотрудники лаборатории в течении ряда лет работают над этим кругом вопросов, и достигли здесь некоторого прогресса. В частности, в 2021-2022 году ими были введены и изучены “целые” (“entire”) периодические циклические гомологии, определяемые в терминах некоторого условия сходимости на периодические циклические коциклы. Такие гомологии имеют по сравнению с обычными расширенную функториальность, и по-видимому, как-то участвуют в конструкции комплексного сопряжения, но как именно, по-прежнему непонятно.

В этом году исследования были продолжены, причем с новой точки зрения: по-видимому, следует искать не просто комплексное сопряжение, а весь “кэлеров пакет” – структуры Ходжа, примитивное разложение, поляризации. С этой целью следует прежде всего понять, что является некоммутативным обобщением понятия кэлеровой формы.

Согласно общему принципу, известному в некоммутативной алгебраической геометрии, некоммутативным аналогом той или иной структуры на гладких алгебраических многообразиях является некая структура на гладкой компактной ДГ-алгебре $A_\bullet$, которая порождает структуру обсуждаемого типа на всех пространствах модулей $M(A_\bullet)$

обьектов в производной категории $A_\bullet$. Разумеется, это пространство модулей уже не является просто гладким алгебраическим многообразием, а скорее производным стэком в смысле Тоена и Веццози (в контексте производной алгебраической геометрии, соответствующий стэк был построен Тоеном и Вакье). Поэтому прежде чем обобщать структуру на некоммутативные многообразия, следует обобщить ее на стэки. Тем не менее, принцип во многих случаях оказывается вполне продуктивным. Хорошим примером здесь служит теория двойных скобок Пуассона, построенная М. Ван ден Бергом, и дающая некоммутативное обобщение обычной структуры алгебры Пуассона.

В случае кэлеровой метрики, обобщение на стэки неочевидно (даже в случае простейших стэков Артина, получаемых как фактор точки по действию алгебраической группы). Одним из способов построить такое обобщение является подход, возникший в старых работах Каледина по построению канонической гиперкэлеровой метрики на кокасательном расслоении гладкого комплексного кэлерова многообразия (известной как "метрика Каледина-Фейкс").

Конструкция эта такова. Берем комплексное многообразие X, и сначала рассматриваем его кокасательное расслоение T^*X. Затем выбираем кэлеров класс, и строим по нему хорошо известную деформацию T^*X, которая называется "скрученным кокасательным расслоением" $\widetilde{T}^*X$. Затем делаем следующее наблюдение: если обозначить через $X_{\mathbb{C}}$ комплексификацию X в смысле Грауэрта – т.е. росток окрестности диагонали в произведении $X \times \overline{X}$, голоморфные функции на котором суть вещественно-аналитические функции на X – то отображения $X_C \to \widetilde{T}^*X$ в точности отвечают выборам вещественно-аналитической $(1,1)$-формы, представлящей наш кэлеров класс. Такое отображение автоматически является открытым вложением, и позволяет склеить $\widetilde{T}^*X$ с комплексно-сопряженным многообразием, и распространить деформацию до семейства над проективной прямой P^1. Полученное семейство удовлеворяет всем свойствам пространства твисторов – в частности, оно локально-тривиально и даже тривиализовано на уровне подлежащих вещественно-аналитических многообразий – и после стандартного твисторного преобразования задает искомую гиперкэлерову метрику.

В отчетный период, сотрудниками лаборатории изучались некоммутативные обобщения этой конструкции, в соответствии с общим принципом, описанным выше, и было найдено довольно много неожиданного.

Прежде чем изучать кокасательное расслоение, полезно изучить касательное, и это довольно легко: некоммутативным обобщением касательного расслоения для ДГ-алгебры $A_\bullet$ является тривиальное расширение $A_\bullet[\varepsilon]$, $\varepsilon^2 = 0$ алгебры $A_\bullet$ с помощью себя.

Действительно, точки $M(A_\bullet[\varepsilon])$ суть пары $\langle V,a\rangle$ $A_\bullet$-модуля V и элемента $a\in \mathrm{Ext}^1(V,V)$, и тем самым, имеем $M(A_\bullet[\varepsilon])\cong TM(A_\bullet)$. Для кокасательного расслоения, надо заменить $\mathrm{Ext}^1(V,V)$ на двойственное пространство, и, если алгебра $A_\bullet$ компактная, общая теорема двойственности дает изоморфизм $\mathrm{Ext}^1(V,V)^*\cong \mathrm{Ext}^{-1}(V,V\otimes A_\bullet^*)$. Однако из-за того, что 1 заменяется на -1, происходит когомологический сдвиг на 2! Тем самым, некоммутативным обобщением кокасательного расслоения оказывается тривиальное расширение с квадратом 0 алгебры $A_\bullet$ с помощью $A_\bullet^*[-2]$.

Дальше, следует изучить обобщения кэлерова класса, и здесь нас ждет удача, показывающая, что мы на правильном пути. А именно, в качестве скрученного кокасательного расслоения надо теперь брать нетривиальные расширения с квадратом 0, т.е. ДГ-алгебры $\widetilde{A}_\bullet$, включающиеся в точную последовательность

$$0 \longrightarrow A_\bullet^*[-2] \longrightarrow \widetilde{A}_\bullet \longrightarrow A_\bullet \longrightarrow 0,$$

и – если позволить также более общие т.н. A_∞-алгебры – параметризуются они элементами группы когомологий Хохшильда $HH^2(A_\bullet,A_\bullet^*[-2])$. Однако когомологические сдвиги сокращаются, и группа оказывается изоморфной $HH_0(A_\bullet)^*$. Тем самым, некоммутативный аналог кэлерова класса – это просто линейный функционал на нулевых гомологиях Хохшильда $HH_0(A_\bullet)$. Среди прочего, это отлично согласуется с интуицией, возникающей из теории условий стабильности Бриджланда, где входящим данным является т.н. "центральный заряд", некоторый линейный функционал на $K_0(A_\bullet)$.

Далее мы ограничили наши рассмотрения случаем, в котором, в принципе, результат уже известен – а именно, случаем, когда ДГ-алгебра сама происходит из гладкого компактного многообразия S – но который, тем не менее, может показать, чего следует ожидать в полной общности. Здесь нам удалось получить следующий результат. Пусть ДГ-алгебра $A_\bullet$ получается из образующего производной категории S, который является суммой стабильных векторных расслоений (заметим, что это предположение не ограничительно – образующий, являющийся векторным расслоением, всегда есть, а далее можно просто взять его присоединенный градуированный фактор по фильтрации Хардера-Нарасимхана). Пусть также наш кэлеров класс – фунционал Римана-Роха, отвечающий выбору кэлеровой формы на S. Тогда на соответствующей скрученной алгебре $\widetilde{A}_\bullet$ возникает каноническое комплексное сопряжение.

Результат особенно прост в случае, когда S кривая. В общем случае, комплексное сопряжение получается только в $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-градуированном смысле (что, впрочем, почти неважно, т.к. периодические циклические гомологии в любом случае имеют только

$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-градуировку). Отметим, что даже в случае точки – т.е. ДГ-алгебры, равной основному полю K – скрученная алгебра нетривиальна: как алгебра, это просто $K \oplus K[-2]$, но рассматривать ее следует как A_∞-алгебру, и как таковая, она скрученная в обычном смысле, т.е. имеет нетривиальную операцию m_0 (также известную как "элемент кривизны"). Доказательство несложно, но весьма нетривиально с концептуальной точки зрения – оно использует в полную силу известное соответствие Кобаяши-Хитчина, т.е. построение канонической эрмитовой метрики на стабильном векторном расслоении, и вся конструкция, по-видимому, является некоммутативной версией этого соответствия.

К сожалению, полученные нами результаты даже в этом частном случае не решают проблему. А именно, существенным ингредиентом исходной конструкции является переход от $X \times \overline{X}$ к $X_{\mathbb{C}}$, т.е. к ростку окрестности диагонали, и именно и только после такого перехода расслоение удается вещественно-аналитически тривиализовать и продолжить на все P^1. В некоммутативном случае, аналогом перехода к ростку будет переход к некоторому пополнению ДГ-коалгебры $T_*(\widetilde{A}_\bullet)$, двойственной по Кошулю нашей скрученной A_∞-алгебре $\widetilde{A}_\bullet$, а вместо обычных периодических циклических гомологий следует рассматривать некоторую версию введенных нами ранее целых гомологий. Все это в настоящий момент является объектом активного исследования, которое будет продолжено в 2024 году.

2.6 Расслоенные универсальные объекты

В отчетный период, сотрудниками лаборатории также была продолжена работа по разработанной ранее технике дериваторных гомотопических оснащений.

Напомним, что задача здесь – найти удобное понятие "оснащения" для произвольной категории, получаемой в результате локализации. Такое оснащение должно, в частности, включать в себя структуру гомотопического типа на всех пространствах морфизмов, причем обычные, неоснащенные множества морфизмов появляются как множества компонент этих гомотопических типов. В рамках дериваторного подхода, оснащение понимается как набор категорий, индексированных частично-упорядоченными множествами, ограниченными слева, т.е. как расслоение Гротендика над категорией Pos^+ таких множеств. Расслоение должно удовлетворять набору аксиом, которые в процессе нашей работы были точно сформулированы и изучены. В частности, доказана теорема представимости, гласящая, что любая малая оснащенная категория получается из полного пространства Сигала в смысле Ч. Реска, любой оснащенный функтор возникает из морфизма пространств Сигала, и функторы изоморфны тогда и только тогда, когда соответствующие морфизмы гомотопны.

Теорема представимости важна прежде всего по концептуальным причинам – она показывает, что наша теория не слабее других теорий, существующих в литературе, и при этом куда проще в практическом применении. Однако представимость важна и на техническом уровне. А именно, она позволяет строить в малых оснащенных категориях так называемые "универсальные объекты".

Дело здесь вот в чем. Хотя исходно оснащенная категория является расслоением $\mathscr{C} \to \mathrm{Pos}^+$, расслоение это можно канонически продолжить на большую категорию BiPos^+ т.н. "биупорядоченных" множеств, т.е. множеств, снабженных двумя отношениями порядка $\leq^l, \leq^r$, которые образуют факторизационную систему в смысле Боусфилда (т.е. для любых $j \leq j'$, существует единственное j'' такое, что $j \leq^l j'' \leq^r j'$). Продолжение $\mathscr{C}^\diamond \to \mathrm{BiPos}^+$ расслоения $\mathscr{C} \to \mathrm{Pos}$ называется разверткой оснащенной категории $\mathscr{C}$. Если наша оснащенная категория $\mathscr{C} = K(\mathscr{E})$ отвечает обычной категории $\mathscr{E}$, то слои расслоение $\mathscr{C}_J$ суть функторы $J \to \mathscr{E}$; слои развертки тогда отвечают тем функторам, которые обращают отношения порядка $j \leq^l j'$. Универсальным объектом для оснащенной категории $\mathscr{C}$ называется такой объект $c \in \mathscr{C}^\diamond_{J^\diamond}$, для какого-то $J^\diamond \in \mathrm{BiPos}^+$, что для любой оснащенной категории $\mathscr{C}'$ и объекта $c' \in {\mathscr{C}'}^\diamond_{J^\diamond}$ существует оснащенный функтор $\mathscr{C} \to \mathscr{C}'$, переводящий c в c', причем единственный с точностью до единственного изоморфизма.

Нами было доказано, что, как следствие теоремы представимости, любая малая оснащенная категория допускает универсальный объект. Неформально, это значит, что класс биупорядоченных множеств достаточно велик – любая малая оснащенная категория получается локализацией частично-упорядоченного множества J по плотному подмножеству $J^l \subset J$, причем заданному некоторой структурой биупорядоченного множества на J.

Однако для дальнейшего построения теории, возникла необходимость усилить и уточнить этот результат. А именно, допустим, что наша оснащенная категория снабжена расслоением $\mathscr{C} \to K(I)$ для какого-то частично упорядоченного множества I (такое расслоение называется I-аугментацией). Тогда любой объект $c \in \mathscr{C}_{J^\diamond}$ задает отображение $J^\diamond \to I^o$. Требуется доказать, что можно выбрать универсальный объект так, что соответствующее отображение $J^\diamond \to I^o$ само является расслоением Гротендика, и полученный объект также совместим с прообразами при любом отображении $I' \to I$.

Трудность здесь в следующем. Нетрудно показать, что если малая оснащенная категория представлена полным пространством Сигала X, то любой объект $c \in \mathscr{C}^{\diamond}_{J^{\diamond}}$ задает отображение $a : N^{\diamond}(J^{\diamond}) \to X$, где $N^{\diamond}$ – функтор бисимплициального нерва, и объект универсален тогда и только тогда, когда a – эквивалентность Сигала (т.е. слабая эквивалентность по отношению к модельной структуре на полных пространствах Сигала, построенной Ч. Реском). Построенная нами общая теория анодинных разрешений клеточных категорий Риди позволяет легко строить такие $J^{\diamond}$ и a для любых бисимплициальных множеств X, причем a – не только эквивалентность Сигала, а слабая эквивалентность по отношению к стандартной модельной структуре на бисимплициальных множествах. Более того, в аугментированной ситуации рассуждение нетрудно модифицировать – для любого I-бисимплициального множества, т.е. функтора $X_{\bullet}$ из I^o в бисимплициальные множества, можно построить функтор $J^{\diamond}_{\bullet}$ из I^o в биупорядоченные множества и поточечную слабую эквивалентность $a : N^{\diamond}(J^{\diamond}_{\bullet}) \to X_{\bullet}$. По обычной конструкции Гротендика, функтору $J^{\diamond}_{\bullet}$ отвечает расслоение $J^{\diamond} \to I^o$. Для I-бисимплициальных множеств имеется аналогичная конструкция тотального пространства $N(I,X)$, причем $N(I,N^{\diamond}(J^{\diamond}_{\bullet})) \cong N(J^{\diamond})$. Тем самым, чтобы построить требуемый расслоенный универсальный объект, достаточно доказать, что $N(I,a) : N(J^{\diamond}) \to N(I,X)$ – слабая эквивалентность, или хотя бы эквивалентность Сигала.

Однако в полной общности это неверно, и в принципе не может быть верно.

