

Правительство Российской Федерации
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
«ВЫСШАЯ ШКОЛА ЭКОНОМИКИ»
(НИУ ВШЭ)

УДК 514.74

Рег. № НИОКТР 124021400043-5

Рег. № ИКРБС

УТВЕРЖДАЮ

Проректор НИУ ВШЭ,

канд. биол. наук

_____ А.В. Балышев

«_____» _____ 2024 г.

ОТЧЕТ
О НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОЙ РАБОТЕ

КОММУТАТИВНАЯ, НЕКОММУТАТИВНАЯ И МОТИВНАЯ АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ
ГЕОМЕТРИЯ И ГЕОМЕТРИЯ СПЕЦИАЛЬНЫХ МНОГООБРАЗИЙ
(заключительный)

Руководитель НИР,
зав. лаб., д-р физ.-мат. наук, проф. РАН, PhD



_____ Д.Б. Каледин

Москва 2024

РЕФЕРАТ

Отчет 98 с., 79 источн., 1 табл., 1 прил.

ПРОИЗВОДНЫЕ КАТЕГОРИИ, КРИСТАЛЛИЧЕСКИЕ КОГОМОЛОГИИ,
ЦИКЛИЧЕСКАЯ КАТЕГОРИЯ, БЕСКОНЕЧНОМЕРНЫЕ АЛГЕБРЫ ЛИ,
МНОГООБРАЗИЯ ФАНО, ПРОСТРАНСТВО МОДУЛЕЙ, РАЦИОНАЛЬНЫЕ КРИВЫЕ,
ГОЛОМОРФНО СИМПЛЕКТИЧЕСКОЕ МНОГООБРАЗИЕ

Объектами исследования являются:

- геометрическая теория представлений,
- арифметическая алгебраическая геометрия,
- бесконечномерные алгебры Ли,
- гомологические и мотивные методы в некоммутативной геометрии,
- производные категории,
- классическая геометрия,
- гиперкэлеровы многообразия и специальные многообразия.

Цель проекта: исследования в области алгебраической геометрии и пограничных с ней областях – теория чисел, дифференциальная и комплексная геометрия, геометрический анализ.

Результаты носят теоретический характер и являются существенно новыми. Возможны приложения к теоретической физике, дифференциальной геометрии, теории чисел и задачам классификации комплексных многообразий.

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	7
1 Производные категории	10
1.1 Классификация 1-нодальных трехмерных многообразий Фано	10
1.2 Согласованные семейства скобок Пуассона	12
1.3 Гомологическая проективная двойственность для $\text{Gr}(3, V_6)$	14
1.4 Производные категории торических поверхностей	16
1.5 Геометрия трифолдов Фано типа 4-1	16
1.6 Конструктивные и превратные пучки	17
1.7 Квадратичные вычеты и гиперэллиптические кривые	18
1.8 Полуторические вырождения многообразий Шуберта	20
1.9 Алгебра и квантовая теория информации	20
1.10 Кусочные изометрии и внешние бильярды	23
1.11 Самодуальная теория Янга-Миллса	25
1.12 Модули стабильных пучков	26
2 Гомологические и мотивные методы в некоммутативной геометрии	31
2.1 Контрактады и граф-комплексы	31
2.1.1 Контрактады	31
2.1.2 Производящие функции для контрактад	32
2.1.3 Новые пространства модулей кривых	32
2.1.4 Гамильтоновы пути и циклы	33
2.2 Скобки Фейгина–Одесского	34
2.3 Характеристические слоения на гиперповерхностях	35
2.4 Полулинейные представления групп перестановок	36
2.5 Теория многогранников Ньютона	39
2.6 Комбинаторная алгебраическая геометрия	40
2.7 Индексы кручения групп типа D	44
2.8 Этальные когомологии и изоморфизм групп Пикара	45
2.9 Некоммутативные кэлеровы метрики	46
2.10 Достижимые оснащенные категории	51
3 Классическая геометрия	55
3.1 Окрестности рациональных кривых	55
3.2 MBM классы голоморфных симплектических многообразий	57
3.3 Факториальность трёхмерных нодальных гиперповерхностей	61
3.4 Поверхности дель Педро степени 4	63

3.5	Алгебра q -дифференциальных операторов	67
3.6	Минимальные поверхности дель Пеццо степени 4	68
3.7	K -стабильность и автоморфизмы многообразий Фано	70
3.7.1	K -стабильность	70
3.7.2	Бирациональные автоморфизмы	71
3.8	Ограниченность конечных подгрупп в группе Кремоны	73
3.9	Ростки экстремальных кривых	74
4	Специальные многообразия	78
4.1	Гиперкэлеровы многообразия и обильные конуса	78
4.2	Расслоения Хиггса и фуллерены	79
4.3	Кольцо Ходжа и виртуально гиперкэлеровы многообразия	81
4.4	Потенциальная плотность рациональных точек	81
4.5	Гиперкомплексная геометрия	84
4.6	О неравенствах на числа Черна	85
4.7	Теоремы конечности для модулей обобщенных якобианов	86
4.8	Частичный порядок на инволюциях в симметрической группе	88
	ЗАКЛЮЧЕНИЕ	90
	СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ	91
	ПРИЛОЖЕНИЕ А	96
	Публикации лаборатории	96
	Препринты лаборатории	97

ВВЕДЕНИЕ

За отчетный период (2024 год) Лаборатория алгебраической геометрии и ее приложений организовала и/или приняла участие в организации трех международных конференций:

- Весенняя международная конференция “Бирациональная геометрия”, организаторы Юрий Прохоров и Константин Шрамов, 04.04.24, формат проведения – онлайн, 35 участников.

- Международная конференция “Алгебра и геометрия”, 30.07.2024-04.08.2024, организаторы Никон Курносов и Константин Шрамов, более 70 участников, формат проведения – оффлайн.

- Осенняя международная конференция “Бирациональная геометрия”, организаторы Юрий Прохоров и Константин Шрамов, 05.12.2024, формат проведения – онлайн, 30 участников.

В 2024 году вновь была успешно проведена традиционная летняя школа “Алгебра и геометрия” для аспирантов и продвинутых студентов. Школа была совмещена с конференцией, и проводилась в период с 30.07.2024 по 04.08.2024, уже в тринадцатый раз. В первые 10 лет школа проводилась на базе Ярославского государственного педагогического университета им. К.Д.Ушинского, но в 2022 году она была перенесена в г. Суздаль, и теперь проводится на базе ГТРК “Суздаль”. В школе приняли участие примерно 60 слушателей, причем отнюдь не только из Москвы и С.-Петербурга – география участников включает в себя, например, Самарский, Томский и Новосибирский Государственные Университеты, Белорусский Государственный Университет (г. Минск, Беларусь), а также Высшую Нормальную Школу в Париже, Франция. Среди докладчиков были такие замечательные математики, как М. Батанин (Университет Макквери, Канберра, Австралия) и С. Тихонов (БГУ, Минск, Беларусь).

В связи с тем, что международная обстановка остается сложной, в 2024 году вновь были отменены визиты ученых – коллег лаборатории из мировых научных и учебных центров; многие, однако, принимали участие в регулярном научно-исследовательском семинаре лаборатории в режиме онлайн, и участвовали в наших онлайн-конференциях. Мы по-прежнему имеем некоторое количество международных аффилированных сотрудников, включая, например, А. Полищука (Университет Орегона, США), которые не прерывают связи с лабораторией несмотря на все возникающие сложности.

В течение года продолжал работу научно-исследовательский семинар лаборатории. Руководитель семинара – Никон Курносов. Также продолжал работу студенческий семинар лаборатории “Геометрические структуры на многообразиях”. Вся информация о семинарах публикуется на странице лаборатории на портале НИУ ВШЭ (ag.hse.ru), анонсы также рассылались по рассылке факультета математики и лаборатории.

По результатам исследований в 2024 году сотрудниками лаборатории было опубликовано 18 статей в журналах, индексируемых в базе данных Scopus и Web of Science, из них в журналах списка А – 8, списка В – 5, и списков C/D – 5.

Несмотря на сложную международную ситуацию, сотрудники лаборатории продол-

жали принимать участие в международных конференциях, семинарах, воркшопах, где выступили более чем с 40 докладами, в которых представили результаты своих исследований в лаборатории. В частности, сотрудники лаборатории активно участвовали в конференциях “Non-commutative Algebraic Geometry” (г. Беркли, США), “Sino-Russian Bilateral International Mathematics Conference” (г. Шанхай, КНР), “EPIGA Conference” (г. Париж, Франция), а также в 14 Белорусской Математической Конференции в г. Минск, Беларусь, и целом ряде больших конференций в России, включая Четвертую Конференцию Математических центров России в августе 2024 года в С.-Петербурге.

Сотрудники лаборатории также приняли активное участие в двухдневной школе-конференции “Геометрия и Динамика” 21-22 октября 2024 г., организованной нами в г. Нижний Новгород, в нижегородском кампусе ВШЭ, совместно с Международной Лабораторией Динамических Систем и Приложений. Центральная часть школы-конференции – большой обзорный доклад о динамике алгебраических многообразий, прочитанный научным сотрудником нашей лаборатории Александрой Кузнецовой. Со своей стороны, заведующая нижегородской лабораторией Ольга Починка прочитала миникурс о связи динамики регулярных систем и топологии их несущих многообразий на нашей летней школе в Суздале. И то, и другое вызвало огромный интерес у слушателей. Такое тесное сотрудничество с коллегами из Нижнего Новгорода – новый для нас опыт, который мы без сомнения будем продолжать и развивать.

В сентябре 2024 г., стажер лаборатории Ю. Горгиян успешно защитила кандидатскую диссертацию. Защита стажера лаборатории Д. Васильева назначена на 11 декабря 2024 г.

Научный сотрудник лаборатории К. Логинов и стажер Л. Гусева стали победителями престижного конкурса “Молодая математика России”, проходившего в конце декабря 2023 года. Кроме того, наши стажеры также активно и успешно участвуют в другом весьма престижном конкурсе для молодых математиков – а именно, в конкурсе студенческих работ имени А. Мебиуса. В 2023 году победителями конкурса стали наши стажеры А. Викулова и К. Квитко (1 и 2 место в номинации “студенты и аспиранты”), а стажер А. Жижин вошел в число финалистов в номинации “студенты”. В 2024 году, финал конкурса пройдет в декабре; стажеры лаборатории Сергей Гуминов, Александр Зайцев и Денис Лысков – в числе финалистов.

Сотрудники лаборатории продолжали вести активную педагогическую работу, ими были прочитаны курсы на факультете математики НИУ ВШЭ, в Независимом Московском Университете, НОЦ МИАН, Сколтехе, программе Math in Moscow, на школах для студентов, аспирантов и молодых ученых, проводимых как лабораторией, так и крупными международными научными и учебными центрами. Часть курсов была прочитана впервые.

Сотрудниками лаборатории были получены значительные научные результаты по основным темам, заявленным на 2024 год:

- Производные категории,
- Гомологические и мотивные методы в некоммутативной геометрии,

- Классическая геометрия,
- Специальные многообразия.

Результаты работ по этим темам составляют содержание настоящего отчета.

1 Производные категории

1.1 Классификация 1-нодальных трехмерных многообразий Фано

В работе [1] сотрудника лаборатории А. Кузнецова совместной с Е. Шиндером было показано, что трехмерные многообразия Фано с одной нефакториальной двойной точкой (нодом) можно использовать для построения гладких и собственных семейств триангулированных категорий, связывающих производные категории многообразий Фано индекса 1 и индекса 2. В связи с этим, особую актуальность приобрел вопрос классификации трехмерных 1-нодальных многообразий Фано. В отчетный период, в совместной работе сотрудников лаборатории А. Кузнецова и Ю. Прохорова [2] такая классификация была получена для случая многообразий с числом Пикара 1.

Классификация состоит из двух больших частей — классификации нефакториальных и факториальных многообразий. Начнем с описания нефакториального случая.

Если X — трехмерное 1-нодальное многообразие Фано, оно обладает двумя малыми разрешениями особенностей (получающимися как раздутия классов дивизоров Вейля, представляющих элементы факторгруппы $\text{Cl}(X)/\text{Pic}(X) \cong \mathbb{Z}$ разного знака. Если, при этом, число Пикара многообразия X равно 1, то каждое из его малых разрешений обладает единственным K -отрицательным экстремальным стягиванием, так что само X оказывается центром линка Саркисова, имеющего вид

$$\begin{array}{ccccc} & X_1 & \xleftarrow{\quad \chi \quad} & X_2 & \\ & \swarrow f_1 & \searrow \pi_1 & \swarrow \pi_2 & \searrow f_2 \\ Z_1 & & X & & Z_2 \end{array} \quad (1.1)$$

где π_i — малые разрешения,

f_i — K -отрицательные экстремальные стягивания,

χ — флоп единственной гладкой рациональной кривой, стягиваемой на X .

Таким образом, классификация трехмерных 1-нодальных многообразий Фано с числом Пикара 1 равносильна классификации линков Саркисова имеющих приведенный выше вид.

Заметим, что малые стягивания π_i отождествляют группы классов соответствующих многообразий

$$\text{Pic}(X_1) = \text{Cl}(X_1) \cong \text{Cl}(X) \cong \text{Cl}(X_2) = \text{Pic}(X_2), \quad (1.2)$$

где $\text{Pic}(X)$ — группа Пикара,

$\text{Cl}(X)$ — группа классов дивизоров на X .

Поэтому классы обратных образов H_i обильных образующих групп $\text{Pic}(Z_i)$ и обильную

образующую H группы $\text{Pic}(X)$ можно рассматривать как элементы одной и той же свободной абелевой группы $\text{Cl}(X) \cong \mathbb{Z}^2$. Отсюда сразу следует, что между ними существует линейная зависимость, причем удается доказать, что она имеет следующий конкретный вид:

$$\frac{\iota(f_2)}{\iota(X)} H_1 + \frac{\iota(f_1)}{\iota(X)} H_2 = H, \quad (1.3)$$

где $\iota(f_i)$ — индексы стягиваний f_i ,
 $\iota(X)$ — индекс X .

Самое сложное здесь — проверить, что коэффициент в правой части равен 1; к сожалению концептуального доказательства этого факта найти не удалось, поэтому для доказательства используется анализ различных возможностей и численные оценки степеней.

Пользуясь полученным соотношением в группе классов, можно применить следующую конструкцию. Рассмотрим раздутие

$$\widehat{X} := \text{Bl}_{x_0}(X) \quad (1.4)$$

многообразия X в его особой точке $x_0 \in X$ и пусть $\xi: \widehat{X} \rightarrow \bar{X}$ — его антиканоническое стягивание. Поскольку классы H_i являются обратными образами обильных классов, они численно эффективны, поэтому всякая кривая на $\widehat{X}$, стягиваемая морфизмом ξ , имеет нулевое пересечение с H_1 и H_2 . Поэтому морфизмы $\widehat{X} \rightarrow X_i \rightarrow Z_i$ пропускаются через $\bar{X}$, и значит имеется диаграмма стягиваний

$$\begin{array}{ccc} & \bar{X} & \\ \bar{f}_1 \swarrow & & \searrow \bar{f}_2 \\ Z_1 & & Z_2, \end{array} \quad (1.5)$$

причем стягивания $\bar{f}_i$ и f_i тесно связаны:

– если f_i — раздутие гладкой кривой $\Gamma_i \subset Z_i$ на трехмерном многообразии Фано Z_i индекса $\iota(Z_i)$, то $\bar{f}_i$ — раздутие приводимой кривой $\bar{\Gamma}_i = \Gamma_i \cup L_i$, где L_i — единственная прямая на Z_i , пересекающая Γ_i по подсхеме длины $\iota(Z_i)$;

– если f_i — расслоение на коники над $Z_i \cong \mathbb{P}^2$ с дискриминантной кривой Δ_i , то $\bar{f}_i$ — расслоение на коники над Z_i с дискриминантной кривой $\bar{\Delta}_i = \Delta_i \cup L_i$, где L_i — прямая;

– если f_i — расслоение на поверхности дель Пеццо степени d над прямой $Z_i \cong \mathbb{P}^1$, то $\bar{f}_i$ — расслоение на поверхности дель Пеццо степени $d - 1$ над Z_i .

С другой стороны, многообразие $\bar{X}$ является сглаживаемым (в большинстве случаев, это следует из того, что оно имеет терминальные особенности, а в оставшихся случаях это

проверяется отдельно), и не сложно проверить, что сглаживание X' многообразия $\bar{X}$ имеет экстремальные стягивания того же типа, что и стягивания $\bar{f}_1, \bar{f}_2$. Применяя результаты Мори и Мукаи о классификации гладких трехмерных многообразий Фано с числом Пикара 2, удается получить окончательную классификацию 1-нодальных нефакториальных многообразий.

Еще одно интересное наблюдение, полученное в работе Кузнецова и Прохорова — это описание большинства многообразий $\bar{X}$ из приведенной выше конструкции как полных пересечений обильных дивизоров Картье в произведении $Z_1 \times Z_2$, содержащих гладкую квадратичную поверхность Σ — произведение двух прямых, лежащих в Z_1 и Z_2 . Поскольку само многообразие X получается из $\bar{X}$ с помощью операции “unprojection” (раздутия класса дивизоров $-\Sigma$, и затем стягивание в точку собственного прообраза поверхности Σ), данное наблюдение дает простой явный способ строить 1-нодальные нефакториальные многообразия.

В случае с 1-нодальными факториальными многообразиями, ситуация заметно проще. Удастся доказать, что все они (как, впрочем, и 1-каспидальные многообразия) имеют описание, аналогичное описанию гладких многообразий того же типа. В частности, многообразия индекса 1 и рода $g \in \{2, 3, 4, 5\}$ являются полными пересечениями во взвешенных проективных пространствах, а многообразия индекса 1 и рода $g \in \{6, 7, 8, 9, 10\}$ являются размерностно трансверсальными линейными сечениями многообразий Мукаи.

Также интересно то, что с большинством факториальных 1-нодальных многообразий индекса 1 по-прежнему связан линк Саркисова

$$\begin{array}{ccccc}
 & \hat{X} & \overset{\chi}{\dashleftarrow} & \hat{X}_+ & \\
 \pi \swarrow & & \xi \searrow & \xi_+ \swarrow & \pi_+ \searrow \\
 X & & \bar{X} & & X_+
 \end{array} \tag{1.6}$$

хотя, в отличие от нефакториального случая, серединой линка является не X , а антиканоническая модель $\bar{X}$ его раздутия $\hat{X} = \text{Bl}_{x_0}(X)$ в особой точке. Также, оказывается, что $\bar{X}$ — сглаживаемое многообразие Фано с числом Пикара 1, индекса 1, и рода $g - 1$, содержащее неприводимую квадратичную поверхность (гладкую, если X нодально и особую, если X каспидально), а многообразие X получается из $\bar{X}$ операцией, обратной к проекции, так же как и в нефакториальном случае.

1.2 Согласованные семейства скобок Пуассона

В работе ассоциированного сотрудника лаборатории Александра Полищука (совместной с Эриком Рэйнсом) была доказана следующая теорема.

Теорема 1.1. Для всякой поверхности дель Пеццо X степени 4 и для всякой пары взаимно простых чисел (d, r) , где $r > 0$, существует исключительная пара $(\mathcal{O}, V)$ на X , в которой V — исключительное расслоение ранга r и степени $\deg(V) = d$.

Заметим, что для приложений необходимо найти исключительные пары данного наклона на поверхности дель Пеццо как можно большей степени. Хотя некоторые наклоны достигаются и на поверхностях дель Пеццо больших степеней, оказывается, что именно 4 является максимальной степенью поверхности дель Пеццо, для которой все наклоны достижимы. Более того, даже если бы мы интересовались поверхностями меньшей степени, все равно было бы удобнее работать со степенью 4, поскольку для большинства наклонов (для всех, кроме конечного числа для всякого ранга) в этом случае найдется по существу единственная пара данного наклона. Для меньших степеней это уже не верно. Специальные свойства степени 4 проявляются и в других аспектах.

На самом деле, удастся привести явную конструкцию пары $(\mathcal{O}, V)$ для данных (d, r) , зависящую от способа представить поверхность дель Пеццо X степени 4 как раздутие $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ (такой способ, включающий нумерацию исключительных дивизоров называется *структурой стягивания*). Все пары $(\mathcal{O}, V)$, не получающиеся из этой конструкции называются *спорадическими*. Оказывается, спорадические пары возникают только, если $|d|$ не слишком велико по сравнению с r (с явной квадратичной оценкой). В доказательстве существенным образом используется действие соответствующей группы Вейля на структурах стягивания данной поверхности дель Пеццо.

Для поверхностей дель Пеццо степени $k \geq 5$ показано, что возможные пары (d, r) для исключительных пар $(\mathcal{O}, V)$ должны удовлетворять неравенству

$$d^2 - krd + kr^2 \geq -k, \quad (1.7)$$

где d – степень исключительного расслоения,

r – ранг расслоения, а при $k = 9$ оно должно быть равенством.

В частности, при $k \geq 5$ не все взаимно простые пары реализуются. С другой стороны, можно показать реализуемость всякой пары, удовлетворяющая неравенствам

$$-k \leq d^2 - krd + kr^2 \leq -1, \quad (1.8)$$

с небольшой тонкостью при $k = 8$, и с дополнительным предположением $3|d$ при $k = 9$.

Интерес к исключительным парам вида $(\mathcal{O}, V)$ на поверхностях дель Пеццо объясняется их связью с теорией пуассоновских скобок Фейгина–Одесского. Напомним, что для простого векторного расслоения E ранга r и степени $d > 0$ на эллиптической кривой C (или ее вырождении), возникает естественная кобка Пуассона на $\mathbb{P}H^0(C, E)^*$, которая строится в терминах геометрии векторных расслоений на C (см. [3], [4]). Эта скобка зависит только от кривой C и дискретных инвариантов (d, r) расслоения E . Она называется *FO-скобка* и обозначается $q_{d,r}(C)$.

В работе [5] было замечено, что если $(\mathcal{O}, V)$ — исключительная пара на поверхности дель Пеццо X , то для любого антиканонического дивизора $C \subset X$ отображение ограничения $H^0(X, V) \rightarrow H^0(C, V|_C)$ является изоморфизмом, а скобки Пуассона на $\mathbb{P}H^0(X, V)^*$ возникающие из расслоений $V|_C$ для всевозможных антиканонических дивизоров образуют векторное пространство согласованных скобок Пуассона (иначе говоря, скобка Схоутена между всякой парой соответствующих бивекторов равна нулю). В случае $r = 1$ таким образом получается 9-мерное линейное пространство согласованных ФО-скобок на $\mathbb{P}^{d-1}$ содержащее любую наперед заданную ФО-скобку типа $(d, 1)$. При $r > 1$, в работе [5] доказаны частичные результаты о согласованных ФО-скобках типа (d, r) .

Теорема 1.2. Имеют место следующие утверждения:

1) Для всякой эллиптической кривой C и всякой пары взаимно простых чисел (d, r) с $d > r + 1$, ФО-скобка $q_{d,r}(C)$ на $\mathbb{P}^{d-1}$ содержится в 5-мерном линейном подпространстве согласованных ФО-скобок на $\mathbb{P}^{d-1}$ типа (d, r) . Если $r = 2$ или $r = d - 2$, то $q_{d,r}(C)$ содержится в 6-мерном линейном подпространстве согласованных ФО-скобок на $\mathbb{P}^{d-1}$ типа (d, r) .

2) Если $5 \leq k \leq 9$, то для всякой взаимно простой пары (d, r) , такой что $d > r + 1$ и

$$-k \leq d^2 - krd + kr^2 \leq -1, \quad (1.9)$$

где $3|d$ в случае $k = 9$, всякая ФО-скобка $q_{d,r}(C)$ на $\mathbb{P}^{d-1}$ содержится в $(k + 1)$ -мерном линейном подпространстве согласованных ФО-скобок на $\mathbb{P}^{d-1}$ типа (d, r) .

Доказательство основано на результатах из [5], на изучении исключительных пар $(\mathcal{O}, V)$ на поверхностях дель Пеццо, и на результатах о существовании неизотривиальных антиканонических пучков, содержащих данную антиканоническую кривую на поверхности дель Пеццо.

1.3 Гомологическая проективная двойственность для $\text{Gr}(3, V_6)$

В отчетный период сотрудники лаборатории также изучали гомологическую проективную двойственность для грассманиана $\text{Gr}(3, V_6)$, параметризующего трёхмерные подпространства в шестимерном векторном пространстве V_6 , а также для ортогонального грассманиана $\text{OGr}(6, 12)$, параметризующего шестимерные изотропные подпространства в векторном пространстве размерности 12, снабженном невырожденной симметрической 2-формой.

Гомологическая проективная двойственность для $\text{Gr}(3, V_6)$ строится относительно плюккерова вложения $\text{Gr}(3, V_6) \hookrightarrow \mathbb{P}(\Lambda^3 V_6)$. Обозначим через $\mathcal{O}(1)$ обильную порождающую группы Пикара $\text{Gr}(3, V_6)$ и через $\mathcal{U}$ — тавтологическое подрасслоение ранга 3 на $\text{Gr}(3, V_6)$. Гомологическая проективная двойственность строится относительно следующего лефшецева набора

$$D^b(\mathrm{Gr}(3, V_6)) = \langle \mathcal{A}_0, \mathcal{A}_1(1), \mathcal{A}_2(2), \mathcal{A}_3(3), \mathcal{A}_4(4), \mathcal{A}_5(5) \rangle \quad (1.10)$$

где мы обозначили

$$\mathcal{A}_0 = \mathcal{A}_1 = \langle \mathcal{U}, \Sigma^{1,0,-1} \mathcal{U}, \mathcal{O}, \mathcal{U}^\vee \rangle, \quad (1.11)$$

$$\mathcal{A}_2 = \mathcal{A}_3 = \mathcal{A}_4 = \mathcal{A}_5 = \langle \mathcal{U}, \mathcal{O}, \mathcal{U}^\vee \rangle. \quad (1.12)$$

У действия группы $\mathrm{GL}(V_6)$ на двойственном проективном пространстве $\mathbb{P}(\Lambda^3 V_6^\vee)$ есть 4 орбиты, замыкания которых выглядят следующим образом

$$\mathrm{Gr}(3, V_6^\vee) \subset \Omega \subset F \subset \mathbb{P}(\Lambda^3 V_6^\vee), \quad (1.13)$$

где F — гиперповерхность степени 4 (проективно двойственная к грассманиану $\mathrm{Gr}(3, V_6)$),

Ω — особый локус этой гиперповерхности.

Было доказано, что на открытом плотном подмножестве $\mathbb{P}(V^\vee) \setminus \Omega$ гомологически проективно-двойственным многообразием к $\mathrm{Gr}(3, V_6)$ является двойное накрытие $\mathbb{P}(V^\vee)$, разветвленное в F .

Для доказательства была использована следующая конструкция. Обозначим через $\mathcal{O}(-a)$ и $\mathcal{O}(-b)$ две образующие группы Пикара произведения грассманианов $\mathrm{Gr}(3, V_6) \times \mathrm{Gr}(3, V_6)$, а через

$$\iota: \mathrm{Gr}(3, V_6) \rightarrow \mathbb{P}_{\mathrm{Gr}(3, V_6) \times \mathrm{Gr}(3, V_6)}(\mathcal{O}(-a) \oplus \mathcal{O}(-b)) \quad (1.14)$$

естественное вложение (поднимающее диагональное вложение грассманиана в его квадрат). Были установлены следующие факты:

– Раздутие

$$Y := \mathrm{Bl}_{\iota(\mathrm{Gr}(3, V_6))} \left(\mathbb{P}_{\mathrm{Gr}(3, V_6) \times \mathrm{Gr}(3, V_6)}(\mathcal{O}(-a) \oplus \mathcal{O}(-b)) \right) \quad (1.15)$$

является разрешением особенностей двойного накрытия $\mathbb{P}(V^\vee)$, разветвленного в F .

– В производной категории многообразия Y есть естественная триангулированная подкатегория, являющаяся категорным разрешением особенностей этого двойного накрытия над открытым локусом $\mathbb{P}(\Lambda^3 V^\vee) \setminus \mathrm{Gr}(3, V_6^\vee)$.

– На произведении $\mathrm{Gr}(3, V_6) \times Y$ существует точная последовательность, являющаяся

резольвентной ядра преобразования Фурье–Мукаи, задающего эквивалентность ограниченной производной категории двойного накрытия и гомологически проективно двойственной категории к $\text{Gr}(3, V_6)$.

Для ортогонального грассманиана $\text{OGr}(6, 12)$ было построено разрешение особенностей двойного накрытия $\mathbb{P}^{31}$, разветвленного в квартике Игусы, которое, как ожидается, должно являться гомологически проективно двойственным многообразием к $\text{OGr}(6, 12)$.

1.4 Производные категории торических поверхностей

Кроме этого, изучались генераторы производных категорий гладких полных торических поверхностей, получающиеся как прямые образы линейных расслоений относительно торических морфизмов Фробенуса высоких порядков. Гипотеза Хэнлона–Хикса–Лазарева предсказывает, что такой прямой образ (для гладкого полного торического многообразия любой размерности) является генератором тогда и только тогда, когда соответствующее линейное расслоение не ациклично на всех “линейно вложенных” торических подмногообразиях.

При попытке доказательства этой гипотезы была предложена более сильная гипотеза, утверждающая что те же свойства порождения выполнены не только для прямых образов расслоений, но и для прямых образов “почти линейных расслоений”, то есть произвольных эквивариантных объектов производной категории, являющихся линейными расслоениями на открытой торической орбите.

Преимуществом более усиленной гипотезы является то, что класс почти линейных расслоений инвариантен относительно прямых образов при бирациональных торических морфизмах, поэтому применяя торическую программу минимальных моделей удастся свести усиленную гипотезу для произвольных (гладких и полных) торических поверхностей к случаю проективной плоскости и поверхностей Хирцебруха. А в этих случаях гипотеза легко доказывается.

1.5 Геометрия трифолдов Фано типа 4-1

Была также изучена геометрия гладкого проективного трехмерного многообразия Фано типа 4-1, то есть дивизора

$$X \subset \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \quad (1.16)$$

мультистепени $(1, 1, 1, 1)$. Такие многообразия интересны тем, что их формы над незамкнутыми полями могут иметь число Пикара 1, однако для них неизвестно критерия рациональности (в отличии от всех остальных классов таких многообразий).

Ожидается, что ключевым объектом к пониманию геометрии таких многообразий является схема Гильберта кривых мультистепени $(1, 1, 1, 1)$. Удалось установить, что эта схема

обладает удивительным свойством — ее отображение Абеля–Якоби в подходящий торсор над промежуточным якобианом многообразия X является изотривиальным расслоением со слоем X .

Также было изучено многообразие модулей полустабильных расслоений ранга 2 на X с каноническим первым классом Черна и минимальным вторым классом Черна. Оказалось, что его отображение Абеля–Якоби является изоморфизмом на торсор над промежуточным якобианом многообразия X с тремя орбифолдными точками.

Наконец, был описан линк Саркисова стартовый с раздутия эллиптической кривой мультистепени $(2, 2, 2, 2)$ на X . Он оказался симметричным линком, центральная точка которого — пересечение трех квадрик в $\mathbb{P}^6$ с 16 особыми точками.

1.6 Конструктивные и превратные пучки

Рассмотрим алгебраическое многообразие X с алгебраической и хорошей стратификацией Σ . Довольно большой объём литературы посвящён явному описанию категорий превратных пучков на многообразии X , превратных относительно заданной стратификации Σ . Тем не менее, в больших размерностях конкретные результаты получены только для небольшого числа многообразий, например, для грассманианов [6], стратификаций аффинного пространства гиперплоскостями [7] и гладких торических многообразий [8].

Наблюдение А.И. Бондала и Т. Логвиненко [9] заключается в том, что для стратификации комплексной прямой $\mathbb{C}$ одной точкой 0 категория превратных пучков оказывается эквивалентна категории конечномерных модулей над алгеброй эндоморфизмов тривиального расслоения ранга 2 над $\mathbb{C}^\times$, сохраняющих прямую в слое над точкой 1. Их гипотеза состояла в том, что аналогичное утверждение должно быть верно для любого гладкого торического многообразия: категория превратных пучков конструктивных относительно стратификации орбитами тора на гладком торическом многообразии размерности n должна быть эквивалентна категории конечномерных модулей над алгеброй эндоморфизмов некоторого тривиального расслоения над $(\mathbb{C}^\times)^n$, сохраняющих некоторые подпространства в слоях над некоторыми подмногообразиями, и эти подпространства и подмногообразия полностью описываются веером, соответствующим X .