Действительно, общая теорема гласит, что если мы работаем с фибрантными пространствами Сигала, то $N(I,-)$ переводит слабые эквивалентности в слабые эквивалентности. Однако, хотя X фибрантно, $N^{\diamond}(J^{\diamond}_{\bullet})$ фибрантно только в тривиальных случаях. Более того, взятие фибратной замены не решает проблему – хотя сам нерв тавтологически является пространством Сигала, он, вообще говоря, не является пространством Сигала в гомотопическом смысле, и условие Сигала разрушается при переходе к фибрантной замене. В самом деле, по нашей же общей теореме, вообще любое бисимплициальное множество слабо эквивалентно какому-то нерву биупорядоченного множества – в том числе и такое, которое условию Сигала не удовлетворяет.

В отчетный период, эта трудность сотрудниками лаборатории была успешно разрешена. Для этого, во-первых, был введено понятие t-фибрантного пространства Сигала – это некоторое сильное ослабление условия фибрантности, которое, однако, по-прежнему позволяет доказать, что $N(I,-)$ переводит слабые эквивалентности между t-фибрантными пространствами в слабые эквивалентности. Затем же была дана общая конструкция t-фибрантной замены для симплициальных частично-упорядоченных множеств. Применение это общей конструкции к нашему $N^{\diamond}(J^{\diamond}_{\bullet})$ позволяет контролировать поведение тотальных пространств, и доказать, что в интересующем нас случае $N(I,a)$ все же является эквивалентностью Сигала, что и решает проблему.

Отметим, что конструкция t-фибрантной замены оказалась весьма и весьма нетривиальна. В частности, она использует квилленовский аргумент малого объекта в категории симплициальных частично-упорядоченных множеств, которая очень далека от того, чтобы допускать модельную структуру – т.е. сильно выходит за рамки обычной области применимости для данного аргумента.

3 Классическая геометрия

3.1 Окрестности рациональных кривых

В отчетный период, сотрудниками лаборатории исследовались ростки вложений сферы Римана (она же $\mathbb{P}^1$) в компактные комплексные поверхности. Структура таких вложений в случае, когда степень нормального расслоения, она же индекс самопересечения кривой, неположительна, проста и хорошо известна (см. [24] по поводу случая отрицательной степени и [25] по поводу случая нулевой степени). Более того, в цитированных работах доказано, что в этом случае индекс самопересечения — вообще единственный инвариант ростка.

Ростки вложений (C,U), где $C \cong \mathbb{P}^1$ и U — неособая комплексная поверхность, для которых $(C \cdot C) > 0$, напротив, весьма разнообразны: в работе [26] М. Б. Мишустин показал, что в этом случае пространство таких ростков, с точностью до изоморфизма, бесконечномерно.

Будем говорить, что росток окрестности кривой $C \cong \mathbb{P}^1$ является алгебраическим, если он изоморфен ростку вложения C в некоторую гладкую алгебраическую поверхность. В свете процитированного выше результата Мишустина естественно ожидать, что «большинство» ростков вложений сферы Римана с положительным самопересечением будут неалгебраическими. (Ростки с отрицательным самопересечением все алгебраичны.) В связи с этим интерес представляет задача построения более или менее явных примеров неалгебраических ростков (нормальные формы ростков с положительным самопересечением, найденные в работе [26], не дают возможности напрямую вывести суждение об алгебраичности или неалгебраичности).

Интересная серия примеров неалгебраических ростков была построена в недавней работе Фалла Луза и Лорея [27]. Именно, для каждого $d > 0$ они строят вложение кривой $C \cong \mathbb{P}^1$ в гладкую поверхность, для которого $(C \cdot C) = d$, но поле ростков мероморфных функций вдоль C состоит только из констант. Для кривых на алгебраических поверхностях такое по понятным причинам невозможно, из чего неалгебраичность ростков и вытекает. Более того, в разд. 5.3 статьи [28] те же авторы строят неалгебраический росток окрестности $\mathbb{P}^1$ с самопересечением 1, для которого поле ростков мероморфных функций, напротив, «максимально велико» (имеет над $\mathbb{C}$ степень трансцендентности 2).

В отчетный период сотрудник лаборатории С. М. Львовский построил две серии явных примеров неалгебраических ростков окрестностей $\mathbb{P}^1$ с максимально большим (степени трансцендентности 2) полем ростков мероморфных функций.

Первая из этих серий содержит ростки с индексом самопересечения $\geqslant 5$. Именно, для всякого $m \geqslant 5$ построен неалгебраический росток окрестности кривой $C \cong \mathbb{P}^1$, $(C \cdot C) = m$, который после раздутия в $m-4$ точках превращается в росток окрестности коники на проективной плоскости.

Вторая серия примеров состоит из ростков с индексом самопересечения n для всякого положительного n. Эти ростки также неалгебраичны, и поле ростков мероморфных функций для них также имеет степень трансцендентности 2. Они строятся как разветвленные двулистные накрытия для некоторых окрестностей $\mathbb{P}^1$ с самопересечением $2n$. Эта конструкция является обобщением конструкции из разд. 5.3 работы [28] (для индекса самопересечения 1), но метод доказательства неалгебраичности отличается от использованного в указанной работе.

Доказательства неалгебраичности ростков основываются на том, что алгебраические ростки окрестностей $\mathbb{P}^1$ с положительным самопересечением допускают полную классификацию. Именно, оказывается, что всякий алгебраический росток окрестности кривой $C \subset \mathbb{P}^1$ с самопересечением $d > 0$ изоморфен ростку окрестности гиперплоского сечения некоторой поверхности $F \subset \mathbb{P}^{d+1}$, $\deg F = d$. Боле того, всякий изоморфизм ростков таких вложений (C_1, F_1) и (C_2, F_2) (где F_1 и F_2 — поверхности степени d в $\mathbb{P}^{d+1}$, а C_1 и C_2 — их гиперплоские сечения) индуцирован линейным изоморфизмом между поверхностями $F_1, F_2 \subset \mathbb{P}^{d+1}$. Ключевую роль тут играет следующая лемма:

Лемма. Пусть X — проективная поверхность, для которой $H^1(X, \mathscr{O}_X) = 0$, $C \subset X_{\mathrm{sm}}$ — неприводимая и обильная проективная кривая и r — целое положительное число. Тогда всякий росток мероморфной функции вдоль C, возможно, с полюсом порядка $\leqslant r$ вдоль C, но без других полюсов, индуцирован рациональной функцией на X, не имеющей полюсов вне C.

Из этой леммы классификация алгебраических окрестностей выводится с использованием соображений из теории деформаций и классического результата о классификации поверхностей степени d в $\mathbb{P}^{d+1}$ (см. современное изложение в [29]).

Теперь первая серия примеров неалгебраических окрестностей строится следующим образом. Мы начинаем с (алгебраического, разумеется) ростка окрестности коники на проективной плоскости; нам будет удобнее рассматривать его как росток окрестности гиперплоского сечения квадратичной поверхности Веронезе $v_2(\mathbb{P}^2) \subset \mathbb{P}^5$. Для построения неалгебраического ростка с индексом самопересечения $m \geqslant 5$ мы подвергнем этот росток окрестности коники $m-4$-кратной операции «стягивания» (blowdown).

Именно, склеим нашу окрестность с $m-4$ окрестностями (-1)-кривой на поверхности (это единственный с точностью до изоморфизма — см. выше — росток окрестности $\mathbb{P}^1$ с индексом самопересечения -1). Если теперь стянуть в точки эти $m-4$ штуки попарно непересекающихся (-1)-кривых, то получится окрестность $\mathbb{P}^1$ с самопересечением $4+(m-4)=m$, обладающая следующим свойством: после раздутия в $m-4$ точках из нее получится окрестность гиперплоского сечения $v_2(\mathbb{P}^2)$. Поскольку степень трансцендентности поля ростков мероморфных функций при раздутии сохраняется, для построенной окрестности она также равна 2. При этом алгебраичной эта окрестность быть не может по следующей причине. Если бы она была алгебраична, то была бы изоморфна ростку окрестности гиперплоского сечения некоторой поверхности F степени m в $\mathbb{P}^{m+1}$, а окрестность гиперплоского сечения поверхности Веронезе была бы изоморфна окрестности кривой на поверхности, получающейся раздутием поверхности F в $m-4$ точках. Из сформулированной выше леммы и структуры поверхностей минимальной степени (степени d в $\mathbb{P}^{d+1}$) тогда выводится, что поверхность Веронезе получалась бы последовательностью $m-5$ проекция из поверхности F. Однако все результаты таких проекций для поверхностей минимальной степени можно явно описать, и квадратичная поверхность Веронезе ничьей проекцией, в частности, не является.

Вторая серия примеров строится следующим образом. Для всякого $n>0$ рассмотрим проективную поверхность $F\subset\mathbb{P}^{2n+1}$, $\deg F=2n$ (так что F — опять поверхность минимальной степени); при этом F не должна быть ни конусом, ни (при $n=2$) квадратичной поверхностью Веронезе. Пусть $C\subset F$ — гладкое гиперплоское сечение. Если $U\supset C$, $U\subset F$ — трубчатая окрестность, то $\pi_1(U\setminus C)=\mathbb{Z}/2n\mathbb{Z}$, поэтому существует открытая комплексная поверхность U', являющаяся двулистным разветвленным накрытием U с ветвлением вдоль C. Если $C'\subset U'$ — прообраз C, то индекс самопересечения кривой C' равен n, степень трансцендентности поля ростков мероморфных функций вдоль C' не меньше, чем такая степень для C (тем самым она также равна 2). Утверждается, что росток окрестности $C'\subset U'$ уже неалгебраичен.

Устанавливается эта неалгебраичность с помощью соображений, аналогичных использованным выше. Именно, если росток вложения $C'\subset U'$ алгебраичен, то он продолжается до вложения C' как гиперплоского сечения в некоторую поверхность F' минимальной степени и, более того, разветвленное накрытие $U'\to U$ продолжается до морфизма $F'\to F$. Далее с помощью сведений о структуре поверхностей минимальной степени доказывается, что такой морфизм невозможен.

Описанные выше результаты опубликованы в работе [30].

3.2 Продолжение расслоений на коники

Пусть $\mathbb{K}$ — произвольное поле. Расслоением на коники над гладкой геометрически неприводимой кривой C, определённой над $\mathbb{K}$, называется такой собственный сюръективный морфизм $\phi\colon X \to C$ из гладкой геометрически неприводимой поверхности X, что антиканоническое расслоение ω_X^{-1} имеет положительную степень при ограничении на все кривые в слоях ϕ, и при этом $\phi_*\mathscr{O}_X = \mathscr{O}_C$. Расслоения на коники возникают среди результатов программы минимальных моделей над полем $\mathbb{K}$. Если кривая C некомпактна, то представляет интерес вопрос о том, можно ли компактифицировать X так, чтобы его компактификация имела структуру расслоения на коники над компактификацией кривой C. В случае, если поле $\mathbb{K}$ совершенно (например, имеет нулевую характеристику), ответ на этот вопрос всегда положителен, что нетрудно доказать с помощью разрешения особенностей и относительной программы минимальных моделей. Однако в случае несовершенного поля такой метод приводит лишь к регулярной, но не обязательно гладкой поверхности.

В 2023 году сотрудник лаборатории К. А. Шрамов и В. А. Вологодский получили необходимое и достаточное условие для того, чтобы расслоение на коники над некомпактной кривой продолжалось до расслоения на коники над частичной компактификацией этой кривой. А именно, была доказана следующая теорема.

Теорема 3.1. Пусть $C \subset C'$ — гладкие геометрически неприводимые кривые над полем $\mathbb{K}$, причём $C' \setminus C = P$ — точка с полем вычетов $\mathbb{L}$. Пусть $\phi\colon X \to C$ — расслоение на коники, и пусть $[X_\eta]$ обозначает класс его схемного общего слоя в группе Брауэра

$$\operatorname{Br}\mathbb{K}(C) = \operatorname{Br}\mathbb{K}(C').$$

Обозначим через $\Omega[X_\eta] \subset C'$ дискриминантное множество класса $[X_\eta]$, то есть наименьшее замкнутое подмножество в C', такое что класс $[X_\eta]$ лежит в образе отображения ограничения

$$\operatorname{Br}(C' - \Omega[X_\eta]) \to \operatorname{Br}\mathbb{K}(C').$$

Следующие условия эквивалентны.

(i) Существует расслоение на коники $\phi'\colon X' \to C'$, продолжающее ϕ.

(ii) Либо точка P не лежит в $\Omega[X_\eta]$, либо поле $\mathbb{L}$ сепарабельно над $\mathbb{K}$, и при этом для некоторого этального морфизма $U \to C'$, образ которого содержит точку P, класс $[X_\eta]$ лежит в ядре отображения $\operatorname{Br}\mathbb{K}(C) \to \operatorname{Br}\mathbb{K}(U)$.

(iii) Либо точка P не лежит в $\Omega[X_\eta]$, либо поле $\mathbb{L}$ сепарабельно над $\mathbb{K}$, и при этом класс $[X_\eta]$ лежит в ядре отображения

$$\mathrm{Br}\,\mathbb{K}(C) \to \mathrm{Br}\left(\mathrm{Frac}\,\mathscr{O}^{sh}_{C',P}\right),$$

где $\mathrm{Frac}\,\mathscr{O}^{sh}_{C',P}$ обозначает поле частных строгой гензелизации локального кольца $\mathscr{O}_{C',P}$ относительно вложения $\mathbb{L} \subset \mathbb{L}^{sep}$.

В случае, если кривая C' собственная (то есть является компактификацией C), теорема 3.1 принимает более простую форму.

Теорема 3.2. Пусть $C \subset C'$ — гладкие геометрически неприводимые кривые над полем $\mathbb{K}$, причём кривая C' собственная. Пусть $\phi: X \to C$ — расслоение на коники, и пусть $[X_\eta]$ обозначает класс его схемного общего слоя в группе Брауэра $\mathrm{Br}\,\mathbb{K}(C)$. Следующие условия эквивалентны.

(i) Существует расслоение на коники $\phi': X' \to C'$, продолжающее ϕ.

(ii) Дискриминантное множество $\Omega[X_\eta]$ гладко над $\mathbb{K}$, то есть поля вычетов всех его точек сепарабельны над $\mathbb{K}$, и при этом класс $[X_\eta]$ лежит в ядре отображения

$$\mathrm{Br}\,\mathbb{K}(C) \to \mathrm{Br}\,\mathbb{K}^{sep}(C).$$

Следующее свойство расслоений на коники над собственными кривыми может использоваться для проверки непродолжаемости расслоений на коники вместо более сложных условий теорем 3.1 и 3.2.

Предложение 1. Пусть C — гладкая собственная геометрически неприводимая кривая над полем $\mathbb{K}$, и пусть $\phi: X \to C$ — расслоение на коники. Тогда его схемный общий слой X_η имеет точку над полем $\mathbb{K}^{sep}(C)$.

Препятствие к продолжаемости расслоения на коники, которое даёт предложение 1, действительно доступно для вычисления в конкретных примерах.

Пример 3.3. Пусть $\mathbb{K} = \overline{\mathbf{F}}_2(a)$, где a — трансцендентная переменная. Рассмотрим расслоение на коники $X_{\mathbb{A}^1} \to \mathbb{A}^1$ над полем $\mathbb{K}$, где поверхность $X_{\mathbb{A}^1}$ задана уравнением

$$ax^2 + xy + ty^2 + z^2 = 0 \tag{3.2.1}$$

в $\mathbb{P}^2 \times \mathbb{A}^1$; здесь t — координата на $\mathbb{A}^1$, а $(x:y:z)$ — однородные координаты на $\mathbb{P}^2$. Пусть X_η — коника, которую определяет уравнение (3.2.1) над полем $\mathbb{K}(t)$. Мы утверждаем, что X_η не имеет точек над полем $\mathbb{K}^{sep}((t^{-1}))$ многочленов Лорана от t^{-1} над $\mathbb{K}^{sep}$, и в частности над полем рациональных функций $\mathbb{K}^{sep}(t)$.

Положим $s = t^{-1}$, и перепишем (3.2.1) в виде

$$asx^2 + sxy + y^2 + sz^2 = 0. \tag{3.2.2}$$

Допустим, что коника X_η имеет точку $(\bar{x} : \bar{y} : \bar{z})$ над полем $\mathbb{K}^{sep}((s))$. Можно считать, что $\bar{x}$, $\bar{y}$ и $\bar{z}$ являются рядами Тейлора от s, и хотя бы один из них не делится на s. Запишем их в виде

$$\bar{x} = x_0 + x_1 s + \ldots, \quad \bar{y} = y_0 + y_1 s + \ldots, \quad \bar{z} = z_0 + z_1 s + \ldots.$$

По предположению, хотя бы один из коэффициентов x_0, y_0 и z_0 ненулевой. Из уравнения (3.2.2) видно, что $\bar{y}^2$ делится на s, так что $y_0 = 0$. Используя уравнение (3.2.2) ещё раз, получаем равенство $ax_0^2 + z_0^2 = 0$. Заметим, что $x_0 \neq 0$, так как иначе $z_0 = 0$, а это противоречит нашему предположению. Поэтому

$$\sqrt{a} = \frac{z_0}{x_0} \in \mathbb{K}^{sep},$$

что даёт противоречие.

Мы видим, что коника X_η не имеет точек над полем $\mathbb{K}^{sep}((t^{-1}))$, и в частности над полем $\mathbb{K}^{sep}(t^{-1})$. Таким образом, из предложения 1 следует, что X_η не продолжается до расслоения на коники над $\mathbb{P}^1$.

Замечание 1. Поверхность $X_{\mathbb{A}^1}$, заданная в $\mathbb{P}^2 \times \mathbb{A}^1$ уравнением (3.2.1), имеет компактификацию $\bar{X}$, заданную в $\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^1$ уравнением

$$asx^2 + sxy + ty^2 + sz^2 = 0,$$

где $(s : t)$ — однородные координаты на $\mathbb{P}^1$, а $(x : y : z)$ — однородные координаты на $\mathbb{P}^2$. Поверхность $\bar{X}$ гладка вне точки, заданной уравнениями

$$s = y = ax^2 + z^2 = 0.$$

Заметим, что поверхность $\bar{X}$ не допускает бирационального морфизма из гладкой проективной поверхности над $\mathbb{K}$ (хотя по теореме о разрешении особенностей всегда существует бирациональный морфизм в $\bar{X}$ из регулярной проективной поверхности). Действительно, если $Y \to \bar{X}$ — такой морфизм, то можно применить к Y относительную программу минимальных моделей над $\mathbb{P}^1$ и получить расслоение на коники над $\mathbb{P}^1$, продолжающее расслоение на коники $X_{\mathbb{A}^1} \to \mathbb{A}^1$. Последнее невозможно согласно примеру 3.3.

Вышла из печати ранее написанная работа [31].

3.3 Корегулярность трехмерных многообразий Фано

Многообразия Фано являются классическим объектом, изучаемым в алгебраической геометрии. С точки зрения программы минимальных моделей, многообразия Фано являются простейшим “строительным блоком” для многих других классов многообразий.

Напомним, что проективное многообразие X называется многообразием Фано, если его антиканонический класс $-K_X$ является обильным. Естественным способом изучения многообразий Фано является рассмотрение их (плюри-)антиканонической линейной системы $|-mK_X|$ для $m \geq 1$.

В случае размерности 3 существование гладкого элемента в антиканонической линейной системе было установлено В. Шокуровым (в меньших размерностях это известно классически). Это позволило использовать индуктивные аргументы для сведения изучения трехмерных многообразий Фано к изучению их гладких антиканонических элементов. Этот подход был использован для получения классификации Исковских-Мори-Мукаи гладких многообразий Фано размерности 3. Таким образом мы знаем, что гладкие многообразия Фано в размерности 3 принадлежат к одному из 105 деформационных семейств.

Также полезным оказывается изучать особые элементы в $|-mK_X|$. Для измерения “насколько особыми” могут быть такие элементы, были введены следующие инварианты. Двойственный комплекс дивизора D с простыми нормальными пересечениями на гладком многообразии – это топологическое пространство, которое улавливает комбинаторную сложность этого дивизора. Используя разрешение особенностей, это определение можно обобщить на случай лог-канонических пар, причем согласно работе [32] топологический тип двойственного комплекса (и в частности, его размерность) не зависит от выбора лог-разрешения. Топология двойственных комплексов пар лог Калаби-Яу достаточно хорошо изучена в размерностях не выше 4, см. [33]. В случае многообразий лог Фано, см. также [34], [35]

Понятие регулярности лог-канонической пары было введено В. Шокуровым в работе [36]. По определению, это размерность двойственного комплекса дивизора границы этой пары. В качестве обобщения, понятие регулярности многообразия Фано было введено Х. Морагой в работе [37]. По определению, это максимум регулярностей лог-канонических дополнений на данном многообразии Фано. Для удобства вводится двойственное понятие корегулярности. По определению,

$$\operatorname{coreg}(X) = \dim X - 1 - \operatorname{reg}(X).$$

Можно сказать, что регулярность измеряет, насколько данное многообразие Фано отличается от исключительного. Последнее означает, что любое лог-каноническое дополнение является лог-терминальным по Кавамате.

В последнее время изучение корегулярности многообразий Фано привлекло внимание многих исследователей, см. например работы [37], [38]. Ожидается, что многообразия Фано с корегулярностью 0 должны обладать некоторыми хорошими свойствами. Однако, о корегулярности конкретных семейств многообразий Фано известно немного. В качестве примера можно привести торические многообразия Фано: легко проверить, что они имеют корегулярность 0. В своей работе мы сосредоточились на гладких многообразий Фано размерности 3 (случай меньших размерностей не представляет затруднений). Сотрудниками лаборатории получен следующий результат (в нем мы используем стандартную нумерацию для семейств гладких трехмерных многообразий Фано из классификации Исковских-Мори-Мукаи).

Теорема ([39]). Пусть X – гладкое трехмерное многообразие Фано. Положим

$$\aleph = \{1.1, 1.2\}, \qquad \beth = \{1.3, 1.4\}, \qquad \gimel = \{1.5\},$$

$$\daleth = \{1.6, 1.7, 1.8, 1.9, 1.10, 1.11, 2.1, 10.1\}.$$

Тогда

(i) если X – любое гладкое трехмерное многообразие Фано, принадлежащее любому семейству, кроме семейств в $\aleph, \beth, \gimel, \daleth$, то $\operatorname{coreg}(X) = 0$,

(ii) если X – общий элемент в одном из семейств $\aleph$, то $\operatorname{coreg}(X) \geq 1$,

(iii) если X – общий элемент в одном из семейств $\beth$, то $\operatorname{coreg}_1(X) = 2$,

(iv) если X – общий элемент в семействе $\gimel$, то $\operatorname{coreg}(X) \leq 1$,

(v) если X – общий элемент в одном из семейств $\daleth$, то $\operatorname{coreg}(X) = 0$,

В этом результате под первой корегулярностью $\operatorname{coreg}_1(X)$ мы имеем в виду значение корегулярности, которое может быть получено на элементах антиканонической линейной системы. Мы ожидаем, что наш результат может быть использован в теории зеркальной симметрии, а также что он послужит отправной точкой для дальнейших исследований, в том числе для вычисления корегулярности для других классов многообразий.

3.4 Элементарное описание nef-конуса неприводимых голоморфных симплектических многообразий

Описание nef-конуса (или двойственного ему конуса Мори) является очень важной задачей в алгебраической геометрии для применения в программе минимальных моделей. В то же время, описание кэлерова конуса является важной задачей в комплексной геометрии, что является трансцендентным аналогом nef-конуса. Для K3 поверхности S, то есть такой гладкой компактной комплексной поверхности, у которой канонический класс K_S тривиальный и которая имеет нулевую иррегулярность, известно, что nef (или кэлеров) конус высекается ортогональными гиперповерхностями к (-2)-кривым в положительном конусе. Напомним определение положительного конуса для поверхности.

Определение. Пусть S – компактная проективная (кэлерова) поверхность. Рассмотрим множество всех элементов в пространстве Нерона–Севери $\mathrm{NS}(S)_{\mathbb{R}}$ (в пространстве $H^{1,1}(S)_{\mathbb{R}}$), что их самопересечение положительно. Это множество имеет две связные компоненты. Тогда положительным конусом $\mathrm{Pos}(S)$ будем называть ту компоненту, которая содержит обильный (кэлеров) конус.

Естественно возникает вопрос об описании nef конуса для обобщения K3 поверхностей в большей размерности, то есть для неприводимых голоморфных симплектических многообразий.

Определение. Неприводимое голоморфное симплектическое многообразие X – это гладкое компактное кэлерово многообразие с тривиальной фундаментальной группой, у которого $H^0(X,\Omega_X^2)$ порождается всюду невырожденной голоморфной 2-формой.

Их некоторая схожесть с поверхностями заключается в том, что на вторых когомологиях возникает невырожденная билинейная форма, называемая формой Бовилля-Богомолова, которая зависит только от топологии многообразия.

Определение (ср. [40, Theorem 4.7] и [41, Remark 23.15]). Пусть X – неприводимое голоморфное симплектическое многообразие размерности $2n$. Тогда на вторых когомологиях $H^2(X,\mathbb{Z})$ можно ввести невырожденную билинейную форму q, которая называется формой Бовилля-Богомолова и которая удовлетворяет следующим условиям:

– Сигнатура формы q на $H^2(X,\mathbb{Z})$ имеет вид $(3, b_2(X)-3)$, а ее ограничение на $H^{1,1}(X,\mathbb{R})$ имеет сигнатуру $(1, b_2(X)-3)$.

– Существует константа $c \in \mathbb{R}_{>0}$ зависящая только от многообразия X, что $\int_X \alpha^{2n} = cq(\alpha)^n$.

Заметим, что благодаря форме Бовилля-Богомолова имеется естественное определение положительного конуса. А именно,

Определение. Пусть X – неприводимое голоморфное симплектическое многообразие. Рассмотрим множество всех элементов в пространстве Нерона–Севери $\alpha \in \mathrm{NS}(X)_{\mathbb{R}}$ (в пространстве $H^{1,1}(X)_{\mathbb{R}}$), что $q(\alpha) > 0$. Это множество имеет две связные компоненты. Тогда положительным конусом $\mathrm{Pos}(S)$ будем называть ту компоненту, которая содержит обильный (кэлеров) конус.

Для неприводимых голоморфных симплектических многообразий описание nef конуса существенно сложнее. Однако, для известных типов неприводимых голоморфных симплектических многообразий описание также можно предъявить. Например, в работе А. Байера и Э. Макри (см. [42]) и в работе К. Ёшиока (см. [43]), используя сложную технику стабильности по Бриджленду, было дано описание nef-конуса для неприводимых голоморфных симплектических многообразий типа K3 и типа Куммера. Под многообразиями типа K3 мы подразумеваем деформации гильбертовых схем точек на K3 поверхностях, а под многообразиями типа Куммера мы подразумеваем деформации Куммеровых многообразий.

Однако в серии работ сотрудников лаборатории Е. Ю. Америк и М. С. Вербицкого (см. список литературы в [44]) было показано, что для неприводимого голоморфного симплектического многообразия X гиперповерхности в положительном конусе, которыми ограничивается nef (или кэлеров) конус, являются множеством ортогональных относительно формы Бовилля-Богомолова дивизоров к рациональным кривым с ограниченным квадратом формы Бовилля-Богомолова. Более того в работе тех же авторов [45] для неприводимых голоморфных симплектических многообразий типа K3 в малых размерностях было явно представлено описание таких рациональных кривых. Для этого нужно было ввести определение MBM класса:

Определение. Пусть X – неприводимое голоморфное комплексное многообразие. Класс$\alpha \in H^{1,1}(X,I) \cap H^2(X,\mathbb{Q})$ относительно комплексной структуры I на X называется MBM если для некоторой монодромии $\gamma \in \mathrm{Mon}(X)$ подпространство $\gamma(\alpha)^{\perp} \subset$

$H^{1,1}(X,I)$содержит стенку кэлерова конуса бирациональной модели (X,I') многообразия (X,I).

В отчетный период сотрудниками лаборатории было дано описание nef конуса для многообразий типа K3 и многообразий типа Куммера для произвольных размерностей, не требующее сложную технику стабильности по Бриджленду. Иными словами, были доказаны две следующие теоремы.