В 2023 году сотрудниками лаборатории было получено описание категории превратных пучков в таком виде для гладких торических многообразий. В 2024 году работа велась над обобщением этого результата для категорий эквивариантных превратных пучков и для негладких торических многообразий. Для произвольной замкнутой подгруппы G тора T , действующего на гладком торическом многообразии X , было получено описание категории G -эквивариантных превратных пучков $\text{Perv}_G(X)$ как категории конечномерных модулей над некоторой алгеброй. В частности, это утверждение даёт описание превратных пучков на торических орбифолдах.

Случай негладких торических многообразий потребовал иного подхода. Категория превратных пучков — это сердцевина t -структуры, получаемой процедурой склейки. В ра-

боте А. Бондала и А. Бодзенты [10] показано, что при некоторых технических условиях из существования проективных генераторов в сердцевинах склеиваемых t -структур следует существование проективного генератора и в склеенной t -структуре. Если отказаться от условия конечномерности слоёв конструктивных пучков, то полученная категория “превратных пучков” будет получаться склейкой из категорий локальных систем на стратах, у которых имеются проективные генераторы. Это позволяет описать категорию превратных пучков как категорию конечномерных модулей над алгеброй эндоморфизмов проективного генератора.

С помощью этого наблюдения были получены описания категорий превратных пучков в виде модулей над некоторой алгеброй $A(\Delta)$, где Δ — это веер многообразиям X_Δ , для некоторых негладких торических многообразий, среди которых все аффинные торические поверхности и трёхмерный аффинный квадратичный конус. Во всех случаях алгебра $A(\Delta)$ получается конечной над своим центром, изоморфным $k[N]$, где N — решётка кохарактеров. Это позволяет сразу получить описание и полной эквивариантной категории $\text{Perv}_T(X_\Delta)$ как категории модулей над слоем $A(\Delta)$ над точкой.

Для случая аффинных поверхностей (с замкнутой нульмерной орбитой) также оказалось, что если поле коэффициентов пучков k имеет нулевую характеристику, полученный слой не зависит от многообразия с точностью до Морита-эквивалентности. Была сформулирована гипотеза, что для симплицального аффинного многообразия X (с замкнутой нульмерной орбитой) размерности n существует эквивалентность

$$\text{Perv}_T(X) \cong \text{Perv}_T(\mathbb{C}^n). \quad (1.17)$$

Как потом стало ясно, эта гипотеза, по существу, доказана в работе Т. Брадена и В. Лунца [11].

1.7 Квадратичные вычеты и гиперэллиптические кривые

Восстанавливая последний результат Л. В. Гончаровой о квадратичных вычетах и невычетах по модулю простого числа p , в 2024 году сотрудники лаборатории (совместно с С. Влэдуцом, И. Захаревичем и М. Цфасманом) в качестве побочного продукта доказали теорему о якобианах гиперэллиптических кривых, которые контролируют количество последовательностей из ℓ идущих подряд квадратичных вычетов ([12], теорема 2.3). Ниже приводится формулировка теоремы и необходимые определения.

Пусть p — нечётное простое число. Для данного числа $\ell < p$ обозначим через $n_p(R^\ell)$ количество наборов из ℓ идущих подряд квадратичных вычетов в последовательности $1, 2, \dots, p-1$. Например, если $p = 17$, то $n_p(R^3) = 0$, а если $p = 23$, то $n_p(R^3) = 2$.

При $\ell \geq 4$ для $n_p(R^\ell)$ нет явных (в широком смысле) формул, однако есть классическая неявная формула:

$$n_p(R^\ell) = \sum_{j=1}^{p-\ell-1} \prod_{i=1}^{\ell} \frac{1}{2} \left(1 + \left(\frac{i+j-1}{p} \right) \right). \quad (1.18)$$

Её легко интерпретировать в терминах количества точек на следующем семействе гиперэллиптических кривых над полем $\mathbb{F}_p$ из p элементов. Для каждого подмножества $T \subset \{1, \dots, \ell\}$ положим

$$f_T(X) := \prod_{(i+1) \in T} (X + i) \in \mathbb{Z}[X]. \quad (1.19)$$

Определим C_T как гиперэллиптическую кривую рода $g_T = g(C_T)$

$$C_T : y^2 = f_T(x), \quad g(C_T) = \lfloor (t-1)/2 \rfloor, \quad t = |T|. \quad (1.20)$$

Тогда несложно переписать вышеприведённую классическую формулу как сумму $|C_T(\mathbb{F}_p)|$.

С другой стороны, $n_p(R^\ell)$ легко выражается через количество точек из $\mathbb{F}_p$ на кривой C_ℓ , которая определяется как пересечение следующих $\ell - 1$ квадрики:

$$x_2^2 - x_1^2 = 1, \quad x_3^2 - x_2^2 = 1, \dots, \quad x_\ell^2 - x_{\ell-1}^2 = 1 \quad (1.21)$$

в аффинном пространстве $\overline{\mathbb{F}}_p^\ell$ над алгебраическим замыканием поля $\mathbb{F}_p$ из p элементов. Действительно, каждая точка $(x_1, \dots, x_\ell) \in C_\ell(\mathbb{F}_p)$ с ненулевыми координатами даёт набор $(x_1^2, x_2^2, \dots, x_\ell^2)$ из ℓ идущих подряд квадратичных вычетов по модулю p . Учитывая тот факт, что x_i и $-x_i$ дают один и тот же квадратичный вычет x_i^2 , мы получаем

$$n_p(R^\ell) = 2^{-\ell} |C_\ell^\circ(\mathbb{F}_p)|, \quad (1.22)$$

где $C_\ell^\circ \subset C_\ell$ состоит из точек с ненулевыми координатами.

Поэтому кривая C_ℓ отвечает за $n_p(R^\ell)$. По формуле присоединения её род g_ℓ равен $2^{\ell-2}(\ell - 3) + 1$. В частности, $g_2 = 0$, $g_3 = 1$, $g_4 = 5$, и т.д. К счастью, род g_ℓ равен сумме всех родов $g_T = g(C_T)$, $T \subseteq [1, \ell]$, что можно записать как

$$g_\ell = 2^{\ell-2}(\ell-3) + 1 = \sum_{j \geq 3}^{\ell} \left(j - 3 + \frac{1}{2} (1 + (-1)^j) \right) \binom{\ell}{j} = \sum_{T \subseteq [1, \ell]} g_T. \quad (1.23)$$

Несложно доказать это равенство по индукции для всех $\ell \geq 3$.

В силу вышеприведённой классической формулы для $n_p(R^\ell)$ след Фробениуса кривой $C_{p,\ell}$ совпадает с суммой следов Фробениуса всех кривых C_T . Поэтому естественно предположить, что якобиан $J_\ell = J(C_\ell)$ изогенен произведению всех якобианов $J_T = J(C_T)$. Это не вполне ясно из совпадения следов только над полем $\mathbb{F}_p$, нужно также проверять совпадение следов над конечными расширениями. Однако это верно, и у нас имеется геометрическая конструкция, доказывающая следующую теорему.

Теорема 1. Якобиан $J_\ell = J(C_\ell)$ кривой C_ℓ изогенен (над $\mathbb{Q}$) произведению эллиптических и гиперэллиптических якобианов $J_T = J(C_T)$ для всех таких $T \subseteq [1, \ell]$, что $\text{card}(T) \geq 3$.

1.8 Полуторические вырождения многообразий Шуберта

В отчетный период, получены положительные рецензии на препринт [13] с конструкцией простого геометрического митоза. Препринт доработан с учётом замечаний рецензентов и повторно отправлен в журнал. Результаты препринта используются в совместной работе с Екатериной Пресновой по построению пайп дримов в типе D и явному комбинаторному описанию граней многогранника Гельфанда–Цетлина в типе D , кодирующих полуторические вырождения данного многообразия Шуберта в многообразии полных флагов [14].

1.9 Алгебра и квантовая теория информации.

Одно из направлений исследований в 2024 году было посвящено исследованиям гомотопов ассоциативных и неассоциативных алгебр.

Напомним, что общее понятие гомотопии алгебр (вообще говоря неассоциативных) можно понимать как обобщение гомоморфизма: а именно, пусть есть две алгебры $(A, \star)$ и $(B, \cdot)$, тогда *гомотопия* — это три линейных отображения $f_1, f_2, f_3: A \rightarrow B$, таких что

$$f_1(a \star a') = f_2(a) \cdot f_3(a'), \quad (1.24)$$

где $a, a' \in A$ — произвольные элементы. В этом случае B назовем гомотопом A . Если потребовать биективность f_i , $i = 1, 2, 3$, то гомотопия называется *изотопией*. Частным случаем гомотопа является так называемый x -гомотоп: зафиксируем $x \in A$, тогда в алгебре A можно ввести операцию умножения двумя разными способами:

$$a \cdot_x^L a' = (a \star x) \star a' \quad (1.25)$$

(так называемый левый гомотоп) и

$$a \cdot_x^R a' = a \star (x \star a') \quad (1.26)$$

(правый гомотоп). Очевидно, в случае ассоциативных алгебр левые и правые гомотопы совпадают.

Отметим связь гомотопов ассоциативных алгебр с так называемой склейкой абелевых категорий. В 1982 году в статье Бейлинсона, Бернштейна и Делиня [15] при изучении превратных пучков, было введено понятие “склейки” триангулированных категорий. Далее, в 1986 году Макферсон и Вилонен рассмотрели “склейку” абелевых категорий. Следуя Псарудакису [16] введем понятие “склейки” (recollement) абелевых категорий. А именно, “склейка” — это тройка абелевых категорий $(\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C})$ и набор функторов: $i: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$, $e: \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}$ и сопряженные им: $q: \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}$, $p: \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}$ и $l: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{B}$ и $r: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{B}$, удовлетворяющие следующим условиям: функторы i, l, r — строго точные и образ i совпадает с ядром e .

В частности, при достаточно естественных условиях на абелевы категории, соответствующие ограниченные производные категории тоже будут удовлетворять условиям “склейки” триангулированных категорий. Это позволило существенно упростить проверку условий “склейки” и получить оценки гомологических размерностей категории $\mathcal{B}$ через $\mathcal{A}$ и $\mathcal{C}$. Фактически, “склейка” абелевых категорий является обобщением следующей известной ситуации: пусть у нас есть алгебра R и t — идемпотент в R . Тогда $\mathcal{A} = R/RtR\text{--Mod}$, $\mathcal{B} = R\text{--Mod}$ и $\mathcal{C} = tRt\text{--Mod}$.

Подобная ситуация встречается и при изучении гомотопов ассоциативных алгебр. А именно, рассмотрим ассоциативную алгебру с единицей R и фиксируем элемент $x \in R$. Как мы уже знаем, можно ввести новую операцию умножения на пространстве R :

$$r_1 \cdot_x r_2 = r_1 x r_2. \quad (1.27)$$

Новая алгебра может не содержать единицу, поэтому добавим ее внешним образом — получим алгебру $\widehat{R}_x$.

В работе [17] было показано, что для ассоциативной k -алгебры R категория модулей гомотопа $\widehat{R}_x\text{--Mod}$ является “склейкой” категорий $R\text{--Mod}$ и $k\text{--Mod}$ в случае “правильного” выбора элемента x . Условия “правильного” выбора следующие: $RxR = R$ и R как левый и правый $\widehat{R}_x$ -модуль является проективным. Такой выбор элемента называется хорошо-темперированным. В этом случае есть естественные оценки на глобальную гомологическую размерность категории $\widehat{R}_x\text{--Mod}$ через глобальную размерность $R\text{--Mod}$.

С точки зрения исследования гомотопов довольно естественными являются такие вопросы:

- сколько гомотопов (с точности до изотопии) имеет общая неассоциативная алгебра?
- есть ли ассоциативная алгебра, имеющая бесконечное число неизоморфных x -гомотопов?

В отчетный период, ответы на эти вопросы были получены в совместной работе сотрудников лаборатории Ильи Ждановского и Сергея Гумина [18]. А именно, в случае первого были изучены детерминантные гиперповерхности, естественно появляющиеся при рассмотрении умножения в алгебре как тензора. Были переформулированы условия изотопичности алгебр в терминах этих гиперповерхностей и в результате исследования ответ на первый вопрос такой: начиная с размерности 4, у общей неассоциативной алгебры бесконечное число неизотопных гомотопов. Далее, в случае ассоциативных алгебр удалось построить пример 13-мерной алгебры, имеющей бесконечное число неизоморфных x -гомотопов.

Вторым объектом исследования являлись приложения теории гомотопов, алгебраической геометрии и теории представлений к вопросам квантовой теории информации. Вопрос в самой квантовой теории информации звучит так: Пусть есть две полные проекторно-значные меры в n -мерном пространстве, соответственно, есть два набора n различных квантовых состояний соответствующих каждой мере: $|\psi_i\rangle, i = 1, \dots, n$ и $|\phi_i\rangle, i = 1, \dots, n$ соответственно. Зафиксируем вероятности перехода от $|\psi_i\rangle$ в $|\phi_j\rangle$. Сколько существует проекторно-значных мер (с точностью до унитарной эквивалентности) для фиксированных вероятностей?

Математическая формулировка задачи выглядит так: Пусть есть два полных набора ортогональных проекторов ранга 1: $p_1, \dots, p_n$ и $q_1, \dots, q_n$. Сколько существует таких наборов проекторов при фиксированных значениях следов $\text{Tr } p_i q_j$? Для общих значений следов, задача имеет следующие решения в малых размерностях: при $n = 2$ — 1 пара, при $n = 3$ — 2 пары, при $n = 4$ — 12 пар.

При изучении полных наборов проекторов естественно использовать следующее геометрическое описание: одномерный проектор p , действующий в n -мерном пространстве V , задается точкой и гиперплоскостью в проективизации $\mathbb{P}(V)$, соответствующих образу и ядру p . Полный набор проекторов $p_1, \dots, p_n$ действующих в V задается n точками в $\mathbb{P}(V)$, соответствующими образам $p_i, i = 1, \dots, n$. Соответственно, два полных набора $p_1, \dots, p_n$ и $q_1, \dots, q_n$ задаются набором из $2n$ точек в $\mathbb{P}(V)$. Естественным образом на наборе из $2n$ точек действует группа $PGL(V)$. Факторизуя по ней, получаем многообразие конфигураций в $\mathbb{P}(V)$. Объектом исследования является изучение симплектических и алгебро-геометрических свойств многообразия конфигураций. В частности, $\text{Tr}(p_i q_j)$ образуют интегрируемую систему, тесно связанную с нашим объектом исследования. В данный момент работа находится в процессе написания текста.

Напомним достаточно известную и до сих пор нерешенную проблему взаимно-несмещенных базисов в конечномерном эрмитовом пространстве: пусть V — комплексное пространство размерности n с эрмитовой формой $(-, -)$. Назовем пару ортонормированных базисов $e_1, \dots, e_n$ и $f_1, \dots, f_n$ — взаимно-несмещенными, если $(e_i, f_j) = \frac{1}{n}$ для любых i, j . Вопрос: какое максимальное количество попарно взаимно-несмещенных базисов в V ? Ги-

гипотеза говорит, что их $n + 1$ тогда и только тогда, когда $n = p^m$, где p — простое. В связи с этой задачей возникает вопрос классифицировать пары взаимно-несмещенных базисов (по модулю естественного действия $U(1)^{\times(2n-1)}$), то есть описать геометрические свойства многообразия $X(n)$, параметризующего пары таких базисов. При изучении этой задачи возникла следующая гипотеза для пространств четной размерности: пусть V — пространство размерности $2m$ с фиксированным ортонормированным базисом $e_1, \dots, e_{2m}$. Рассмотрим подпространство $W \subset V$ размерности m . Будем говорить, что W — *несмещенно* по отношению к $e_1, \dots, e_{2m}$, если в W существует ортонормированный базис $f_1, \dots, f_m$ подпространства W , такой что $(e_i, f_j) = \frac{1}{2m}$.

Гипотеза 1.1. Пусть V — комплексное эрмитово пространство размерности $2m$. Зафиксируем ортонормированный базис $e_1, \dots, e_{2m}$ в V . Тогда подпространство $W \subset V$ несмещенно по отношению к базису $\{e_i\}$ тогда и только тогда, когда его ортогональное дополнение $W^\perp$ несмещенно по отношению к базису $\{e_i\}$.

Простая проверка показывает верность гипотезы в случае $n = 2, 4$. Используя сложные алгебро-геометрические конструкции было показано, что гипотеза верна в случае $n = 6$. Дальнейшее изучение данной гипотезы впереди.

1.10 Кусочные изометрии и внешние бильярды

За отчетный период сотрудниками лаборатории были получены, совместно с А. Белым, А. Канель-Беловым и Ф. Руховичем, два общего вида условия на кусочные изометрии многоугольников, достаточные для наличия апериодических точек. Каждое из этих условий влечёт существование апериодических точек у внешних бильярдов вокруг правильных N -угольников при $N \neq 3, 4, 6$, а также во многих других конкретных примерах.

Рассмотрим ограниченный многоугольник P , разрезанный на несколько многоугольных кусков $P_1, \dots, P_n$; многоугольники P и P_i будут далее интерпретироваться как открытые подмножества плоскости. Отображение f из $P_1 \cup \dots \cup P_n$ в P называется *кусочной изометрией*, если ограничение отображения f на каждый из кусков P_i является ограничением некоторой евклидовой изометрии. При этом мы всегда предполагаем, что образы различных кусков не пересекаются и, как следствие, объединение этих образов плотно в P . Если каждое ограничение $f|_{P_i}$ сохраняет ориентацию, то говорят, что f — *кусочное вращение*, а если каждое $f|_{P_i}$ является параллельным переносом, то говорят, что f — *перекладывание многоугольников*. Аналогичным образом определяется перекладывание многогранников в евклидовом пространстве любой размерности.

Пусть теперь μ — простая трансляционно инвариантная конечно-аддитивная мера на выпуклых многогранниках в $\mathbb{R}^d$ (во всех рассмотренных до сих пор конкретных примерах $d = 2$). *Конечная аддитивность* заключается в том, что $\mu(\emptyset) = 0$ и

$$\mu(P \cup Q) = \mu(P) + \mu(Q) - \mu(P \cap Q) \quad (1.28)$$

где P, Q – выпуклые многогранники, объединение которых снова является выпуклым многогранником. *Трансляционная инвариантность* — это инвариантность относительно параллельных переносов. Наконец, говорят, что μ *простая*, если $\mu(P) = 0$ для всякого многогранника P со свойством $\dim(P) < d$. Последнее условие позволяет говорить о том, что при разрезании многогранника на куски значение меры μ на всём многограннике равно сумме значений этой меры на отдельных кусках. Известна полная классификация всех простых трансляционно инвариантных конечно-аддитивных мер на многогранниках [19], [20]; в случае $d = 2$ она принадлежит Хадвигеру [21].

Теорема 1.3. Пусть f — перекладывание кусков P_i многогранника P , которое сдвигает P_i на вектор v_i . Тогда функция

$$\text{Inv}_\mu(f) = \sum_{i=1}^n \mu(P_i) \otimes v_i \in \mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}^d \quad (1.29)$$

представляет собой гомоморфизм из группы всех перекладываний многогранника P в аддитивную группу векторного пространства $\mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}^d$. В частности, $\text{Inv}_\mu(f)$ инвариантно относительно сопряжений, а неравенство $\text{Inv}_\mu(f) \neq 0$ влечёт наличие аперiodических точек.

Эта теорема обобщает конструкцию инварианта Са–Арну–Фати [22], [23] (сокращенно: SAF инварианта) на случай произвольной размерности. В конкретных примерах (в частности, для подходящих ограничений второй итерации отображения внешнего бильярда) условие $\text{Inv}_\mu(f) \neq 0$ может быть явно проверено путём непосредственного вычисления левой части.

Второе достаточное условие аперiodичности относится к любым кусочным вращениям f ограниченного многоугольника P , не только перекладываниям многоугольников. Обозначим через ∂f дизъюнктное объединение границ всех кусков P_i . Более формально, ∂f можно определить как множество пар (z, P_i) , в которых $z \in \partial P_i$. Имеется естественное отображение $f^*: \partial f \rightarrow \partial f^{-1}$, индуцированное кусочным вращением f . Это отображение f^* является перекладыванием отрезков, но область определения этого перекладывания не совпадает с областью значений, поэтому его нельзя итерировать. Рассмотрим еще отображение $w: \partial f \rightarrow \partial f$, которое, для каждой точки z на границе двух разных кусков P_i и P_j , переводит (z, P_i) в (z, P_j) , а на остальной части графа ∂f доопределено таким образом, чтобы w было кусочной изометрией и инволюцией. Аналогично строится отображение $w_{-1}: \partial f^{-1} \rightarrow \partial f^{-1}$; мы требуем, чтобы $w = w_{-1}$ на общей части области определения.

Теорема 1.4. Если *квазикоммутатор* $(f^*)^{-1} \circ w_{-1} \circ f^* \circ w$ имеет ненулевой SAF-инвариант, то f имеет аперiodические точки.

1.11 Самодуальная теория Янга-Миллса

Сотрудники лаборатории также продолжали изучение самодуальной Теории Янга–Миллса (SDYM) [24], [25], которая, как известно, допускает твисторную формулировку, и поэтому открывает возможности для новых конструкций в комплексной геометрии. Ключевым здесь является вопрос о конформной инвариантности SDYM. Мы уже знаем [25], что в этой квантовой теории нет перенормировки константы связи, но есть, всё-таки конформная аномалия, которая проявляется в нетривиальной перенормировке полей. В данное время мы работаем над общим описанием этой аномалии, а сейчас хотим отчитаться о, быть может, частном, но важном результате.

Рассмотрим двухточечную функцию (её можно назвать поляризационным оператором по аналогии с обычной теорией калибровочных полей). При не совпадающих аргументах x, y она определяется выражением:

$$G(x, y) = \frac{1}{\|x - y\|^4}, \quad x \neq y. \quad (1.30)$$

где мы не подчёркиваем в обозначениях тензорные свойства функции $G(x, y)$.

Как легко видеть, такая функция не интегрируема вблизи диагонали и поэтому требует регуляризации. (Иначе говоря, мы должны построить обобщённую функцию, которая при $x \neq y$ совпадает с указанным выше выражением.) Такую регуляризацию можно, конечно, построить разными способами, но считается, что зависимость от выбора регуляризации не сказывается на существенных ответах квантовой теории. (Это чаще всего можно увидеть явно, но такому утверждению трудно придать статус теоремы.)

Мы выбираем такую регуляризацию:

$$G(x, y) = c \int \frac{d^4 u}{u^4} [\delta(u + x - y) - e^{-\mu^2 u^2} \delta(x - y)], \quad (1.31)$$

где c — некоторая (важная) числовая постоянная, которая вычисляется с помощью детального рассмотрения диаграмм Фейнмана,

μ — размерный параметр, который всегда присутствует при построении регуляризации и отражает отклонение конформных свойств квантовых величин от “наивных” классических.

Почти очевидно, что при инфинитезимальных дилатационных преобразованиях мы имеем

$$\delta G(x, y) = \mu \frac{d}{d\mu} G(x, y) = 2\pi^2 c \delta(x - y). \quad (1.32)$$

Общее утверждение о конформной аномалии в теории SDYM применительно к рассматриваемому частному случаю требует, чтобы при инфинитезимальных конформных преобразованиях, отвечающих конформному вектору Киллинга v двухточечная функция $G(x, y)$ преобразовывалась следующим образом:

$$\delta_v^{an} G(x, y) = 1/2 \operatorname{div}(v) \pi^2 c \delta(x - y), \quad (1.33)$$

где $\operatorname{div}(v)$ — обычная дивергенция векторного поля.

Замечание: Здесь δ_v^{an} — аномальная часть закона преобразования. Дело в том, что функция $G(x, y)$, как и её не регуляризованная версия $\frac{1}{\|x-y\|^4}$, не инвариантны относительно конформных преобразований. Нас интересует “аномальная” часть, то есть та часть, которая определяется регуляризацией.

Утверждение (1.33) мы смогли продемонстрировать. Теперь работаем над более общим утверждением касательно конформных свойств теории SDYM.

1.12 Модули стабильных пучков

В 2024 году сотрудником Лаборатории алгебраической геометрии и ее приложений Д. А. Васильевым подготовлен к защите текст диссертации «Геометрия пространств модулей когерентных стабильных пучков на рациональных многообразиях Фано основной серии» на соискание ученой степени кандидата математических наук. Статья «Модули полустабильных пучков ранга 2 на рациональных трехмерных многообразиях Фано основной серии» по теме диссертации опубликована в октябрьском номере журнала «Математический сборник».

В упомянутой статье изучаются пространства модулей полустабильных пучков ранга два на рациональных трехмерных многообразиях Фано основной серии. Таких многообразий четыре - это проективное пространство $X_1 = \mathbb{P}^3$, трехмерная квадратика X_2 , полное пересечение X_4 двух квадратиков в пространстве $\mathbb{P}^5$, и сечение X_5 грассманиана $\operatorname{Gr}(2, 5)$, вложенного по Плюккеру в пространство $\mathbb{P}^9$, подпространством $\mathbb{P}^6$. Классы Черна пучков E на $X = X_i$ определяются целыми числами c_1, c_2, c_3 , и соответствующие пространства модулей (схемы модулей Гизекера-Маруямы) полустабильных пучков ранга два на X будем обозначать $M_X(2; c_1, c_2, c_3)$.

Первое направление исследования в упомянутой статье касается вопроса об ограниченности третьего класса Черна c_3 полустабильных пучков ранга 2 на X при фиксированных $c_1 \in \{-1, 0\}$ и $c_2 \geq 0$ и получении оценок на третий класс Черна c_3 . Пользуясь техникой тилт-стабильности в производной категории $D^b(X)$, удалось дать полный ответ на этот вопрос для трехмерной квадратки X_2 в следующей теореме.

Теорема 2. Имеют место следующие утверждения:

- Пусть E – полустабильный пучок на квадратике X_2 ранга 2 с $c_1 = -1$. Тогда $c_2 \geq 0$ и $c_3 \leq \frac{1}{2}c_2^2$, если c_2 четно, и, соответственно, $c_3 \leq \frac{1}{2}(c_2^2 - 1)$, если c_2 нечетно.
- Пусть E – полустабильный пучок ранга 2 с $c_1(E) = 0$. Тогда $c_2 \geq 0$ и $c_3 \leq \frac{1}{2}c_2^2$, если

c_2 чётно, и, соответственно, $c_3 \leq \frac{1}{2}(c_2^2 + 1)$, если c_2 нечётно. Эти оценки являются точными для всех $c_3 \geq 0$.

Доказательство этой теоремы основано на исследовании взаимосвязи между тилт-полустабильностью и полустабильностью по Бриджланду в $D^b(X_2)$. Ключевым здесь является важный технический результат Шмидта (2014 г.) об описании подкатегории в $D^b(X_2)$, порожденной парами кручения в смысле Бриджланда.

К сожалению, к настоящему моменту не известно аналогов этого результата для многообразий X_4 и X_5 . Поэтому для этих многообразий не удастся получить тем же методом точные оценки сверху на класс c_3 для всех полустабильных пучков ранга 2 на X_4 и X_5 . Однако, применяя более традиционную технику, использующую поведение стабильных пучков при стандартных бирациональных перестройках $X_4 \dashrightarrow X_1$ и $X_5 \dashrightarrow X_2$, получен частичный ответ на вопрос об ограниченности c_3 для достаточно широкого класса пучков на X_4 и X_5 .

А именно, рассматриваются стабильные рефлексивные пучки ранга 2 с $c_1 = 0$, называемые в статье пучками общего типа. Это пучки E на X_i , $i = 4, 5$, такие, что $E|_l \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}^{\oplus 2}$ для общей прямой $l \subset X_i$, а прямые, для которых либо $E|_l \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(a) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-a)$, где $a \geq 2$, либо $E|_l$ не локально свободен, составляют подмножество размерности ≤ 0 в базе семейства прямых на X_i . В статье приведены примеры бесконечных серий компонент пространств модулей полустабильных пучков, в которых общий пучок является рефлексивным пучком общего типа. (Предположительно, свойство быть пучком общего типа верно для всех стабильных рефлексивных пучков ранга 2 с $c_1 = 0$, то есть, возможно, для них имеет место аналог теоремы Грауэрта–Мюлиха, справедливой для стабильных рефлексивных пучков ранга 2 на X_1 .) Для пучков общего типа доказана следующая теорема.

Теорема 3. Пусть E – стабильный рефлексивный пучок ранга 2 общего типа с классами Черна $c_1 = 0$, $c_2 > 0$, c_3 на многообразии X_4 или X_5 . Тогда для класса c_3 пучка E верны следующие неравенства:

$$- \text{На } X_4: c_3 \leq c_2^2 - c_2 + 2.$$

$$- \text{На } X_5: c_3 \leq \frac{2}{9}c_2^2, \text{ если } c_2 \text{ чётно, и, соответственно, } c_3 \leq \frac{2}{9}c_2^2 + \frac{1}{2}, \text{ если } c_2 \text{ нечётно.}$$

Вопрос о том, точны ли эти оценки, является открытым.

Также в упомянутой статье построен ряд новых бесконечных серий неприводимых рациональных компонент пространств модулей полустабильных пучков ранга 2 на многообразиях X_1 , X_2 , X_4 и X_5 , описаны общие пучки в этих компонентах и доказана их рефлексивность, а также найдены размерности построенных компонент. Эти результаты собраны в следующей теореме.

Теорема 4. Пусть X – одно из многообразий X_1 , X_2 , X_4 , X_5 , и пусть $\mathcal{O}_X(1)$ – обильный пучок на X такой, что $\text{Pic}(X) = \mathbb{Z}[\mathcal{O}_X(1)]$. Рассмотрим пучок E ранга 2 на X , задаваемый одним из нетривиальных расширений вида

$$0 \rightarrow F_i \rightarrow E \rightarrow G_j \rightarrow 0, \quad 1 \leq i \leq 3, \quad 1 \leq j \leq 2, \quad (1.34)$$

где $F_1 = \mathcal{O}_X(-n)^{\oplus 2}$, $F_2 = F(-n)$,

F – пучок ранга 2 одного из видов (I)-(III), описанных в п. 4.3 параграфа 4 статьи,

$G_1 = \mathcal{O}_S(m)$, где $S \in |\mathcal{O}_X(k)|$,

пучки F_3 и G_2 определены в случае квадрики $X = X_2$, а именно, $F_3 = \mathcal{S}(-n)$, где $\mathcal{S}$ – спинорное расслоение на X_2 с $\det \mathcal{S} = \mathcal{O}_X(1)$,

а $G_2 = \mathcal{I}_{\mathbb{P}^1, S}(m)$, где $S \in |\mathcal{O}_X(1)|$, $\mathbb{P}^1$ – прямая на поверхности S .

Пусть $M_X(v)$ – схема модулей Гизекера–Маруямы полустабильных пучков на X с характером Черна $v = \text{ch}(E)$, определяемым из тройки (1.34), и пусть

$$M := \{[E] \in M_X(v) \mid E \text{ – стабильное по Гизекеру расширение (1.34)}\}. \quad (1.35)$$

Тогда верны следующие утверждения:

- Для X_1, X_2, X_4, X_5 в случае $i = j = 1, k \geq 1, n = \lceil \frac{k}{2} \rceil, m < -n$,
- для X_1, X_4, X_5 в случае $i = 2, j = 1, k \geq 1, n = \lfloor \frac{k}{2} \rfloor, m < -n$,
- для X_2 в каждом из случаев
- $i = 1, j = 2, n = 1, m \leq -1$,
- $i = 3, j = 1, k \geq 1, n = \lfloor \frac{k}{2} \rfloor + 1, m \leq -n$,
- $i = 3, j = 2, n = 1, m \leq -1$,

множество M является гладким плотным открытым подмножеством неприводимой компоненты $\overline{M}$ схемы модулей $M_X(v)$. При этом M является тонким пространством модулей, и рефлексивные пучки составляют в M плотное открытое множество. Более того, все компоненты $\overline{M}$ бесконечных серий (1), (2) и (3a)-(3c) являются рациональными многообразиями для каждого из многообразий X_i , $i = 1, 2, 4, 5$, кроме серии (2) для $X = X_4$, в которой каждая компонента нерациональна. Кроме того, во всех случаях найдены размерности компонент $\overline{M}$ как многочлены из $\mathbb{Q}[k, m, n]$ либо $\mathbb{Q}[m]$ соответственно.