Теорема. Пусть X – неприводимое голоморфное симплектическое многообразие типа K3. Пусть $\alpha \in H^2(X,\mathbb{Z})$ – это примитивный класс, и обозначим за $\widehat{\alpha} \in H_2(X,\mathbb{Z})$ двойственный гомологичный класс к α относительно формы Бовилля-Богомолова q. Также за q мы обозначим ее расширение на двойственную решетку $H_2(X,\mathbb{Z}) \hookrightarrow H^2(X,\mathbb{Z}) \otimes \mathbb{Q}$. Пусть $d(\alpha)$ – это делимость класса α и $\delta(\alpha)$ – образ $\alpha/d(\alpha)$ в дискриминантной группе решетки $H^2(X,\mathbb{Z})$. Тогда α является MBM классом тогда и только тогда когда выполнено одно из следующих условий.

(i) $q(\widehat{\alpha}) = -\frac{1}{2(n-1)}$ и $\delta(\alpha) = 1$;

(ii) существует натуральное число $b \in [0, n-1]$ и натуральное число a, удовлетворяющее условию
$$-2 \leqslant 2a < \frac{b^2}{2(n-1)} \text{ и } \delta(\alpha) = b,$$
такое что $q(\widehat{\alpha}) = 2a - \frac{b^2}{2(n-1)}$.

Теорема. Пусть X – неприводимое голоморфное симплектическое многообразие типа Куммера размерности $2n \geqslant 4$. Пусть $\alpha \in H^2(X,\mathbb{Z})$ – примитивный класс, и обозначим за $\widehat{\alpha} \in H_2(X,\mathbb{Z})$ двойственный гомологичный класс к α относительно формы Бовилля-Богомолова q. Также за q мы обозначим ее расширение на двойственную решетку
$$H_2(X,\mathbb{Z}) \hookrightarrow H^2(X,\mathbb{Z}) \otimes \mathbb{Q}.$$
Пусть $d(\alpha)$ – это делимость класса α и $\delta(\alpha)$ – образ $\alpha/d(\alpha)$ в дискриминантной группе решетки $H^2(X,\mathbb{Z})$. Тогда α является MBM классом тогда и только тогда когда выполнено одно из следующих условий.

(1) $q(\widehat{\alpha}) = -\frac{1}{2(n+1)}$ и $\delta(\alpha) = 1$;

(2) существует натуральное число $b \in [1, n+1]$ и натуральное число a, удовлетворяющее условию
$$0 \leqslant 2a < \frac{b^2}{2(n+1)} \text{ и } \delta(\alpha) = b,$$
такое что $q(\widehat{\alpha}) = 2a - \frac{b^2}{2(n+1)}$.

3.5 Корегулярность гладких многообразий Фано размерностей 2 и 3

При изучении алгебраических многообразий часто бывает полезно изучить дивизоры на этом многообразии. Для многообразий Фано особую роль играют элементы линейных систем $|-nK_X|$. В. Шокуровым было показано, что в таких линейных системах всегда есть гладкий элемент (и, как следствие, общий элемент гладкий). Иногда бывает полезно зайти с другой стороны и изучить, насколько особыми могут быть вырожденные представитель этих линейных систем. При этом, конечно, следует рассматривать элементы не из самой линейной системы $|-nK_X|$, а нормированные $\mathbb{Q}$-дивизоры $\frac{1}{n}|-nK_X|$, и стоит ограничиться лог-каноническими дивизорами такого вида.

Для лог-канонических дивизоров одним из инвариантов, которые измеряют, насколько особенность сложная, может являться количество дивизоров с минимально возможной дискрепантностью -1. Известно, что это число конечно, и все такие дивизоры реализуются на любом разрешении особенностей. Однако более правильным инвариантом является размерность двойственного комплекса пары (X,D). Чтобы его определить, рассмотрим некоторое разрешение особенностей $(\widetilde{X},\widetilde{D})$ этой пары, т.е. пару такую, что $\widetilde{X}$ неособо, а дивизор $\widetilde{D}$ имеет простые нормальные пересечения. После этого можно рассмотреть только те компоненты $\widetilde{D}$, которые имеют кратность 1, и построить по ним клеточный комплекс следующим образом: k-мерным клеткам соответствуют непустые пересечения $\widetilde{D}_1\cap\widetilde{D}_2\cap\cdots\cap\widetilde{D}_k$ компонент дивизора $\widetilde{D}$ с естественными функциями склейки. Размерность этого комплекса называется регулярностью пары (X,D). Известно, что это число не зависит от выбора разрешения особенностей пары. В случае, когда двойственный комплекс является пустым, мы полагаем по определению, что регулярность равна -1, Кроме того, из определения дивизоров с простыми нормальными пересечениями очевидно, что регулярность не превосходит $\dim X-1$. Корегулярностью называется число $\operatorname{coreg}(X,D)=\dim X-1-\operatorname{reg}(X,D)$. Иными словами, чем меньше это число, тем более особым является дивизор D. Корегулярностью многообразия X называется минимум из корегулярностей пар (X,D), где D лежит в семействе $\frac{1}{n}|-nK_X|$ для некоторого n.

Если рассматривать только дивизоры из системы $\frac{1}{n}|-nK_X|$, аналогичным образом вводятся понятия n-регулярности и n-корегулярности. При этом 1- и 2-корегулярность имеют ключевую роль во всей этой науке, согласно следующей теореме, доказанной Ф. Фигероа, С. Филипацци, Х. Морагой и Д. Пенгом:

Теорема. Если X – гладкое многообразие с $\operatorname{coreg} X=0$, то $\operatorname{coreg}_1 X=0$ или $\operatorname{coreg}_2 X=0$.

Иными словами, если на многообразии есть максимально особый дивизор, то его стоит искать в системах $|-K_X|$ и $\frac{1}{2}|-2K_X|$.

В отчётный период сотрудниками лаборатории изучалась корегулярность гладких многообразий Фано размерности 2 и 3. Размерность 2 была разобрана ещё Х. Морагой, но в его статье была ошибка – он считал, что все многообразия Фано имеют минимально возможную корегулярность, однако для некоторых вырожденных поверхностей дель Пеццо степени 1 (тех, у которых все особые кривые в $|-K_X|$ каспидальны) корегулярность равна 1. В случае размерности 3 была доказана следующая теорема:

Теорема. Пусть X – гладкое трёхмерное многообразие Фано. Тогда

- если X имеет тип, отличный от 1.1-1.11, 2.1 и 10.1 (т.е. принадлежит одному из 92 оставшихся семейств), то X имеет корегулярность 0;
- если X является общим представителем семейств 1.6-1.11, 2.1 или 10.1, то X имеет корегулярность 0;
- если X является общим представителем семейства 1.5 (т.е. сечением грассманиана $\mathrm{Gr}(2,5)$ квадрикой и двумя гиперплоскостями или двойное накрытие сечение грассманиана $\mathrm{Gr}(2,5)$ тремя гиперплоскостями), то $\mathrm{coreg}\,X \leq 1$;
- если X является общим представителем семейств 1.1 или 1.2 (т.е. многообразием дель Пеццо степени 1, квартикой или двойным накрытием квартики с ветвлением в дивизоре степени 8), то $\mathrm{coreg}\,X \geq 1$;
- если X является общим представителем семейств 1.3 или 1.4 (т.е. полным пересечением трёх квадрик или квадрики и кубики), то $\mathrm{coreg}_1 X = 2$.

К сожалению, текущими методами разобрать случай 2-корегулярности для многообразий типа 1.3 и 1.4 не удалось из-за гигантского количества случаев и сложных вычислений. Тем не менее, работа в этом направлении продолжается, и планируется изучить этот инвариант. Кроме того, планируется уточнить результат для многообразий типа 1.1, 1.2 и 1.5.

3.6 Константы Жордана группы Кремоны ранга два

Группа Кремоны, которую ввел в рассмотрение в середине 19 века Луиджи Кремона, является классическим объектом изучения бирациональной геометрии. В частности, классическим является вопрос описания ее конечных подгрупп. В статье [46] были классифицированы классы сопряженности конечных подгрупп в группе Кремоны ранга 2 над алгебраически замкнутыми полями. Однако эта классификация оказывается достаточно громоздкой и не оставляет надежд на обозримый ответ в случае алгебраически незамкнутых полей. Поэтому для произвольных полей предлагается ограничиться оценкой "сложности"конечных подгрупп. Для этого удобно ввести понятие жордановости бесконечных групп, и понятие констант Жордана.

Определение ([47, Definition 2.1]). Пусть G — конечная группа. Назовем константой Жордана $J(G)$ наименьший индекс нормальной абелевой подгруппы в G. Пусть Γ — произвольная группа. Тогда Γ называется жордановой, если величина

$$J(\Gamma) = \sup_{G \subseteq \Gamma,\ |G| < \infty} (J(G))$$

конечна. Если группа жорданова, то число $J(\Gamma)$ называется константой Жордана группы Γ.

В 2008 году в статье [48] было доказано, что группа $\mathrm{Cr}_2(K)$ является жордановой над полями характеристики ноль. А в 2017 году в статье [49] были найдены константы Жордана групп Кремоны ранга 2 над алгебраически замкнутыми полями характеристики ноль, а также над полями вещественных и рациональных чисел.

Теорема ([49, Theorems 1.9, 1.10, 1.11]). Пусть K — алгебраически замкнутое поле характеристики 0. Тогда

$$J(\mathrm{Cr}_2(\mathrm{K})) = 7200, \quad \mathrm{J}(\mathrm{Cr}_2(\mathbb{R})) = \mathrm{J}(\mathrm{Cr}_2(\mathbb{Q})) = 120.$$

Сотрудникам лаборатории удалось обобщить этот результат на случай произвольных полей характеристики 0. А именно, была доказана следующая теорема.

Теорема. Пусть K — поле характеристики 0. Константа Жордана группы $\mathrm{Cr}_2(\mathrm{K})$ может принимать следующие значения: 7200, 168 или 120. Более того,

(i) $J(\mathrm{Cr}_2(\mathrm{K})) = 7200$ тогда и только тогда, когда $\sqrt{5} \in K$, и -1 является суммой двух квадратов в K;

(ii) $J(\mathrm{Cr}_2(\mathrm{K})) = 168$ тогда и только тогда, когда $\sqrt{5} \notin K$ и $\sqrt{-7} \in K$;

(iii) $J(\mathrm{Cr}_2(\mathrm{K})) = 120$ тогда и только тогда, когда выполнено одно из двух условий:

- $\sqrt{5} \in K$, и -1 не является суммой двух квадратов в K;
- $\sqrt{5} \notin K$, и $\sqrt{-7} \notin K$.

3.7 Конечные квазипростые группы, действующие на рационально связных трехмерных многообразиях

Группы бирегулярных, бирациональных и бимероморфных автоморфизмов алгебраических и компактных комплексных многообразий – классический и очень важный раздел математики. Давно устоялось мнение, что группа симметрий геометрического объекта очень хорошо отражает его свойства и позволяет понять геометрию этого объекта в целом. С другой стороны, изучение групп симметрий обогатило и явилось источником новых задач для абстрактной теории групп, а также теории алгебраических групп и групп Ли. Несмотря на значительный прогресс в исследованиях групп автоморфизмов, в этой области остается очень много нерешенных задач и открытых проблем.

Одним из способов исследовать группы преобразований – это изучать структуры их конечных подгрупп. Ранее в работе [50] были классифицированы простые конечные подгруппы в группе в группе бирациональных преобразований трехмерного пространства (группе Кремоны) $\mathbf{Cr}_3(\Bbbk)$:

Теорема 3.4 ([50]). Пусть $G \subset \mathbf{Cr}_3(\mathbb{C})$ – неабелева простая конечная подгруппа. Тогда G изоморфна одной из следующих групп:

$$\mathfrak{A}_5, \quad \mathfrak{A}_6, \quad \mathfrak{A}_7, \quad \mathrm{PSL}_2(\mathbf{F}_7), \quad \mathrm{SL}_2(\mathbf{F}_8), \quad \mathrm{PSp}_4(\mathbf{F}_3).$$

Все возможности реализуются.

В отчетном году сотрудниками лаборатории была опубликована работа [51], в которой изучались квазипростые конечные подгруппы в группах рациональных и рационально связных многообразий. В работе доказана следующая теорема.

Теорема 3.5 ([51]). Каждая конечная квазипростая непростая группа, которая точно действует на рационально связанную тройку, изоморфна одной из следующих групп

$$\mathrm{SL}_2(\mathbf{F}_7), \quad 2.\mathfrak{A}_5, \quad 2.\mathfrak{A}_6, \quad 3.\mathfrak{A}_6, \quad 6.\mathfrak{A}_6.$$

Более того, группы $2.\mathfrak{A}_5$ и $3.\mathfrak{A}_6$ действует добросовестно на рациональных трехмерных многообразиях, а группа $\mathrm{SL}_2(\mathbf{F}_7)$ действует добросовестно на рационально связанных трехмерных многообразиях.

К сожалению, на данный момент не известно, могут ли группы $2.\mathfrak{A}_6$ и $6.\mathfrak{A}_6$ действовать на рационально связных трехмерных многообразиях и не знаем, может ли $\mathrm{SL}_2(\mathbf{F}_7)$ действовать на рациональных трехмерных многообразиях.

Основная идея доказательства – применение эквивариантной программы минимальных моделей (G-ПММ). Для того, чтобы применить эту технику, нужно сначала регуляризовать бирациональное действие, т. е. построить его G-бирациональную модель. Это возможно благодаря следующему несложному факту.

Лемма (лемма о регуляризации). Пусть X – алгебраическое многообразие и пусть $G \subset \mathsf{Bir}(\mathsf{X})$ – конечная группа его бирациональных преобразований. Тогда существует неособое проективное G-многообразие Y и бирациональное G-отображение $\Psi : X \dashrightarrow Y$.

Применяя лемму о регуляризации, мы можем считать, что действие группы G реализуется на некотором неособом проективном G-многообразии X. Применяя эквивариантную ПММ, мы можем считать, что X имеет эквивариантную структуру расслоенного пространства Мори (РПМ) $f : X \to Z$ (поскольку X рационально связно). Если $\dim Z > 0$, то можно воспользоваться стандартной точной последовательностью

$$1 \longrightarrow G_f \longrightarrow G \longrightarrow G_Z \longrightarrow 1,$$

где G_f – максимальная подгруппа в G, действующая тривиально на Z, а G_Z – подгруппа в $\mathsf{Aut}(Z)$. Так как G – квазипростая группа, то эта последовательность позволяет сделать некоторые заключения о структуре группы G. Далее используются факты из теории представлений и классификация подгрупп в двумерной группе Кремоны. Еще одним важным элементом доказательства является редукция проблемы к изучению действия факторгруппы $G/z(G)$ по центру на фактормногообразии $X/z(G)$. При этом существенно используется теорема 3.4.

3.8 Примеры нерациональных факторов поверхностей дель Пеццо степени 8

В отчетный период сотрудниками лаборатории также изучались факторы поверхностей дель Пеццо степени 8 над алгебраически незамкнутым полем, и доказан ряд структурных результатов о таких факторах.

Пусть $\Bbbk$ — алгебраически незамкнутое поле характеристики 0. В этом случае на многообразии X, определённым над этим полем, может не быть точек, определённых над этим полем. Наиболее известными примерами таких многообразий являются коники без точек. Действительно, рассмотрим проективную плоскость, например, над полем $\mathbb{R}$. Тогда коника, заданная уравнением $x^2 + y^2 + z^2 = 0$, определена над $\mathbb{R}$, но на ней нет точек, определённых над $\mathbb{R}$. Для поля вещественных чисел все коники без точек изоморфны, однако в общем случае это не так, а каждой конике ставится в соответствие элемент порядка 2 в группе Брауэра, причём коники изоморфны тогда и только тогда, когда соответствующие им элементы совпадают.

Гладкая проективная поверхность X называется поверхностью дель Пеццо, если её антиканонический класс $-K_X$ обилен. Важным инвариантом для поверхностей дель Пеццо является её степень, равная K_X^2. Степень поверхности дель Пеццо принимает значения от 1 до 9. Поверхности дель Пеццо степени 9 называются поверхностями Севери–Брауэра. Такие поверхности становятся изоморфными проективной плоскости при переходе к алгебраическому замыканию поля. Более того, если на поверхности дель Пеццо степени 9 есть хотя бы одна точка, определённая над полем, то эта поверхность является проективной плоскостью. При этом поверхности дель Пеццо степени 9 без точек не обязаны быть изоморфными (они, как и коники без точек, параметризуются элементами группы Брауэра).

Следующим случаем являются поверхности дель Пеццо степени 8. Такая поверхность либо изоморфна раздутию проективной плоскости в одной точке (на таких поверхностях всегда есть $\mathbb{k}$-точка), либо является формой $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$. Предположим, что на такой поверхности X действует конечная группа G автоморфизмов, переставляющая множители. В этом году исследовалась бирациональная классификация факторповерхностей X/G. В частности, всегда ли такие факторы являются рациональными (то есть бирационально эквивалентными проективной плоскости).

Стоит отметить, что в случае, когда на поверхности дель Пеццо есть $\mathbb{k}$-точка, верна следующая теорема.

Теорема ([52, Corollary 1.2]). Пусть $\mathbb{k}$ — поле характеристики ноль, X — гладкая геометрически рациональная поверхность над $\mathbb{k}$ такая, что $X(\mathbb{k}) \neq \varnothing$, а G — конечная группа автоморфизмов X. Если $K_X^2 \geqslant 5$, то факторповерхность X/G является $\mathbb{k}$-рациональной.

Таким образом, для поверхностей дель Пеццо степени 5 и выше факторы по конечной группе могут быть нерациональными только в том случае, когда на них нет точек. Для поверхностей дель Пеццо степени 9 имеется явный результат о том, когда фактор рационален, а когда нет.

Теорема ([53, Теорема 2]). Пусть S — нетривиальная поверхность Севери–Брауэра над полем $\mathbb{k}$ характеристики ноль, а G — конечная подгруппа в $\mathrm{Aut}(S)$. Тогда фактор S/G является $\mathbb{k}$-рациональным тогда и только тогда, когда $|G|$ делится на 3. Иначе фактор S/G бирационально эквивалентен S.

Для поверхностей дель Пеццо степени 8 можно показать, что фактор по группе нечётного порядка всегда бирационально эквивалентен исходной поверхности. Однако, в отличие от поверхностей Севери–Брауэра, можно построить примеры нерациональных факторов для групп произвольного порядка: достаточно рассмотреть фактор произведения двух нерациональных коник по циклической группе, действующей эффективно на одной из этих коник и тривиально на другой. Также можно построить примеры групп чётного порядка, эффективно действующих на каждом из множителей, факторы по которым не будут рациональны.

Наиболее нетривиальным случаем является действие группы чётного порядка, которое переставляет множители. Оказывается, что в этом случае в случае порядка группы, не делящегося на 8, факторповерхность всегда будет рациональна. Однако в случае действия группы порядка 8 можно построить пример нерационального фактора. Для этого можно рассмотреть поверхность дель Пеццо X степени 8, изоморфную ограничению скаляров $R_{\mathbb{Q}(\sqrt{3})/\mathbb{Q}}C$, где C — коника над $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$, заданная уравнением $x^2-(3+\sqrt{3})y^2+z^2=0$. Оказывается, что на такой поверхности действует циклическая группа G порядка 8, причём G переставляет множители в $\overline{X}\cong\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1$, а фактор X/G не является рациональным.

3.9 Полустабильные модели обобщенных многообразий Севери-Брауэра

Сотрудниками лаборатории также изучались обобщенные многообразия Севери-Брауэра и их полустабильные модели.

Пусть R – кольцо дискретного нормирования, с полем частных $\mathbb{K}$. Пусть A – центральная простая алгебра над $\mathbb{K}$ размерности n^2. Обобщенным многообразием Севери-Брауэра $X_{m,A}$ называется скрученная форма грассманиана над $\mathbb{K}$, точками которой являются левые идеалы размерности mn в алгебре A.

Морфизм $X\to \operatorname{Spec} R$ называется полустабильным, если для любой точки $x\in X$ существует U и морфизм $p:U\to X$, что

(i) $x\in p(U)$ и p – этальный морфизм.

(ii) Существуют такие n и m, что из U имеется этальный морфизм в $\operatorname{Spec}\frac{R[x_1,\ldots,x_n]}{(x_1\cdot\ldots\cdot x_m-\pi)}$, где π – униформизующая.

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{\text{etale}} & \operatorname{Spec}\frac{R[x_1,\ldots,x_n]}{(x_1\cdot\ldots\cdot x_m-\pi)} \\ {\scriptstyle \text{etale}}\downarrow{\scriptstyle p} & & \\ X & & \end{array}$$

$\mathbb{K}$-алгебра A называется ручной, если существует конечное этальное расширение Галуа $R \subset R'$ такое, что R' – локально, $\mathbb{K}' = \mathrm{Frac}\, R'$ – поле расщепления для алгебры A, т.е. $A \bigotimes_{\mathbb{K}} \mathbb{K}' \cong \mathrm{Mat}_n(\mathbb{K}')$. В условиях совершенности поля вычетов R любая $\mathbb{K}$-алгебра A будет ручной. Далее предполагем, что поле вычетов совершенно.

Мы хотим построить собственную полустабильную модель $X_{m,A}$ над R. В случае $n = 2$ конструкция такой модели была предложена Артиным и Мамфордом. Для произвольного n на основе теории порядков [54] был сформулирован способ построения модели для $X_{m,A}$, которая в случае $m = 1$ действительно является полустабильной. В исследовании вопроса полустабильности для произвольного m было доказано, что при замене базы на R' из определения ручной алгебры полустабильная модель является колчанным грассманианом, изучавшимся в работах У. Гёрца о локальных моделях многообразий Шимуры [55]. Гипотеза состоит в том, что для $m > 2$ колчанный грассманиан не является полустабильным, на данный момент происходит разработка примера такого многообразия, не обладающего указанным свойством.

4 Специальные многообразия

4.1 Локально конформно кэлеровы многообразия

В отчетный период, сотруниками лаборатории было продолжение изучение геометрии локально конформно кэлеровых (LCK) многообразий. Книга “Principles of LCK geometry” сотрудника лаборатории М. Вербицкого, совместная с Ливиу Орнеа, принята к печати в издательство Birkhauser, серия “Progress of mathematics”. В книге 747 страниц. Работа над книгой заняла последние 10 лет, и продолжается по мере подготовки к печати. Вот ее краткое содержание.

LCK (локально конформно кэлерово) многообразие - это комплексное многообразие, допускающее кэлерово накрытие с монодромией, действующей через гомотетии. Яркими примерами являются многообразия Хопфа и их подмногообразия. Книга представляет собой введение в принципы геометрии LCK (первые две части) и ее текущее состояние (последняя часть). Предполагается, что она будет доступна для магистрантов и аспирантов, интересующихся комплексной геометрией. В книге много упражнений разного уровня сложности. Мы завершаем книгу списком открытых вопросов.

Кроме книги, у М. Вербицкого вышло значительное количество статей и препринтов.

В частности, совместно с Ливиу Орнеа, Вербицкий изучал бимероморфную геометрию некэлеровых многообразий. Эта теория должна играть ту же роль в отношении комплексной геометрии, что бирациональная геометрия играет в отношении алгебраической. Первым шагом к пониманию бимероморфной природы комплексных многообразий стал препринт “Bimeromorphic geometry of LCK manifolds” (Liviu Ornea, Misha Verbitsky). В нем авторы работают в предположении, что кэлерова форма точна на минимальном кэлеровом накрытии LCK-многообразия M. Авторы доказывают, что тогда любое бимероморфное отображение $M' \to M$ на самом деле голоморфно; другими словами, M имеет единственную минимальную модель. Это можно применить к широкому классу LCK-многообразий, таким как многообразия Хопфа, их комплексные подмногообразия, и многообразия Олеклауса-Тома.

Другой новый препринт Вербицкого, также совместный с Ливиу Орнеа, это статья “Holomorphic tensors on Vaisman manifolds”. LCK (локально конформно-кэлерово) многообразие можно также определить как комплексное многообразие, допускающее эрмитову форму ω, которая удовлетворяет условию $d\omega = \omega \wedge \theta$, где θ – замкнутая 1-форма, называемая формой Ли. LCK-многообразие называется вайсмановым, если форма Ли параллельна относительно связности Леви-Чивита. Двойственное векторное поле, называемое полем Ли, является голоморфным и киллинговым. Доказано, что любой голоморфный тензор на многообразии Вайсмана инвариантен относительно поля Ли. Это используется для вычисления размерности Кодаиры многообразий Вайсмана. Авторы доказывают, что размерность Кодаиры многообразия Вайсмана, полученного как Z-фактор алгебраического конуса над проективным многообразием X, равна размерности Кодаиры многообразия X. Это можно применить для доказательства деформационной устойчивости размерности Кодаиры многообразий Вайсмана.

4.2 Жесткие потоки и квазиморфизмы Баржа-Жиса

Сотрудники лаборатории также занимались изучением потом на комплексных многообразиях и квазиморфизмов их фундаментальных групп.

В препринте "Rigid currents on compact hyperkahler manifolds" написанном сотрудником лаборатории М. Вербицким совместно с Нессимом Сибони и Андреем Солдатенковым, авторы доказывают, что значительное число положительных потоков, представляющих классы на границе кэлерова конуса, жесткие, то есть имеют единственного положительного представителя в своем классе когомологий.

Жесткий класс когомологий на комплексном многообразии – это класс, который представляется единственным замкнутым положительным потоком. Положительный поток, представляющий жесткий класс, также называется жестким. Для компактного кэлерова многообразия X все собственные векторы гиперболических автоморфизмов, действующих на $H^{1,1}(X)$, имеющие неединичные собственные значения, являются жесткими классами. Такие классы всегда параболичны, т. е. принадлежат границе кэлерова конуса и имеют нулевой объем. Авторы изучают параболические (1,1)-классы на компактных гиперкэлеровых многообразиях с $b_2 > 6$. Они показывают что параболический класс является жестким, если он не ортогонален рациональному вектору относительно формы Богомолова-Бовиля-Фуджики. Отсюда следует, что общий параболический класс на гиперкэлеровом многообразии является жестким.

В статье "некоммутативные квазиморфизмы Баржа-Жиса", написанной совместно с Майклом Бранденбурским, Вербицкий строит новые примеры квазиморфизмов со значениями в некоммутативной группе. (Некоммутативный) квазиморфизм Улама – это отображение q группы Γ в топологическую группу G такое, что $q(xy)q(y)^{-1}q(x)^{-1}$ принадлежит фиксированному компактному подмножеству группы

G. Обобщая конструкцию Баржа и Жиса, авторы строят семейство квазиморфизмов на фундаментальной группе компактного многообразия M отрицательной секционной кривизны, принимающее значения в произвольной группе Ли. Эта конструкция, обобщающая квазиморфизмы Баржа-Жиса, сопоставляет квазиморфизм любому главному G-расслоению со связностью на . Капович и Фудживара показали, что все квазиморфизмы, принимающие значения в дискретной группе, могут быть построены из гомоморфизмов групп и их расширений. Авторы строят квазиморфизмы типа Баржа-Жиса, приводя контрпримеры к теореме Каповича и Фудзивары для квазиморфизмов, принимающих значения в группе Ли. Эта конструкция также обобщает результат, доказанный Д. Кажданом в его статье "Об ε-представлениях". Каждан доказал, что для любого $\varepsilon > 0$ существует ε-представление фундаментальной группы римановой поверхности рода 2, которое не может быть 1/10-аппроксимировано представлением. Авторы доказывают, что это верно для любого компактного многообразия отрицательной секционной кривизны.

4.3 Сасакиевы многообразия и многообразия Хопфа

Изучались также специальные классы комплексных многообразий, известные как сасакиевы многообразия и многообразия Хопфа.

Статья сотрудника лаборатории М. Вербицкого "Пучки Малля и плоские связности на многообразиях Хопфа" (Mall bundles and flat connections on Hopf manifolds), совместная с Ливиу Орнеа, была принята к публикации в Annales de l'Inst. Fourier. Вот что сделано в этой статье.

Расслоение Малля на многообразии Хопфа H - это голоморфное векторное расслоение, прообраз которого на универсальное накрытие H тривиален. Авторы определяют резонансные и нерезонансные расслоения Малля, обобщая понятие резонанса из ОДУ, и доказываем, что нерезонансное расслоение Малла всегда допускает плоскую голоморфную связность. Авторы используют это наблюдение для доказательства версии теоремы о линеаризации Пуанкаре-Дюлака, показывающей, что любое нерезонансное обратимое голоморфное сжатие комплексного пространства линейно в соответствующих голоморфных координатах. Авторы определяют понятие резонанса в многообразиях Хопфа и показываем, что все нерезонансные многообразия Хопфа линейны; ранее этот результат был получен Кодаирой с помощью теоремы Пуанкаре-Дюлака.