Значительную часть содержания упомянутой статьи составляет исследование полустабильных пучков ранга 2 с максимальным классом c_3 на квадрике X_2 . Оно показывает, что для $c_1 \in \{-1, 0\}$ и всех значений класса c_2 , кроме нескольких малых значений, всякий такой пучок задается расширением (1.34), то есть в обозначениях (1.35) мы имеем равенство $M = \overline{M}$. В этом случае удалось получить полное описание всех пространств модулей полустабильных пучков с максимальным классом c_3 на X_2 . В оставшихся случаях малых значений c_2 и максимального $c_3 \geq 0$ также удастся получить явное описание пространств модулей. (Единственный случай отрицательного максимального c_3 – случай $(c_1, c_2, c_{3\max}) = (0, 1, -1)$.) Эти результаты собраны в следующих двух теоремах.

Теорема 5. Пусть $X = X_2$ – квадрака, а $M_X(v)$ – схема модулей Гизекера-Маруямы полустабильных пучков E ранга 2 на X с классами Черна (c_1, c_2, c_3) , где $c_1 \in \{-1, 0\}$, $c_2 \geq 0$, $c_3 = c_{3\max} \geq 0$ максимален при каждом c_2 , и

$$v = \text{ch}(E) = (2, c_1 H, \frac{1}{2}(c_1^2 - c_2)H^2, \frac{1}{2}(c_{3\max} + \frac{2}{3}c_1^3 - c_1 c_2)[\text{pt}]), \quad (1.36)$$

где $H = c_1(\mathcal{O}_X(1))$. Тогда имеют место следующие утверждения:

- При $c_1 = -1$, четном $c_2 = 2p$, $p \geq 2$, и $c_{3\max} = \frac{1}{2}c_2^2$ многообразие $M_X(v)$ является грассманизацией 2-мерных факторпространств векторного расслоения ранга $\frac{1}{4}(c_2 + 2)^2$ на пространстве $\mathbb{P}^4$. При этом $\dim M_X(v) = \frac{1}{2}(c_2 + 2)^2$.
- При $c_1 = -1$, нечетном $c_2 = 2p + 1$, $p \geq 1$, и $c_{3\max} = \frac{1}{2}(c_2^2 - 1)$ многообразие $M_X(v)$ является грассманизацией 2-мерных факторпространств векторного расслоения ранга $\frac{1}{4}(c_2 + 1)(c_2 + 3)$ на грассманиане $\mathbb{G} = \text{Gr}(2, 4)$. При этом $\dim M_X(v) = \frac{1}{2}(c_2 + 1)(c_2 + 3)$.
- При $c_1 = 0$, нечетном $c_2 = 2p + 1$, $p \geq 1$, и $c_{3\max} = \frac{1}{2}(c_2^2 + 1)$ многообразие $M_X(v)$ является проективизацией векторного расслоения ранга $\frac{1}{2}(c_2 + 1)(c_2 + 3)$ на пространстве $\mathbb{P}^4$. При этом $\dim M_X(v) = \frac{1}{2}c_2^2 + 2c_2 + \frac{9}{2}$.
- При $c_1 = 0$, четном $c_2 = 2p$, $p \geq 3$, и $c_{3\max} = \frac{1}{2}c_2^2$ многообразие $M_X(v)$ является проективизацией векторного расслоения ранга $\frac{1}{2}c_2^2 + 2c_2 + 1$ на грассманиане $\mathbb{G}$. При этом $\dim M_X(v) = \frac{1}{2}c_2^2 + 2c_2 + 4$.
- Во всех вышеуказанных случаях схема $M_X(v)$ неприводима и является гладким рациональным проективным многообразием, все пучки из $M_X(v)$ стабильны, общий пучок из $M_X(v)$ рефлексивен, и $M_X(v)$ – тонкое пространство модулей.

Теорема 6. В условиях и обозначениях предыдущей теоремы справедливы следующие утверждения:

- При $c_1 = -1$, $c_2 = 1$ и $c_{3\max} = 0$ многообразие $M_X(v)$ – точка $[\mathcal{S}(-1)]$.
- При $c_1 = c_2 = c_{3\max} = 0$ многообразие $M_X(v)$ – точка $[\mathcal{O}_X^{\oplus 2}]$.
- При $c_1 = -1$, $c_2 = 2$ и $c_{3\max} = 2$ имеем $M_X(v) \simeq G(2, 5)$.
- При $c_1 = 0$, $c_2 = 2$ и $c_{3\max} = 2$ схема $M_X(v)$ неприводима, имеет размерность 9 и не является гладкой.
- При $c_1 = 0$, $c_2 = 4$ и $c_{3\max} = 8$ схема $M_X(v) = M_X(2; 0, 4, 8)$ является объединением двух неприводимых компонент M_1 и M_2 . Эти компоненты описываются следующим образом:
 - M_1 – гладкое рациональное многообразие размерности 21, являющееся проективизацией локально свободного пучка ранга 17 на грассманиане $\mathbb{G}$. M_1 – тонкое пространство модулей, и все пучки из $M_X(v)_1$ стабильны. При этом схема $M_X(v)$ неособа вдоль M_1 .
 - схема M_2 неприводима, имеет размерность 21, и полистабильные пучки из M_2 составляют замкнутое подмножество размерности 12 в M_2 , в котором схема $M_X(v)$ не является гладкой.
- схема $M_X(2; 0, 4, 8)$ несвязна:

$$M_X(2; 0, 4, 8) = M_1 \sqcup M_2. \quad (1.37)$$

Начата работа по описанию полустабильных пучков ранга 2 с максимальным c_3 на многообразии X_5 . В производной категории $D^b(X_5)$, как и в $D^b(X_2)$ и $D^b(\mathbb{P}^3)$, имеется полный строгий исключительный набор, с помощью которого, по-видимому, можно обобщить результаты, полученные Шмидтом для $\mathbb{P}^3$ и в упомянутой выше статье для X_2 , на случай X_5 . Также начата работа по описанию неприводимых компонент схем Гильберта кривых в $\mathbb{P}^3$ и в X_2 , соответствующих по конструкции Серра рефлексивным пучкам ранга 2 с максимальным c_3 . Можно предположить, что соответствующие кривые имеют максимальный род среди кривых той же степени, не содержащихся в поверхностях достаточно малой степени (это условие необходимо для стабильности соответствующих пучков ранга 2).

2 Гомологические и мотивные методы в некоммутативной геометрии

2.1 Контрактады и граф-комплексы

В отчетный период сотрудники лаборатории получили новые результаты в теории операд и их приложений. Изучались новые операдные структуры на основе графов и их применения для вычисления различных инвариантов в геометрии пространств модулей кривых, конфигурационных пространств и теории графов.

2.1.1 Контрактады

Сотрудники лаборатории изучили новые операдные структуры, которые мы называли контрактадами. Это новая структура является естественным графическим обобщением операд. Операции в контрактадах индексируются графами, а правила их композиций происходят из стягиваний графов по связным подграфам. Мотивация контрактад, как и в случае обычных операд, происходит из самых разных разделов математики: геометрии пространств модулей кривых, топологии конфигурационных пространств, комбинаторики графов и алгебры. В результате нашей работы, было показано, что многие классические примеры операд естественным образом обобщаются на случай контрактад.

Нами были изучены некоторые естественные обобщения операд в самых разных разделах математики. Мотивирующим примером контрактад является контрактада маленьких дисков, являющееся аналогом операд маленьких дисков. Для каждого графа, соответствующая компонента кодирует конфигурации дисков, пронумерованных вершинами графа, вложенных в единичный диск с дополнительными условиями на пересечения, происходящими из структуры графа. Структура контрактады возникает при композировании этих конфигураций. Как и в случае операд, эта контрактада тесно связана с графическими обобщениями конфигурационных пространств точек. Последующее изучение этой контрактады позволит описывать рациональный гомотопический тип конфигурационных пространств многообразий, как это было сделано в классическом случае.

Другой пример происходит из комбинаторики. Нами была введена контрактада кодирующая остовные деревья в графах. Эта контрактада обобщает операд корневых деревьев, алгебры над которой совпадают с пре-лиевскими.

Также, мы построили контрактаду, возникающую в алгебраической геометрии, обобщающую скрученную алгебру пространств модулей стабильных цепей Лосева–Манина и симметрическую операд пространств модулей стабильных кривых Делиня–Мамфорда.

В процессе построения примеров и их изучения была разработана общая теория и сопутствующая гомологическая/гомотопическая теория. Мы построили кошулеву теорию и технику базисов Грёбнера для контрактад. Используя эти техники, мы обобщили результаты Коэна, описав гомологии контрактады маленьких дисков. Также мы доказали, что эта контрактада и многие другие являются кошулевыми.

2.1.2 Производящие функции для контрактад

Были изучены также методы производящих функций для контрактад. Мы развивали два разных связанных подхода.

Первый заключался в том, чтобы по контрактаде сопоставлять функцию на графах считающую размерности соответствующих компонент. Этот метод не очень удобен для подсчёта значений для конкретных графов, но помогает для вывода общих "функциональных уравнений". В частности, мы вывели обобщение функционального уравнения на графические функций кошулево двойственных кошулевым контрактад.

Второй подход заключался в том, чтобы строить производящие ряды для специальных классов графов, чьи коэффициенты это соответствующие размерности компоненты контрактад, такие что уравнения на графические функции превращаются в честные функциональные уравнения. К примеру, для класса путей надо брать обычные производящие ряды, для циклов – логарифмические производящие ряды, а для полных графов – экспоненциальные. Наибольший интерес представляет класс полных многодольных графов, индексируемых диаграммами Юнга. Соответствующие ряды – это формальные степенные ряды в кольце симметрических функций.

В качестве одного из простейших приложений, мы изучали хроматические полиномы графов как графическую функцию со значениями в многочленах. В случае полных многодольных графов, мы вычислили производящую функцию хроматических полиномов. Она дается формулой

$$\sum_{\lambda} \chi_{\kappa_{\lambda}}(q) \frac{m_{\lambda}}{\lambda!} = (1 + \sum_{n \geq 1} \frac{p_n}{n!})^q. \quad (2.1)$$

2.1.3 Новые пространства модулей кривых

Также мы изучали контрактаду, обобщающую операду пространств модулей стабильных кривых и применяли методы производящих функций для описания рядов Гильберта пространств модулей.

Мы построили упомянутую ранее “замечательную” контрактаду в категории гладких проективных многообразий (определённых над $\mathbb{Z}$). Компоненты этой контрактады для полных графов – это в точности пространства модулей Делиня–Мамфорда стабильных кривых рода нуль, а в случае звёздных графов соответствующие многообразия являются пространствами модулей Лосева–Манина стабильных цепей рода нуль. При этом в обоих случаях структура контрактады в этих компонентах происходит из операции склейки стабильных кривых вдоль отмеченных точек. Мы обобщили это рассуждение и доказали, что в случае полных многодольных графов соответствующие компоненты контрактады являются пространствами модулей стабильных кривых специального типа. Более точно, некоторые отмеченные точки

в рассматриваемых кривых могут склеиваться, и есть ограничения на двойственные графы этих кривых. Мы показали, что эти пространства модулей проективные и гладкие, и получаются из пространств модулей Делиня–Мамфорда путём последовательных сдвигов. Также мы показали, что в случае, если граф это дерево, то соответствующее многообразие является торическим, и многогранник, соответствующий его вееру, комбинаторно эквивалентен граф-ассоциативу.

Рассматривая комплексные/вещественные точки этих многообразий, мы получаем контракту в категории комплексных/гладких многообразий. Используя методы контракта, мы обобщили результаты Гецлера в комплексном случае и Эттингера, Хорошкина, Виллочера в вещественном случае. Мы описали (ко)гомологии соответствующих контракта в комплексном и вещественном случае. Также, мы доказали, что гомологии этих контракта кошулевы. В комплексном случае, используя технику смешанных структур Ходжа, мы показали, что условие кошулевости равносильно вырождению спектральных последовательностей Делиня для дополнений с нормальным дивизором на втором листе. В вещественном случае мы выводили кошулевость с помощью клеточного разбиения этих многообразий, обобщающего клеточное разбиение пространств модулей кривых, введённое Девадосом.

В качестве одного из приложений, мы, аналогично случаю хроматического полинома, используя кошулевость, ввели функциональные уравнения на ряды Гильберта соответствующих многообразий. В случае полных многодольных графов, мы получили явные уравнения/формулы на соответствующие симметрические производящие функции в комплексном/вещественном случае.

Аналогично классике, для компонент этой контракты, мы можем определить ψ -классы, индексируемые вершинами соответствующего графа, как классы Черна линейных расслоений. В случае пространств модулей, эти расслоения заданы касательными прямыми в отмеченных точках. Особый интерес представляет вычисление соответствующих чисел пересечений, так как вычисление этих чисел в случае классических пространств модулей является важнейшей задачей в математической физике. На текущий момент общего ответа нет, но есть интересные частные результаты и утверждения. Также найдены интересные оценки снизу на числа пересечений. Эти оценки формулируются в терминах порождающих деревьев соответствующего графа.

2.1.4 Гамильтоновы пути и циклы

Кроме того, мы развили теорию кошулевых модулей над контрактами и применили методы производящих функций для изучения и вычисления гамильтоновых путей/циклов в графах.

Гамильтонов путь/цикл в графе это путь/цикл, который проходит по всем вершинам графа ровно один раз. В общем случае, подсчёт гамильтоновых путей/циклов является весьма нетривиальной задачей. Более того, даже не ясно, когда заданный граф вообще имеет гамильтонов путь/цикл. Оказывается, к этой задаче можно применить методы контракта.

Мы показали, что графическая коллекция Гамильтоновых путей образует контракту относительно операции подстановки путей. Мы описали её в терминах образующих и соотношений и доказали её кошулевусть. В случае многодольных графов, используя кошулевусть, мы вычислили производящую функцию (ориентированных) гамильтоновых путей

$$\sum_{|\lambda| \geq 0} \text{HP}(\mathcal{K}_\lambda) \frac{m_\lambda}{\lambda!} = \frac{1}{1 - \sum_{n \geq 1} (-1)^{n-1} p_n}. \quad (2.2)$$

Оказывается, на графической коллекции гамильтоновых циклов тоже есть алгебраическая структура. Мы показали, что операция подстановки пути внутри цикла, индуцирует структуру правого модуля над контрактудой гамильтоновых путей на графической коллекции гамильтоновых циклов. Мы разработали соответствующую теорию для правых модулей для контрактуд и сформулировали понятие кошулевусти для модулей. В частности, мы доказали, что правый модуль гамильтоновых циклов является кошулевым. Используя кошулевусть, мы вычислили производящую функцию (ориентированных) гамильтоновых циклов

$$\sum_{l(\lambda) \geq 2} \text{HC}(\mathcal{K}_\lambda) \frac{m_\lambda}{\lambda!} = -\log(1 - \sum_{n \geq 1} (-1)^{n-1} p_n) - \sum_{n \geq 1} (-1)^{n-1} \frac{p_n}{n}. \quad (2.3)$$

2.2 Скобки Фейгина–Одесского

В отчетный период, подготовлена к публикации и отправлена в журнал «Journal of Geometry and Physics» статья стажера лаборатории Л. Городецкого и Н. Маркаряна «On Conormal Lie Algebras of Feigin–Odesskii Poisson Structures». Основной результат статьи — описание конормальных алгебр Ли скобок Фейгина–Одесского. Пуассоновы структуры Фейгина–Одесского (или скобки Фейгина–Одесского) — это некоторый класс голоморфных пуассоновых структур на комплексных проективных пространствах, строящихся по стабильным векторным расслоениям положительной степени на эллиптических кривых.

Пуассоновы структуры Фейгина–Одесского были изначально определены Б. Фейгиным и А. Одесским в 1995 году через квазиклассический предел коммутатора в эллиптических алгебрах. Кроме того, они привели без доказательства следующее ключевое свойство скобок, которое показывает их тесную связь с геометрией векторных расслоений на эллиптической кривой. Пусть C — эллиптическая кривая над алгебраически замкнутым полем k , и V — стабильное векторное расслоение степени $n > 0$ на C . Будем рассматривать с точностью до пропорциональности расширения

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_C \longrightarrow E \longrightarrow V \longrightarrow 0, \quad (2.4)$$

параметризуемые точками пространства $\mathbb{P}\text{Ext}^1(V, \mathcal{O}_C)$. Заметим, что не пропорциональные

расширения могут задавать одно и то же векторное расслоение E , а потому $\mathbb{P}\mathrm{Ext}^1(V, \mathcal{O}_C)$ разбивается на классы изоморфизма E . Пуассонова структура Фейгина–Одесского определена на проективном пространстве $\mathbb{P}\mathrm{Ext}^1(V, \mathcal{O}_C)$, и для неё выполняется следующая теорема.

Теорема 7. Классы изоморфизма E локально являются симплектическими листами скобок Фейгина–Одесского на $\mathbb{P}\mathrm{Ext}^1(V, \mathcal{O}_C)$.

Сотрудники лаборатории нашли простое доказательство этой теоремы, основанное на новой версии определения скобок Фейгина–Одесского через дифференциал на втором листе некоторой спектральной последовательности. Кроме того, доказана следующая теорема, дающая описание конормальных алгебр Ли скобок Фейгина–Одесского.

Теорема 8. Пусть точка $x \in \mathbb{P}\mathrm{Ext}^1(V, \mathcal{O}_C)$ соответствует некоторому расширению вида (2.4). Тогда конормальная алгебра Ли пуассоновой структуры Фейгина–Одесского в точке x изоморфна алгебре Ли $\mathrm{End}(E)_0$ бесследовых эндоморфизмов векторного расслоения E .

Конормальные алгебры Ли играют важную роль в описании геометрии пуассоновой структуры, так как они отражают поведение пуассоновой структуры в окрестностях симплектических листов. Полученное сотрудниками лаборатории описание конормальных алгебр Ли скобок Фейгина–Одесского далее было использовано Н. Маркаряном и А. Полищуком для изучения совместимости различных пуассоновых структур Фейгина–Одесского.

Ожидается, что доказанные теоремы 7 и 8 являются отражением более общей картины — существования симплектического группоида для скобок Фейгина–Одесского. Симплектический группойд — это группойд Ли с симплектической формой, которая некоторым образом согласована с умножением. По симплектическому группойду можно построить симплектический алгеброид Ли, по которому, в свою очередь, естественным образом можно получить пуассонову структуру. При этом геометрия полученной пуассоновой структуры (в том числе описание симплектических листов и конормальных алгебр Ли) оказывается напрямую связана с геометрией исходного симплектического группоида. Ожидается, что симплектический группойд для скобок Фейгина–Одесского можно построить явно в терминах исходного стабильного векторного расслоения V на эллиптической кривой. Если удастся построить такой симплектический группойд, то теоремы 7 и 8, скорее всего, станут естественными следствиями из его конструкции.

2.3 Характеристические слоения на гиперповерхностях

Если X — компактное комплексное многообразие с голоморфной симплектической формой σ , а V — гладкая гиперповерхность в X , то ядро ограничения формы σ на V задает регулярное голоморфное слоение на V ранга 1, называемое характеристическим слоением. Важная задача, связанная с характеристическим слоением, — описание замыканий по Зарисскому его листов. В случае, если X — неприводимое голоморфное симплектическое многообразие, эта задача во многом решена. На текущий момент сотрудниками лаборатории проводится исследование этой задачи для другого класса голоморфных симплектических

многообразий — абелевых многообразий.

Приведем известные в литературе результаты для неприводимых симплектических многообразий X . В этом случае ключевым элементом для ответа на вопрос об устройстве замыканий листов характеристического слоения является квадратичная форма Бовиля–Богомолова q на $H^2(X, \mathbb{Z})$. А именно, для гладкой гиперповерхности $V \subset X$ возможны три случая в зависимости от знака $q(V)$:

- 1) Если $q(V) > 0$, то общий лист слоения плотен по Зарисскому в V ;
- 2) Если $q(V) = 0$, то замыкания по Зарисскому листов слоения являются лагранжевыми торами в X ;
- 3) Если $q(V) < 0$, то все листы слоения алгебраические и изоморфны $\mathbb{P}^1$.

На данный момент утверждения 1 и 3 доказаны в полной общности, а известное доказательство утверждения 2 опирается на гипотезу об изобилии, которая проверена в частных случаях.

Цель текущего исследования сотрудников лаборатории — получить аналогичный результат для абелевых многообразий. Так как на абелевых многообразиях нет полного аналога формы Бовиля–Богомолова, даже формулировка аналогов трех вышеописанных случаев представляет из себя нетривиальную задачу. Однако, например, сформулирована следующая гипотеза.

Гипотеза 1. Пусть X — абелево многообразие с голоморфной симплектической формой σ , а V — обильная гладкая гиперповерхность в X . Тогда общий слой характеристического слоения на V плотен по Зарисскому.

Рассматриваются два возможных направления доказательства этой гипотезы. Первое — использование некоторого аналога формы Бовиля–Богомолова, свойства которого позволят доказать, что в V нет коизотропных подмногообразий коразмерности 2 в X . Идея этого подхода вытекает из известного доказательства аналогичного утверждения для неприводимых голоморфных симплектических многообразий. Второе направление — использование теоремы Ботта об обращении в нуль для доказательства того, что в V нет гиперповерхностей, инвариантных относительно слоения. С помощью этого подхода на данный момент удалось доказать следующее: если в условиях гипотезы □ число Пикара X равно 1, то V не содержит гладких гиперповерхностей, инвариантных относительно слоения.

2.4 Полулинейные представления групп перестановок

Пусть G — группа перестановок некоторого бесконечного множества S . Это вполне несвязная хаусдорфова группа, базу открытых подгрупп которой составляют поточечные стабилизаторы конечных подмножеств в S . Класс таких групп крайне широк. Например, он включает все локально компактные группы.

Дискретное множество, снабжённое непрерывным действием группы G , называется *гладким G -множеством*. Другими словами, G -множество гладкое если стабилизаторы всех

его элементов открыты.

Для геометрических приложений, в особенности бирациональных, особый интерес представляют гладкие линейные представления группы G в векторных пространствах.

Изучение линейных представлений естественно связано с изучением *полулинейных* представлений, т.е. аддитивных действий группы G в векторных пространствах V над полем K , снабжённым действием группы G , таких что $g(av) = g(a) \cdot g(v)$ для всех $a \in K$, $g \in G$, $v \in V$. Линейные представления можно воспринимать как «локальные системы», тогда полулинейные представления соответствуют «квазикогерентным пучкам». Для данного класса линейных представлений можно надеяться найти такое поле, снабжённое действием группы, тензорное домножение на которое тривиализует или хотя бы существенно упрощает этот класс линейных представлений.

Классические примеры: «теорема 90 Гильберта» А.Шпайзера о тривиальности гладких полулинейных представлений Галуа; теории Дж. Тейта, Ж.-М. Фонтена и др. представлений Галуа локальных полей.

Линейные представления можно воспринимать как «локальные системы». Тогда полулинейные представления соответствуют «квазикогерентным пучкам».

Изучался простейший случай, в котором G — группа всех перестановок множества S . Основная цель состояла в построении полей с гладким действием группы G с описанием гладких полулинейных представлений над ними в дальнейшем.

В нулевой характеристике имеются биективные соответствия между неприводимыми гладкими линейными представлениями, неразложимыми гладкими инъективными линейными представлениями, и конечными диаграммами Юнга. Случай положительной характеристики практически не изучен.

Ранее были исследованы гладкие полулинейные представления над некоторыми классами полей.

В частности, если F_S обозначает поле частных копроизведения $\bigotimes_{k, i \in S} F$ в категории коммутативных k -алгебр набора копий регулярного расширения полей $F|k$ (т.е. $F \otimes_k L$ целостно для любого расширения полей $L|k$), пронумерованных множеством S , то над F_S а) имеется ровно один класс изоморфизма неприводимых гладких полулинейных представлений, б) неразложимые гладкие инъективные полулинейные представления естественно пронумерованы неотрицательными целыми числами (а не диаграммами Юнга).

Новые поля с гладким действием группы G можно искать а) среди инвариантных подполей полей вида F_S , а также б) среди их расширений. На более геометрическом языке это соответствует а) доминантным отображениям из декартовых степеней X^S абсолютно неприводимых многообразий X над полем k , которые эквивариантны по отношению ко всем перестановкам множителей X , б) неприводимым инвариантным подмногообразиям в X^S .

По крайней мере некоторые из таких отображений являются композициями $h : X^\Psi \xrightarrow{f^\Psi} Y^\Psi \rightarrow H \backslash Y^\Psi$, где $X \xrightarrow{f} Y$ — доминантное k -отображение, а H — некоторая группа автомор-

физмов многообразия $Y|k$, диагонально действующая на Y^Ψ .

Например, для каждого промежуточного поля L в $F|k$ и группы H автоморфизмов поля L тождественных на k подполе $(L_S)^H$ в L_S , неподвижное относительно диагонального действия группы H инвариантно относительно естественного действия группы G на F_S .

Обнаружено, что эта конструкция существенно расширяется, если а) группы H считать проалгебраическими над k , б) адекватно определить действие проалгебраических групп на полях и их неподвижные подполя. Более того, можно ожидать, что в таком контексте описываются все G -инвариантные промежуточные поля L в $F_S|k$. Это подтверждается следующим результатом.

Теорема 9. Пусть K — G -инвариантное расширение поля k в F_S такое, что расширение $F_S|K$ алгебраично. Тогда K содержит F_S' для некоторого промежуточного поля F' в $F|k$, над которым поле F алгебраично.

Если характеристика поля k равна 0, то $K = (L_S)^\Gamma$, где L — промежуточное поле в $F|k$, а Γ — проконечная алгебраическая k -группа автоморфизмов расширения $L|k$, действующая на L_S диагонально.

Кроме того, это подтверждается исследованным ранее случаем регулярного расширения $F|k$ степени трансцендентности 1. В частности, степень трансцендентности поля F_S над любым G -инвариантным нетривиальным расширением k в F_S конечна. Более того, в характеристике 0 все G -инвариантные промежуточные поля действительно получаются вышеописанной конструкцией, а степень трансцендентности поля F_S над ними совпадает с размерностью соответствующей группы H и не превосходит 3. В связи с этим высказана следующая

Гипотеза 2. Пусть S — бесконечное множество, $F|k$ — нетривиальное регулярное расширение полей. Тогда для любого G -инвариантного расширения полей $K|k$ в F_S существует единственное расширение полей $L|k$ в F такое, что (i) $K \subseteq L_S$, (ii) L алгебраически замкнуто в F , (iii) для любого расширения полей $L'|k$ в L конечной степени трансцендентности существует расширение полей $L''|L'$ в L с конечной степенью трансцендентности расширения $L_S''|K \cap L_S''$.

Теорема 10. Эта гипотеза верна в характеристике 0.

Помимо G -инвариантных подполей в F_S изучались также факторы алгебры $\bigotimes_{k, i \in S} F$ по инвариантным простым идеалам, т.е. неприводимые инвариантные подмногообразия декартовых степеней X^S абсолютно неприводимых многообразий X над полем k . Такие подмногообразия можно строить следующим образом. Пусть $X \xrightarrow{f} Y$ — доминантное k -отображение, а H — некоторая группа автоморфизмов многообразия $Y|k$, диагонально действующая на Y^S . Тогда прообраз относительно $X^S \xrightarrow{f^S} Y^S$ неприводимого подмногообразия в Y , диагонально вложенного в Y^S , — неприводимое инвариантное подмногообразие в X^S . Основной вопрос: все ли неприводимые инвариантные подмногообразия в X^S получаются таким способом?

Теорема 11. Ответ положителен, если $\dim X = 1$.

Это можно рассматривать как дополнение к знаменитой теореме Д.Э.Коэна о нётеровом свойстве симметрических идеалов колец многочленов от бесконечного числа переменных.

2.5 Теория многогранников Ньютона

Можно рассмотреть следующую естественную задачу: как по мономам системы полиномиальных уравнений определить геометрию многообразия, задаваемого этой системой? Для упрощения задачи коэффициенты системы обычно ограничивают некоторым аффинным многообразием и изучают геометрию многообразия, задаваемого системой с общими коэффициентами. Будем рассматривать системы над алгебраическим тором $T^n = T_k^n = \text{Spec } k[x_1^{\pm 1}, \dots, x_n^{\pm 1}]$, где k — базовое поле. Такой сеттинг оказывается удобнее, так как тогда мономы образуют группу (однако результаты, полученные над тором нередко переносятся на произвольные торические многообразия, см. ниже).

Тогда формализация нашей задачи выглядит следующим образом. Пусть M — решетка характеров (мономов) тора T^n . Пусть $A_1, \dots, A_l \subset M$ — конечные множества мономов. Обозначим за k^{A_i} пространство многочленов Лорана с мономами из A_i , тогда $k^{A_1} \times \dots \times k^{A_l}$ — пространство всех систем многочленов над T^n , таких что у i -го многочлена мономы только из A_i . Обозначим за $\mathcal{P} \subset k^{A_1} \times \dots \times k^{A_l}$ многообразие, ограничивающее коэффициенты интересующих нас систем. В качестве $\mathcal{P}$ можно взять все пространство $(k^{A_1} \times \dots \times k^{A_l})$ и изучать все системы, можно взять пространство страт Тома-Бордмана, например системы вида $(f, f'_x, f'_y) \in k^A \times A_1 \times A_2$, где A_i получаются из A соответствующими сдвигами. Тогда изучения общего многообразия, задаваемого системой из $\mathcal{P}$ — это изучения общего слоя проекции $V \rightarrow \mathcal{P}$, где $V := \{(\mathbf{f}, x) \in \mathcal{P} \times T^n \mid f_1(x) = \dots = f_l(x) = 0\}$.

Классической теорией многогранников Ньютона называется изучение дискретных топологических инвариантов в изложенном выше контексте при $k = \mathbb{C}$ и $\mathcal{P} = \mathbb{C}^{A_1} \times \dots \times \mathbb{C}^{A_l}$. При этом оказывается, что ответ зависит не от самих множеств $A_1, \dots, A_l$, а только от их выпуклых оболочек в $M \otimes \mathbb{R}$ — эти выпуклые оболочки и называются многогранниками Ньютона.

Историю теории многогранников Ньютона обычно отсчитывают со следующего результата:

Теорема 12 (Кушниренко-Бернштейн, 1975). Существует непустое открытое по Зарисскому подмножество $U \subset \mathbb{C}^{A_1} \times \dots \times \mathbb{C}^{A_n}$, такое что для любой системы $\mathbf{f} \in U$ все решения $f_1 = \dots = f_n = 0$ в T^n изолированы и их ровно $n! \text{MVol}(\Delta_1, \dots, \Delta_n)$, где Δ_i — выпуклая оболочка A_i в $M \otimes \mathbb{R}$.

При этом это подмножество U можно задать явными условиями, называемыми условиями Кушниренко-Бернштейна-Хованского (Бернштейн получил эти условия для теоремы выше). Благодаря работам Кушниренко, Хованского, Казарновского, Эстерова, Тиморина и других в классическом сеттинге были развита богатая теория, в частности на данный момент

во всех случаях известны эйлерова характеристика и число компонент связности и в случае полноразмерных многогранников известны числа Бетти и числа Ходжа-Делиня получающихся многообразий.

Во многих задачах возникает потребность в изучении систем за рамками классической теории: в теории Галуа естественным образом возникают симметрические системы, где одно уравнение получается из другого перестановкой переменных. В некоторых задачах перечислительной геометрии и полиномиальной оптимизации оказываются полезны общие страты Тома-Бордманна, системы, в которых уравнения получаются как частные производные одного и того же многочлена. В каждом из этих примеров рассматриваемый класс систем образует векторное пространство. *Engineered Complete Intersections* (ECI, Спроектированные полные пересечение) — довольно общий класс систем, позволяющий частично покрыть примеры неклассической теории многогранников Ньютона.

Понятие Engineered Complete Intersection (ECI, спроектированное полное пересечение) было введено А. И. Эстеровым в 2024 году. Каждому моному $\chi \in M$ соответствует регулярная функция $e_\chi^A : k^A \rightarrow \mathbb{A}_k^1$, сопоставляющая каждому многочлену его коэффициент при χ (если $\chi \notin A$, то $e_\chi \equiv 0$). Тогда класс систем $\mathcal{P} \subset k^{A_1} \times \dots \times k^{A_l}$ называется классом ECI, если он задается только уравнениями вида $\sum_{i=0}^l a_i e_\chi^{A_i} = 0$, где $a_i \in k$ — константы и $\chi \in M$ — моном (но в разных уравнениях может быть разный моном).

Примеры ECI включают в себя дополнения до наборов гиперплоскостей, критические полные пересечения и страты Тома-Бордманна (системы вида $f = f'_x = f'_{xx} = f'_y = 0$), неприводимые компоненты симметрических полных пересечений (в известных нам случаях).

В этом контексте Эстеровым была разработана техника, позволяющая вычислять Эйлерову характеристику, дающая явные условия топологической идентичности многообразий, задаваемых ECI. Однако, эта теория была разработана только над $\mathbb{C}$ и не отвечала на ряд стандартных геометрических вопросов, например, на вопрос о неприводимости многообразия, задаваемого ECI.