Статья М. Вербицкого в соавторстве с Л. Орнеа "Non-linear Hopf manifolds are locally conformally Kahler" была опубликована: The Journal of Geometric Analysis, volume 33, Article number: 201 (2023). Вот что сделано в этой статье.

Многообразие Хопфа – это фактор $\mathbb{C}^n \backslash 0$ по действию циклической группы, порожденной голоморфными сжатиями. Многообразия Хопфа диффеоморфны $S^{2n-1} \times S^1$, и следовательно, не допускают кэлеровых метрик. Известно, что многообразия Хопфа, определяемые линейными сжатиями (называемые линейными многообразиями Хопфа), допускают локально конформно-кэлерову (LCK) структуру. Вербицкий и Орнеа доказали, что многообразия Хопфа, определяемые нелинейными голоморфными сжатиями, допускают голоморфные вложения в линейные многообразия Хопфа и, следовательно, тоже допускают LCK-структуру.

Статья М. Вербицкого и Л. Орнеа о суперсимметрии геометрической природы, происходящй из теории Ходжа ("Supersymmetry and Hodge theory on Sasakian and Vaisman manifolds") вышла в журнале Manuscripta Mathematica 170 (3-4), 629-658. Вот ее содержание.

Сасакиевы многообразия являются нечетномерным аналогом кэлеровых многообразий. Их можно определить как контактные многообразия, наделенные инвариантной кэлеровой структурой на симплектическом конусе. Фактор этого конуса по действию гомотетии представляет собой комплексное многообразие, называемое вайсмановым. Мы изучаем гармонические формы и разложение Ходжа на многообразиях Вайсмана и Сасаки. Авторы строят супералгебру Ли, ассоциированную с сасакиевым многообразием, подобно тому, как алгебру кэлеровой суперсимметрии ассоциируют с кэлеровым многообразием. Они используют эту конструкцию для получения независимого и бескоординатного доказательства результатов Тачибаны, Кашивады и Сато о разложении гармонических форм и когомологий многообразий Сасаки и Вайсмана. В последнем разделе они явно вычисляют алгебру суперсимметрии сасакиевых многообразий.

4.4 Симплектические упаковки шаров

Продолжались также исследования по симплектической геометрии. В частности, в первом номере журнала "Journal of the Association for Mathematical Research" вышла совместная статья сотрудника лаборатории М. Вербицкого и М. Энтова "Kahler-type Embeddings of Balls into Symplectic Manifolds", JAMR, Vol. 1 No. 1 (2023) pages 16-119. Вот что в ней сделано.

Рассмотрим симплектическое вложение дизъюнктного объединения областей в симплектическое многообразие M. Такое вложение называется вложением кэлерова типа или, соответственно, ручным, если оно голоморфно относительно некоторой (априорно не фиксированной, кэлеровой) комплексной структуры на совместимой с симплектической формой или, соответственно, теймится такой структурой. Предположим, что M это многообразие одного из следующих типов: комплексное проективное пространство (со стандартной симплектической формой), четномерный тор или поверхность типа K3, снабженная иррациональной симплектической формой кэлерова типа. Тогда любые два вложения кэлерова типа из дизъюнктного объединения шаров в M можно отобразить друг в друга с помощью симплектоморфизма, тривиально действующего на гомологиях. Если вложения голоморфны относительно комплексных структур, совместимых с симплектической формой и лежащих в одной и той же компоненте связности пространства комплексных структур кэлерова типа на M, то симплектоморфизм можно выбрать гладко изотопным единице. Для некоторых M и некоторых непересекающихся объединений шаров, авторы точно описывают препятствия к существованию кэлеровых вложений шаров в M. В частности, симплектический объем является единственным препятствием к существованию кэлеровых вложений ln равных шаров (для любого l) в n-мерное комплексное проективное пространство со стандартной симплектической структурой и любого числа возможно различных шаров в тор или поверхность K3, снабженную иррациональной симплектической формой. Авторы также показывают, что симплектический объем является единственным препятствием для существования ручных вложений непересекающихся объединений равных шаров, полидисков или параллелепипедов в тор, снабженный общей симплектической формой кэлерова типа. Для шаров и параллелепипедов то же самое справедливо и для поверхностей K3.

Статья М. Вербицкого и М. Энтова “Rigidity of Lagrangian embeddings into symplectic tori and K3 surfaces” вышла в IMRN, International Mathematics Research Notices, Volume 2023, Issue 10, May 2023. Сделано в ней следующее.

Форма кэлерова типа – это симплектическая форма, совместимая с интегрируемой комплексной структурой. Пусть M - либо тор, либо K3-поверхность, снабженная формой кэлерова типа. Вербицкий и Энтов доказали, что класс гомологии любого нулевого лагранжева тора Маслова в M должен быть ненулевым и примитивным. Это расширяет предыдущие результаты Абузайда и Смита (для торов) и Шеридана и Смита (для K3-поверхностей), которые доказали это для конкретных форм кэлерова типа. В случае K3 доказательство Вербицкого и Энтова использует динамические свойства действия группы диффеоморфизмов на пространстве форм кэлерова типа. Эти свойства получены с использованием арифметической версии теоремы Ратнер о замыкании орбит.

4.5 Гиперкэлеровы многообразия и слоения

Также сотрудниками лаборатории было продолжение изучение гиперкэлеровых многообразий и слоений на них. Вот основные полученные здесь результаты.

Во-первых, принята в журнал JMPA (Journal de Mathematiques Pures et Appliquees) и опубликована совместная статья сотрудников лаборатории Е. Америк и М. Вербицкого "Parabolic automorphisms of hyperkahler manifolds". Благодаря многочисленным замечаниям рецензента, первоначальную версию удалось существенно обобщить - например, в окончательной версии отсутствует предположение алгебраичности многообразий. Результаты были доложены на конференциях: памяти Сибони в Орсэ (Франция); Hyperkähler quotients, singularities and quivers в Стоуни-Бруке (США) в начале февраля этого года.

Во-вторых, принята в журнал EPIGA (специальный том в честь 60-летия Клэр Вуазен) совместная работа сотрудника лаборатории Е. Америк с Ф. Кампана "On algebraically coisotropic submanifolds of holomorphic symplectic manifolds". Здесь также в процессе публикации произошли существенные переделки и улучшения: оказывается, известен один нетривиальный пример лагранжевой поверхности в простом четырехмерном абелевом многообразии (он был построен Чадом Шоэном). Никаких других пока нет, было бы очень интересно построить их в высших размерностях, но это кажется очень трудным. Результаты докладывались на семинаре Лаборатории, а также на конференции Recent trends in Algebraic Geometry в Обервольфахе (Германия) в июне.

В-третьих, сотрудник лаборатории Е. Америк закончила совместную работу с Вербицким, начатую в прошлом году. Результат в виде статьи "Normal form of bimeromorphically contractible holomorphic Lagrangian submanifolds" выложен в arxiv (https://arxiv.org/abs/2311.04360) и отправлен для публикации в журнал "Sao Paulo Journal of mathematical sciences" (журнал, к сожалению, не очень высокого уровня, но это специальный выпуск в честь безвременно скончавшегося Александра Ананьина, почетного аффилированного сотрудника Лаборатории). Как уже было упомянуто в прошлогоднем отчете, авторы умеют доказывать, что гладкое стягиваемое лагранжево подмногообразие в голоморфно симплектическом многообразии - это проективное пространство, без предположения о компактности или алгебраичности. Из этого в силу критерия Грауэрта можно вывести, что окрестность такого многообразия биголоморфна окрестности нулевого сечения в его кокасательном расслоении. Теперь же авторам удалось также доказать, что биголоморфизм можно выбрать так, чтобы он был симплектичен, то есть окрестность многообразия голоморфно симплектоморфна окрестности нулевого сечения в его кокасательном расслоени со стандартной симплектической структурой. Основной технический инструмент - "голоморфная лемма Мозера" Солдатенкова и Вербицкого, применяемая к деформации к нормальному конусу. Результаты работы докладывались на конференции по комплексному анализу в Красноярске в сентябре и на семинаре Шафаревича в октябре.

Кроме того, совместно с сотрудником лаборатории М. Вербицким и А. Солдатенковым, сотрудником лаборатории Е. Америк были получены предварительные результаты об описании границы обильного (или подвижного, или двойственным образом эффективного) конуса неприводимых голоморфно симплектических многообразий. В случае поверхностей типа К3 Ковач показал, что эффективный конус либо "полностью круглый", либо "совсем не имеет круглой части". Этот результат легко обобщается на многомерные голоморфно симплектические многообразия, используя плотность орбит группы монодромии на границе. Здесь "не имеет круглой части" значит, что граница обильного конуса не содержит открытого подмножества границы положительного, или, более общим образом, нигде не плотна в границе положительного. Мы задались вопросом, что можно сказать, если граница обильного конуса содержит аналитическую кривую. Оказывается, в этом случае она содержит сферу, а многообразие имеет довольно большую группу автоморфизмов. Эта работа пока в процессе, так как хотелось бы получить более сильные результаты. Промежуточные результаты докладывались на III Конференции Математических Центров в г. Майкоп.

4.6 Исследование геометрии гиперкэлеровых многообразий. Форма Богомолова-Бовиля-Фуджики

Сотрудниками лаборатории была также исследована форма Бовилля-Богомолова-Фуджики для голоморфно-симплектических многообразий - кэлеровых (а, значит, гиперкэлеровых), особых голоморфно-симплектических многообразий (для которых основные результаты получили Баккер-Лен) и некоторых некэлеровых голоморфно-симплектических многообразий (Томассини-Каттанео). Во всех случаях это следствие теории деформация и теоремы Богомолова-Тьяна-Тодорова и аналогов $\partial\bar{\partial}$- леммы.

Были получены результаты про связь расслоений Хиггса и фуллеренов, один из типов углеродных молекул. В серии недавних работ Лауры Шапошник и соавторов, они изучали приложения расслоений Хиггса, гиперкэеровой геометрии к физике твердого тела. Основной результат, который получилось доказать на данный момент, это разные расслоения Хиггса для основных типов фуллеренов. Ассоциированный с фуллеренами расслоения Хиггса нетривиально скручены. Более того, можно явно показать что в присутствии геометрически ориентированного калибровочного поля есть нетривиальное спаривание с полем Хиггса, которое влечет к образованию вихрей, расположенных в некоторых вершинах молекулы фуллерена.

4.7 Комплексные кривые в гиперкомплексных нильмногообразиях с $\mathbb{H}$-разрешимой алгеброй Ли

Пусть G – нильпотентная группа Ли, $\Gamma \subset G$ – решетка. Нильмногообразием называется компактное многообразие N, допускающее транизитивное действие нильпотентной группы G. Всякое нильмногообразие диффеоморфно фактору нильпотентной группы Ли G по кокомпактной решетке: $N = \Gamma \backslash G$.

Сотрудниками лаборатории изучались нильмногообразия $\Gamma \backslash G$, которые допускают гиперкомплексную структуру: лево-инвариантные эндоморфизмы $I, J, K \in End(TG)$, связанные кватернионными соотношениями $IJ = K, I^2 = J^2 = K^2 = -Id$.

С каждым нильмногообразием естественным образом связана нильпотентная алгебра Ли $\mathfrak{g}$ с рациональными структурными константами.

Пусть $(\mathfrak{g}, I, J, K)$ – нильпотентная гиперкомплексная алгебра Ли. Определим $\mathbb{H}$-разрешимую алгебру Ли. Пусть $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{g}$ и $\mathfrak{g}_1^{\mathbb{H}} = \mathbb{H}[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] + I[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] + J[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] + K[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ – минимальная $\mathbb{H}$-инвариантная подалгебра, содержащая $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$. Для $i > 1$ определим

$$\mathfrak{g}_i^{\mathbb{H}} := \mathbb{H}[\mathfrak{g}_{i-1}^{\mathbb{H}}, \mathfrak{g}_{i-1}^{\mathbb{H}}].$$

Гиперкомплексная нильпотентная алгебра Ли называется $\mathbb{H}$-разрешимой, если существует такое $k \in \mathbb{Z}_{>0}$, что

$$\mathfrak{g}_1^{\mathbb{H}} \supset \mathfrak{g}_2^{\mathbb{H}} \supset \cdots \supset \mathfrak{g}_{k-1}^{\mathbb{H}} \supset \mathfrak{g}_k^{\mathbb{H}} = 0.$$

Сотрудником лаборатории Ю. Горгинян доказана следующая теорема:

Теорема 1: Пусть (N,I,J,K) является гиперкомплексным многообразием с $\mathbb{H}$-разрешимой алгеброй Ли $\mathfrak{g}$, где $N = \Gamma\backslash G$ и $\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}(\mathrm{G})$. Тогда для общей комплексной структуры L, индуцированной кватернионами, в комплексном многообразии (N,L) нет комплексных кривых.

Пусть (N,I,J,K) – гиперкомплексное нильмногообразие с плоской связностью Обаты, которая есть единственная связность без кручения, сохраняющая все три комплексные структуры.

Также Ю. Горгинян была доказана другая теорема:

Теорема 2: Пусть (N,I,J,K) гиперкомплексное нильмногообразие с плоской связностью Обаты. Тогда $\mathfrak{g} = Lie(G)$ является $\mathbb{H}$-разрешимой алгеброй Ли.

4.8 Пучки Ли

Также сотрудниками лаборатории изучались “пучки Ли”, в следующем смысле. Пусть V векторное пространство. Рассмотрим k-мерное подпространство $S \subset Hom(\Lambda^2 V, V)$ такое что для любого $w \in S$ отображение $w(x,y) =: [x,y]_w$ удовлетворяет тождеству Якоби. Тогда S называется k-пучком Ли.

Пучок Ли S называется S-разрешимым, если V допускает фильтрацию $V = V_0 \supset V_1 \supset \ldots \supset V_n = 0$ такую что $[V_i, V_i]_w \subset V_{i-1}$ для всех $w \in S$.

Гипотеза 0: Пусть S пучок Ли. Допустим, что алгебра Ли $(V, [\cdot,\cdot]_w)$ нильпотентна для всех $w \in S$. Следует ли что (V,S) S-разрешимо?

Интересен прежде всего случай, когда $S = \mathbb{H}$ и пучок Ли приходит из гиперкомплексной струры на алгебре Ли. В этой ситуации сотрудниками лаборатории высказан следующая гипотеза.