В рамках классического сеттинга существует полный критерий неприводимости, доказанный А.Г. Хованским в 2016 году. В отчетный период, этот критерий был обобщен стажером лаборатории А. Жижиним до достаточного условия для ECI. Важным преимуществом разработанного метода является то, что он работает в произвольной характеристике. Поскольку классический сеттинг является частным случаем ECI, это позволяет обобщить критерий Хованского с $\mathbb{C}$ на произвольное поле. Также полученный метод дает конкретные достаточные условия неприводимости для критических полных пересечений и страт Тома-Бордманна.

2.6 Комбинаторная алгебраическая геометрия

Заданный многогранник Ньютона A порождает конечномерное пространство полиномов, в котором лежит A -дискриминант - алгебраическое замыкание множества полиномов с вырожденным носителем. A -дискриминанты были введены Гельфандом, Капрановым, Зельвинским и Штурмфельсом в 1994 году. Геометрия таких специальных многообразий является

довольно сложной. Например, на подсчёт размерности A -дискриминанта понадобилось тридцать лет, и вопрос был полностью решён только в 2010-ых годах усилиями многих авторов, таких как Ди Рокко, Дикенстейн, Ито, Каттани, Куран, Фейтчнер, Фуракава, Штурмфельс, Эстеров.

В то же время некоторые математики (Боргер, Нилл, Эстеров и другие) начали изучение дискриминантов полиномиальных систем с предписанным набором многогранников Ньютона. В этом случае дискриминант - множество полиномиальных систем с вырожденным корнем в алгебраическом торе - может иметь более одной компоненты, и различные компоненты могут иметь разную размерность. Мотивация к рассмотрению такого рода дискриминантов варьируется от алгебраической геометрии и символической алгебры до дифференциальных уравнений в частных производных и математической физики.

В отчетный период, сотрудникам лаборатории удалось значительно продвинуться в описании дискриминантов полиномиальных систем, в которых число эффективных переменных не превышает число уравнений. А именно, для заданного произвольного набора многогранников Ньютона удаётся перечислить компоненты дискриминанта, указать их размерности и степени.

В данной перечислительной задаче тесно переплетается комбинаторика и алгебраическая геометрия. Поэтому понадобилось развитие некоторого комбинаторного аппарата, позволяющего формулировать утверждения на более простом и понятном уровне. Оказывается, что количество компонент дискриминанта определяется набором подрешёток, порождаемых набором многогранников. Такие комбинаторные объекты как набор подрешёток или конфигурация векторных подпространств различной размерности далеко не новы и изучались Бухштабером, Де Консини, Минковским, Пановым, Прочези, Хованским и другими. Очень свежие работы, касающиеся конфигураций векторных подпространств, посвящены теме полиматроидов, изучаемой Вангом, Кроули, Ларсоном, Симпсоном, Ха, Юиром.

Пусть дан набор подрешёток произвольной размерности. Дефектом поднабора решёток назовём числовую характеристику равную разнице между размерностью минимальной по включению подрешётки, содержащей все подрешётки из поднабора, и количества решёток в поднаборе. Будем говорить, что набор решёток линейно независим (неприводим), если дефекты всех собственных поднаборов не отрицательны (строго положительны). Для краткости, назовём линейно-независимый поднабор решёток нулевого дефекта БК-набором в честь теоремы Кушнеренко-Бернштейна. Эта теорема применима к набору многогранников Ньютона, если они порождают БК-набор подрешёток.

В отчетный период, сотрудники лаборатории показали, что для заданного набора подрешёток:

- 1) множество линейно независимых поднаборов образует матроид, который назвали матроидом Минковского (в честь его теорем, опубликованных в начале XX века, о линейной независимости набора подпространств и о смешанном объёме);
- 2) матроиды Минковского удовлетворяют неравенству Инглтона и содержат все пред-

ставимые матроиды,

3) каждый линейно зависимый набор имеет единственный минимальный по включению поднабор минимального дефекта (это новое доказательство известного результата Штурмфельса);

4) дефекты всех минимально зависимых поднаборов всегда равны -1 ,

5) дефекты всех базисов матроида Минковского равны одной и той же константе, зависящей от выбора набора подрешёток,

6) каждый базис содержит единственный максимальный по включению БК-поднабор.

Упомянутые комбинаторные успехи дают представление об устройстве переопределённых систем. Мы копируем все понятия с набора подрешёток на набор многогранников Ньютона или, более обще, набор конечных подмножеств из решётки. Мы доказали, что для линейно зависимого набора конечных множеств дискриминант определяется результатом минимального по включению поднабора минимального дефекта, вычисленного в пункте 3). На этом завершается описание дискриминантов переопределённых систем.

Дальнейшие усилия были направлены на описание дискриминантов, для которых носитель является БК-набором конечных множеств. Один из ключевых шагов упирается в доказательство гипотезы Эстерава, опубликованной в 2018 году. Гипотеза утверждает, что для неприводимого БК-набора конечных множеств дискриминант тоже неприводим. Сотрудникам удалось доказать гипотезу, представляющей собой независимый интерес, с помощью следующей последовательности шагов:

1) показана эквивалентность гипотезы с задачей о неприводимости пересечения детерминантной гиперповерхности с некоторым векторным подпространством в пространстве квадратных матриц. Это векторное подпространство в пространстве матриц имеет вид кратного прямого произведения какого-то набора подпространств из векторного пространства, для которого исходное пространство квадратных матриц изоморфно пространству эндоморфизмов.

2) по набору подпространств строится полиматроидное разбиение векторного пространства, нумеруемое элементами решётки плоских элементов полиматроида. Каждый кусочек разбиения представляет собой некоторое конкретное открытое подмножество в некотором векторном подпространстве.

3) над каждым кусочком разбиения строится алгебраическое векторное расслоение контролируемой размерности. Топальное пространство данного расслоения соответствует некоторой страте в дискриминанте и имеет коразмерность, совпадающую с дефектом соответствующего плоского поднабора.

4) показывается, что дискриминант представляет собой объединение данных страт. Так как в неприводимом БК-наборе любой собственный поднабор имеет положительный дефект, доказываем, что все страты лежат в замыкании страта одного из несобственных БК-поднаборов.

Завершение доказательства гипотезы является важнейшим шагом в описании дискри-

минантов с неприводимым носителем. Назовём набор (не)линейным, если он соответствует (не)линейной системе уравнений. Для нелинейного БК-набора гипотеза показывает, что дискриминант неприводим и имеет коразмерность один в пространстве полиномиальных систем. Для линейного БК-набора известно, что дискриминант будет неприводим и иметь коразмерность два.

Остаётся разобрать общий случай полиномиальных систем для приводимого БК-носителя. Для этого конструируется следующий комбинаторный аппарат:

- 1) множество БК-поднаборов образует дистрибутивную решётку;
- 2) дистрибутивная решётка БК-поднаборов порождает некоторое разбиение БК-набора, нумеруемое частично упорядоченным множеством. Это частично упорядоченное множество может быть произвольным (доказано) и строится по теореме Биргкофа (фундаментальной теореме дистрибутивных решёток). Объединение поднаборов разбиения по порядковому идеалу образует БК-поднабор. Искомое разбиение удовлетворяет следующему свойству: фактор-наборы любой максимальной БК-фильтрации являются неприводимыми БК-наборами.

Полученные результаты позволяют перечислить компоненты дискриминанта полиномиальных систем с приводимым БК-носителем. Можно показать, что в данном случае дискриминант разбивается на страты коразмерности 1 и 2. Страты дискриминанта нумеруются частично упорядоченным множеством БК-разбиения. Элементу БК-разбиения соответствует страта коразмерности 1, если соответствующая привершинная неприводимая БК-система нелинейна, и коразмерности 2, если линейна. Страта коразмерности 2 лежит в страте коразмерности 1 только в том случае, если первый элемент БК-разбиения сравним и меньше второго элемента разбиения в БК-чуме. Таким образом, в дискриминанте «нелинейные страты поглощают линейные». Также существует БК-поднабор, который представляет собой «границу нелинейности-линейности» и фактор по которому является линейным БК-набором.

Каждый элемент БК-разбиения соответствуют БК-поднабору, если объединить все элементы разбиения меньше данного фиксированного в БК-чуме (объединение поднаборов главного порядкового идеала). Было показано, что текущие результаты согласуются с опубликованными теоремами Эстерова, и компоненты дискриминанта для приводимого БК-набора являются дискриминантами Кели. Это позволяет воспользоваться известными результатами Матсуи, Такеши и Эстерова о вычислении степени дискриминанта Кели, и вывести степени компонент дискриминанта. Более того, можно вывести вид дискриминанта Кели для приводимого БК-набора как пересечение более простых гиперповерхностей Кели.

Труды лаборатории открывают новые горизонты. Исследования в предложенном направлении можно продолжать и решать задачи в связке по комбинаторике и алгебраической геометрии. Могут быть предложены следующие задачи:

- 1) Построение комбинаторного разложения смешанного объема, нумеруемое порядковым комплексом БК-разложения. Раскрасить грани комплекса коэффициентами относительных насыщений, удовлетворяющим соотношениям согласованности.

2) Вычисление группы монодромии. Предположительно, этот комплекс будет кодировать группу монодромии дискриминанта с БК-носителем. Согласно теореме Эстерова о группе монодромии для полиномиальных систем неприводимого БК-набора в вершинах комплекса будут стоять симметрические группы. Ожидается, что грани комплекса будут соответствовать группы кручений, зависящие от вычисленных коэффициентов. Однако, свежая работа Ланга и Эстерова показывает, что гипотеза о монодромии для дискриминанта БК-систем требует небольшие уточнения для формулировки в максимальной общности.

3) Построение обобщения многомерной теоремы Абеля-Руффини о разрешимости полиномиальной системы в радикалах. Эстеровым получено, что для неприводимого БК-набора полиномиальная система разрешима в радикалах, если её смешанный объём не превышает четырёх. Но общий случай ещё не завершён.

Примечательно, что полученные результаты методами дискретной математики значительно упрощает работу с полиномиальными системами и могут быть потенциально полезны для увеличения вычислительных мощностей и для различных приложений в прикладных науках.

2.7 Индексы кручения групп типа D

Пусть G — простая связная алгебраическая группа над $\mathbb{C}$, $B \subset G$ — борелевская подгруппа, $\mathrm{CH}(G/B)$ — кольцо Чжоу (обобщенного) многообразия (полных) флагов G/B , $\mathrm{CH}^i(G/B)$ — его i -я градуированная компонента. Если группа G односвязна, то ее индекс кручения можно определить как индекс (в смысле теории абстрактных групп) в группе $\mathrm{CH}^{\dim G/B}(G/B)$ подгруппы, порожденной мономами от $\mathrm{CH}^1(G/B)$ (т.е. от классов дивизоров). Другими словами, индекс кручения (обозначим его за $\mathrm{tind}(G)$) — это такое минимальное натуральное число n , на которое нужно умножить класс (рациональной) точки в G/B , чтобы получить многочлен от классов дивизоров.

С использованием не алгебраически замкнутых полей индекс кручения можно также определить следующим образом. Сначала определим индекс алгебраического многообразия X (обозначение: $\mathrm{ind}(X)$) над (вообще говоря, не алгебраически замкнутым) полем K как $\mathrm{НОД}([L : K])$ по всем таким конечным расширениям L поля K , что X_L содержит рациональную точку. Далее, $\mathrm{tind}(G)$ определим как максимум по всем (не обязательно конечным, точнее, только бесконечным, конечных не существует) расширениям K поля $\mathbb{C}$ и по всем торсорам E группы G_K индексов $\mathrm{ind}(E)$.

Это последнее определение можно использовать и для необязательно односвязных простых групп G , причем индекс кручения, вообще говоря, получается больше, чем для односвязной группы в том же классе изогении: меньшие группы в одном классе изогении, вообще говоря, имеют больше торсоров. Более того, известно, что если $G_1 \rightarrow G_2$ — факторизация по конечной подгруппе, то $\mathrm{tind}(G_2)$ делится на $\mathrm{tind}(G_1)$.

Среди групп типа D , индекс кручения был вычислен Б. Тотаро для групп SO_{2n} , PGO_{2n} и Spin_{2n} . Вопрос об индексе кручения групп HSpin_{4n} , последней оставшейся серии в типе

D , оставался открытым. В отчетный период, сотрудники лаборатории получили некоторые оценки для индекса кручения в этом последнем оставшемся случае и планируют их еще улучшить.

Подробнее, из результатов работы Тотаро, в которой были посчитаны индексы кручения групп (серий) SO и PGO , следует, что индекс кручения неодносвязной группы (но все еще простой, связной и над $\mathbb{C}$) тоже можно считать с помощью кольца Чжоу, только уже не многообразия G/B , а многообразия G/P , где P — некоторая параболическая подгруппа (в некотором смысле, кольцо $CH(G/P)$ устроено даже проще, чем $CH(G/B)$, и для односвязных групп с помощью G/P тоже можно считать). Многообразие G/P , как и G/B , все равно получается одинаковым для изогеничных групп, разница в том, что для разных групп G одного и того же типа D_{2n} нужно считать индексы (в смысле теории абстрактных групп) разных подгрупп в $CH^{\dim G/P}(G/P)$ (все еще в одной и той же группе).

Сравнительно несложно понять, индекс какой именно подгруппы нужно считать для $G = HSpin_{4n}$. В этом случае в качестве P можно взять предмаксимальную параболическую подгруппу, соответствующую 2 крайним вершинам на диаграмме Дынкина (геометрически, G/P параметризует флаги, состоящие из прямой и Лагранжева подпространства). Пусть L — тавтологическое расслоение одномерных прямых, а E — тавтологическое расслоение Лагранжевых подпространств. Тогда нужно взять многочлены максимальной степени в $CH(G/P)$, порожденные: 1. всеми классами Черна $c_i(E \otimes L)$, 2. удвоенным классом первым классом Черна $2c_1(L)$, и 3. половинным первым классом Черна $c_1(E)/2$ (известно, что он делится на 2). Используя это описание, сотрудники лаборатории получили для некоторых n верхние оценки на $\text{tind}(HSpin_{4n})$ вида $2^k \text{tind}(Spin_{4n})$, где k — небольшое целое число. Из свойств делимости индексов кручения следует, что $\text{tind}(HSpin_{4n})$ — это степень двойки, а так же сразу же следует нижняя оценка $\text{tind}(Spin_{4n})$. Сотрудники лаборатории также получили в небольшом числе случаев нижние оценки вида $2 \text{tind}(Spin_{4n})$.

В будущем сотрудники лаборатории надеются понять, как вычислить $\text{tind}(Spin_{4n})$ с помощью колец Чжоу других многообразий флагов (т.е. многообразий вида $Spin_{4n}/P$, где P — другая параболическая подгруппа, возможно вообще борелевская). Возможно, таким образом будут получены более хорошие оценки, а то и точные значения для $\text{tind}(Spin_{4n})$.

2.8 Этальные когомологии и изоморфизм групп Пикара

Морфизм аффинных алгебраических многообразий $X \rightarrow Y$ над полем K называется *эталным*, если он плоский и модуль относительных дифференциалов $\Omega_{K[X]/K[Y]}$ равен нулю. Это определение распространяется на морфизмы не обязательно аффинных многообразий $f: X \rightarrow Y$ стандартным образом (выбираются аффинные покрытия, для каждой точки $x \in X$ выбираются карты X_0 и Y_0 , содержащие x и $f(x)$, и такие что $f(X_0) \subset Y_0$, и морфизм $X_0 \rightarrow Y_0$ должен быть этальным). Этальные морфизмы в фиксированное многообразие X образуют категорию (точнее, они являются объектами этой категории, а морфизмы — коммутативные треугольники). Далее, *эталный пучок абелевых групп* на многообразии X (или, в более

строгих терминах, *пучок в топологии Гротендика для этальных покрытий*) — формально определяется как функтор из этой категории в категорию абелевых групп, удовлетворяющий некоторым дополнительным условиям (грубо говоря, обеспечивающим возможность задать глобальное сечение “локально”).

Для этальных пучков можно определить когомологии, которые, в частности, позволяют считать группы Пикара алгебраических многообразий и группы Брауэра полей рациональных функций на многообразиях. Также их можно включать в точные последовательности, аналогичные точным последовательностям для когомологий когерентных пучков.

В отчетный период, сотрудники лаборатории изучали способы вычисления этальных когомологий (формально, этальные когомологии проще всего определить как классические производные функторы, но это определение очень неудобно для вычислений, и существуют более удобные способы). С помощью этальных когомологий сотрудникам лаборатории удалось упростить доказательство следующей теоремы. Пусть E — торсор (см. определение в предыдущем разделе) простой связной расщепимой односвязной алгебраической группы G над произвольным полем K , пусть $B \subset G$ — борелевская подгруппа, и пусть $X = (E \times G/B)/G$, где действие группы G на $E \times G/B$ диагональное. Тогда группа Пикара многообразия X сохраняется при расширении полей. Другими словами, для любого расширения L поля K , естественный морфизм $\text{Pic}(X) \rightarrow \text{Pic}(X_L)$ — на самом деле изоморфизм.

2.9 Некоммутативные кэлеровы метрики

В отчетный период, сотрудниками лаборатории также было продолжено изучение некоммутативных обобщений кэлеровых метрик, начатое в 2023 году. Окончательные результаты здесь пока не получены, однако эта тема представляется весьма важной и перспективной; опишем, что нам удалось сделать.

Идеологически, эта тематика, как и вся современная некоммутативная алгебраическая геометрия, восходит к самым истокам абстрактной алгебры, и в качестве лозунга, может быть сформулирована в четырех словах: “модуль проще, чем идеал”. В самом начале алгебраической теории чисел, когда Дедекинд совершил прорыв, рассмотрев — на современном языке — идеалы кольца целых, которые не обязательно являются главными, было件нятно, что необходимо также рассматривать и т.н. “дробные” идеалы, которые в кольцо вовсе не вкладываются, а вкладываются только в его поле частных. В современной формулировке теоремы о примарном разложении, данными Гротендиком и его школой, вложение оказывается вообще несущественным, и окончательная теорема гораздо проще и естественнее формулируется и доказывается без вложений — грубо говоря, утверждается, что любой конечно-порожденный модуль над нетеровым коммутативным кольцом является итерированным расширением циклических модулей. Такой подход позволяет, среди прочего, линеаризовать геометрические задачи, и применять для рассмотрения геометрических вопросов мощные методы и интуицию линейной алгебры.

Особенно эффективно такой подход работает при рассмотрении гомологических

инвариантов алгебраических многообразий. Геометрическим инвариантом здесь является прежде всего группа Чжоу алгебраических циклов, т.е. группа, порожденная линейными комбинациями подмногообразий, по модулю естественного понятия эквивалентности. Однако вместо подмногообразий, т.е. пучков идеалов, можно рассмотреть произвольные когерентные пучки, или даже только плоские когерентные пучки, т.е. векторные расслоения. Про этом вместо группы циклов – это, конечно, тоже идея Гротендика – мы получаем алгебраическую К-теорию. Хотя вычислить и то, и другое невероятно сложно, тем не менее понятно, что К-теория дает более фундаментальный инвариант. Хорошие формальные свойства ее доказываются куда проще, все конструкции становятся более естественными, и при этом никакой информации не теряется – напротив, группы Чжоу выражаются через К-группы (по крайней мере по модулю кручения).

Для того, чтобы получить некоммутативные инварианты, которые пригодны для практических вычислений, нужно сделать еще один шаг – перейти на уровень производных категорий, и рассматривать не отдельные векторные расслоения или когерентные пучки, а их комплексы, с точностью до квазиизоморфизма. Оказывается, что, по крайней мере для гладких многообразий, на К-теорию это не влияет, но дает еще большую функториальность (по отношению к так называемым “функторам Фурье-Мукаи”). Кроме того, и это даже более существенно, мы получаем не только алгебраическую К-теорию, интересную, но на практике недоступную, но и целый ряд куда более обозримых инвариантов. Главный из них – периодические циклические гомологии, открытые независимо А. Конном и Б. Цыганом в 1982 году, и дающие полное некоммутативное обобщение когомологий де Рама. Имеются также и некоммутативные обобщения кристалльных когомологий многообразий над полем положительной характеристики, и вообще, обобщения для всех теорий когомологий “дерамовского типа”.

К сожалению, кэлеровы метрики в эту картину до сих пор не вписываются, и это серьезно мешает развитию некоммутативной алгебраической геометрии как предмета.

Напомним, что в классической, коммутативной ситуации кэлеровы метрики дают своего рода мост между алгеброй и анализом. По определению, проективное алгебраическое многообразие – это подмножество в проективном пространстве, задаваемое системой полиномиальных уравнений. Если мы работаем над полем комплексных чисел (или шире, над полем характеристики ноль), то можно рассмотреть это множество и как комплексное многообразие. При этом на нем естественным образом возникает эрмитова метрика – например, индуцированная с метрики Фубини–Штуди объемлющего проективного пространства – причем оказывается, что метрика удовлетворяет дополнительному условию, найденному в свое время Э. Кэлером. Условие это можно формулировать разными эквивалентными способами, но хотя условие чисто локальное, смысл его все равно довольно загадочен. Однако следствия наличия кэлеровой метрики весьма существенны. Во-первых, к компактным кэлеровым многообразиям применима теория Ходжа, и частности, на его когомологиях возникает т.н. “ (p, q) -разложение”. Более общо, на когомологиях имеется целый “лефшецев пакет”, открытый С. Лефшецем – в частности, разложение на примитивные классы, отвечающее оператору

Лефшеца, а также билинейные соотношения Ходжа-Римана, гласящие, грубо говоря, что форма пересечения на примитивных когомологиях знакоопределена. Последнее абсолютно критично для приложений – например, в теории алгебраических кэлеровых поверхностей получаем, что форма пересечения на вторых когомологиях имеет сигнатуру $(1, n)$, т.е. только одно положительное собственное значение, и это существеннейшим образом используется в большинстве классификационных и структурных результатов. В полной общности, билинейные соотношения Ходжа-Римана также весьма важны для получения конкретных геометрических результатов, и многие годы вызывают огромный концептуальный интерес (см., например, замечательный текст М. Громова, связывающий соотношения Ходжа-Римана и лефшецев пакет с неравенствами Александрова-Фенхеля в теории выпуклых тел).

Для некоммутативных многообразий, ситуация с кэлеровой метрикой парадоксальна. С одной стороны, как объяснил в свое время П. Делинь, из аналитической теории Ходжа есть одно чисто алгебраическое следствие: спектральная последовательность Ходжа-де Рама, связывающая дифференциальные формы на многообразии и его классы когомологий де Рама, вырождается для компактных кэлеровых многообразий в первом члене (первое следствие этого – тот факт, что на компактном кэлеровом многообразии глобальная голоморфная форма автоматически замкнута; это далекое обобщение принципа максимума, по которому глобально определенная голоморфная функция постоянна). Спектральная последовательность Ходжа-де Рама имеет полное некоммутативное обобщение, а именно, спектральную последовательность, связывающую гомологии Хохшильда и периодические циклические гомологии. Можно спросить себя, вырождается ли она для гладких компактных некоммутативных многообразий. Ответ на этот вопрос оказывается положительным – гипотеза Концевича-Сойбельмана, доказанная заведующим нашей лаборатории Д. Калединым, гласит, что это всегда верно над полем характеристики 0. Однако метод доказательства не имеет никакого отношения к классической теории Ходжа, и обобщает другое, альтернативное доказательство, данное Делинем и Иллюзи и основанное на сведении в положительную характеристику. При этом хотя вырождение имеет место, т.е. грубо говоря, периодический циклический комплекс с точностью до квазиизоморфизма расщепляется в прямую сумму сдвинутых комплексов Хохшильда, никакого канонического расщепления неизвестно. Тем более неизвестно ничего, напоминающего примитивное разложение и соотношения Ходжа-Римана.

Хуже того, неизвестна даже конструкция комплексного сопряжения на периодических циклических гомологиях, которое дало бы на них каноническую и функториальную вещественную структуру.

В прошлый отчетный период, т.е. в 2023 году, сотрудниками лаборатории была предложена общая конструкция, позволяющая разрешить эти проблемы, и дать в полной некоммутативной общности понятие кэлеровой метрики, позволяющее получить весь лефшецев пакет, и в частности, функториальную вещественную структуру на периодических циклических гомологиях гомологически гладкой и компактной ДГ-алгебры над полем характеристики 0 (а

также, возможно, получить прямое доказательство теоремы Каледина о вырождении, которое не использует сведение в положительную характеристику).

Напомним – подробнее см. наш прошлогодний научный отчет – что конструкция основана на старой работе Каледина же о построении канонической гиперкэлеровой метрики в окрестности нулевого сечения кокасательного расслоения к кэлерову многообразию (известной как “метрика Каледина-Фейкс”). А именно, кэлерова метрика на многообразии X дает каноническую однопараметрическую деформацию кокасательного расслоения T^*X , т.н. называемое “скрученное кокасательное расслоение”. Более того, штейнова окрестность диагонали в скрученном кокасательном расслоении оказывается совершенно канонически отождествлена с комплексификацией Грауэрта многообразия X , т.е. с штейновым комплексным многообразием, голоморфные функции на котором суть вещественно-аналитические функции на X . Поскольку комплексификация по определению снабжена вещественной структурой, а когомологии при деформации не меняются, это, в частности, дает вещественную структуру на когомологиях де Рама X (причем ту самую, которая получается из теоремы сравнения с сингулярными когомологиями).

Как мы объяснили в нашем прошлом отчете, в некоммутативном мире, роль кокасательного расслоения играет тривиальное расширение с квадратом 0 данной ДГ-алгебры A с помощью бимодуля $A^*[-2]$, где 2 – гомологический сдвиг (при этом лучше работать не с ДГ-алгебрами, а с отвечающими им A_∞ -алгебрами, которые в силу гомологической компактности будут конечномерны над базовым полем). Скручивать такие расширения можно на классы из когомологий Хохшильда $HH^0(A, A^*) \cong HH_0(A)^*$, которые двойственны нулевым классам гомологий – что отлично согласуется с теорией условий стабильности Брижланда, в которой входными данными является, среди прочего, функционал “центрального заряда” на численной группе $K_0(A)$. При этом по крайней мере в геометрических ситуациях нами было построено скручивание, которое, как и в коммутативном прообразе всей теории, допускает вещественную структуру (это некоторая ДГ-версия соответствия Кобаяши-Хитчина). Однако есть существенная проблема, которую мы исследовали уже в текущий отчетный период: грубо говоря, неверно – уже для точки – что “когомологии при деформациях не меняются”. Дело в том, что деформации, которые здесь нужны, порождают искривленную A_∞ -алгебру, и уже для точки она имеет неправильные периодические циклические гомологии (а именно, нулевые). Чтобы получить правильный ответ, требуется работать не со стандартными периодическими циклическими гомологиями, а с некоторым их пополнением. В исходной коммутативной ситуации, это отвечает переходу к маленькой окрестности нулевого сечения в нашем скрученном кокасательном расслоении (а точнее, к ростку такой окрестности).

В текущем отчетном периоде, нами были детально проанализированы разные способы борьбы с проблемой пополнений. По-видимому, наиболее простой и естественный основан на использовании связности Гаусса-Манина-Гецлера: мы рассматриваем скрученное расширение A с помощью $A^*[-2]$ как однопараметрическую деформацию, и берем минимальное пополнение, при котором экспонента действия связности дает сходящийся ряд.

Чтобы реализовать этот подход, необходимо иметь как можно более явную формулу для связности; к сожалению, в литературе такой формулы в готовом виде нет, и нам пришлось ее вывести.

А именно, напомним, что “связность Гаусса-Манина-Гецлера” это некоммутативное обобщение связности Гаусса-Манина, впервые открытое Э. Гецлером в начале 1990-х годов. Рассматривается семейство ассоциативных алгебр (или ДГ-алгебр, или A_∞ -алгебр) над некоторой коммутативной базой, и соответствующее семейство их периодических циклических гомологий. Утверждается, что на семействе когомологий имеется естественная плоская связность.

Понять, что написано в исходной статье Гецлера, весьма трудно, но к счастью, имеется альтернативный подход к этой задаче, предложенный Калединым примерно в 2008. Ключевое место здесь такое. Пусть дано расширение с квадратом 0

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow \tilde{A} \longrightarrow A \longrightarrow 0 \quad (2.5)$$

алгебры A с помощью бимодуля M (или, в большей общности, ДГ-алгебры A , с помощью ДГ-бимодуля M). Тогда можно рассмотреть периодические циклические гомологии $CP_*(\tilde{A})$ и отфильтровать их по количеству степеней M . Это убывающая фильтрация, у которой нулевой присоединенный градуированный фактор это $CP_*(A)$. Обозначим первый фактор через $CP_*(A, M)^1$ (обозначения нестандартные, т.к. вообще говоря, циклических гомологий с коэффициентами не бывает, однако в данном случае они работают). Важно, что (1) этот фактор не зависит от расширения, а зависит только от A и M , причем (2) соответствующий комплекс оказывается стягиваем. Тогда формула для связности Гаусса-Манина сводится к выбору стягивающей гомотопии для цепного комплекса $CP_*(A, M)^1$.

В этот отчетный период, такая гомотопия была нами построена. Для этого был использован “экономный” периодический цепной комплекс, из которого выкинуты ациклические столбцы, и остались только столбцы, даваемые цепным комплексом Хохшильда $CH_*(A)$ и его гомологическими сдвигами (см. например основополагающую работу Б. Фейгина и Б. Цыгана “Additive K-theory”). Обозначим через $CH_*(A, M)^1$ соответствующий присоединенный градуированный фактор цепного комплекса $CH_*(\tilde{A})$. Тогда оказывается, что имеется функториальная точная последовательность цепных комплексов

$$0 \longrightarrow CH_*(A \otimes A, (M \otimes A)_\sigma) \longrightarrow CH_*(A, M)^1 \longrightarrow CH_*(A, M) \longrightarrow 0, \quad (2.6)$$

где тензорные произведения берутся над базовым полем, а σ обозначает скрутку на перестановку сомножителей (иными словами, левая копия A действует слева на A и справа на M , в то время как правая копия A действует справа на A и слева на M). Более того, точная

последовательность канонически расщепляется, и имеем канонический же квазиизоморфизм

$$CH(A \otimes A, (M \otimes A)_\sigma) \rightarrow CH_*(A, M), \quad (2.7)$$

задаемый пореберным подразбиением (edgewise subdivision). Тогда дифференциал Конна-Цыгана B есть ни что иное как квазиизоморфизм, квазиобратный к данному. При этом с одной стороны он строго обратный, а с другой — обратный с точностью до канонической же цепной гомотопии. Эта гомотопия и задает стягивающую гомотопию для цепного комплекса $CP_*(A, M)^1$ (и тем самым, связность Гаусса-Манина-Гецлера в явном виде).

С помощью нашей явной формулы, мы можем теперь точно изучить, какое именно пополнение возникает по некоммутативной кэлеровой метрике, и какие свойства и структуры на периодических циклических гомологиях это нам дает. Этот вопрос сейчас активно исследуется; исследование будет продолжено в 2025 году.

2.10 Достижимые оснащенные категории

Другой темой, которой сотрудники лаборатории занимались в отчетный период, была работа по разработанной ранее технике дериваторных гомотопических оснащений.

Напомним, что в рамках построенной нами ранее теории дериваторных оснащений, под оснащенной категорией понимается расслоение Гротендика $\mathcal{C} \rightarrow \text{Pos}$ над категорией частично-упорядоченных множеств, удовлетворяющее ряду аксиом, а под оснащенным функтором — функтор, декартов над Pos . Ряд важных понятий обычной теории категорий, такие, как полные строгие вложения и сопряженные пары, переносятся в этот контекст буквально, без каких-либо изменений. В целом, оснащенная категория $\mathcal{C}$ понимается как оснащение для обычной категории $\mathcal{C}_{\text{pt}}$, слоя расслоения $\mathcal{C} \rightarrow \text{Pos}$ над одноточечным множеством $\text{pt} \in \text{Pos}$.

Оснащенная категория $\mathcal{C}$ называется *малой* если слои $\mathcal{C}_J$ — малые для всех частично-упорядоченных множеств $J \in \text{Pos}$, причем оказывается, что достаточно требовать этого для конечных J . Для некоторых ключевых теорем теории оснащенных категорий, условие малости оказывается совершенно необходимым. В частности, общая теорема представимости гласит, что любая малая оснащенная категория $\mathcal{C}$ получается оснащенной локализацией частично-упорядоченного множества — для больших категорий это очевидно неверно, и не может быть верно. Важное следствие теоремы представимости — это что для любых оснащенных категорий $\mathcal{C}_0, \mathcal{C}_1$ и оснащенных функторов $\mathcal{C}_0, \mathcal{C}_1 \rightarrow \mathcal{C}$ в оснащенную категорию $\mathcal{C}$, существует полудекартово произведение $\mathcal{C}_0 \times_{\mathcal{C}}^h \mathcal{C}_1$ — без теоремы представимости, это верно только в очень хороших и специальных ситуациях, поэтому в общем случае приходится предполагать, что наши оснащенные категории малые.

Что же делать с оснащениями для категорий, которые малыми не являются — например, для категории малых оснащенных категорий?

Надо отметить, что проблема с большими категориями возникает уже в обычной,

неоснащенной теории категорий. А именно, хотя расслоенные произведения $\mathcal{C}_0 \times_{\mathcal{C}} \mathcal{C}_1$ всегда хорошо определены, категория функторов $\text{Fun}(I, \mathcal{C})$ хорошо определена только если категория I малая, или хотя бы существенно малая (essentially small). При этом в рамках обычной теории категорий, удобное решение проблемы известно, и принадлежит Габриэлю и Гротендику. Грубо говоря, надо рассматривать т.н. “достижимые” (accessible) категории, в которых для какого-то кардинала κ есть все κ -фильтрованные копределы, и рассматривать только функторы, сохраняющие такие копределы. При необходимости κ можно увеличить.

В отчетный период сотрудниками лаборатории был построен полный аналог этой теории в рамках техники дериваторных оснащений.

А именно, напомним, что кардинал κ *регулярен* если он не является объединением кардиналов меньшей мощности, в количестве, меньшем κ (иными словами, для любого отображения множеств $S \rightarrow S'$ т.д. $|S'| < \kappa$ и $|S_s| < \kappa$ для любого $s \in S'$, имеем $|S| < \kappa$). Не все бесконечные кардиналы регулярны, но регулярные кардиналы кофинальны во всех – в частности, для любого бесконечного кардинала κ , следующий кардинал (successor cardinal) κ^+ регулярен.

Далее, для любого регулярного кардинала κ , оснащенная категория I называется κ -*фильтрованной* если любой оснащенный функтор $J \rightarrow I$ из оснащенной категории J с $|J| < \kappa$ допускает конус $J^{h>} \rightarrow I$. Как и в обычной неоснащенной теории, оснащенная категория просто *фильтрована* если она κ -фильтрована для счетного кардинала κ . Оказывается, что большая часть структурной теории фильтрованных категорий и копределов по ним переносится в оснащенных контекст с минимальными модификациями. В частности, верен следующий фундаментальный факт.

Предложение. Оснащенная категория I является κ -фильтрованной тогда и только тогда, когда для любой оснащенной категории J т.ч. $|J| < \kappa$, и любого оснащенного функтора $X : I \times^h J \rightarrow \mathcal{S}ets^h$, естественное отображение $\text{colim}_I^h \lim_J^h X \rightarrow \lim_J^h \text{colim}_I^h X$ является эквивалентностью.

В этом предложении $\mathcal{S}ets^h$ — оснащенная категория малых оснащенных группоидов, которая в оснащенной теории категорий играет роль категории множеств (и дает стандартное оснащение для категории гомотопических типов). Метод, которым сотрудники лаборатории доказали Предложение, работает и в неоснащенной теории, где утверждение, впрочем, хорошо известно и стандартно. Ключевое место – это что морфизм сравнения можно разложить в композицию

$$\text{colim}_I^h \lim_J^h X \xrightarrow{\alpha} \text{colim}_{\mathcal{F}un^h(J, I)}^h \lim_J^h (\text{ev} \times \text{id})^* X \xrightarrow{\beta} \lim_J^h \text{colim}_I^h X, \quad (2.8)$$

где $\mathcal{F}un^h(J, I)$ обозначает оснащенную категорию оснащенных функторов из J в I , $\text{ev} : J \times^h \mathcal{F}un^h(J, I) \rightarrow I$ — функтор вычисления.

Далее, сравнительно легко доказать, что если $|J| < \kappa$, а I является κ -фильтрованной,

то функтор $I = \mathcal{F}un^h(\text{pt}^h, I) \rightarrow \mathcal{F}un^h(J, I)$, индуцированный тавтологической проекцией $J \rightarrow \text{pt}^h$, кофинален в оснащённом смысле, и тем самым, α является эквивалентностью. Что до β , то, сведя с помощью теоремы о представимости общее утверждение к ситуации, когда J — частично-упорядоченное множество, обнаруживаем, что β является эквивалентностью вообще всегда; формально, причина этого в том, что категория сечений корасслоения Гротендика с фильтрованными слоями фильтрована. В неоснащённой ситуации, это соответствует аксиоме Гротендика $AB6$ (выполненной для категории абелевых групп).

Используя построенную теорию оснащённых фильтрованных копределов, теорию достижимых оснащённых категорий мы строим так же, как и в обычном случае (каковое построение было нами также проделано). А именно, категория κ -ф-кополна если в ней есть все κ -фильтрованные копределы. Формальное добавление таких копределов даёт κ -индуктивное пополнение $\mathcal{I}nd_{\kappa}(\mathcal{C})$. Оснащённый объект $c \in \mathcal{C}$ является κ -компактным если $\text{Hom}(c, -)$ сохраняет κ -фильтрованные копределы, а $\mathcal{C}omp_{\kappa}(\mathcal{C}) \subset \mathcal{C}$ обозначает полную подкатегорию, порождённую κ -компактными объектами. Тогда для любой κ -ф-кополной оснащённой категории $\mathcal{C}$ имеем канонический функтор сравнения

$$\mathcal{I}nd_{\kappa}(\mathcal{C}omp_{\kappa}(\mathcal{C})) \rightarrow \mathcal{C}. \quad (2.9)$$

Оказывается, что этот функтор всегда является строго полным вложением. Оснащённая категория $\mathcal{C}$ называется κ -достижимой, если $\mathcal{C}omp_{\kappa}(\mathcal{C})$ — малая оснащённая категория, а функтор сравнения существенно сюръективен (а стало быть, является эквивалентностью). Категория достижима, если она κ -достижима для какого-либо κ . Функтор достижим, если он коммутирует с фильтрованными копределами.

Вообще говоря, неверно, что если оснащённая категория $\mathcal{C}$ является κ -достижимой для какого-то регулярного κ , то она μ -достижима для любого $\mu > \kappa$. Однако это верно, во-первых, для $\mu = \kappa^+$, а во-вторых, для кофинальной системы таких μ . Тем самым, в любой диаграмме достижимых категорий и функторов всегда можно выбрать один и тот же кардинал для всех них.

Как доказано сотрудниками лаборатории в отчетный период, все классические утверждения теории Гротендика-Габриеля достижимых категорий остаются верны и в оснащённой ситуации. В частности, любая малая Каруби-замкнутая категория достижима. Кроме того, если даны достижимые оснащённые категории $\mathcal{C}_0, \mathcal{C}_1, \mathcal{C}$ и достижимые оснащённые функторы $\mathcal{C}_0, \mathcal{C}_1 \rightarrow \mathcal{C}$, то существует достижимое полудекартово произведение $\mathcal{C}_0 \times_{\mathcal{C}}^h \mathcal{C}_1$.

Отметим, что, даже в классической теории, действительно необходимо рассматривать высшие кардиналы, и ограничиться просто фильтрованными копределами нельзя. Главная причина этого в том, что $\mathcal{I}nd_{\kappa}$ не коммутирует с расслоенными произведениями (уже в неоснащённом случае). Например, $\mathcal{I}nd$ -пополнение частично-упорядоченного множества $\mathbb{N}$ натуральных чисел — это множество $\mathbb{N}^>$, получаемое добавлением к $\mathbb{N}$ нового максималь-

ного элемента ∞ . Поэтому если взять два вложения $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ на подмножества четных соотв. нечетных чисел, то $\mathcal{I}nd(\mathbb{N}) \times_{\mathcal{I}nd(\mathbb{N})} \mathcal{I}nd(\mathbb{N})$ содержит $\infty \times \infty$. В то же время произведение $\mathbb{N} \times_{\mathbb{N}} \mathbb{N}$ очевидно пусто.

Однако, как видно из этого примера, сильно поднимать кардинал необязательно, и это общая ситуация — если $\mathcal{C}_0, \mathcal{C}_1 \rightarrow \mathcal{C}$ являются κ -достижимыми, то $\mathcal{C}_0 \times_{\mathcal{C}}^h \mathcal{C}_0$ являются μ -достижимыми уже для $\mu = \kappa^+$.

3 Классическая геометрия

3.1 Окрестности рациональных кривых

В отчетный период, сотрудниками лаборатории исследовались ростки вложений сферы Римана (она же $\mathbb{P}^1$) в гладкие комплексные поверхности. В случае, когда степень нормального расслоения вложенной кривой положительна, эта структура нетривиальна, так как при этом пространство модулей таких ростков бесконечномерно (см. [33]). В связи с этим представляет интерес вопрос о том, с помощью каких инвариантов можно различать такие окрестности.

Известно (см. [28], [34]), что поле ростков мероморфных функций в окрестности гладкой рациональной кривой с положительным индексом самопересечения имеет над $\mathbb{C}$ степень трансцендентности не выше 2. Более того, показано (см. [30], [31]), что все три значения 0, 1 и 2 действительно реализуются. В связи с этим возникает естественный вопрос, не является ли более тонким инвариантом окрестности класс изоморфизма поля ростков мероморфных функций как расширения $\mathbb{C}$. Основной результат работы состоит в том, что эта надежда абсолютно не оправдывается. Именно, мы доказываем следующий результат.

Предложение. Пусть F — неособая связная комплексная поверхность, и пусть существует кривая $C \subset F$, $C \cong \mathbb{P}^1$, для которой $(C \cdot C) > 0$. Пусть также $\mathcal{M}$ — поле мероморфных функций на F . Тогда если степень трансцендентности поля $\mathcal{M}$ над $\mathbb{C}$ не меньше двух, то $\mathcal{M} \cong \mathbb{C}(T_1, T_2)$ (поле рациональных функций). Если же степень трансцендентности $\mathcal{M}$ над $\mathbb{C}$ равна единице, то $\mathcal{M}$ изоморфно полю рациональных функций от одной переменной $\mathbb{C}(T)$.

Разумеется, если указанная степень трансцендентности равна нулю, то $\mathcal{M}$ состоит только из констант.

Доказательство основано на исследовании пространства вложенных деформаций кривой $C \subset F$. Мы пользуемся теорией Дуади [29]. Именно, если $\mathcal{F}$ — когерентный аналитический пучок на F , то через $\text{Dou}(\mathcal{F})$ мы будем обозначать пространство Дуади, параметризующее когерентные подпучки $\mathcal{F}' \subset \mathcal{F}$, для которых $\mathcal{F}/\mathcal{F}'$ имеет компактный носитель. Пусть, в частности, F — гладкая и связная комплексная поверхность, $C \subset F$ — комплексное подмногообразие, изоморфное $\mathbb{P}^1$, и $S = \{p_1, \dots, p_m\} \subset C$ — конечное подмножество. Если $\mathcal{I}_S \subset \mathcal{O}_F$ — пучок идеалов аналитического подмножества $S \subset F$, и если $\mathcal{I} \subset \mathcal{I}_S$ — когерентный подпучок, то из точной последовательности

$$0 \rightarrow \mathcal{I}_S/\mathcal{I} \rightarrow \mathcal{I}_S/\mathcal{I} \rightarrow \mathcal{O}_F/\mathcal{I}_S \rightarrow 0 \quad (3.1)$$

вытекает, что носитель $\mathcal{I}_S/\mathcal{I}$ компактен тогда и только тогда, когда носитель $\mathcal{O}_F/\mathcal{I}$ компактен, так что пространство Дуади $\text{Dou}(\mathcal{I}_S)$ параметризует компактные аналитические подпространства в F , содержащие S .

Пусть теперь $C \cong \mathbb{P}^1$, $d = (C \cdot C) \geq 0$ и $S \subset C$ состоящее из $m \leq d$ точек. Открытое

подмножество в $Dou(\mathcal{S})$, содержащее точку a , соответствующую кривой C , будет обозначаться $D(F, C, S)$ (поскольку все дальнейшие рассуждения будут происходить в произвольно малых окрестностях точки a , нам нет нужды эту окрестность специфицировать).

Если $m = 0$ (и тем самым $S = \emptyset$), мы будем писать $D(F, C)$ вместо $D(F, C, S)$.

Нам понадобится следующий факт.

Предложение. В указанных выше условиях существует окрестность $\Delta \ni a$ точки a в $D(F, C, S)$, являющаяся гладким комплексным многообразием размерности $d - m + 1$; более того, для всякой точки $b \in \Delta$ соответствующее ей комплексное подпространство $C_b \subset F$ также является кривой, изоморфной $\mathbb{P}^1$.

Будем называть окрестность $W \supset C$, $W \subset F$ *хорошей*, если существует такое связное открытое подмножество $\Delta \subset D(F, C)$, что $W = \bigcup_{b \in \Delta} C_b$ и всякое C_b при $b \in \Delta$ является гладкой кривой, изоморфной $\mathbb{P}^1$. Можно показать, что существует фундаментальная система хороших окрестностей кривой C .

Нам еще понадобится следующее утверждение о хороших окрестностях.

Предложение. Если $W \supset C$ — хорошая окрестность, то для всякой точки $x \in W$ существуют две кривые $C_1, C_2 \ni x$, $C_1, C_2 \subset W$, для которых $C_1 \cong C_2 \cong \mathbb{P}^1$ и при этом C_1 и C_2 трансверсальны в точке x .

Теперь объясним, как доказывается предложение 1. Пусть W — хорошая окрестность кривой C . Так как $\mathcal{M}(F)$ вкладывается в $\mathcal{M}(W)$, теорема Люрота (двумерная или одномерная) показывает, что достаточно доказать предложение для случая $F = W$. Рассмотрим сначала случай, когда степень трансцендентности $\mathcal{M}(W)$ равна 2. Имеем $\mathcal{M}(W) = \mathbb{C}(f, g, h)$, где мероморфные функции f и g алгебраически независимы, а мероморфная функция h алгебраична над $\mathbb{C}(f, g)$ (если $h = 0$, то все уже доказано).

Пусть X — гладкая проективная модель поля $\mathcal{M}(W)$. Формула $x \mapsto (f(x), g(x), h(x))$ задает мероморфное отображение $\Phi: W \dashrightarrow X$. Доказывается, что существует непустое открытое подмножество $O \subset W$ со следующими свойствами: мероморфное отображение Φ определено на O и производная $D\Phi_1(x)$ невырождена для всех $x \in O$.

Имея в виду это обстоятельство, доказательство далее проходит следующим образом. Ввиду критерия рациональности Кастельнуово нам достаточно проверить, что $H^0(X, \Omega_X^1) = 0$ и $H^0(X, \omega_X^{\otimes 2}) = 0$. Пусть теперь η — голоморфное ковариантное тензорное поле, не являющееся тождественным нулем. Тогда $\Phi^* \eta$ — не являющееся тождественно нулевым голоморфное тензорное поле на $W \setminus I$, где I — множество неопределенности для Φ . Поскольку множество I дискретно, такое тензорное поле продолжается на все W , так что нам достаточно проверить, что $H^0(W, \Omega_W^1) = 0$ и $H^0(W, \omega_W^{\otimes 2}) = 0$.

Лемма 1. $H^0(W, \Omega_W^1) = 0$ (при любой степени трансцендентности поля $\mathcal{M}(W)$).

Пусть ω — голоморфная 1-форма на W . Ввиду предложения 3 для всякой $x \in W$ существуют кривые $C_1, C_2 \subset W$, изоморфные $\mathbb{P}^1$ и трансверсально пересекающиеся в точке x . Ограничение ω на каждую из них, будучи голоморфной формой на сфере Римана, является

тождественным нулем; так как касательные пространства $T_x C_1$ и $T_x C_2$ порождают, ввиду трансверсальности, $T_x W$, имеем $\omega_x = 0$; значит, $\omega = 0$ ввиду произвольности точки x .

Лемма 2. $H^0(W, \omega_W^{\otimes 2}) = 0$.

Пусть, рассуждая от противного, ω — нетривиальная 2-форма веса 2 на W . Выберем d различных точек $p_1, \dots, p_d \in C$; пусть $\bar{W}$ — раздутие W в этих точках и $\bar{C} \subset \bar{W}$ — собственный прообраз C . Поскольку $\bar{C} \cong \mathbb{P}^1$ и $(\bar{C} \cdot \bar{C}) = 0$, из основного результата статьи [35] вытекает, что некоторая окрестность $\bar{C}$ в $\bar{W}$ изоморфна $U \times \mathbb{P}^1$, где U — открытое подмножество в $\mathbb{C}$. Теперь все вытекает из нижеследующей леммы 3.

Лемма 3. Если $G = U \times \mathbb{P}^1$, где U — открытое подмножество в $\mathbb{C}$, то на G не существует нетривиальных голоморфных 2-форм веса 2.

Пусть ω — такая форма, и пусть z — координата на $U \subset \mathbb{C}$; тогда на G существует не обращающееся в нуль голоморфное векторное поле $\partial/\partial z$. Для $b \in U$ положим $C_b = \{b\} \times \mathbb{P}^1$. Нам достаточно показать, что для всяких $b \in U$ и $x \in C_b$ имеем $\omega_x(\partial/\partial z, v)$, где $v \in T_x C_b$ — ненулевой касательный вектор.

Рассмотрим тензорное поле $\eta = i_{\partial/\partial z} \omega$ (свертка ω с $\partial/\partial z$). Заметим, что ограничение η на каждое C_b является голоморфным квадратичным дифференциалом и тем самым, поскольку $C_b \cong \mathbb{P}^1$, является тождественным нулем. Стало быть, для любых $x \in C_b$ и $v \in T_x C_b$ имеем $\omega_x(\partial/\partial z, v) = \eta_x(v) = 0$, что и требовалось.

Доказательство предложения 1 для случая степени трансцендентности 1 аналогично, но проще: мы рассматриваем кривую X , являющуюся гладкой проективной моделью поля $\mathcal{M}(F)$; достаточно показать, что на X нет нетривиальных голоморфных 1-форм, а это, в свою очередь, сводится к доказательству того, что $H^0(W, \Omega_W^1) = 0$, но это мы уже установили в лемме 1.

Описанные выше результаты опубликованы в работе [32].

3.2 МВМ классы голоморфных симплектических многообразий

В последние тридцать лет были предприняты значительные усилия в изучении конуса Мори или nef (кэлерова) конуса, что является двойственным аналогом конуса Мори. Напомним определение конуса Мори.

Определение. Пусть X — полное многообразие. Обозначим за $Z_1(X)$ группу одномерных циклов на многообразии X и определим отношение эквивалентности на $Z_1(X)$ следующим образом. Скажем, что два цикла $C, C' \in Z_1(X)$ эквивалентны, то есть $C \sim C'$, если для любого элемента $\mathcal{L} \in \text{Pic}(X)$ имеет место равенство

$$C \cdot \mathcal{L} = C' \cdot \mathcal{L}. \quad (3.2)$$

Тогда в пространстве $N_1(X) = (Z_1(X)/\sim) \otimes \mathbb{R}$ рассмотрим выпуклый конус $\text{NE}(X)$, порожденный всеми эффективными циклами. Этот конус и называется конусом Мори.

Хорошо известно (см., например, [42]), что двойственный конус к конусу Мори является nef-конус.

Изучение конуса Мори (или же, по двойственности, nef-конуса) является одной из важных задач в алгебраической геометрии. Во-первых, конус Мори дает явный критерий обильности для дивизоров Картье (о критерии Клеймана см., например, [42]). Во-вторых, он играет ключевую роль в программе минимальных моделей. А именно, благодаря теореме о конусе и теореме о стягивании возникает некоторая “классификация” минимальных моделей многообразий (более подробно см., например, [43]).

В отчетный период нашей целью было изучение nef-конуса (или кэлера конуса в неалгебраическом случае) для неприводимых голоморфных симплектических многообразий. Напомним определение.

Определение. Неприводимое голоморфное симплектическое многообразие X – это гладкое компактное кэлерово многообразие с тривиальной фундаментальной группой, у которого $H^0(X, \Omega_X^2)$ порождается всюду невырожденной голоморфной 2-формой.

Из определения следует, что неприводимые голоморфные симплектические многообразия – четномерны. Более того, в размерности 2 неприводимые голоморфные симплектические многообразия – это ровно КЗ поверхности.

Nef-конус КЗ поверхности был хорошо изучен (см., например, [41]). Nef-конус (или кэлеров в неалгебраическом случае) конус КЗ поверхности высекается ортогональными гиперповерхностями к (-2) -кривым в положительном конусе. Напомним определение положительного конуса для поверхности.

Определение. Пусть S – компактная проективная (кэлера) поверхность. Рассмотрим множество всех элементов в пространстве Нерона–Севери $NS(S) \otimes \mathbb{R}$ (в пространстве $H^{1,1}(S) \otimes \mathbb{R}$ в случае, когда S – не алгебраическая поверхность), что их самопересечение положительно. Это множество имеет две связные компоненты. Тогда положительным конусом $Pos(S)$ будем называть ту компоненту, которая содержит nef-конус (кэлеров конус для неалгебраического случая).

Иными словами, для КЗ поверхности nef-конус (или кэлеров конус в неалгебраическом случае) – это одна из компонент положительного конуса без ортогональных гиперплоскостей к (-2) -кривым. Естественно возникает вопрос о подобном описании nef-конуса (или кэлера конуса) для неприводимых голоморфных симплектических многообразий больших размерностей.

Прежде, чем приступить к этому вопросу, нужно отметить, что для определения положительного конуса для поверхностей использовалась форма пересечения на вторых когомологиях, которая естественным образом имеет топологическую природу. Поэтому в изучении nef-конуса неприводимых голоморфных симплектических многообразий хотелось бы иметь подобную квадратичную форму. И особенность неприводимых голоморфных симплектических многообразий как раз и заключается в том, что для них имеется такая форма.

Определение (ср. [39], [40]). Пусть X – неприводимое голоморфное симплектическое многообразие размерности $2n$. Тогда на вторых когомологиях $H^2(X, \mathbb{Z})$ существует такая невырожденная билинейная форма q , которая называется формой Бовилля–Богомолова и которая удовлетворяет следующим условиям:

- Сигнатура формы q на $H^2(X, \mathbb{Z})$ имеет вид $(3, b_2(X) - 3)$, а форма $q|_{H^{1,1}(X, \mathbb{R})}$, которая является ограничением q на подпространство $H^{1,1}(X, \mathbb{R})$, имеет сигнатуру $(1, b_2(X) - 3)$.
- Существует константа $c \in \mathbb{R}_{>0}$ зависящая только от многообразия X такая, что выполнено равенство $\int_X \alpha^{2n} = cq(\alpha)^n$.

Важное свойство формы Бовилля–Богомолова заключается в том, что эта форма зависит лишь от топологии многообразия (см [40]). Из этого, в частности, следует, что форма Бовилля–Богомолова инвариантна относительно деформаций. Так же мы теперь можем определить положительный конус для неприводимых голоморфных симплектических многообразий:

Определение. Пусть X – неприводимое голоморфное симплектическое многообразие. Рассмотрим множество всех элементов в пространстве Нерона–Севери $NS(X) \otimes \mathbb{R}$ (в пространстве $H^{1,1}(X) \otimes \mathbb{R}$ в случае, когда X – не алгебраическое многообразие), что их самопересечение относительно формы Бовилля–Богомолова положительно. Это множество имеет две связные компоненты. Тогда положительным конусом $Pos(X)$ будем называть ту компоненту, которая содержит nef-конус (кэлеров конус для неалгебраического случая).

Хорошо известный результат специалистам, изучающим гиперкэлеровы многообразия (см. [38]):

Теорема (см. [39]). Nef-конус (кэлеров конус в неалгебраическом случае) для неприводимого голоморфного симплектического многообразия X состоит из множества таких $\eta \in Pos(X)$, что $q(\eta, C) > 0$ для любой рациональной кривой $C \subset X$.

Более того, из сигнатуры формы Бовилля–Богомолова следует, что положительность достаточно проверять только на рациональных кривых с отрицательным самопересечением относительно формы Бовилля–Богомолова. Небезынтересным представляется вопрос о численном описании этих рациональных кривых, которые дадут критерий обильности для дивизоров на неприводимом голоморфном симплектическом многообразии. Для этого в работе Е. Ю. Америк и М. С. Вербицкого (см. [36]) было введено понятие МВМ класса.

Определение. Пусть X – неприводимое голоморфное симплектическое многообразие. Класс $\alpha \in H^{1,1}(X, \mathbb{R}) \cap H^2(X, \mathbb{Q})$ называется МВМ классом тогда и только тогда когда его двойственный $\hat{\alpha} \in H_2(X, \mathbb{Q})$ относительно формы Бовилля–Богомолова на вторых когомологиях представляется с точностью до умножения на рациональное число рациональной кривой на некоторой деформации X .

Из работ Е. Ю. Америк и М. С. Вербицкого (см. [37] и список литературы в этой работе) следует, что nef-конус (или кэлеров конус в неалгебраическом случае) является

одной из компонент положительного конуса, высекаемый ортогональными гиперплоскостями к МВМ классам. Тем самым, для того чтобы описать обильный или кэлеров конус, достаточно изучить МВМ классы на неприводимом голоморфном симплектическом многообразии. Для малых размерностей неприводимых голоморфных симплектических многообразий типа КЗ МВМ классы были описаны в работе Е. Ю. Америк и М. С. Вербицкого [37].

В отчетный период были классифицированы МВМ классы для неприводимых голоморфных симплектических многообразий типа КЗ и типа Куммера для произвольных размерностей (см. [44]). Напомним, что многообразия типа КЗ – это неприводимые голоморфные симплектические многообразия деформационно эквивалентные гильбертовой схеме точек на КЗ поверхности, а многообразия типа Куммера – неприводимые голоморфные симплектические многообразия деформационно эквивалентные многообразию Куммера.

Теорема. Пусть X – неприводимое голоморфное симплектическое многообразие типа КЗ. Пусть $\alpha \in H^2(X, \mathbb{Z})$ – это примитивный класс, и обозначим за $\hat{\alpha} \in H_2(X, \mathbb{Z})$ двойственный гомологичный класс к α относительно формы Бовилля-Богомолова q . Также за q мы обозначим ее расширение на двойственную решетку $H_2(X, \mathbb{Z}) \hookrightarrow H^2(X, \mathbb{Z}) \otimes \mathbb{Q}$. Пусть $d(\alpha)$ – это делимость класса α и $\delta(\alpha)$ – образ $\alpha/d(\alpha)$ в дискриминантной группе решетки $H^2(X, \mathbb{Z})$. Тогда α является МВМ классом тогда и только тогда когда выполнено одно из следующих условий:

- 1) $q(\hat{\alpha}) = -\frac{1}{2(n-1)}$ и $\delta(\alpha) = 1$;
- 2) существует натуральное число $b \in [0, n-1]$ и натуральное число a , удовлетворяющее условию

$$-2 \leq 2a < \frac{b^2}{2(n-1)} \text{ и } \delta(\alpha) = b, \quad (3.3)$$

такое что $q(\hat{\alpha}) = 2a - \frac{b^2}{2(n-1)}$.

Теорема. Пусть X – неприводимое голоморфное симплектическое многообразие типа Куммера размерности $2n \geq 4$. Пусть $\alpha \in H^2(X, \mathbb{Z})$ – примитивный класс, и обозначим за $\hat{\alpha} \in H_2(X, \mathbb{Z})$ двойственный гомологичный класс к α относительно формы Бовилля-Богомолова q . Также за q мы обозначим ее расширение на двойственную решетку

$$H_2(X, \mathbb{Z}) \hookrightarrow H^2(X, \mathbb{Z}) \otimes \mathbb{Q}. \quad (3.4)$$

Пусть $d(\alpha)$ – это делимость класса α и $\delta(\alpha)$ – образ $\alpha/d(\alpha)$ в дискриминантной группе решетки $H^2(X, \mathbb{Z})$. Тогда α является МВМ классом тогда и только тогда когда выполнено одно из следующих условий.

- 1) $q(\hat{\alpha}) = -\frac{1}{2(n+1)}$ и $\delta(\alpha) = 1$;
- 2) существует натуральное число $b \in [1, n+1]$ и натуральное число a , удовлетворяю-

щее условие

$$0 \leq 2a < \frac{b^2}{2(n+1)} \text{ и } \delta(\alpha) = b, \quad (3.5)$$

такое что $q(\hat{\alpha}) = 2a - \frac{b^2}{2(n+1)}$.

3.3 Факториальность трёхмерных нодальных гиперповерхностей

Трёхмерное (комплексное) алгебраическое многообразие $X \subset \mathbb{P}^n$ является факториальным, если группа $\text{Cl}(X)$ дивизоров Вейля совпадает с группой $\text{Pic}(X)$ дивизоров Картье. Простейшими примерами таких объектов являются гладкие многообразия. Однако, если X имеет особенности, то даже среди гиперповерхностей можно найти контрпримеры. В рамках отчётного периода изучался вопрос факториальности так называемых нодальных гиперповерхностей в $\mathbb{P}^4$ степени 6.

Определение 1. Гиперповерхность X в $\mathbb{P}^4$ называется нодальной, если все её особенности – это обыкновенные двойные точки (ноды).

В [45] Чилиберто и Ди Дженнаро выдвинули гипотезу насчёт факториальности нодальных гиперповерхностей с небольшим числом особенностей.

Гипотеза 3. Пусть $X \subset \mathbb{P}^4$ – нодальная гиперповерхность степени $d \geq 3$, имеющая не более $2(d-2)(d-1)$ особых точек. Тогда либо X факториальна, либо X содержит плоскость и имеет хотя бы $(d-1)^2$ особых точек, либо X содержит квадратичную гиперповерхность и имеет ровно $2(d-2)(d-1)$ нодов.

Гипотеза верна для гиперповерхностей степени $d \leq 4$ (см. [48], [46], [50]). Для $d \geq 7$ гипотеза была доказана Клустерманом в [49]. Сотрудниками лаборатории было показано, что метод Клустермана можно улучшить:

Теорема 13. Гипотеза Чилиберто–Ди Дженнаро верна для нодальных гиперповерхностей степени $d = 6$.

Задачу об изучении факториальности нодальных гиперповерхностей в $\mathbb{P}^4$ можно свести к чисто алгебраической, используя понятие дефекта и его связь с функцией Гильберта идеала нодов.

Определение 2. Дефектом $\delta(X)$ трёхмерного алгебраического многообразия X называется число

$$h^4(X) - h^2(X), \quad (3.6)$$

где $h^i(X)$ – i -ое число Бетти.

В частности, $\delta(X)$ измеряет ранг группы $\text{Cl}(X)/\text{Pic}(X)$. С другой стороны, А. Димкой была установлена следующая связь (см. [47])

$$\delta(X) = \#\Sigma - h_J(2d - 5), \quad (3.7)$$

где через $\#\Sigma$ обозначено число особых точек, а через $h_J(\cdot)$ – функция Гильберта однородного идеала J , задающего множество Σ особых точек на X . По идеалу J можно построить другой однородный идеал $I \supset J$, обладающий выделенными свойствами. Для этого достаточно взять идеал, соответствующий общему гиперплоскому сечению Σ , и добавить к нему столько однородных многочленов, чтобы функция Гильберта получившегося идеала была симметричной относительно степени $d - 2$ и равнялась нулю в степенях выше $2d - 4$.

Определение 3. Цоколем локального кольца R называется аннулятор максимального идеала.

Определение 4. Локальное кольцо R – горенштейново, если цоколь является одномерным R -модулем.

Определение 5. Степень элемента, порождающего цоколь локального горенштейнова кольца, называется цокольной степенью.

Соответствующее построенному идеалу I факторкольцо является локальным горенштейновым цокольной степени $2d - 4$. Доказательство гипотезы для $d \geq 7$ состоит из двух шагов. Сначала показывается, что при $d \geq 6$ и $h_I(d - 4) \leq 2d - 7$ особенности гиперповерхности X содержат полное пересечение мультистепени $(1, 1, d - 1, d - 1)$ либо $(1, 2, d - 2, d - 1)$. Затем показывается, что при $d \geq 7$ противоположное неравенство ($h_I(d - 4) > 2d - 7$) не реализуется. Идея последнего шага состоит в том, чтобы сравнить функции Гильберта идеалов I , J и I_{CI} , где I_{CI} – однородный идеал, задающий полное пересечение мультистепени $(1, 2, d - 2, d - 1)$, и с помощью формулы 3.7 получить оценку снизу на количество особых точек нефакториальной гиперповерхности X :

$$2(d - 2)(d - 1) \geq \#\Sigma \geq \sum_{k=0}^{2d-4} (h_I(k) - h_{I_{CI}}(k)). \quad (3.8)$$

Если $d > 7$, данные рассуждения уже приводят к противоречию. В случае $d = 7$ равенство исключается геометрическими соображениями, не применимыми к гиперповерхностям меньших степеней.