Гипотеза 1: Гиперкомплексные нильпотентные алгебры Ли являются $\mathbb{H}$-разрешимыми.

4.9 О неравенствах на числа Черна для многообразий Фано и многообразий общего типа

В знаменитой работе 1978 года в качестве приложения своего неравенства для стабильных расслоений на поверхностях Ф.А.Богомолов доказал, что для трехмерных многообразий Фано X с группой $PicX = \langle K_X \rangle$ индекс самопересечения канонического класса ограничен 72. Эта оценка не была оптимальной, поскольку хорошо известна классификация таких многообразий, предложенная Дж.Фано и доказанная

В.А.Исковских. В отчетный период, сотрудниками лаборатории было обнаружено, что, основываясь на методах работы Богомолова, можно улучшить оценку до оптимальной, равной 64. Основной идеей является то, что стабильность нужно доказывать не для кокасательного расслоения, а для большего расслоения, полученного его расширением. В свою очередь нужно отметить, что предположение $PicX = \langle K_X \rangle$ является существенным, поскольку в работе сотрудника лаборатории Ю.Г.Прохорова содержится пример, когда оценка 72 достигается.

Также подобные методы могут быть применены к локально деформируемым многообразиям общего типа. В этом случае нужно доказывать стабильность нетривиального расширения касательного расслоения. Однако в этом случае нужно требовать, чтобы многообразие общего типа было локально деформируемым, а также наличие отображения периодов с нетривиальной проекцией на специальную компоненту.

4.10 Теоремы конечности для модулей обобщенных якобианов над числовыми полями

Понятие обобщенного якобиана впервые было определено в трудах Розенлихта, в качестве естественного обобщения якобиевых многообразий на случай особых кривых. Отметим, что хорошо известна связь между точками конечного порядка на обобщенных якобианах и квазипериодическими разложениями в непрерывную дробь квадратичных ирациональностей специального вида.

В 2023 году В.П. Платоновым, сотрудником лаборатории В.С. Жгуном и Г.В. Федоровым был поставлен вопрос о конечности множества квазипериодических квадратичных иррациональностей вида $\omega(x)\sqrt{f(x)}$ в фиксированном гиперэллиптическом поле рациональных функций на кривой $y^2 = f(x)$ при условии ограниченности степени многочлена $\omega(x)$ произвольной константой. Для пары, состоящей из гиперэллиптической кривой и фиксированного дивизора на ней, нами было показано, что указанный выше вопрос эквивалентен вопросу о конечности множества обобщенных якобианов гиперэллиптической кривой специального вида, таких что данный дивизор представляет класс кручения в обобщенном якобиане. Условие специальности обобщенных якобианов, состоит в том, что они ассоциированы с модулями ограниченной степени, и обладают свойством симметрии относительно гиперэллиптической инволюции.

В связи с этим, было естественно рассматривать более общие пары, состоящие из произвольной кривой и дивизора на ней, и поставить вопрос о конечности конечности множества обобщенных якобианов, таких что данный дивизор представляет класс кручения в обобщенном якобиане. Более того, нашей целью было установить, какие из условий на модули по которым строятся обобщенные якобианы, являются существенными, а какие играют техническую роль.

Рассуждения опиралось на теорию функциональных непрерывных дробей, а также на работы о связи непрерывных дробей и обобщенных якобианов.

В качестве первого результата проделанной работы работы доказана теорема о бесконечности множества обобщенных якобианов $J_{\mathfrak{m}}$ гладкой проективной кривой $\mathscr{C}$, определенной над полем $\mathbb{Q}$ рациональных чисел (или более общих алгебраических чисел), с условием, что фиксированный дивизор D, представляющий класс $[D]$ конечного порядка в якобиане J, также представляет класс конечного порядка $[D]_{\mathfrak{m}}$ в обобщенном якобиане $J_{\mathfrak{m}}$. В этом случае мы будем говорить, что класс кручения $[D]$ в якобиане J поднимается до класса кручения $[D]_{\mathfrak{m}}$ в обобщенном якобиане $J_{\mathfrak{m}}$. Упомянутая теорема утверждает, что для конечности количества обобщенных якобианов $J_{\mathfrak{m}}$ в поставленной задаче требуются дополнительные условия. Это подчеркивает нетривиальность дальнейшего полученного результата о конечности множества обобщенных якобианов с подъемом одного классов кручения в якобиане J до классов кручения в обобщенном якобиане $J_{\mathfrak{m}}$ для которого модуль удовлетворяет условию кратности, или наложено условие на структуру алгебраической группы $J_{\mathfrak{m}}$. Также видна важность еще одного полученного в отчетный период результата, а именно, конечности множества обобщенных якобианов с подъемом двух классов кручения в якобиане J с условием на порядки кручения и степени представляющих их дивизоров до классов кручения в обобщенном якобиане $J_{\mathfrak{m}}$.

В качестве основного же результата было получено, что для тройки, состоящей из кривой с морфизмом простой степени и фиксированного дивизора на кривой, множество обобщенных якобианов специального вида, построенных по модулю с ограниченной степенью наперед заданной константой, и таких что данный дивизор представляет класс кручения в обобщенном якобиане, является конечным. Условие специальности обобщенных якобианов, состоит в том, что компоненты ассоциированного модуля лежат в слое морфизма, входящего в тройку.

Из этого результата следует положительный ответ на вопрос конечности специальных обобщенных якобианов гиперэллических кривых, поставленный выше. И как следствие этот результат влечет положительный ответ на вопрос о конечности множества квазипериодических квадратичных иррациональностей вида $\omega\sqrt{f(x)}$ при условии ограниченности степени ω произвольной константой.

4.11 Многогранники Гельфанда-Цетлина и многочлены Ласку

В отчетный период, сотрудниками лаборатории также изучались многогранники Гельфанда-Цетлина и многочлены Ласку. Предложено новое комбинаторное описание многочленов Ласку в терминах подразбиений многогранников Гельфанда–Цетлина и некоторых наборов их граней. Многочлены Ласку, обозначаемые $\mathscr{L}_\alpha$, образуют базис кольца $\mathbb{Z}[\beta][x_1,x_2,\ldots]$, где α пробегает множество слабых композиций (т.е. бесконечных последовательностей целых неотрицательных чисел, почти все члены которых равны нулю). Они являются одновременными обобщениями ключевых многочленов, т.е. характеров модулей Демазюра, и стабильных многочленов Гротендика; последнее семейство, как показано Андерсом Бухом, представляет классы структурных пучков многообразий Шуберта в K-теории грассманова многообразия. Оба этих семейства являются обобщениями многочленов Шура.

Многочлены Ласку определяются в терминах операторов разделенных разностей; как и многие другие примечательные семейства многочленов, они удовлетворяют свойству положительности коэффициентов. Хотя у многочленов Ласку и нет описания в геометрических или теоретико-представленческих терминах, они обладают рядом комбинаторных описаний; так, например, В. Бучукас, Т. Скримшоу и К. Вебер связали их с пятивершинной моделью, тогда как Ю Тянью предложил их описание в терминах множественнозначных таблиц, что одновременно обобщает принадлежащее А. Буху описание стабильных многочленов Гротендика в терминах множественнозначных таблиц Юнга и описание ключевых многочленов с помощью «пейзажных заполнений» (skyline fillings).

А. Ласку и М.-П. Шютценберже сформулировали гипотезу о выражении многочленов Шуберта через ключевые многочлены, доказанную В. Райнером и М. Шимозоно в 1995 году. Эта гипотеза была обобщена Райнером и Ионгом, предложившим K-теоретический аналог этого разложения, связывающий многочлены Гротендика с многочленами Ласку. Эта гипотеза была доказана Шимозоно и Ю в 2023 г.

Многочлены Ласку $\mathscr{L}_\alpha$, вычисленные в $\beta = 0$, дают ключевые многочлены. Пусть $w \in S_n$ — переставовка. для которой $\alpha = (\alpha_1,\ldots,\alpha_n) = w(\lambda)$ для подходящего разбиения $\lambda = (\lambda_1,\ldots,\lambda_n)$. Ключеввые многочлены $\kappa_\alpha = \kappa_{w,\lambda}$ определяются как характеры модулей Демазюра $D_{w,\lambda}$, т.е. B-подмодулей в неприводимом $GL(n)$-модуле V_λ со старшим весом λ. Модуль $D_{w,\lambda}$ определяется как наименьший B-подмодуль, содержащий экстремальный ыектор $wv_\lambda \in V_\lambda$, где $B \subset \mathrm{GL}(n)$ — заданная борелевская подгруппа. Модули Демазюра появляются во многих задачах теории представлений; у их характеров имеется несколько явных комбинаторных описаний.

В 2012 г. сотрудники лаборатории В. А. Кириченко, Е. Ю. Смирнов и В. А. Тиморин предложили формулу для ключевых многочленов в терминах целых точек в многогранниках Гельфанда–Цетлина. Пусть λ — строго доминантный вес для группы Ли $\mathrm{GL}(n)$; он определяет целочисленный выпуклый многогранник $GZ(\lambda) \subset \mathbb{R}^{n(n-1)/2}$, называемый многогранником Гельфанда– Цетлина. Этот многогранник допускает проекцию π на весовой многогранник представления V_λ. Для каждой перестановки $w \in S_n$ можно предъявить набор граней многогранника Гельфанда–Цетлина F_w, λ, для которых $k_{w,\lambda}$ равняется сумме формальных экспонент $\sum \exp(\pi(z))$, где z пробегает множество целых точек в $F_{w,\lambda}$.

В рамках проекта, в отчетный период сотрудником лаборатории Е. Ю. Смирновым совместно с Е. Д. Пресновой предложено обобщение этого результата. А именно, построено комбинаторное описание многочленов Гротендика и Ласку в терминах подразбиений многогранников Гельфанда–Цетлина. Для этого построено клеточное разбиение $\mathscr{C}$ многогранника $GZ(\lambda)$, множество нульмерных клеток которого совпадает со множеством целых точек в многограннике $GZ(\lambda)$. Далее, каждой i-мерной клетке C_i сопоставляется моном $m(C_i)$ от переменных $x_1, \ldots, x_n$; для нульмерной клетки $z \in GZ(\lambda)$ этот моном — это в точности $\exp(\pi(z))$. При этом некоторым клеткам сопоставляются нулевые мономы. Основной результат работы — это следующее утверждение:

$$\mathscr{L}_{w,\lambda} = \sum_{C_i \in \mathscr{C} \cap F_{w,\lambda}} \beta^i m(C_i),$$

где сумма берется по всем клеткам, лежащим внутри набора граней $F_{w,\lambda}$.

Неформально говоря, многочлены Ласку $\mathscr{L}_{w,\lambda}$ можно интерпретировать как «взвешенную эйлерову характеристику» подразбиения $\mathscr{C} \cap F_{w,\lambda}$ набора граней $F_{w,\lambda}$. А именно, i-мерные грани этого подразбиения соответствуют мономам степени $i + \ell(w)$ с коэффициентом β^i перед ними.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В заключение отметим, что по результатам проведенных работ, описанным в настоящем отчете, можно сделать следующие краткие выводы. Во-первых, все запланированные на год работы были Лабораторией полностью и успешно проведены. Во-вторых, работы выполнены на самом высоком научно-техническом уровне, сравнимым с лучшими достижениями в данной области и в чем-то даже превосходящем их. В-третьих, работы могут быть и будут успешно применены в дальнейших работах по теоретической математике. В-четвертых, как и с любыми другими работами в области теоретической математики, непосредственное внедрение их в текущую технико-экономическую деятельность не представляется возможным, и в планы не входит.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

[1] A. Kuznetsov, E. Shinder. Derived categories of Fano threefolds and degenerations. Preprint math.AG/2305.17213

[2] A. Kuznetsov, E. Shinder. Categorical absorptions of singularities and degenerations. Preprint math.AG/2207.06477

[3] Kuznetsov, Alexander; Polishchuk, Alexander. Exceptional collections on isotropic Grassmannians. J. Eur. Math. Soc. (JEMS) 18 (2016), no. 3, 507–574.

[4] Гусева Л. А. О производной категории грассманиана Кэли . Математические заметки. 2023. Т. 113. N 1. С. 144-148.

[5] T. Braden. Perverse sheaves on Grassmannians. Can. J. Math., 54(3):493–532, 2002.

[6] M. Kapranov and V. Schechtman. Perverse sheaves over real hyperplane arrangements. Ann. Math. (2), 183(2):619–679, 2016.

[7] D. Dupont. Perverse sheaves on smooth toric varieties. C. R., Math., Acad. Sci. Paris, 348(15-16):853–856, 2010.

[8] M. V. Nori. Constructible sheaves. In Proceedings of the international colloquium on algebra, arithmetic and geometry, Mumbai, India, January 4–12, 2000. Part I and II, pages 471–491. New Delhi: Narosa Publishing House, published for the Tata Institute of Fundamental Research, Bombay, 2002.

[9] A. A. Beilinson. On the derived category of perverse sheaves. In K-Theory, Arithmetic and Geometry: Seminar, Moscow University, 1984–1986, pages 27–41. Springer, 2006.

[10] Valentina Kiritchenko, Mikhail Tsfasman, Serge Vladuts, Ilya Zakharevich, Quadratic residue patterns and point counting on K3 surfaces, preprint arXiv:2303.03270 [math.AG]

[11] Valentina Kiritchenko, Simple geometric mitosis, preprint arXiv:2301.00225 [math.CO]

[12] Valentina Kiritchenko, Push-pull operators on convex polytopes, IMRN, 2023, no. 4, 3305–3328

[13] Naoki Fujita and Yuta Nishiyama, Combinatorics of semi-toric degenerations of Schubert varieties in type C, preprint arXiv:2306.14485 [math.CO]

[14] A. Beilinson, J. Bernstein and P. Deligne, Faisceaux Pervers, Asterisque 100, 1982.

[15] C. Psariudakis, Homological theory of recollements of abelian categories, J.of Algebra, ISSN: 0021-8693, Vol: 398, Page: 63-110.

[16] А. И. Бондал, И. Ю. Ждановский, Теория гомотопов в применении к несмещенным базисам, гармоническому анализу на графах и превратным пучкам, УМН, 76:2(458) (2021), 3?70; Russian Math. Surveys, 76:2 (2021), 195?259, https://doi.org/10.4213/rm9983

[17] S.Guminov, I.Zhdanovskiy, On equivalence classes of homotopes of algebras and trilinear forms, https://doi.org/10.48550/arXiv.2112.15436

[18] A. Douady and J. H. Hubbard, On the dynamics of polynomial-like mappings, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4), 18 (1985), 287–343.