В ходе изучения нодальных гиперповерхностей степени 6 было показано, что геометрические соображения Клустермана можно так же заменить на алгебраические, отсеивая идеалы I со значениями $h_I(k)$, $k = 0, \dots, 2d - 4$, которые удовлетворяют неравенству 3.8.

Определение 6. Последовательность значений $h_I(k)$, $k = 0, \dots, e$, функции Гильберта идеала I называется унимодальным h -вектором $(h_I(0), \dots, h_I(e))$, если $h_I(e) \neq 0$ и выполнено

$$h_I(0) \leq h_I(1) \leq \dots \leq h_I(k - 1) \leq h_I(k) \geq h_I(k + 1) \geq \dots \geq h_I(e). \quad (3.9)$$

Теорема 14 (см. [51]). Последовательность неотрицательных целых чисел $(h_0, \dots, h_e)$, $h_1 \leq 3$ и $h_e \neq 0$, является h -вектором горенштейнова кольца тогда и только тогда, когда выполнены оба условия:

– $h_i = h_{e-i}$ для всех $0 \leq i \leq e$;
– $h_{i+1} - h_i \leq (h_i - h_{i-1})^{(i)}$ для всех $1 \leq i \leq [\frac{e}{2}] - 1$ и функции $\langle i \rangle : \mathbb{Z}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{Z}_{\geq 0}$, переводящей число $C = \sum_{m=1}^i \binom{m+\varepsilon_m}{m}$ в число $C^{(i)} = \sum_{m=1}^i \binom{m+\varepsilon_m+1}{m+1}$, где коэффициенты $\varepsilon_i \geq \varepsilon_{i-1} \geq \dots \geq \varepsilon_1 \geq -1$ определяются однозначно и по индукции.

Следствие 1. Не существует локального горенштейнова кольца с h -вектором, равным $(1, 3, 6, 6, 7, 6, 6, 3, 1)$.

С учётом данной теоремы и её следствия для доказательства теоремы 13 достаточно исключить идеалы I с h -вектором $(1, 4, 6, 6, 6, 6, 6, 4, 1)$ или $(1, 3, 6, 6, 6, 6, 6, 3, 1)$. Исходя из построения I , известно, что идеал $(I_1 + I_2 + I_3 + I_4 + I_5)$ задаёт пустую подсхему в $\mathbb{P}^4$. С помощью общего гиперплоского сечения было показано, что идеал $(I_1 + I_2 + I_3)$ также задаёт пустую подсхему. Пусть

$$d_k = \min\{t \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \mid \dim(\text{подсхемы, заданной } (\bigoplus_{m=1}^t I_m)) \leq k\}. \quad (3.10)$$

Тогда, согласно [49], $\sum_{k=-1}^2 d_k \geq 12$. Такое возможно только в том случае, когда I соответствует полному пересечению мультистепени $(3, 3, 3, 3)$, которое, в свою очередь, имеет другой h -вектор. Противоречие.

3.4 Поверхности дель Пеццо степени 4

Пусть $\mathbb{K}$ — произвольное поле. Напомним, что гладкая проективная поверхность S над $\mathbb{K}$ называется поверхностью дель Пеццо, если антиканонический дивизор $-K_S$ обилен. Степенью S называется квадрат антиканонического класса. Известно, что минимальные поверхности дель Пеццо малой степени далеки от рациональных: например, минимальные поверхности дель Пеццо степени не выше 3 бирационально жёстки согласно результатам Ю. И. Манина и В. А. Исковских. С другой стороны, поверхности дель Пеццо степени 5 и выше, имеющие точку, всегда рациональны. С этой точки зрения поверхности дель Пеццо степени 4 занимают промежуточное положение, обладая некоторыми свойствами, которые сближают их с поверхностями малой степени, и другими свойствами, которые сближают их с поверхностями большой степени.

Пусть S — поверхность дель Пеццо степени 4 над $\mathbb{K}$. Антиканоническая линейная система задаёт вложение $S \hookrightarrow \mathbb{P}^4$, и образ S при этом вложении является пересечением двух квадратик в $\mathbb{P}^4$. Обозначим через $\mathcal{P}$ пучок квадратик в $\mathbb{P}^4$, проходящих через S . Таким образом, имеется изоморфизм $\mathcal{P} \cong \mathbb{P}^1$. Из работ М. Риды, И. В. Долгачёва и А. Дункана известно следующее описание особых квадратик в пучке $\mathcal{P}$.

Теорема. Имеют место следующие утверждения:

– Особые квадрики в пучке $\mathcal{P}$ параметризуются замкнутой подсхемой $\Delta(S)$ длины 5. Схема $\Delta(S)$ гладкая; другими словами, точки $\Delta(S)$ определены над сепарабельным замыканием поля $\mathbb{K}$.

– Все особые квадрики в $\mathcal{P}$ имеют ранг 4, то есть являются конусами с вершинами в точке.

– Пусть R — особая квадратика в $\mathcal{P}$. Тогда проекция из вершины конуса R определяет сепарабельное двойное накрытие S над гладкой двумерной квадратикой.

Рассмотрим пятимерную этальную $\mathbb{K}$ -алгебру $\mathbb{L} = \mathbb{K}[\Delta(S)]$, и ограничение скаляров по Вейлю

$$\tilde{G}(S) = R_{\mathbb{L}/\mathbb{K}}\mu_2, \quad (3.11)$$

где $\mu_2 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ рассматривается как постоянная групповая схема над $\mathbb{L}$. Тогда $\tilde{G}(S)$ является групповой схемой над $\mathbb{K}$, причём

$$\tilde{G}(S)_{\mathbb{L}} \cong \mu_2^5. \quad (3.12)$$

Более того, имеется изоморфизм

$$\mu_2 \otimes_{\mathrm{Spec} \mathbb{K}} \mathrm{Spec} \mathbb{L} \xrightarrow{\sim} \mu_2 \quad (3.13)$$

групповых схем над $\mathbb{L}$, где μ_2 в левой части рассматривается как групповая схема над $\mathbb{K}$, а в правой части — как групповая схема над $\mathbb{L}$. Поскольку ограничение скаляров по Вейлю является правым сопряжённым функтором к замене базы, мы получаем инъективный гомоморфизм групповых схем $\mu_2 \hookrightarrow \tilde{G}(S)$ над $\mathbb{K}$. Положим

$$G(S) = \tilde{G}(S)/\mu_2. \quad (3.14)$$

Таким образом, $G(S)$ является групповой схемой над $\mathbb{K}$, причём

$$G(S)_{\mathbb{L}} \cong \mu_2^4. \quad (3.15)$$

Пусть $\mathcal{N} \cong \mu_2^4$ — нормальная подгруппа в группе Вейля $W(D_5)$. На ней естественно действует группа Галуа $\mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{K}}/\mathbb{K})$, которая отображается в группу Вейля при помощи действия на прямых на поверхности $S_{\bar{\mathbb{K}}}$. Обозначим через $\Lambda(S)$ схему Гильберта прямых на S ; это конечная схема длины 16. Нетрудно установить следующие факты.

Лемма. Верны следующие утверждения:

1) Имеется $\text{Gal}(\bar{\mathbb{K}}/\mathbb{K})$ -эквивариантный изоморфизм

$$G(S)_{\bar{\mathbb{K}}} \xrightarrow{\sim} \mathcal{N}. \quad (3.16)$$

2) Имеется естественное действие групповой схемы $G(S)$ на S .

3) Схема Гильберта прямых $\Lambda(S)$ является торсором над $G(S)$.

Обозначим через $S_{\Delta(S)}^{\text{triv}}$ поверхность дель Пеццо степени 4, полученную как раздутие $\mathbb{P}^2$ в образе $\Delta(S)$ при вложении Веронезе

$$v_2: \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{P}^2 \quad (3.17)$$

пучка $\mathcal{P} \cong \mathbb{P}^1$ квадрик, проходящих через S . Следующая теорема, изначально доказанная А. Н. Скоробогатовым при некоторых дополнительных ограничениях на поле, даёт бигекулярную классификацию поверхностей дель Пеццо степени 4. В 2024 году К. А. Шрамов и А. С. Трепалин получили доказательство этого результата в полной общности.

Теорема. Пусть S — поверхность дель Пеццо степени 4 над полем $\mathbb{K}$. Пусть $\Delta(S)$, $G(S)$, $\Lambda(S)$ и $S_{\Delta(S)}^{\text{triv}}$ построены как выше. Тогда S изоморфна скрутке поверхности $S_{\Delta(S)}^{\text{triv}}$ на $G(S)$ -торсор $\Lambda(S)$. В частности, поверхность S однозначно определяется классом изоморфизма подсхемы $\Delta(S) \subset \mathbb{P}^1$ и классом изоморфизма $G(S)$ -торсора $\Lambda(S)$.

Идея доказательства теоремы состоит в следующем. Можно показать, что выполнены следующие утверждения.

Лемма. Имеют место следующие утверждения:

- 1) Поверхность $S_{\Delta(S)}^{\text{triv}}$ содержит прямую, определённую над $\mathbb{K}$.
- 2) Если S содержит прямую, определённую над $\mathbb{K}$, то

$$S \cong S_{\Delta(S)}^{\text{triv}}. \quad (3.18)$$

3) Имеется изоморфизм

$$\Delta(S_{\Delta(S)}^{\text{triv}}) \cong \Delta(S) \quad (3.19)$$

подсхем $\mathbb{P}^1$.

При доказательстве второго из этих утверждений в работе А. Н. Скоробогатова использовалась вспомогательная конструкция изоморфизма между $\Delta(S)$ и схемой Гильберта прямых на S , пересекающих данную прямую $L \subset S$, определённую над $\mathbb{K}$. Эта конструкция зависела от выбора точки на L , через которую не проходят другие прямые. К. А. Шрамов и А. С. Трепалин придумали аналогичную конструкцию, использующую точку на L , через которую проходит прямая на $S_{\bar{\mathbb{K}}}$, что позволило избавиться от одного из имевшихся ранее предположений на поле. Также они разработали альтернативное доказательство изоморфиз-

ма этих двух схем, не использующее выбора точки.

Рассмотрим теперь скрутку

$$S' = {}^{\Lambda(S)}S \quad (3.20)$$

поверхности S на $G(S)$ -торсор $\Lambda(S)$. Тогда

$$\Lambda(S') \cong {}^{\Lambda(S)}\Lambda(S). \quad (3.21)$$

Следовательно, $\Lambda(S')$ является тривиальным $G(S)$ -торсором. Заметим также, что $\Delta(S')$ и $\Delta(S)$ изоморфны как подсхемы $\mathbb{P}^1$, поскольку действие групповой схемы $G(S)$ на $\mathcal{P}$ и $\Delta(S)$ тривиально. Таким образом, имеются изоморфизмы

$$S' \cong S_{\Delta(S')}^{triv} \cong S_{\Delta(S)}^{triv}. \quad (3.22)$$

Отсюда получаем

$$S \cong {}^{\Lambda(S)}({}^{\Lambda(S)}S) \cong {}^{\Lambda(S)}S' \cong {}^{\Lambda(S)}S_{\Delta(S)}^{triv}. \quad (3.23)$$

Отметим, что поверхность дель Пеццо S степени 4 не может быть восстановлена по $G(S)$ -торсору $\Lambda(S)$ и схеме $\Delta(S)$, если не учитывать вложения $\Delta(S) \hookrightarrow \mathbb{P}^1$.

Пример. Пусть $\mathbb{K}$ — алгебраически замкнутое поле, и пусть S и S' — неизоморфные друг другу поверхности дель Пеццо степени 4 над $\mathbb{K}$. Тогда $\Delta(S) \cong \Delta(S')$, так как обе эти схемы являются объединением пяти $\mathbb{K}$ -точек. В частности, это даёт

$$G(S) \cong G(S') \cong \mu_2^4. \quad (3.24)$$

Также имеется изоморфизм $\Lambda(S) \cong \Lambda(S')$, так как оба этих μ_2^4 -торсора тривиальны.

Можно показать, что схема $\Delta(S)$ (без вложения в $\mathbb{P}^1$) восстанавливается по $\Lambda(S)_{\bar{\mathbb{K}}}$, рассматриваемому как множество с отношением инцидентности и действием группы Галуа $\text{Gal}(\bar{\mathbb{K}}/\mathbb{K})$. Действительно, точки $\Delta(S)_{\bar{\mathbb{K}}}$ находятся в естественном взаимно однозначном соответствии с пятью способами разбить 16 прямых $\Lambda(S)_{\bar{\mathbb{K}}}$ на две восьмёрки так, чтобы каждая восьмёрка состояла из четырёх пар прямых $L_1, L'_1, \dots, L_4, L'_4$ со свойствами $L_i \cap L'_i \neq \emptyset$ и

$$L_i \cap L_j = L_i \cap L'_j = L'_i \cap L_j = \emptyset \quad (3.25)$$

при $i \neq j$. А именно, эти восьмёрки состоят из неприводимых компонент особых коник, которые высекаются на $S_{\bar{\mathbb{K}}}$ плоскостями одного из двух семейств плоскостей на одной из пяти особых квадратик, содержащих $S_{\bar{\mathbb{K}}}$. Таким образом, пять пар восьмёрок соответствуют

пяти особым квадракам, содержащим $S_{\mathbb{K}}$. Действие группы Галуа $\text{Gal}(\bar{\mathbb{K}}/\mathbb{K})$ на $\Lambda(S)_{\mathbb{K}}$ даёт действие этой группы на пяти парах восьмёрок, которое совпадает с действием на $\Delta(S)_{\mathbb{K}}$.

Отметим также, что поверхность дель Пеццо S степени 4 не может быть восстановлена по подсхеме $\Delta(S) \subset \mathbb{P}^1$ и схеме $\Lambda(S)$ без действия групповой схемы $G(S)$, даже если принимать во внимание естественное соответствие инцидентности на $\Lambda(S)_{\mathbb{K}}$.

3.5 Алгебра q -дифференциальных операторов

Пусть Y – гладкая схема над полем характеристики p , D_Y – алгебра кристаллических дифференциальных операторов. В этальной топологии имеем следующую точную последовательность пучков

$$0 \longrightarrow O_Y^* \xrightarrow{f \mapsto f^p} O_Y^* \xrightarrow{d \log} \Omega_Y^{1,cl} \xrightarrow{c-1} \Omega_Y^1 \longrightarrow 0 \quad (3.26)$$

Возникает отображение

$$\mathcal{M} : H^0(Y, \Omega_Y^1) \rightarrow H_{\text{ét}}^2(Y, \mathcal{O}_Y^*) = Br(Y) \quad (3.27)$$

которое мы назовем отображением Милна. Более того, пусть $Y = T^*X$ – кокасательное расслоение к гладкой схеме X . Хорошо известно, что образ тавтологической 1-формы η при отображении Милна есть класс алгебры D_Y . Перейдем теперь в нашем рассмотрении к гладким p -адическим формальным схемам, а именно, пусть T такая схема, причем как и раньше $T = T^*X$, пусть T_{n-1} – схема из семейства над $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$. Оказывается, что существует каноническое поднятие $\mathbb{G}_m$ -жерб Милна, ассоциированного с алгеброй D_Y на $\mathbb{Z}/p^{n+1}\mathbb{Z}$, а именно отображение Милна может быть пропущено через соответствующую группу Брауэра поднятия:

$$H^0(T_0, \Omega_{T_0}^1) \rightarrow Br(T_{n-1}) \rightarrow Br(T_0). \quad (3.28)$$

Более того, если зафиксирован подъем Фробениуса, то можно построить алгебру, представляющую поднятый $\mathbb{G}_m$ -жерб. В работе сотрудников лаборатории изучались локальные описания поднятого класса для гладкой p -адической формальной схемы T , являющейся кокасательным расслоением к другой гладкой схеме X и снабженной локально этальным отображением в тор с зафиксированным подъемом Фробениуса, мною продемонстрировано, что тогда алгебра, представляющая $\mathbb{G}_m$ -жерб Милна на T является пулбэком алгебры, представляющей $\mathbb{G}_m$ -жерб Милна на торе. Более того, предъявлены образующие и соотношения, задающие эту алгебру. В качестве примера укажем их, когда

$$T = T^*\mathbb{G}_m \cong \mathbb{G}_m \times \mathbb{G}_a. \quad (3.29)$$

Рассмотрим накрытие Артина-Шрайера:

$$\pi : \mathbb{G}_m \times \mathbb{G}_a \rightarrow \mathbb{G}_m \times \mathbb{G}_a, (z, x) \mapsto (z, x^p - x) \quad (3.30)$$

вместе с $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ -действием на области определения π , $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} = \langle \sigma \rangle$ и определим циклическую алгебру

$$\mathcal{A} := \pi_*(\mathcal{O}_T) / \langle \sigma g \sigma^{-1} = g^\sigma, \sigma^p = z \rangle, g \in \mathcal{O}_T, \quad (3.31)$$

где g^σ обозначает σ -действие на g . Эта алгебра и есть та, которая представляет $\mathcal{M}(\eta)$.

Далее, была поставлена следующая гипотеза. Рассмотрим алгебру q -дифференциальных операторов на аффинной прямой $\mathbb{A}_{\mathbb{Z}[q]}^1$, а именно $\mathbb{A}_{\mathbb{Z}[q]}^1$

$$\mathcal{D}_q = \mathbb{Z}[q] \langle x, \partial \rangle / \langle \partial x - qx\partial - 1 \rangle \quad (3.32)$$

где q – формальная переменная. Можно заметить, что центр $\mathcal{D}_q$ изоморфен $\mathbb{Z}[q][x^p, \partial^p]$. Более того, после замены базы на $\mathcal{O}$, $\mathcal{D}_q \otimes \mathcal{O}$ становится алгеброй Адзумаи на своем центре $\mathcal{O}[x^p, \partial^p]$ расщепляемой расширением

$$\mathcal{O}[x^p, \partial^p] \rightarrow \mathcal{O}[x, \partial^p]. \quad (3.33)$$

Пусть q это корень p -ой степени из единицы, $K = \mathbb{Q}_p(\sqrt[p]{1})$ и $\mathcal{O} \in K$ это его кольцо целых, тогда гипотеза состоит в том, что ограничение $\mathcal{D}_q$ на $T^*\mathbb{G}_m$ изоморфно $\mathcal{O} \otimes \mathcal{A}$.

3.6 Минимальные поверхности дель Пеццо степени 4

Пусть $\mathbb{K}$ — совершенное поле. Для любой геометрически рациональной поверхности (то есть поверхности, бирационально эквивалентной проективной плоскости над алгебраическим замыканием поля) можно применить программу минимальных моделей и получить в результате минимальную поверхность дель Пеццо с числом Пикара, равным 1, или поверхность со структурой относительно минимального расслоения на коники над кривой рода 0, для которой инвариантное число Пикара равно 2. Возникает естественный вопрос: какие из таких поверхностей являются бирационально эквивалентными. Для минимальных поверхностей дель Пеццо, на которых есть точки, определённые над $\mathbb{K}$, давно известно, что поверхности дель Пеццо степени 5 и выше рациональны (то есть бирационально эквивалентны проективной плоскости), а поверхности дель Пеццо степени 3 и ниже являются бирационально жёсткими (то есть не являются бирационально эквивалентными никаким другим минимальным поверхностям дель Пеццо или поверхностям, обладающим структурой относительно минимального расслоения на коники). Для доказательства подобных утверждений используется теория линков Саркисова, позволяющая разложить любое бирациональное отображение в последовательность некоторых элементарных отображений, называемых линками Сарки-

сова, связывающих минимальные поверхности дель Пеццо и относительно минимальные расслоения на коники.

Тем не менее уже несколько десятков лет остаётся открытым вопрос о бирациональной классификации минимальных поверхностей дель Пеццо степени 4. Для таких поверхностей возможны линки Саркисова с центром в точках степени 3, 2 и 1. В первых двух случаях линк Саркисова приводит к изоморфной минимальной поверхности дель Пеццо степени 4 (это соответствует инволюциям Бертини и Гейзера, действующим на поверхностях дель Пеццо степени 1 и 2, получающихся при раздутии точки степени 3 или 2 соответственно), однако при раздутии точки степени 1, то есть точки, определённой над $\mathbb{K}$, получается кубическая поверхность со структурой относительно минимального расслоения на коники. Для такого расслоения на коники существует много линков Саркисова, в результате которых снова получается кубическая поверхность со структурой относительно минимального расслоения на коники, причём соответствующая поверхность может не быть изоморфной исходной. Для любого такого расслоения существует единственное бисечение, являющееся (-1) -кривой, при стягивании которого получается некоторая минимальная поверхность дель Пеццо степени 4.

Таким образом, если S — минимальная поверхность дель Пеццо степени 4, то любая минимальная поверхность дель Пеццо S' , бирационально эквивалентная S , также имеет степень 4. Оказывается верно более сильное утверждение, которое было доказано К. А. Шрамовым и А. С. Трепалиным в 2024 году:

Теорема. Пусть S — поверхность дель Пеццо степени 4 над совершенным полем $\mathbb{K}$ такая, что число Пикара $\rho(S)$ равно 1. Тогда любая поверхность дель Пеццо S' , бирационально эквивалентная поверхности S , с числом Пикара $\rho(S')$, равным 1, изоморфна S .

Сразу же стоит отметить, что такая поверхность дель Пеццо степени 4 не является бирационально жёсткой: её можно перестроить в кубическую поверхность со структурой относительно минимального расслоения на коники, причём такие расслоения параметризуются $\mathbb{K}$ -точками на поверхности S с точностью до изоморфизма S . Тем не менее полученный результат завершает бирациональную классификацию минимальных поверхностей дель Пеццо, на которых есть точки, определённые над $\mathbb{K}$.

Интересно, что получившийся результат аналогичен ранее полученному результату про минимальные поверхности дель Пеццо степени 8 без точек, определённых над $\mathbb{K}$. Всякая минимальная поверхность дель Пеццо, бирационально эквивалентная исходной, изоморфна исходной поверхности, но при этом её можно перестроить в поверхности дель Пеццо степени 6 со структурой относительно минимального расслоения на коники, а такие расслоения параметризуются квадратичными расширениями поля $\mathbb{K}$, для которых на поверхности дель Пеццо степени 8 появляется точка, определённая над полем.

Для доказательства основной теоремы используются утверждения о бирегулярной классификации поверхностей дель Пеццо степени 4, также полученные К. А. Шрамовым и А. С. Трепалиным в 2024 году. Оказывается, что инварианты $\Delta(S)$ и $\Lambda(S)$ с действием

групповой схемы $G(S)$ естественно переносятся на кубические поверхности со структурой относительно минимального расслоения на коники и сохраняются при линках Саркисова, связывающих такие кубические поверхности. Таким образом, любые две минимальные поверхности дель Пеццо степени 4, получающиеся одна из другой при последовательности линков Саркисова, проходящих через некоторые кубические поверхности со структурой относительно минимального расслоения на коники, оказываются изоморфными.

Используемые методы доказательства позволяют усилить утверждение основной теоремы, рассмотрев G -минимальные поверхности дель Пеццо степени 4, где G — конечная группа автоморфизмов поверхности. В этом случае верна следующая теорема.

Теорема. Пусть S — поверхность дель Пеццо степени 4 над совершенным полем $\mathbb{K}$, на которой действует конечная группа G такая, что инвариантное число Пикара $\rho(S)^G$ равно 1. Тогда верны следующие утверждения:

- Если на S нет G -инвариантных $\mathbb{K}$ -точек, то S является G -бirationально жёсткой.
- Если на S есть G -инвариантная $\mathbb{K}$ -точка, то любая G -минимальная поверхность дель Пеццо S' , G -бirationально эквивалентная поверхности S , G -изоморфна S , а любая поверхность со структурой относительно G -минимального расслоения на коники, G -бirationально эквивалентная S , получается при раздутии G -инвариантной $\mathbb{K}$ -точки на S .

3.7 К-стабильность и автоморфизмы многообразий Фано

3.7.1 К-стабильность

Понятие К-стабильности, тесно связанное с существованием метрики Кэлера-Эйнштейна на многообразиях Фано, играет важную роль в современной бирациональной геометрии. Одним из главных приложений этой теории является возможность построения "хороших" пространств модулей для многообразий Фано. В последнее время большое внимание специалистов привлек вопрос нахождения К-стабильных элементов в конкретных семействах многообразий Фано. В монографии С. Araujo, A. Castravet, I. Cheltsov и соавторов ([54]) была решена задача о К-стабильности для общих элементов каждого из семейств гладких трехмерных многообразий Фано. Тем не менее, вопрос нахождения всех К-стабильных элементов в каждом семействе до сих пор остается открытым. Для решения этой задачи требуется тонкий анализ геометрии многообразий в данном семействе. В совместной работе с Г. Белоусовым "K-stability of Fano threefolds of rank 3 and degree 14"[56] эта задача была решена для общих трехмерных многообразий Фано степени 14 с числом Пикара 3, причем условие общности было сформулировано явно. Заметим, что [54] доказано существование одного К-стабильного элемента в данном семействе, из чего, вследствие открытости условия К-стабильности в семействах, следует, что общий элемент данного семейства является К-стабильным. Тем не менее, для приложений оказываются полезными именно явно сформулированные условия общности для К-стабильных элементов семейства. Дело в том, что К-стабильные многообразия Фано включаются в "хорошее" пространство К-модулей. В на-

стоящее время работа в направлении построения таких пространств ведется И.Чельцовым и соавторами.

3.7.2 Бирациональные автоморфизмы

Изучение групп бирациональных автоморфизмов алгебраических многообразий является одной из классических задач алгебраической геометрии. Особый интерес в этом отношении представляет группа Кремоны, то есть группа бирациональных автоморфизмов проективного пространства. Изучению этой группы положили начало алгебраические геометры итальянской школы еще в 19-м веке. В современной литературе одним из подходов к изучению группы Кремоны является описание ее конечных подгрупп. Изучение конечных абелевых групп в группе Кремоны ранга 2 было начато в работах А. Beauville и J. Blanc. Они же изучали p -подгруппы в группе Кремоны плоскости и получили точные оценки на ранг таких подгрупп. Аналогичная оценка для группы Кремоны трехмерного пространства потребовала больших усилий: она была получена в серии статей Ю.Г.Прохорова, К.А.Шрамова, J. Хи, А.А.Кузнецовой и К.В.Логинова. В апреле 2024 года этот результат был обобщен на случай произвольной размерности в работе Коллара и Жуанга [59]. В нем авторы использовали другие, менее явные, методы.

Мы рассматривали задачу классификации конечных абелевых групп, содержащихся в группе Кремоны (или, более общим образом, эффективно действующих на трехмерном рационально связном многообразии). При помощи стандартных методов программы минимальных моделей, а также используя несложные факты о расширениях конечных абелевых групп, эту задачу удастся свести к изучению действия таких групп на (быть может, особых) многообразиях Фано. Напомним, что проективное многообразие X называется многообразием Фано, если его антиканонический класс $-K_X$ является обильным. Многообразия Фано являются классическим объектом, изучаемым в алгебраической геометрии. Можно сказать, что многообразия Фано являются “строительным блоком” для многих других классов многообразий.

Далее, анализируя действие группы на антиканонической линейной системе многообразий Фано, нами показано, что конечные абелевы группы, действующие на трехмерных рационально связных многообразиях, могут быть отнесены к одному трех типов: группа типа произведения, группа типа $K3$, или группа, действующая на трехмерном многообразии Фано с пустой антиканонической системой. Группой типа произведения мы называем группу, изоморфную прямому произведению конечных абелевых групп, содержащихся в группах Кремоны ранга 1 и 2, соответственно. Естественным образом такая группа допускает действие на произведении рациональной поверхности и рациональной кривой. Группой типа $K3$ мы называем конечную абелеву группу, являющуюся расширением конечной абелевой группы, эффективно действующей на поверхности $K3$, при помощи циклической группы.

Для доказательства этих результатов мы пользовались явными методами трехмерной программы минимальных моделей и теории особенностей. В частности, мы изучили действие

конечных абелевых групп на эллиптических кривых, двумерных поверхностях, допускающих структуру лог Калаби-Яу пары с нетривиальной границей, на ростках простых эллиптических особенностей поверхностей, ростках трехмерных терминальных особенностей, а также на некоторых специальных классах поверхностей. Также мы использовали теорию двойственного комплекса пар Калаби-Яу, разработанную Колларом и Сю, применив ее к случаю пары вида трехмерное (особое) многообразие Фано + антиканонический дивизор границы. Двойственный комплекс дивизора D с простыми нормальными пересечениями на гладком многообразии – это топологическое пространство, которое улавливает комбинаторную сложность этого дивизора. Используя разрешение особенностей, это определение можно обобщить на случай лог-канонических пар, причем топологический тип двойственного комплекса (и в частности, его размерность) не зависит от выбора лог-разрешения. Топология двойственных комплексов пар лог Калаби-Яу достаточно хорошо изучена в размерностях не выше 4, см. [58].

Мы показали, что двойственный комплекс такой пары может принадлежать к одному из трех классов гомеоморфизма (точка, отрезок, двумерная сфера). Насколько нам известно, до этого теория двойственных комплексов не была применена для изучения многообразий с действием группы. Также нами изучено, как конечные абелевы группы, содержащиеся в группах Кремоны рангов 1 и 2, ведут себя при расширениях. Доказано, что абелево расширение двух таких групп, является группой типа произведения.

Также доказан результат об ограниченности количества компонент лог-канонической пары, проходящих через терминальную особую точку на трехмерном многообразии. Доказан результат об ограниченности для групп типа $K3$, не являющихся группой типа произведения. Для этого мы использовали теорему о конечности классов изоморфизма конечных групп, эффективно действующих на поверхности $K3$, а также ограниченность трехмерных многообразий Фано с каноническими особенностями. На эту тему подготовлен препринт, содержащий указанные выше результаты: [60].

Таким образом, ключевыми ингредиентами для получения этих результатов являются теория особенностей пар, а также теория двойственных комплексов. Другим приложением теории двойственного комплекса является понятие регулярности, введенное в работе [62]. Регулярностью пары называется размерность двойственного комплекса, построенного по ее дивизору границы. Если максимизировать эту величину по всем нормированным плюриант-каноническим дивизорам границы, мы приходим к понятию регулярности многообразия Фано, предложенному Х. Морагой [61]. В своих работах Морага и соавторы изучили это понятие и показали, что оно обладает различными интересными свойствами. Однако вычисления этого инварианта для конкретных семейств многообразий Фано были известны лишь в простейших случаях (например, для общих гладких поверхностей дель Пеццо). В совместной работе Авилова-Логинова-Пржиялковского [55] регулярность была посчитана для почти всех трехмерных гладких многообразий Фано. В этой работе нашли применение различные аспекты теории особенностей, как классической (особенности функций, рассматриваемые Арноль-

дом), так и более современной (техника особенностей пар). Оказывается, что “большинство” гладких трехмерных многообразий Фано имеют максимально возможную регулярность. Этот результат может быть полезен для приложений в теории зеркальной симметрии.

3.8 Ограниченность конечных подгрупп в группе Кремоны

Группа Кремоны, которую ввел в рассмотрение в середине 19 века Луиджи Кремона, является классическим объектом изучения бирациональной геометрии. В частности, классическим является вопрос описания ее конечных подгрупп. Главным результатом в этом направлении является работа И. В. Долгачева и В. А. Исковских [64], в которой получена полная классификация конечных подгрупп в группе $\mathrm{Cr}_2(\mathbb{C})$ с точностью до сопряжения. Обобщение данного результата на случай произвольных полей характеристики ноль или на случай большего ранга представляется необозримым. Однако какие-то свойства, содержащие в себе информацию о “сложности” конечных подгрупп, доказать можно. Так, например, над произвольными полями характеристики ноль известно, что группа Кремоны любого ранга является жордановой.

Определение (см. [65]). Пусть G — конечная группа. Назовем константой Жордана $J(G)$ наименьший индекс нормальной абелевой подгруппы в G . Пусть Γ — произвольная группа. Тогда Γ называется жордановой, если величина

$$J(\Gamma) = \sup_{\substack{G \subseteq \Gamma, \\ |G| < \infty}} J(G) \quad (3.34)$$

конечна. Если группа жорданова, то число $J(\Gamma)$ называется константой Жордана группы Γ .

В начале этого года в завершение прошлогодней деятельности мы опубликовали препринт [67] о константах Жордана группы Кремоны и препринт [66] о константах Жордана групп автоморфизмов двумерных квадрик.

В некоторых случаях про конечные подгруппы в группе Кремоны можно сказать больше. Так, например, группа $\mathrm{Cr}_3(\mathbb{Q})$ имеет ограниченные конечные подгруппы, то есть найдется такая константа c , что для любой конечной подгруппы $G \subset \mathrm{Cr}_3(\mathbb{Q})$ выполнено неравенство $|G| \leq c$. Однако известное доказательство этого факта не является конструктивным, и потому явное значение этой константы не было известно. Мы же пользуясь методами трехмерной геометрией рациональных многообразий и результатами Ж.-П. Серра по теории редутивных групп предъявили такую константу, промежуточно доказав две теоремы. Первая теорема обрабатывает случай, когда программа минимальных моделей останавливается на расслоении Мори над базой положительной размерности.

Теорема 15. Пусть $\varphi : X \rightarrow \mathfrak{B}$ — расслоение Мори, где X — рациональное трехмерное проективное многообразие над $\mathbb{Q}$, и $\dim \mathfrak{B} \geq 1$. Пусть $G \subset \mathrm{Aut}_{\mathfrak{B}}(X)$ — конечная подгруппа. Тогда $|G| \leq 46656$.

Вторая теорема обрабатывает случай, когда программа минимальных моделей останавливается на многообразии Фано.

Теорема 16. Пусть X — трехмерное $\mathbb{Q}$ -факториальное многообразие Фано с терминальными особенностями над $\mathbb{Q}$. Пусть $G \subset \text{Aut}(X)$ — конечная подгруппа. Тогда

$$|G| \leq 2^{36} \cdot 3^{18} \cdot 5^7 \cdot 7^7 \cdot 11^4 \cdot 13^4 \cdot 17 \cdot 21 \cdot 23 \cdot 29 \cdot 31 \cdot 37 \cdot 43. \quad (3.35)$$

С учетом наличия этих теорем, для предъявления искомой константы для группы $\text{St}_3(\mathbb{Q})$ остается лишь оценить порядки конечных подгрупп в группах автоморфизмов гладких трехмерных многообразий Фано. По предварительным оценкам, в качестве искомой константы подойдет число, выписанное в теореме [16](#).

Несмотря на то, что задача о поиске точной оценке не представляется разрешимой, очевидно, что имеющаяся сейчас оценка может быть сильно улучшена. На данный момент на основе классификации трехмерных многообразий Фано и теории Галуа полей алгебраических чисел разработана техника, позволяющая улучшить оценку на 10 порядков, но мы уверены что и это не предел, поэтому работа по улучшению предъявленной оценки продолжается.

3.9 Ростки экстремальных кривых

Пусть (X, C) аналитический росток трехмерного комплексного пространства с терминальными особенностями вдоль приведенной полной связной кривой C . Мы говорим, что (X, C) является ростком экстремальной кривой, если существует стягивание $f: X \rightarrow Z \ni o$ такое, что $C = f^{-1}(o)_{\text{red}}$ и дивизор $-K_X$ f -обилен. Для бирациональной геометрии ростки экстремальных кривых важны, поскольку их можно рассматривать как строительные блоки в трехмерной программе минимальных моделей. В случае, когда C неприводим, существует классификация ростков экстремальных кривых, см. [68] и [71]: они делятся на несколько классов: (k1A), (k2A), (cD/2), (CAx/2), (cE/2), (cD/3), (IIA), (II^V), (IE^V), (ID^V), (IC), (IIB), (kAD) и (k3A).

В совместной работе Ю. Г. Прохорова и С. Мори была получена грубая классификация ростков экстремальных кривых с приводимой центральной кривой C . В этом случае (X, C_i) также является ростком экстремальной кривой для любой компоненты $C_i \subset C$. Таким образом, основная проблема здесь заключается в том, чтобы склеить различные (X, C_i) . Оказывается, что это не всегда возможно и существует множество естественных ограничений. Нашим основным результатом является следующая теорема.

Теорема. Пусть (X, C) — росток экстремальной кривой с приводимой центральной кривой

$$C = \bigcup_{i=1}^N C_i, \quad N \geq 2, \quad (3.36)$$

где $C_i \subset C$ – неприводимые компоненты. Тогда возможен один из случаев, приведенных в таблице 1 ниже, где $\text{Sing}^{\text{nG}}(X)$ – множество негоренштейновых точек многообразия X , символ $n \times (*)$ означает, что (X, C) содержит ровно n компонент типа $(*)$, а символ $(*) + n \times (**)$ означает, что (X, C) содержит компоненту типа $(*)$ и n компонент типа $(**)$. Столбец f описывает природу соответствующего стягивания $f: X \rightarrow Z$: флипповое (f), дивизориальное (d) или $\mathbb{Q}$ -расслоение на коники (cb).

Таблица 1 - Классификация ростков экстремальной кривой

	(X, C)	f	N	$\text{Sing}^{\text{nG}}(X)$
X имеет не более одной негоренштейновой точки				
1°	X горенштейново	cb	2	$\emptyset$
2°	$2 \times (cAx/2), \quad 2 \times (cD/2) \quad \text{или}$ $2 \times (cE/2)$	cb	2	$(cAx/2), \quad (cD/2) \quad \text{или}$ $(cE/2)$
3°	$N \times (cD/3)$	f	2	$(cD/3)$
		d	≤ 4	
		cb	≤ 5	
4°	$N \times (\text{IIA})$	f	≤ 4	$(cAx/4)$
		d	≤ 7	
		cb	≤ 7	
5°	$2 \times (\text{IV})$	cb	2	$(cAx/4)$
6°	$(\text{IV}) + (N-1) \times (\text{IIA})$	f	2	$(cAx/4)$
		d	≤ 4	
		cb	≤ 5	
7°	$(\text{IIB}) + (N-1) \times (\text{IIA})$	d	2	$(cAx/4)$
		cb	≤ 3	
8°	$(\text{IC}) + (N-1) \times (k1A)$	f	2	$\frac{1}{m}(2, m-2, 1)$
		d	≤ 4	m нечетно, $m \geq 5$

Продолжение таблицы 1

	(X, C)	f	N	$\text{Sing}^{\text{nG}}(X)$
		cb	≤ 5	
9°	$N \times (k1A)$	f,d,cb		(cA/m)
X имеет ровно две негоренштейновы точки				
10°	$(k3A) + (N - 1) \times (k1A)$	d	2	1) $\frac{1}{2k-1}(1, -1, k)$
		cb	≤ 3	2) $\frac{1}{2}(1, 1, 1)$
11°	$(kAD) + (N - 1) \times (*),$ где каждое $(*)$ – это $(k1A), (cD/2)$ или $(cAx/2)$	f	2	1) $\frac{1}{2k-1}(1, -1, k)$
		d	≤ 4	2) $(cA/2), (cAx/2),$ or $(cD/2)$
		cb	≤ 5	
X имеет более двух негоренштейновых точек				
12°	$n \times (k2A) + k \times (k1A), n \geq 1$			

Таким образом, приведенная выше таблица 1 дает удовлетворительное описание ростков экстремальной кривой с приводимым центральным слоем во всех случаях, за исключением случая [12°]. Заметим, однако, что во многих случаях оценка числа N компонент центральной кривой C не является оптимальной.

Следующий важный факт является частным случаем общей гипотезы М. Рида; это непосредственное следствие теоремы 1.3 из [77] и нашей теоремы.

Следствие. Пусть (X, C) – росток экстремальной кривой. Предположим, что (X, C) не такой, как в [12°]. Тогда общий элемент линейной системы $|-K_X|$ является нормальным и имеет только дювалевские (рациональные двойные) особенности.

Ожидается, что этот факт справедлив также для экстремальных ростков кривой типа [12°].

Доказательство теоремы показывает, что случаи в таблице могут быть естественным образом разделены на классы в соответствии со сложностью общего элемента $D \in |-K_X|$:

- в случае [1°] линейная система $|-K_X|$ не имеет базисных точек;
- в случаях [2°] – [6°], [9°] дивизор D не содержит компонент кривой C , следовательно, $D \cap C$ – единственная негорнштейнова точка $P \in X$, а D – просто общий антиканонический элемент ростка особенности $(X \ni P)$ (см. [79]);

– в случаях 7^o , 8^o , 10^o , 12^o имеем $\dim Bs| - K_X| = 1$ и дивизор D содержит все компоненты, которые имеют типы (IIВ), (IC), (k2A), (k3A) и (kAD).

По этим результатам подготовлен препринт [78].

4 Специальные многообразия

4.1 Гиперкэлэровы многообразия и обильные конуса

В отчетный период, сотрудниками лаборатории было продолжение изучения гиперкэлэровых многообразий, их обильных конусов и динамики их эндоморфизмов.

В частности, в соавторстве с А. Солдатенковым и М. Вербицким, сотрудник лаборатории Е. Америк получила результаты о границе обильного (или, как вариант, подвижного) конуса гиперкэлэровых многообразий. Напомним, что еще в 1993 году Шандор Ковач показал, что эффективный конус K_3 поверхности либо круглый (т.е. совпадает с положительным), либо вообще не имеет круглой части (порождается классами -2 -кривых). По двойственности, аналогичное утверждение верно и для обильного конуса. Недавно Ф. Денизи попытался обобщить это наблюдение на гиперкэлэровы многообразия, но поскольку он копировал аргумент Ковача, то поначалу преуспел в этом лишь для известных семейств. Окончательная версия его статьи включает простой аргумент, принадлежащий Америк, Вербицкому и Солдатенкову, но в своей работе они пошли гораздо дальше. А именно, “отсутствие круглой части” в смысле Ковача и Денизи значит, что у границы положительного конуса и у границы обильного конуса нет общего открытого куска, и не противоречит тому, что у них могут оказаться нетривиальные пересечения в меньшей размерности. В своей работе “Apollonian carpets and the boundary of the ample cone” Америк, Солдатенков и Вербицкий показывают, что любая вещественно-аналитическая кривая в пересечении проективизаций положительного и обильного конуса содержится в некоторой целиком лежащей там сфере (которая может иметь произвольную размерность). Также они строят различные примеры взаимного расположения таких сфер. Их объединение они называют ковром Аполлония - в честь работ Барагара 2010х годов, где он строит некоторые примеры аполлониевых упаковок окружностей на границе обильного конуса K_3 поверхности. Стоит отметить, что если окружности Барагара все высекаются ортогональными гиперплоскостями к (-2) -кривым, то сферы Америк-Вербицкого-Солдатенкова могут иметь и другое происхождение (конечно же, они высекаются ортогоналами к набору некоторых классов с отрицательным квадратом, но вообще говоря, сами эти классы не обязаны иметь никакого геометрического значения, то есть сферы получаются как своего рода предельные множества других сфер геометрического происхождения). Этот феномен до сих пор не был известен и долгое время даже было неочевидно, что он существует.

Кроме того, почти закончен совместный проект Е. Америк с С. Канта (Университет Ренна, Франция). Он посвящен следующему вопросу. Пусть имеется параболический автоморфизм гиперкэлэрова многообразия, сохраняющий некоторое лагранжево расслоение. С точностью до возведения в степень, он является послойным сдвигом. Америк и Вербицкий доказали, что орбиты автоморфизма плотны в общем слое. Канта задал вопрос, верно ли, что слоев, на которых сдвиг конечного порядка, тоже много? Оказывается, что да, более того, такие точки базы, что автоморфизм действует на соответствующем слое сдвигом на кручение, плотны в евклидовой топологии. Это следует из максимальности ранга так называемого отоб-

ражения Бетти, которое впервые изучал еще Манин в начале 60х годов. В последние годы интерес к этому отображению вернулся, различные достаточные условия для максимальной ранга получены Вуазен, Андре-Корвая-Занниером, Гао. Америк и Канта предлагают особенно простой и изящный способ доказать максимальность в гиперкэлеровом случае.

Наконец, совместная работа Е. Америк и стажера лаборатории М. Ложкина посвящена новому примеру потенциальной плотности рациональных точек на гильбертовом кубе $K3$ поверхности, снабженном двумя инволюциями Бовилля. Потенциальная плотность рациональных точек на самой $K3$ поверхности - очень трудная задача, она решена, когда поверхность имеет эллиптический пучок или бесконечную группу автоморфизмов, но не в общем случае. В качестве приближения к идеалу изучается потенциальная плотность на симметрических степенях, или, что то же самое, точечных схемах Гильберта (см., например, работы Хассетта-Чинкеля и Богомолова-Чинкеля на рубеже веков). Произведение инволюций Бовилля - бирациональный автоморфизм бесконечного порядка, и его можно использовать для "размножения" рациональных точек. Идея в том, чтобы взять заведомо потенциально плотное трехмерное подмногообразие (их довольно много) и доказать, что множество его итераций плотно по Зарискому. Что его замыкание не может иметь коразмерность 1 - простое вычисление в когомологиях. Исключение коразмерности 2 серьезно использует голоморфно симплектическую технику, характеристическое слоение, теоремы типа Жуанолу-Жиса. Наконец, оказывается на удивление непросто исключить периодичность рассматриваемого подмногообразия - трудности связаны с тем, что автоморфизм лишь бирационален, это затрудняет вычисления в когомологиях (в самом деле, действие автоморфизма на когомологиях уже не сохраняет пересечения).

4.2 Расслоения Хиггса и фуллерены

Кристаллам с симметрией можно поставить в соответствие риманову поверхность Σ с инволюцией σ . Минимальная порождающая область это половина фундаментального многоугольника, грани которого склеиваются в фактор $\Sigma/\sigma = \mathbb{P}^1$. Абелевый кристаллический момент определяет голоморфное линейное расслоение на Σ . Это линейное расслоение задаёт пару: голоморфное расслоение E ранга 2 и голоморфную 1-форму ϕ со значениями в эндоморфизмах E . Эта конструкция известна, как расслоение Хиггса. Это даёт алгоритм соответствия кристаллу спектральной кривой в параболическом расслоении Хиггса, и абелев кристаллический момент как спектральное линейное расслоение. Более того, кристаллический Гамильтониан на спектральной кривой задаёт аналогичный Гамильтониан на базе расслоения, с соответствующей заменой плоской связности на параболическую.

Более общо, благодаря этому соответствию пространство модулей расслоений Хиггса становится пространством модулей кристаллов, при котором база расслоения соответствует кристаллической решётке и абелев кристаллический момент - слоям (Якобиану спектральной кривой). Кристаллический Гамильтониан для каждого расслоения Хиггса задаёт зонную структуру надо пространством модулей расслоений Хиггса. Зонная структура над Якобианом

ном, соответствующим каждому кристаллу, склеивается в глобальную.

В своих недавних работах, Шапошник, Раян и соавторы изучали приложения расслоений Хиггса, гиперкэлеровой геометрии к физике твёрдого тела, при этом вместо обычной зонной теории они изучали гиперболическую зонную теорию, которая занимается изучением зонной структуры, возникающих на гиперболических кристаллах. Идея в том что для евклидовых кристаллов риманова поверхность это тор, но для гиперболических гораздо больше возможностей. Сам гиперболический кристалл это периодическая структура на гиперболической плоскости $\mathbb{H}$, кристаллическая структура определяется дискретной группой изометрий $\Gamma \subset PSL(2, \mathbb{R})$ (фуксовой группой), действующей на $\mathbb{H}$ без неподвижных точек. Фундаментальная область состоит из гиперболического многоугольника, ограниченного геодезическими. Фактор $\mathbb{H}/\Gamma$ это риманова поверхность, более того по теореме об униформизации каждая риманова поверхность Σ это $\mathbb{H}/\Gamma$ для какой-то фуксовой группы Γ .

Группа Γ действует свободно и собственнно на $\mathbb{H}$, поэтому $\pi_1(\Sigma) \simeq \Gamma$. Кристаллический момент это представления $\rho : \pi_1(\Sigma) \rightarrow GL_n(\mathbb{C})$, возникающие из монодромии плоской связности (соответствие Римана-Гильберта). Для гиперболических кристаллов как показали Раян и соавторы также есть гиперболическая теорема Блоха и соответствующий кристаллический Гамильтониан для каждого неприводимого представления ρ : для каждого поля Хиггса (E, ϕ) кристаллический Гамильтониан для представления ρ это $H_\rho = D_\phi^* D_\phi + V$, где D_ϕ – плоская связность. Зонная структура для пространства модулей представлений ($\mathcal{M}^{Higgs}$) задана спектром H_ρ . Это позволяет определить многообразие Блоха – множество пар $\rho \in \mathcal{M}^{Higgs}, e \in \mathbb{C}$ таких что e – собственное значение для H_ρ . Многообразие Блоха это подмногообразие ко-размерности 1 в $\mathcal{M}^{Higgs} \times \mathbb{C}$. Обычно многообразие Блоха особое.

Например, в случае графена это многообразие имеет коническую особенность, соответствующую электронному состоянию перехода для графена. В общем случае многообразие Блоха расслоенно над $Jac(C) \times \mathbb{C}$ для спектральной кривой C , но с особыми слоями. Нетривиальный, но интересный вопрос, что соответствует разрешению особенностей в многообразии Блоха и какая кристаллографическая интерпретация этих слоёв.

Фуллерены – это молекулы, состоящие из атомов углерода, то есть ещё одна форма углерода. Особенностью таких молекул являются в том числе их интересные электронные свойства. В частности, интересным стало применить результаты Шапошник–Раяна к случаю фуллеренов. Для этого используется следующая идея: “раскрыть фуллерены” и продлить полученное замощение до замощения плоскости, тем самым, получив аналог решётки графена, или гиперболического кристалла.

Основной результат, который получилось доказать на данный момент, это разные расслоения Хиггса для основных типов фуллеренов. Ассоциированные с фуллеренами расслоения Хиггса нетривиально скручены. Более того, можно явно показать, что в присутствии геометрически ориентированного калибровочного поля есть нетривиальное спаривание с полем Хиггса, которое ведёт к образованию вихрей, расположенных в некоторых вершинах молекулы фуллерена. Удалось показать, что для большинства стандартных молекул в форме

фуллерена соответствующее многообразие Блоха имеет также конические особенности.

В конечном итоге, хотелось бы иметь способ классифицировать известные и неизвестные молекулы в форме фуллеренов по их многообразиям Блоха. Более амбициозная задача – физический смысл особых слоёв расслоений многообразий Блоха над Якобианом спектральной кривой.

4.3 Кольцо Ходжа и виртуально гиперкэлеровы многообразия

В своё время Котшик и Шрайдер изучали структуру кольца Ходжа, естественного объекта, параметризующего все числа Ходжа компактных кэлеровых многообразий. В результате они показали, какие комбинации чисел Ходжа – бирациональный инвариант и какие – топологический. Более того, им удалось описать это кольцо в относительно геометрических терминах – полиномиальное кольцо $\mathbb{Z}[E, L, S]$, порождённое эллиптической кривой E , проективной прямой L и S – кэлеровой поверхностью сигнатуры ± 1 . В частности, это означает, что кольцо Ходжа порождается проективными многообразиями (как известно из работ Вуазен, более тонкие версии этой теории различают топологический тип проективных от произвольных кэлеровых). Более формально, если мы определим кольцо Ходжа как

$$\mathcal{H}_* = \bigoplus \mathcal{H}_n \subset \mathbb{Z}[x, y, z], \quad (4.1)$$

где $\mathcal{H}_n$ – $\mathbb{Z}$ -модуль всех многочленов Ходжа с кэлеровыми симметриями для многообразий размерности n , то оказывается, что $\mathcal{H}_* \simeq \mathbb{Z}[E, L, S]$.

Естественным образом возникает вопрос, как выглядит такое кольцо в случае гиперкэлеровых симметрий и с учётом действия алгебры Луенги-Лунца-Вербицкого (называемой LLV-algebra), которая над комплексными числами изоморфна $\mathfrak{so}(b_2 + 2)$. Такое кольцо мы называем кольцом Ходжа *виртуальных гиперкэлеровых многообразий* и занимаемся изучением его структуры. В первом приближении, мы рассматриваем только виртуальные гиперкэлеровые многообразия, у которых в ромбе Ходжа встречаются только представления типа Вербицкого ($V_{(k)}$ со старшим весом $(k, 0, \dots, 0)$), а остальные отсутствуют. Более того, мы предполагаем зануление нечётных кохомологий (отсутствие спинорных представлений). В частности, первый шаг многочлены Ходжа для гиперкэлеровых 4-многообразий, разрешённых в классификации Гуана. Для них уже возникают нетривиальные соотношения, которых нет у Котшика-Шрайдера.

4.4 Потенциальная плотность рациональных точек

Рациональные точки неприводимого проективного многообразия X , определённого над числовым полем K , называются потенциально плотными в X , если для некоторого конечного расширения полей L/K алгебраическое множество $X(L)$ плотно по Зарисскому в X .

Для кривых вопрос потенциальной плотности рациональных точек полностью изу-

чен. Если род гладкой кривой C равен нулю, то есть C является проективной прямой, то её рациональные точки потенциально плотны. Если род кривой равен 1, то есть C является эллиптической кривой, то рациональные точки C также потенциально плотны (более того, рациональные точки любого абелева многообразия потенциально плотны). Знаменитая теорема Фальтингса утверждает, что множество рациональных точек (над любым числовым полем) кривой рода $g > 1$ конечно. Таким образом, рациональные точки кривых общего типа не потенциально плотны.

Для многообразий более высоких размерностей имеющиеся результаты скромнее. Гипотеза Бомбиери-Лэнга утверждает, что рациональные точки многообразия общего типа (то есть наибольшей размерности Кодайры) потенциально плотны. Если же, напротив, канонический класс многообразия тривиален или антиобилеен, ожидается, что рациональные точки такого многообразия потенциально плотны. Таким образом, естественно предполагать, что для КЗ поверхностей потенциальная плотность рациональных точек имеет место.

Потенциальная плотность рациональных точек общей КЗ поверхности неизвестна, однако Ф. Богомолковым и Ю. Чинкелем в 2000 году установлено, что если КЗ поверхность является эллиптической или имеет бесконечную группу автоморфизмов, то рациональные точки такой КЗ поверхности потенциально плотны. Известно также, что рациональные точки КЗ поверхности S с числом Пикара $\rho(S) \geq 5$ потенциально плотны, а среди КЗ поверхностей с числом Пикара $\rho(S) \geq 3$ есть лишь конечное число классов изоморфизмов решёток Пикара, для которых вопрос потенциальной плотности рациональных точек остаётся открытым.

Поскольку задача о потенциальной плотности рациональных точек произвольной КЗ поверхности чрезвычайно трудна, естественным образом встаёт вопрос изучения потенциальной плотности схем Гильберта точек КЗ поверхностей $\text{Hilb}_n S$. Такие многообразия представляют особенный интерес, поскольку являются собой один из немногих известных примеров голоморфно симплектических многообразий.

Заметим, что если рациональные точки некоторой КЗ поверхности потенциально плотны, то автоматически потенциально плотны рациональные точки многообразия $\text{Hilb}_n S$ для любого $n > 1$. В 1999 году Б. Хассеттом и Ю. Чинкелем была доказана следующая теорема.

Теорема 17. Для любой КЗ-поверхности S , определённой над числовым полем, существует такое натуральное n , что рациональные точки $\text{Hilb}_n S$ потенциально плотны. Более того, если $S \subset \mathbb{P}^g$ — КЗ-поверхность степени $2g - 2$, то данное утверждение верно для $n = g$.

Сотрудниками лаборатории была доказана следующая теорема.

Теорема 18. Если КЗ-поверхность S с решёткой Нерона-Севери ранга 2 имеет форму пересечения

$$b(x, y) = 6x^2 + 16xy + 6y^2, \quad (4.2)$$

то рациональные точки многообразия $\text{Hilb}_3 S$ потенциально плотны.

Отметим, что результат теоремы не следует из работ упомянутых выше: показано, что КЗ поверхность с формой пересечения как в теореме не является эллиптической и обладает конечной группой автоморфизмов. Доказательство теоремы развивает идею работы Е.Ю.Америк 2009 года "On an automorphism of Hilb[2] of certain K3 surfaces". Там аналогичный результат был доказан для многообразия $\text{Hilb}_2 S$ КЗ поверхности S с формой пересечения $4x^2 + 14xy + 4y^2$. Общий план доказательства состоит в выборе подмногообразия Π , для которого потенциальная плотность рациональных точек уже известна, и (бirationального) автоморфизма f . Поскольку рациональные точки плотны на всех образах этого подмногообразия $f^n(\Pi)$ для некоторого конечного расширения полей, то замыкание по Зарисскому множества рациональных точек содержит объединение всех этих образов.

Более конкретно, для построения рациональных точек используется конструкция бирациональной инволюции Бовиля. Общая точка схемы $\text{Hilb}_3 S$ является приведённой нульмерной подсхемой S с носителем, состоящем из трёх различных точек $\{p, q, r\}$. Если поверхность S вложена в проективное пространство $\mathbb{P}^4$ с помощью очень обильного пучка степени 6, то в этом проективном пространстве через точки p, q, r можно провести плоскость, пересекающую S ещё в трёх различных точках $\{p', q', r'\}$. Значение инволюция Бовиля в точке $\{p, q, r\}$ определяется как $\{p', q', r'\}$. С помощью двух различных вложений S в проективное пространство $\mathbb{P}^4$ можно построить две инволюции Бовиля i_1 и i_2 . Их композиция $i_1 \circ i_2$ определяет бирациональный автоморфизм f многообразия $\text{Hilb}_3 S$. Сотрудниками лаборатории было показано, что этот автоморфизм имеет бесконечный порядок, а также что на многообразии $\text{Hilb}_3 S$ нет инвариантных (относительно этого автоморфизма) эффективных дивизоров.

Множество неопределённости инволюции Бовиля i_2 является лагранжевым подмногообразием $\Pi \subset \text{Hilb}_3 S$, которое изоморфно трёхмерному проективному пространству $\mathbb{P}^3$. С помощью вычисления конуса Мори многообразия X и анализу классов эффективных кривых, содержащихся в замыканиях образов $\overline{f^n(\Pi)}$, показано, что многообразие Π не периодически под действием f .

С помощью обобщения теоремы Жуанолу на случай произвольной коразмерности, полученного в работе М. Corrêa, L. Maza, M. Soares. "Hypersurfaces Invariant by Pfaff Equations" сотрудниками лаборатории доказана следующая теорема.

Теорема 19. Пусть X — многообразие типа $\text{Hilb } K3$. Если $Y \subset X$ — подмногообразие размерности $\dim Y = 4$, то существует лишь конечное число лагранжевых рационально связных подмногообразий $\Pi_i \subset X$, содержащихся в Y .

С использованием этой теоремы сотрудниками лаборатории было показано, что замыкание объединения образов $\overline{\cup_{n \geq 0} f^n(\Pi)}$ не может иметь размерность, равную 4, и тем самым, доказано, что это замыкание совпадает со всем многообразием $\text{Hilb}_3 S$.

Одним из возможных направлений дальнейшей работы могут быть попытки продвигаться в сторону доказательства потенциальной плотности рациональных точек подобных многообразий в аналитической топологии.

Кроме того, у инволюции Бовиля имеется обобщение — отражение Мукаи, определенное на пространстве модулей полустабильных пучков на КЗ поверхности. Эти отражения задают регулярные инволюции на деформациях многообразий типа $\text{Hilb}_n K3$ для любого $n > 1$. Есть надежда, что анализ отражений Мукаи может привести к новым результатам о потенциальной плотности рациональных точек на голоморфно симплектических многообразиях.

4.5 Гиперкомплексная геометрия

Еще одной темой исследования для сотрудников лаборатории в отчетный период стала гиперкомплексная геометрия — разновидность геометрии, основанная на кватернионах, но использующая техники комплексной алгебраической и дифференциальной геометрий. Напомним основные определения.

Гиперкомплексное многообразие — это гладкое многообразие M с почти комплексными структурами $I, J, K \in \text{End}(TM)$, которые интегрируемы и удовлетворяют кватернионным соотношениям

$$I^2 = J^2 = K^2 = -Id, \quad IJ = -JI = K. \quad (4.3)$$

Таким образом, на касательном расслоении TM действует кватернионная алгебра $\mathbb{H}$.

Для любого $(a, b, c) \in S^2$ линейная комбинация $L := aI + bJ + cK$ определяет другую комплексную структуру на M . Эти линейные комбинации определяют $\mathbb{CP}^1$ -семейство комплексных структур, которое называется *твисторным семейством*.

Понятие твисторного пространства было введено в конце 1960-х годов Р. Пенроузом. В дифференциальной геометрии его идеи были развиты М. Атья, Н. Хитчином и И. Зингером. С этой точки зрения твисторные пространства представляют собой комплексные 3-многообразия, связанные с антисамодвойственными (ASD) римановыми 4-многообразиями. Н. Хитчин показал, что существует только два примера пространства твисторов компактных ASD римановых 4-многообразий, допускающих кэлерову структуру. Это $\mathbb{CP}^3$, ассоциированное со стандартной 4-мерной сферой S^4 , и пространство флагов $\mathbb{F}_3(\mathbb{C})$, ассоциированное с комплексной проективной плоскостью $\mathbb{CP}^2$.

Позднее понятие твисторного пространства было обобщено: твисторное пространство можно определить для нескольких классов многообразий со специальной голономией. Сотрудники лаборатории работали с твисторами компактных гиперкомплексных многообразий.

Пусть M будет гиперкомплексным многообразием. *Пространство твисторов* M является новым комплексным многообразием $Tw(M)$, диффеоморфным $M \times \mathbb{CP}^1$ с почти комплексной структурой, определяемой следующим образом. Для любой точки $(x, L) \in M \times \mathbb{CP}^1$ комплексная структура на $T_{(x,L)}Tw(M)$ задается L на T_xM и стандартной комплексной струк-

турой $I_{\mathbb{CP}^1}$ на $T_L\mathbb{CP}^1$. Эта почти комплексная структура всегда интегрируема.

Нас интересует алгебраическая размерность твисторного пространства, и мы перечислим некоторые соответствующие результаты.

Пусть X – компактное комплексное многообразие. Алгебраическая размерность $a(X)$ многообразия X – это степень трансцендентности над $\mathbb{C}$ поля глобальных мероморфных функций на X .

Компактное комплексное многообразие X называется мойшезоновым, если алгебраическая размерность $a(X)$ равна комплексной размерности $\dim_{\mathbb{C}}(X)$.

Гиперкэлерово многообразие M – это гладкое многообразие, снабженное комплексными структурами $I, J, K \in \text{End}(TM)$, которые удовлетворяют кватернионным отношениям и эрмитовой метрикой g , такой, что формы $\Omega_I(X, Y) := g(JX, Y) + \sqrt{-1}g(KX, Y)$ и $\Omega_J(X, Y) := g(KX, Y) + \sqrt{-1}g(IX, Y)$ замкнуты, $X, Y \in TM$.

Интуитивно, многообразия Мойшезона – это компактные комплексные многообразия, которые допускают множество кривых и делителей. Эти подмногообразия можно использовать для изучения геометрии объемлющего многообразия. Пространства твисторов компактных гиперкэлеровых многообразия очень далеки от того, чтобы быть мойшезоновыми:

Теорема 20 (М. Вербицкий). Пространство твисторов $Tw(M)$ компактного гиперкэлера многообразия M имеет алгебраическую размерность $a(Tw(M)) = 1$.

В отчетный период, сотрудниками лаборатории было доказано, что алгебраическая размерность пространства твисторов эллиптического многообразия Хопфа не равна единице и не является максимальной.

Также мы доказали следующую теорему:

Теорема 21. Пространство твисторов компактного гиперкомплексного многообразия никогда не является мойшезоновым. Более того, оно никогда не является Фуджики класса $\mathcal{C}$.

4.6 О неравенствах на числа Черна

В знаменитой работе 1978 года в качестве приложения своего неравенства для стабильных расслоений на поверхностях Ф.А.Богомолов доказал, что для трехмерных многообразий Фано X с группой $PicX = \langle K_X \rangle$ индекс самопересечения канонического класса ограничен 72. Эта оценка не была оптимальной, поскольку хорошо известна классификация таких многообразий, предложенная Дж.Фано и доказанная В.А.Исковских. Оказалось, что основываясь на методах работы Богомолова можно улучшить оценку до оптимальной равной 64. Основной идеей, является то, что стабильность нужно доказывать не для кокасательного расслоения, а для большего расслоения, полученного его расширением. В свою очередь нужно отметить, что предположение $PicX = \langle K_X \rangle$ является существенным, поскольку в работе Ю.Г.Прохорова содержится пример, когда оценка 72 достигается.

В текущем отчетном периоде мы применили подобные методы к локально деформиру-

емым многообразиям общего типа. В этом случае нужно доказывать стабильность нетривиального расширения касательного расслоения. Однако в этом случае нужны дополнительные предположения. А именно нужно требовать, чтобы многообразие общего типа было локально деформируемым то есть $H^1(X, T_X) \neq 0$. Также накладываются требования о наличии отображения периодов с нетривиальной проекцией на специальную компоненту (один из грасманианов в разложении пространства периодов). Подобные условия позволяют получить аналогичные оценки $c_1^n \leq \frac{2n+2}{n} c_2 c_1^{n-2}$.