[19] C.L. Petersen, S. Zakeri, Hausdorff limits of external rays: the topological picture, arXiv:2309.01027 (2023).

[20] A. Blokh, L. Oversteegen, R. Ptacek, V. Timorin, The Main Cubioid, Nonlinearity 27 (2014), 1879–1897.

[21] A. Blokh, P. Haïssinsky, L. Oversteegen, V. Timorin, On critical renormalization of complex polynomials, Advances in Mathematics 428 (2023), 109135.

[22] M. Rovinsky, Invariant fields of rational functions and semilinear representations of symmetric groups over them, `https://arxiv.org/abs/2205.15144v2`

[23] М.З. Ровинский, Замечание о 0-циклах как модулях над алгебрами конечных соответствий, Матем. сб., 2023, том 214, номер 8, 108–118.

[24] Hans Grauert, Über Modifikationen und exzeptionelle analytische Mengen, Math. Ann. 146 (1962), 331–368.

[25] V. I. Savelyev, Zero-type imbedding of a sphere into complex surfaces, Vestnik Moskov. Univ. Ser. I Mat. Mekh. (1982), no. 4, 28–32, 85 (Russian), English translation: Mosc. Univ.Math. Bull. 37, 34–39 (1982).

[26] M. B. Mishustin, Neighborhoods of the Riemann sphere in complex surfaces, Funktsional. Anal. i Prilozhen. 27 (1993), no. 3, 29–41, 95 (Russian), English translation: Funct. Anal. Appl., 27 (1993), No 3, 176–185.

[27] Maycol Falla Luza and Frank Loray, Neighborhoods of rational curves without functions, Math. Ann. 382 (2022), no. 3-4, 1047–1058.

[28] Maycol Falla Luza and Frank Loray, Projective structures, neighborhoods of rational curves and Painlevé equations, Mosc. Math. J. 23 (2023), no. 1, 59–95.

[29] David Eisenbud and Joe Harris, On varieties of minimal degree (a centennial account), Algebraic geometry, Bowdoin, 1985 (Brunswick, Maine, 1985), Proc. Sympos. Pure Math., vol. 46, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1987, pp. 3–13.

[30] Serge Lvovski. On algebraic and non-algebraic neighborhoods of rational curvesю Preprint arXiv:2301.10447 [math.AG]. Submitted to Moscow Mathematical Journal.

[31] I. Cheltsov, C. Shramov, Kähler-Einstein Fano threefolds of degree 22, J. Algebraic Geom., 32 (2023), 385–428.

[32] T. de Fernex, Já. Kollár, and C. Xu, The dual complex of singularities. Higher dimensional algebraic geometry, in honour of Professor Yujiro Kawamata's sixtieth birthday, Adv. Stud. Pure Math., vol. 74, Math. Soc. Japan, Tokyo, 103–129 (2017).

[33] J. Kollár and C. Xu, The dual complex of Calabi-Yau pairs. Invent. Math., vol. 205, no. 3, 527–557 (2016).

[34] K. Loginov. On semistable degenerations of Fano varieties. European Journal of Mathematics, vol. 8, 991–1005, 2022.

[35] K. Loginov, J. Moraga. Maximal log Fano manifolds are generalized Bott towers. Journal of Algebra, vol. 612, 110–146, 2022.

[36] V. V. Shokurov. Complements on surfaces. Journal of Mathematical Sciences, Vol. 102, No.2 (2000).

[37] J. Moraga. Coregularity of Fano varieties. arXiv:2206.10834, 2022.

[38] F. Figueroa, S. Filipazzi, J. Moraga, J. Peng, Complements and coregularity of Fano varieties. arXiv:2211.09187, 2022.

[39] A. Avilov, K. Loginov, V. Przyjalkowski Coregularity of smooth Fano threefolds.. arXiv:2309.16784., 2023.

[40] A. Fujiki, On the de Rham Cohomology Group of a Compact Kähler Symplectic Manifold, Adv. Stud. Pure Math. 10 (1987), 105–165.

[41] M. Gross, D. Joyce, D. Huybrechts, Calabi–Yau Manifolds and Related Geometries, Universitext. Springer-Verlag, Berlin, (2003).

[42] A. Bayer, E. Macrì, MMP for moduli of sheaves on K3s via wall-crossing: nef and movable cones, Lagrangian fibrations, Invent. Math. 198 (2014), 505–590.

[43] K. Yoshioka, Bridgeland's stability and the positive cone of the moduli spaces of stable objects on an abelian surface, Adv. Stud. Pure Math. 69 (2016), 473–537.

[44] E. Amerik, M. Verbitsky, Rational curves and MBM classes on hyperkäler manifolds: a survey. Rationality of varieties, 75–96, Progr. Math., 342, Birkhäuser/Springer (2021).

[45] E. Amerik, M. Verbitsky, MBM classes and contraction loci on low-dimensional hyperkäler manifolds of $\mathrm{K3}^{[n]}$ type, Algebr. Geom. 9 (2022), no. 3, 252–265.

[46] I. Dolgachev, V. Iskovskikh. Finite subgroups of the plane Cremona group. In Algebra, arithmetic, and geometry: in honor of Yu. I. Manin, vol. I. Mathematical Programming, 269 (2009), 443–548.

[47] V. Popov. On the Makar-Limanov, Derksen invariants, and finite automorphism groups of algebraic varieties. In Affine algebraic geometry. CRM Proceedings and Lecture Notes, 54 (2011), 289–311.

[48] J.-P. Serre. Le groupe de Cremona et ses sous-groupes finis. Séminaire Bourbaki, Nov. 2008, 61$^{\text{ème}}$ anné, 1000 (2010), 75–100.

[49] E. Yasinsky. The Jordan constant for Cremona group of rank 2, Bulletin of the Korean Mathematical Society, 54 (2017), no. 5, 1859–1871.

[50] Yu. Prokhorov. Simple finite subgroups of the Cremona group of rank 3. J. Algebraic Geom., 21(3):563–600, 2012.

[51] Jérémy Blanc, Ivan Cheltsov, Alexander Duncan, and Yuri Prokhorov. Finite quasisimple groups acting on rationally connected threefolds. Math. Proc. Cambridge Phil. Soc., 174(3):531–568, 2023.

[52] A. Trepalin, Quotients of del Pezzo surfaces of high degree, Transactions of the American Mathematical Society, 2018, 370 (9), 6097–6124

[53] A. S. Trepalin, Quotients of Severi–Brauer surfaces, Dokl. RAN. Mat. inform. proc. upr., 2021, 501(1), 84–88 (in Russian); translation in Doklady Mathematics, 2021, 104, 390–393

[54] Daniel Chan. Lectures on orders, 2011.

[55] U. Goertz. On the flatness of models of certain shimura varieties of pel-type, 1999.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Ниже приведен список публикаций лаборатории.

1. Prokhorov Y. Rationality of Fano threefolds with terminal Gorenstein singularities // Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo – 2023 – Vol. 2. No. 72. – P. 1797-1821.

2. Kuznetsov A., Prokhorov Y. On higher-dimensional del Pezzo varieties // Izvestiya: Mathematics – 2023 – Vol. 87. No. 3. – P. 75-148.

3. Kuznetsov A., Prokhorov Y. Rationality of Fano threefolds over non-closed fields // American Journal of Mathematics – 2023 – Vol. 145. No. 2. – P. 335-411.

4. Blanc J., Cheltsov I., Duncan A., Prokhorov Y. Finite quasisimple groups acting on rationally connected threefolds // Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society – 2023 – Vol. 174. No. 3. – P. 531-568.

5. Smirnov E., Tutubalina A. Pipe dreams for Schubert polynomials of the classical groups // European Journal of Combinatorics – 2023 – Vol. 107 – Article 103613.

6. Bondal A., Rosly A. Coherent Sheaves, Chern Classes, and Superconnections on compact complex-analytic manifolds // Izvestiya Rossiiskoi Akademii Nauk. Seriya Matematicheskaya – 2023 – Vol. 87, Issue 3 – P. 23-55.

7. Blokh A., Haïssinsky P., Oversteegen L., Timorin V. On critical renormalization of complex polynomials // Advances in Mathematics – 2023 – Vol. 428 – Article 109135.

8. Blokh A., Oversteegen L., Timorin V. A. Immediate Renormalization of Cubic Complex Polynomials with Empty Rational Lamination // MMJ – 2023 – Vol. 23. Iss. 4. – P.441-461.

9. Kiritchenko V. Push-pull operators on convex polytopes // International Mathematics Research Notices – 2023 – Vol. 2023. No. 4 – P. 3305-3328.

10. Гусева Л. О производной категории грассманиана Кэли // Математические Заметки – 2023 – Т. 113. Н. 1. – С. 144-148.

11. Зайцев А. Формы поверхностей дель Пеццо степеней 5 и 6 // Математический Сборник – 2023 – Т. 214. Н. 6. – С. 69-86.

12. Ровинский М. Замечание о 0-циклах как модулях над алгебрами конечных соответствий // Математический Сборник – 2023 – Т. 214. Н. 8 – С. 108-118.

13. Ornea L., Verbitsky M. Non-linear Hopf manifolds are locally conformally Kähler // Journal of Geometric Analysis – 2023 – Vol. 33. No. 7 – Article 201.

14. Entov M., Verbitsky M. Rigidity of Lagrangian embeddings into symplectic tori and K3 surfaces // International Mathematics Research Notices – 2023 – Vol. 2023, No 10 – P. 8964-9000.

15. Abasheva A., Verbitsky M. Algebraic dimension and complex subvarieties of hypercomplex nilmanifolds // Advances in Mathematics – 2023 – Vol. 414. – Article 108866.

16. Amerik E., Verbitsky M. Parabolic automorphisms of hyperkähler manifolds // Journal des Mathématiques Pures et Appliquées – Vol. 179 – P. 232-252.

17. Amerik E., Campana F. On algebraically coisotropic submanifolds of holomorphic symplectic manifolds // Épijournal de Géométrie Algébrique, accepted.

18. Kuznetsov A., Perry A. Categorical cones and quadratic homological projective duality // Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure – 2023 – Série 4. – T. 56. – P. 1-57.

19. Gorginyan Y. Complex curves in hypercomplex nilmanifolds with H-solvable Lie algebras // Journal of Geometry and Physics – 2023 – Vol.192 – Article 104900.

20. Prokhorov Y., Zaidenberg M. Affine cones over Fano-Mukai fourfolds of genus 10 are flexible // The Art of Doing Algebraic Geometry, Trends Math., Birkhäuser, Cham. – 2023 – P. 363-383.

21. Kiritchenko V. Representations and degenerations// Oberwolfach Snapshots, Germany – 2022 –Article SNAP-2022-007-EN.

22. Kiritchenko V., Padalko M. Schubert Calculus on Newton-Okounkov Polytopes // Interactions with Lattice Polytopes Magdeburg, Germany, September 2017. Springer – 2022 – P. 233-249.

23. Entov M., Verbitsky M. Kahler-type Embeddings of Balls into Symplectic Manifolds // Journal of the Association for Mathematical Research – 2023 – Vol. 1 No. 1. – P. 16-119.

ПРИЛОЖЕНИЕ Б

Ниже приведен список препринтов лаборатории.

1. Kuznetsov A., Shinder E. Categorical absorptions of singularities and degenerations [Электронный ресурс] // Cornell University. Series arXiv "math 2023 - arXiv: 2207.06477

2. Kuznetsov A. Retour sur l'arithmétique des intersections de deux quadriques, avec un appendice par A. Kuznetsov [Электронный ресурс] // Cornell University. Series arXiv "math 2023 - arXiv: 2208.04121

3. Gorginyan Y. Flat hypercomplex nilmanifolds are H-solvable [Электронный ресурс] // Cornell University. Series arXiv "math 2023 - arXiv: 2310.02471

4. Kiritchenko V. Simple geometric mitosis [Электронный ресурс] // Cornell University. Series arXiv "math 2023 - arXiv: 2301.00225

5. Kiritchenko V., Tsfasman M., Vladuts S., Zakharevich I. Quadratic residue patterns and point counting on K3 surfaces [Электронный ресурс] // Cornell University. Series arXiv "math 2023 - arXiv: 2303.03270

6. Blokh A., Oversteegen L., Timorin V., Wang Y. A model of the cubic connectedness locus [Электронный ресурс] // Cornell University. Series arXiv "math 2023 - arXiv: 2304.11516

7. McQuillan M. Thurston Vanishing [Электронный ресурс] // Cornell University. Series arXiv "math 2023 - arXiv: 2311.02518

8. Polishchuk A. De Rham cohomology for supervarieties [Электронный ресурс] // Cornell University. Series arXiv "math 2023 - arXiv: 2305.01858

9. Ornea L., Verbitsky M. Holomorphic tensors on Vaisman manifolds [Электронный ресурс] // Cornell University. Series arXiv "math 2023 - arXiv:2301.01077

10. Brandenbursky M., Verbitsky M. Non-commutative Barge-Ghys quasimorphisms [Электронный ресурс] // Cornell University. Series arXiv "math 2023 - arXiv: 2212.12958

11. Ornea L., Verbitsky M Bimeromorphic geometry of LCK manifolds [Электронный ресурс] // Cornell University. Series arXiv "math 2023 - arXiv: 2302.03422

12. Amerik E., Verbitsky M. Normal form of bimeromorphically contractible holomorphic Lagrangian submanifolds [Электронный ресурс] // Cornell University. Series arXiv "math 2023 - arXiv: 2311.04360

13. Lvovski S. On algebraic and non-algebraic neighborhoods of rational curves [Электронный ресурс] // Cornell University. Series arXiv "math 2023 - arXiv: 2301.10447

14. Avilov A., Loginov K., Przyjalkowski V. Coregularity of smooth Fano threefolds [Электронный ресурс] // Cornell University. Series arXiv "math 2023 - arXiv: 2309.16784

15. Rovinsky M. Invariant fields of rational functions and semilinear representations of symmetric groups over them [Электронный ресурс] // Cornell University. Series arXiv "math 2023 - arXiv: 2205.15144

16. Prokhorov Y. Q-Fano threefolds of Fano index thirteen [Электронный ресурс] // Cornell University. Series arXiv "math 2023 - arXiv: 2212.06884