4.7 Теоремы конечности для модулей обобщенных якобианов

Понятие обобщенного якобиана впервые было определено в трудах Розенлихта, в качестве естественного обобщения якобиевых многообразий на случай особых кривых. Отметим, что хорошо известна связь между точками конечного порядка на обобщенных якобианах и квазипериодическими разложениями в непрерывную дробь квадратичных иррациональностей специального вида.

В 2023 году В.П. Платоновым, В.С. Жгуном, Г.В. Федоровым был поставлен вопрос о конечности множества квазипериодических квадратичных иррациональностей вида $\omega(x)\sqrt{f(x)}$ в фиксированном гиперэллиптическом поле рациональных функций на кривой $y^2 = f(x)$ при условии ограниченности степени многочлена $\omega(x)$ произвольной константой. Для пары, состоящей из гиперэллиптической кривой и фиксированного дивизора на ней, нами было показано, что указанный выше вопрос эквивалентен вопросу о конечности множества обобщенных якобианов гиперэллиптической кривой специального вида, таких что данный дивизор представляет класс кручения в обобщенном якобиане. Условие специальности обобщенных якобианов, состоит в том, что они ассоциированы с модулями ограниченной степени, и обладают свойством симметрии относительно гиперэллиптической инволюции.

В связи с этим, было естественно рассматривать более общие пары, состоящие из произвольной кривой и дивизора на ней, и поставить вопрос о конечности множества обобщенных якобианов, таких что данный дивизор представляет класс кручения в обобщенном якобиане. Более того, нашей целью было установить, какие из условий на модули по которым строятся обобщенные якобианы, являются существенными, а какие играют техническую роль.

Рассуждения опирались на теорию функциональных непрерывных дробей, а также на работы о связи непрерывных дробей и обобщенных якобианов.

В качестве первого результата работы доказана теорема о бесконечности множества обобщенных якобианов J_m гладкой проективной кривой $\mathcal{C}$, определенной над полем $\mathbb{Q}$ рациональных чисел (или более общо, алгебраических чисел), с условием, что фиксированный дивизор D , представляющий класс $[D]$ конечного порядка в якобиане J , также представляет класс конечного порядка $[D]_m$ в обобщенном якобиане J_m . В этом случае мы будем говорить, что класс кручения $[D]$ в якобиане J поднимается до класса кручения $[D]_m$ в обобщенном якобиане J_m . Упомянутая теорема утверждает, что для конечности количества обобщенных

якобианов J_m в поставленной задаче требуются дополнительные условия. Это подчеркивает нетривиальность дальнейшего результата о конечности множества обобщенных якобианов с подъемом одного классов кручения в якобиане J до классов кручения в обобщенном якобиане J_m для которого модуль удовлетворяет условию кратности, или наложено условие на структуру алгебраической группы J_m .

Теорема 22. Пусть k — поле характеристики нуль. Пусть $D \in \text{Div}^0(\tilde{\mathcal{C}})(k)$ — дивизор, представляющий класс $[D]$ конечного порядка N в J . Фиксируем любое целое $M \geq N$. Тогда справедливы следующие утверждения:

– Множество модулей m над полем k таких, что класс дивизора D имеет в группе J_m конечный порядок, ограниченный M , бесконечно.

– Множество модулей m над полем k таких, что все входящие в m простые дивизоры имеют кратность строго больше 1, а класс дивизора D имеет в группе J_m конечный порядок, ограниченный M , конечно.

– Множество модулей m , состоящих из одного эффективного дивизора $S \in \text{Div}(\tilde{\mathcal{C}})(k)$, и таких, что J_m содержит нетривиальную унипотентную компоненту, а класс дивизора D имеет в группе J_m конечный порядок, ограниченный числом M , конечно.

А также результата о конечности множества обобщенных якобианов с подъемом двух классов кручения в якобиане J с условием на порядки кручения и степени представляющих их дивизоров до классов кручения в обобщенном якобиане J_m .

В качестве основного результата было получено, для гиперэллиптической кривой и фиксированного дивизора на кривой, множество обобщенных якобианов специального вида, построенных по модулю с ограниченной степенью наперед заданной константой, и таких что данный дивизор представляет класс кручения в обобщенном якобиане, является конечным. Условие специальности обобщенных якобианов, состоит в том, что компоненты ассоциированного модуля лежат в слое морфизма из гиперэллиптической кривой на проективную прямую.

Теорема 23. Пусть $\tilde{\mathcal{C}}$ — гиперэллиптическая кривая над полем алгебраических чисел k . Рассмотрим модуль $m = \{S_1, \dots, S_\ell\}$, определенный над k и такой, что носитель каждого S_j инвариантен относительно гиперэллиптической инволюции ι и состоит из двух точек, определенных над $\bar{k}$. Зафиксируем $D \in \text{Div}^0(\tilde{\mathcal{C}})(k)$ — дивизор, представляющий класс конечного порядка N в J такой, что $D \neq \iota D$. Тогда для любой константы d число модулей m , со степенью, ограниченной d , и таких, что D является классом конечного порядка в J_m , конечно.

Из этого результата следует положительный ответ на вопрос конечности специальных обобщенных якобианов гиперэллиптических кривых, поставленный выше. И как следствие этот результат влечет положительный ответ на вопрос о конечности множества квазипериодических квадратичных иррациональностей вида $\omega \sqrt{f(x)}$ при условии ограниченности степени ω произвольной константой.

4.8 Частичный порядок на инволюциях в симметрической группе

Пусть $\mathfrak{n} \subset \mathfrak{gl}(\mathbb{C})$ — это подалгебра Ли строго верхнетреугольных матриц в алгебре Ли комплексных $n \times n$ матриц. Эта подалгебра оснащена адьюнктным действием стандартной (верхнетреугольной) борелевской подгруппы $B \subset GL_n(\mathbb{C})$; это действие, говоря обобщенно, имеет бесконечно много орбит. Однако, если ограничить это действие множеством $\mathcal{X}_n \subset \mathfrak{n}$ матриц с квадратом ноль, присоединенное действие B на $\mathcal{X}_n$ имеет конечное число орбит. В 2000 г. А. Мельниковой было показано, что эти орбиты индексируются инволютивными перестановками $I_n \subset S_n$. Включение замыканий орбит B на $\mathcal{X}_n$ задает частичный порядок на I_n , который отличается от порядка Брюа. Далее Мельниковой было получено простое комбинаторное описание этого порядка; еще одна наглядная комбинаторная интерпретация была дана А. Кнутсоном и П. Зинн-Жюстеном в работе 2014 года. Далее мы будем называть этот порядок присоединенным.

Совершенно неожиданно, тот же самый порядок появляется в другой геометрической ситуации. Рассмотрим прямое произведение двух грассманианов $Gr(k, n) \times Gr(m, n)$, точками которого являются пары k - и m -мерных подпространств в $\mathbb{C}^n$. Эта многообразие оснащено компонентным действием прямого произведения двух борелевских подгрупп $B \times B \subset GL(n) \times GL(n)$, при этом его орбиты являются произведениями шубертовых клеток $X_\lambda^\circ \times X_\mu^\circ$ в грассманианах. Также можно рассмотреть более тонкое разложение на орбиты диагональной борелевской подгруппы $B \subset B \times B$. Известно, что последнее действие также имеет конечное число орбит. Их явное комбинаторное описание было получено сотрудником лаборатории Е. Ю. Смирновым (2008). Более того, орбиты B , составляющие данную $(B \times B)$ -орбиту $X_\lambda^\circ \times X_\mu^\circ$, индексируются конкретным подмножеством инволютивных перестановок $I_n(\lambda, \mu) \subset I_n$, в зависимости от λ и μ . Как и в предыдущем случае, включение замыканий орбит задает частичный порядок на каждом подмножестве инволюций $I_n(\lambda, \mu)$. Оказывается, что все эти структуры частично упорядоченных множеств наследуются из структуры частично упорядоченного множества на I_n , определенной Мельниковой. Более точно, имеет место следующая теорема, полученная Е. Ю. Смирновым в 2024 г.

Теорема 24. Структура частичного порядка на каждом $I_n(\lambda, \mu)$, возникающая из включения замыканий орбит B в прямом произведении двух грассманианов, получается путем ограничения присоединенного частичного порядка на I_n до $I_n(\lambda, \mu)$.

Ключевым этапом доказательства этой теоремы служит следующая лемма, представляющая и самостоятельный интерес. Она устанавливает геометрическую связь между B -орбитами в верхнетреугольных матрицах с нулевым квадратом и двойными клетками Шуберта.

Лемма 4. Существует такое подмногообразие (слайс) $S \subset X_\lambda^\circ \times X_\mu^\circ$, для которого:

- 1) S изоморфно аффинному пространству, размерность которого равна коразмерности минимальной орбиты $\mathcal{O}_{\lambda\mu}^{\min}$ в произведении клеток Шуберта $X_\lambda^\circ \times X_\mu^\circ$;
- 2) S пересекается со всяким замыканием орбиты $\overline{\mathcal{O}_{\lambda\mu}^w}$ трансверсально; в частности,

$$S \cap \mathcal{O}_{\lambda\mu}^{\min} = \{\text{pt}\};$$

3) существует вложение $\iota: S \hookrightarrow \mathcal{X}_n$, для которого для любой инволюции $w \in I_n(\lambda, \mu)$ имеет место включение

$$\iota(\mathcal{O}_{\lambda\mu}^w \cap S) \subseteq B \cdot w_{<}.$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В заключение отметим, что по результатам проведенных работ, описанным в настоящем отчете, можно сделать следующие краткие выводы.

Во-первых, как и в предыдущие годы – Лаборатория успешно работает уже полтора десятка лет – все запланированные на год работы были Лабораторией полностью и успешно проведены. Получены все заявленные научные результаты по темам, сформулированным в техническом задании, а именно, по алгебраической геометрии производных категорий, по мотивной, некоммутативной и гомологической алгебраической геометрии, по классической алгебраической геометрии и программе минимальных моделей, и по геометрии специальных многообразий и метрик специальной голономии. Получен целый ряд совершенно новых результатов, внесших значительный вклад в развитие этих тем и алгебраической геометрии в целом.

Во-вторых, работы выполнены на самом высоком научно-техническом уровне, как минимум сравнимом с лучшими мировыми достижениями в данной области, а во многом и превосходящем их. Работа сотрудников Лаборатории и полученные результаты широко признаны российским и международным научным сообществом, и Лаборатория сохраняет свои позиции одного из общепризнанных мировых лидеров в алгебраической геометрии. Свидетельством тому служат как публикации сотрудников Лаборатории в лучших российских и международных научных журналах, так и многочисленные доклады на российских и международных конференциях самого высокого уровня, в которых наши сотрудники представили полученные нами результаты. Лаборатория продолжает играть важнейшую роль в научной жизни, как в России, так и в мировом масштабе.

В-третьих, проведенные работы могут быть и будут успешно применены в дальнейших работах по теоретической математике вообще, и прежде всего по алгебраической геометрии и смежным с ней областям, включая теорию представлений, дифференциальную и симплектическую геометрию, алгебру, теорию чисел, а также математическую физику. Это особенно важно, поскольку алгебраическая геометрия занимает в современной теоретической математике одно из центральных мест.

В-четвертых, как и с любыми другими работами в области теоретической математики, результаты все же имеют теоретический и фундаментальный характер. Хотя они создают необходимый базис, без которого практическое применение математики невозможно, мы не ожидаем и не планируем непосредственного внедрения наших результатов в текущую технико-экономическую деятельность.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. A. Kuznetsov, E. Shinder. Derived categories of Fano threefolds and degenerations. Preprint [arXiv:2305.17213](#). To appear in Invent. Math.
2. A. Kuznetsov, Yu. Prokhorov. One-nodal Fano threefolds with Picard number one. Preprint [arXiv:2312.13782](#). To appear in Izvestiya RAN.
3. B. L. Feigin, A. V. Odesskii. Vector bundles on an elliptic curve and Sklyanin algebras. In *Topics in quantum groups and finite-type invariants*, 65–84, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1998.
4. A. Polishchuk. Poisson structures and birational morphisms associated with bundles on elliptic curves. IMRN 13 (1998), 683–703.
5. Z. Hua, A. Polishchuk. Elliptic bihamiltonian structures from relative shifted Poisson structures. J. Topology 16 (2023), 1389–1422.
6. T. Braden. Perverse sheaves on Grassmannians. *Can. J. Math.*, 54(3):493–532, 2002.
7. M. Kapranov and V. Schechtman. Perverse sheaves over real hyperplane arrangements. *Ann. Math. (2)*, 183(2):619–679, 2016.
8. D. Dupont. Perverse sheaves on smooth toric varieties. *C. R., Math., Acad. Sci. Paris*, 348(15-16):853–856, 2010.
9. A. Bondal and T. Logvinenko. Perverse schobers and orbifolds. Препринт.
10. A. Bondal and A. Bodzenta. Gluing projective objects. Препринт.
11. T. Braden and V. A. Lunts. Equivariant-constructible Koszul duality for dual toric varieties. *Adv. Math.* 201 (2006), no. 2, 408–453.
12. Valentina Kiritchenko, Mikhail Tsfasman, Serge Vladuts, Ilya Zakharevich. Quadratic residue patterns, algebraic curves and a K3 surface, *Finite Fields and Their Applications*, 101, Jan. 2025, 102517.
13. Valentina Kiritchenko. Simple geometric mitosis, Preprint [arXiv:2301.00225](#).
14. Valentina Kiritchenko and Ekaterina Presnova. Pipe dreams and semi-toric degenerations of Schubert varieties in type D. In preparation.
15. A. Beilinson, J. Bernstein, P. Deligne, *Faisceaux Pervers*, *Asterisque* 100, 1982.
16. C. Psariudakis. Homological theory of recollements of abelian categories. *J. Algebra* 398 (2014), 63–110.
17. А. И. Бондал, И. Ю. Ждановский, Теория гомотопов в применении к несмещенным базисам, гармоническому анализу на графах и превратным пучкам. *УМН*, 76:2(458) (2021), 3–70.
18. S. Guminov, I. Zhdanovskiy. On equivalence classes of homotopes of algebras and trilinear forms. Preprint [arXiv:2112.15436](#).
19. B. Jessen and A. Thorup. The algebra of polytopes in affine spaces. *Mathematica Scandinavica*, 43:2 (1978), 211–240.

20. K. Kusejko and L. Parapatits. A valuation-theoretic approach to translative-equidecomposability. *Advances in Mathematics*, 297 (2016), 174–195.
21. H. Hadwiger. *Vorlesungen über Inhalt, Oberfläche und Isoperimetrie*. Springer-Verlag, 2013.
22. C.-H. Sah. Scissors congruences of the interval. Preprint, 1981.
23. P. Arnoux. Échanges d’intervalles et flots sur les surfaces. *Ergodic theory (Sem., Les Plans-sur-Bex, 1980)*, pp. 5–38, 1981.
24. G. Chalmers and W. Siegel. The Selfdual sector of QCD amplitudes. *Phys. Rev. D* 54, 7628–7633, (1996). [arXiv:hep-th/9606061](https://arxiv.org/abs/hep-th/9606061).
25. A. Losev, I. Polyubin, and A. Rosly. Ultraviolet properties of the self-dual Yang-Mills theory. *J. High Energ. Phys.* (2018) 2018: 41. [arXiv:1711.10026](https://arxiv.org/abs/1711.10026).
26. A. Blokh, L. Oversteegen, V. Timorin, Upper bounds for the moduli of polynomial-like maps. *Nonlinearity* 37:3 (2024), 035003.
27. A. Blokh, L. Oversteegen, V. Timorin, Immediate renormalization of cubic complex polynomials with empty rational lamination. *Moscow Mathematical Journal* 23:4 (2023), 441–461.
28. Aldo Andreotti, *Théorèmes de dépendance algébrique sur les espaces complexes pseudo-concaves*, *Bull. Soc. Math. France* 91 (1963), 1–38.
29. Adrien Douady, *Le problème des modules pour les sous-espaces analytiques compacts d’un espace analytique donné*, *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* 16 (1966), no. 1, 1–95.
30. Maycol Falla Luza and Frank Loray, *Neighborhoods of rational curves without functions*, *Math. Ann.* 382 (2022), no. 3–4, 1047–1058.
31. Maycol Falla Luza, Frank Loray, and Paulo Sad, *Non-algebraizable neighborhoods of curves*, preprint [arXiv:2407.20206](https://arxiv.org/abs/2407.20206) [math.AG].
32. Serge Lvovski. *On fields of meromorphic functions on neighborhoods of rational curves*, preprint [arXiv:2408.14061](https://arxiv.org/abs/2408.14061) [math.CV].
33. М. Б. Мишустин. «Окрестности римановой сферы в комплексных поверхностях», *Функц. анализ и его прил.*, 27:3 (1993), 29–41.
34. С. Ю. Оревков, «Один пример в связи с гипотезой о якобиане», *Матем. заметки*, 47:1 (1990), 127–136.
35. В. И. Савельев, «Вложения нулевого типа сферы в комплексные поверхности», *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех.*, 1982, 28–32.
36. E. Amerik, M. Verbitsky, *Rational curves on hyperkähler manifolds*, *Int. Math. Res. Notices* 23 (2015), 13009–13045.
37. E. Amerik, M. Verbitsky, *MBM classes and contraction loci on low-dimensional hyperkähler manifolds of $K3^{[n]}$ type*, *Algebr. Geom.* 9 (2022), no. 3, 252–265.
38. S. Boucksom, *Le cône kählérien d’une variété hyperkählérienne*, *C.R. Acad. Sci. Paris Ser. I Math.* 333 (2001), 935–938.
39. A. Fujiki, *On the de Rham Cohomology Group of a Compact Kähler Symplectic Manifold*, *Adv. Stud. Pure Math.* 10 (1987), 105–165.

40. M. Gross, D. Joyce, D. Huybrechts, *Calabi–Yau Manifolds and Related Geometries*, Universitext. Springer-Verlag, Berlin, (2003).
41. D. Huybrechts, *The Kähler cone of a compact hyperkähler manifold*, Math. Ann. 326 (2003), 499–513.
42. R. Lazarsfeld, *Positivity in Algebraic Geometry I. Classical setting: line bundles and linear series*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge. A Series of Modern Surveys in Mathematics, 48, Springer-Verlag, Berlin (2004).
43. K. Matsuki, *Introduction to the Mori program*, Universitext, Springer-Verlag, New York (2002).
44. A. V. Vikulova, *An elementary description of nef cone for irreducible holomorphic symplectic manifolds*, J. Geom. Phys. 207 (2025), Paper No. 105349.
45. C. Ciliberto and V. Di Gennaro. Factoriality of certain hypersurfaces of $\mathbb{P}^4$ with ordinary double points. In *Algebraic Transformation Groups and Algebraic Varieties: Proceedings of the conference Interesting Algebraic Varieties Arising in Algebraic Transformation Group Theory held at the Erwin Schrödinger Institute, Vienna, October 22-26, 2001*, pages 1-7. Springer, 2004.
46. I. Cheltsov. Nonrational nodal quartic threefolds. *Pacific Journal of Mathematics*, 226(1):65-81, 2006.
47. A. Dimca. Betti numbers of hypersurfaces and defects of linear systems. *Duke Mathematical Journal*, 60(1):285-298, 1990.
48. H. Finkelberg and J. Werner. Small resolutions of nodal cubic threefolds. *Nederl. Akad. Wetensch. Indag. Math.*, 51(2):185-198, 1989.
49. R. Kloosterman. Maximal families of nodal varieties with defect. *Mathematische Zeitschrift*, 300(2):1141-1156, 2022.
50. K. A. Shramov. $\mathbb{Q}$ -factorial quartic threefolds. *Sbornik: Mathematics*, 198(8):1165-1174, 2007.
51. R. Stanley. Hilbert functions of graded algebras. *Advances in Mathematics*, 28(1):57-83, 1978.
52. Y. Chen, C. Shramov. *Automorphisms of surfaces over fields of positive characteristic*. Geometry & Topology 28 (2024), no. 6, 2747–2791.
53. H. Abban, Z. Zhuang, *Stability of Fano varieties via admissible flags*. preprint, arXiv:2003.13788, 2020.
54. C. Araujo, A.-M. Castravet, I. Cheltsov, K. Fujita, A.-S. Kaloghiros, J. Martinez-Garcia, C. Shramov, H. Süß, N. Viswanathan. *The Calabi problem for Fano threefolds*. MPIM preprint, 2021.
55. A. Avilov, K. Loginov, V. Przyjalkowski *Coregularity of smooth Fano threefolds..* Communications in Number theory and Physics, 18:3, 2024.
56. G. Belousov, K. Loginov. *K-stability of Fano threefolds of rank 3 and degree 14*. Annali dell’Università di Ferrara, 70, 1093–1114, 2024.
57. T. de Fernex, J. Kollár, and C. Xu, *The dual complex of singularities*. Higher

dimensional algebraic geometry, in honour of Professor Yujiro Kawamata's sixtieth birthday, *Adv. Stud. Pure Math.*, vol. 74, Math. Soc. Japan, Tokyo, 103–129 (2017).

58. J. Kollár and C. Xu, *The dual complex of Calabi-Yau pairs*. *Invent. Math.*, vol. 205, no. 3, 527–557 (2016).

59. J. Kollár, Z. Zhuang. *Essential dimension of isogenies*, arXiv:2402.15362, 2024.

60. K. Loginov. *Finite abelian groups acting on rationally connected threefolds I: Groups of product type*. arXiv:2408.11645, 2024.

61. J. Moraga. *Coregularity of Fano varieties*. arXiv:2206.10834, 2022.

62. V. V. Shokurov. *Complements on surfaces*. *Journal of Mathematical Sciences*, Vol. 102, No.2 (2000).

63. C. Xu *K-stability of Fano varieties: an algebro-geometric approach*. EMS Surveys in Mathematica Sciences, vol. 8 1/2, 265–354 (2021).

64. I. Dolgachev, V. Iskovskikh. Finite subgroups of the plane Cremona group. In *Algebra, arithmetic, and geometry: in honor of Yu. I. Manin*, vol. I. Mathematical Programming, 269 (2009), 443–548.

65. V. Popov. On the Makar-Limanov, Derksen invariants, and finite automorphism groups of algebraic varieties. In *Affine algebraic geometry. CRM Proceedings and Lecture Notes*, 54 (2011), 289–311.

66. A. Zaitsev. Automorphisms of two-dimensional quadrics, arXiv:2401.15655

67. A. Zaitsev. Jordan constants of Cremona group of rank 2 over fields of characteristic zero, arXiv:2402.02177.

68. János Kollár and Shigefumi Mori. Classification of three-dimensional flips. *J. Amer. Math. Soc.*, 5(3):533–703, 1992.

69. Shigefumi Mori. On 3-dimensional terminal singularities. *Nagoya Math. J.*, 98:43–66, 1985.

70. Shigefumi Mori. Flip theorem and the existence of minimal models for 3-folds. *J. Amer. Math. Soc.*, 1(1):117–253, 1988.

71. Shigefumi Mori and Yuri Prokhorov. On $\mathbb{Q}$ -conic bundles. *Publ. Res. Inst. Math. Sci.*, 44(2):315–369, 2008.

72. Shigefumi Mori and Yuri Prokhorov. On $\mathbb{Q}$ -conic bundles. II. *Publ. Res. Inst. Math. Sci.*, 44(3):955–971, 2008.

73. S. Mori and Yu. Prokhorov. On $\mathbb{Q}$ -conic bundles, III. *Publ. Res. Inst. Math. Sci.*, 45(3):787–810, 2009.

74. S. Mori and Yu. Prokhorov. Threefold extremal contractions of type IA. *Kyoto J. Math.*, 51(2):393–438, 2011.

75. S. Mori and Yu. Prokhorov. Threefold extremal contractions of types (IC) and (IIB). *Proc. Edinburgh Math. Soc.*, 57(1):231–252, 2014.

76. S. Mori and Yu. Prokhorov. Threefold extremal curve germs with one non-Gorenstein point. *Izv. Math.*, 83(3):565–612, 2019.

77. Sh. Mori and Yu. G. Prokhorov. General elephants for threefold extremal contractions with one-dimensional fibres: exceptional case. *Mat. Sb.*, 212(3):88–111, 2021.
78. Sh. Mori and Yu. G. Prokhorov. Toward the classification of threefold extremal contractions with one-dimensional fibers. *Arxiv e-print*, 2024, 2410.03165
79. Miles Reid. Young person’s guide to canonical singularities. In *Algebraic geometry, Bowdoin, 1985 (Brunswick, Maine, 1985)*, volume 46 of *Proc. Sympos. Pure Math.*, pages 345–414. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1987.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Ниже приведен список публикаций лаборатории, а также список препринтов, подготовленных к печати.

Публикации лаборатории

- 1) Kuznetsov A., Shinder E. Categorical absorptions of singularities and degenerations // *Épjournal de Géométrie Algébrique*. – 2024. – Article 12.
- 2) Chen Y., Shramov C. Automorphisms of surfaces over fields of positive characteristic // *Geometry & Topology*. – 2024. – Vol. 28. – Iss. 6. – P. 2747-2791.
- 3) Kaledin D. Taming large categories // *Sao Paulo Journal of Mathematical Sciences*. – 2024. – P. 1-28.
- 4) Polishchuk A. De Rham cohomology for supervarieties // *European Journal of Mathematics*. – 2024. – Vol. 10. – Article 24.
- 5) Varolgunes U., Polishchuk A. On homological mirror symmetry for chain type polynomials // *Mathematische Annalen*. – 2024. – Vol. 388. – No. 3. – P. 2331-2386.
- 6) Polishchuk A., Vaintrob D. A bound on the Hodge filtration of the de Rham cohomology of supervarieties // *Journal of Geometry and Physics*. – 2024. – Vol. 196. – Article 105065.
- 7) Markarian N., Polishchuk A. Compatible Poisson brackets associated with elliptic curves in $G(2, 5)$ // *Symmetry, Integrability and Geometry: Methods and Applications*. – 2024. – Vol. 20. – Article 037.
- 8) Bruzzo U., Ruiperez D. H., Polishchuk A. Notes on fundamental algebraic supergeometry. Hilbert and Picard superschemes // *Advances in Mathematics*. – 2023. – Vol. 415. – Article. 108890.
- 9) Lekili Y., Polishchuk A. Homological mirror symmetry for the symmetric squares of punctured spheres // *Advances in Mathematics*. – 2023. – Vol. 418. – Article 108942.
- 10) Belousov G., Loginov K. K-stability of Fano threefolds of rank 3 and degree 14 // *Annali dell'Università di Ferrara. Sezione VII - Scienze matematiche*. – 2024. – Vol. 70. – P. 1093-1114.
- 11) Lvovski S. On Algebraic and Non-Algebraic Neighborhoods of Rational Curves // *Moscow Mathematical Journal*. – 2024. – Vol. 24. – Iss. 3. – P. 391-405.
- 12) Lvovski S. On threefolds with the smallest nontrivial monodromy group // *Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze*. – 2024. – Vol. 24. – No. 2. – P. 941-963.
- 13) Kiritchenko V., Tsfasman M., Vladut S., Zakharevich I. Quadratic residue patterns, algebraic curves and a K3 surface // *Finite Fields and Their Applications*. – 2025. – Vol. 101. – Article 102517.
- 14) Brandenbursky M., Verbitsky M. Non-commutative Barge-Ghys Quasimorphisms // *International Mathematics Research Notices*. – 2024. – Vol. 2024. – Iss. 15. – P. 11135-11158.
- 15) Ornea L., Verbitsky M. Lee classes on LCK manifolds with potential // *Tohoku Mathematical Journal*. – 2024. – Vol. 76. – No. 1. – P. 105-125.
- 16) Ornea L., Verbitsky M., Vuletescu V. Do products of compact complex manifolds admit

LCK metrics? //Bulletin of the London Mathematical Society. – 2024. – Vol. 56. – No. 2. – P. 756-766.

17) Ornea L., Verbitsky M. Algebraic cones of LCK manifolds with potential //Journal of Geometry and Physics. – 2024. – Vol. 198. – 105103.

18) Ornea L., Verbitsky M. Bimeromorphic geometry of LCK manifolds //Proceedings of the American Mathematical Society. – 2024. – Vol. 152. – No. 02. – P. 701-707.

19) Папаянов Г. С. Суперсвязности и теорема Грауэрта о прямом образе //Математические заметки. – 2024. – Т. 115. – Н. 5. – С. 797-799.

20) Amerik E., Verbitsky M. Normal form of bimeromorphically contractible holomorphic Lagrangian submanifolds //Sao Paulo Journal of Mathematical Sciences. – 2024. – P. 1-18.

21) Felder G., Kazhdan D., Polishchuk A. The moduli space of stable supercurves and its canonical line bundle // American Journal of Mathematics. – 2023. – Vol. 146. – No. 6. – P. 1777-1886.

22) Васильев Д. А., Тихомиров А. С. Модули полустабильных пучков ранга 2 на рациональных трехмерных многообразиях Фано основной серии //Математический сборник. – 2024. – Т. 215. – Н. 10. – С. 3-57.

23) Львовский С. М. Основы математического анализа [Текст] : учебник для вузов / С. М. Львовский ; Национальный исследовательский университет “Высшая школа экономики”. – 2-е изд., пересмотр. – М. : Изд. дом Высшей школы экономики, 2024. – (Учебники Высшей школы экономики). – 367, [1] с. – 600 экз. – ISBN 978-5-7598-2993-5 (в пер.). – ISBN 978-5-7598-4055-8 (e-book).

24) Avilov A., Loginov K., Przyjalkowski V. Coregularity of smooth Fano threefolds//Communications in Number Theory and Physics. – 2024. – Vol. 18. – No. 3. – P. 509-577.

25) Горгинян Ю. А. Плоские гиперкомплексные нильмногообразия H-разрешимы //Функциональный анализ и его приложения. – 2024. – Т. 58. – Н. 3. – С. 17-30.

26) Blokh A., Oversteegen L., Timorin V. Upper bounds for the moduli of polynomial-like maps //Nonlinearity. – 2024. – V. 37. – No. 3. – Article 035003.

Препринты лаборатории

1) Loginov K., Zhang Z. Birational invariants of volume preserving maps //arXiv preprint arXiv:2410.05036. – 2024.

2) Loginov K. Finite abelian groups acting on rationally connected threefolds I: Groups of product type //arXiv preprint arXiv:2408.11645. – 2024.

3) Zaitsev A. Jordan constants of Cremona group of rank 2 over fields of characteristic zero //arXiv preprint arXiv:2402.02177. – 2024.

4) Zaitsev A. Automorphisms of two-dimensional quadrics //arXiv preprint arXiv:2401.15655. – 2024.

5) Loginov K., Moraga J., Vasilkov A. Toric models of smooth Fano threefolds //arXiv preprint arXiv:2407.09420. – 2024.

- 6) Prokhorov Y. Icosahedron in birational geometry //arXiv preprint arXiv:2411.15334. – 2024.
- 7) Prokhorov Y. On the birational geometry of $\mathbb{Q}$ -Fano threefolds of large Fano index, I //arXiv preprint arXiv:2403.18389. – 2024.
- 8) Bayer A., Kuznetsov A., Macri E. Mukai bundles on Fano threefolds //arXiv preprint arXiv:2402.07154. – 2024.
- 9) Vikulova A. V. The most symmetric smooth cubic surface //arXiv preprint arXiv:2407.09997. – 2024.
- 10) Amerik E., Soldatenkov A., Verbitsky M. Apollonian carpets and the boundary of the Kahler cone of a hyperkahler manifold //arXiv preprint arXiv:2402.11697. – 2024.
- 11) Amerik E., Dolce P., Tropeano F. Finite translation orbits on double families of abelian varieties (with an appendix by E. Amerik) //arXiv e-prints. – 2024. – C. arXiv: 2401.07015.
- 12) Lvovski S. On fields of meromorphic functions on neighborhoods of rational curves //arXiv preprint arXiv:2408.14061. – 2024.
- 13) Kaledin D. Enhancement for categories and homotopical algebra //arXiv preprint arXiv:2409.17489. – 2024.
- 14) Lyskov D. A generalization of operads based on subgraph contractions //International Mathematics Research Notices. – 2024. – rnae096.
- 15) Gorginyan Y. The twistor space of a compact hypercomplex manifold is never Moishezon //arXiv preprint arXiv:2410.24085. – 2024.
- 16) Lyskov D. Hilbert series for contractads and modular compactifications // arXiv preprint arXiv:2406.0590 . – 2024.